NÚCLEO UNIVERSITARIO "RAFAEL RANGEL"
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
T R U J I L L O - V E N E Z U E L A
ÁREA DE FÍSICA – LABORATORIO DE FÍSICA

LABORATORIO DE FÍSICA I/11

PRÁCTICA No. 2
ANÁLISIS GRÁFICO.

OBJETIVO

Las gráficas se utilizan para estudiar y comprender el mecanismo de un fenómeno observado, a la vez por medio del análisis de ellas se puede obtener información sobre observaciones experimentales.
La finalidad de esta práctica es estudiar el empleo de las gráficas para la obtención de las relaciones funcionales entre dos magnitudes físicas.

TABULACIÓN

La física por ser unas de las ramas de las ciencias naturales es experimental y cuantitativa, es decir, en el trabajo del laboratorio se tendrá la necesidad de medir magnitudes físicas disponiendo así de datos experimentales. Es una norma elemental que dichos datos, deben ser presentados en forma clara y ordenada, y la mejor forma de lograr esto es ubicar los datos en tablas, de modo que en ellas se destinen diferentes columnas a cada conjunto de datos.
La realización de tablas de valores no se limita necesariamente a los datos que se recogen directamente en el trabajo experimental, sino que puede extenderse a los resultados de efectuar operaciones con dichos datos. Además, pueden disponerse de columnas para colocar en ellas el error siempre que éste sea diferente en cada medición.
Para mayor información, las tablas de datos deben poseer un título y deben aparecer las magnitudes con sus unidades de medida. Como ejemplo se presenta la siguiente tabla de valores de un experimento en el cual se midió la extensión de un alambre de cobre como función de una masa m suspendida de él.

Tabla 1. Extensión de un alambre de cobre.

Masa, m (kg)	*Extensión, e (mm)*
5,0	0,2
10,0	0,5

15,0	0,8
20,0	1,0
22,5	1,5
25,0	1,3
27,5	1,4
30,0	1,5
32,5	1,7
35,0	1,8
37,5	1,9
40,0	2,0
42,5	2,3
45,0	2,5
47,5	2,8
50,0	3,2

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Una vez tabulados los datos así como los valores de las magnitudes calculadas, es conveniente representar los resultados en un gráfico. La representación gráfica viene a ser lo más representativo del fenómeno que se está estudiando y en su interpretación se reflejará el comportamiento límite del fenómeno bajo las condiciones en que se realizó y además algunas informaciones matemáticas como por ejemplo la función matemática que mejor lo represente. Además, la representación gráfica permite obtener valores que aún no han sido obtenidos experimentalmente, es decir, valores entre puntos. Dicho proceso se llama interpolación. El proceso para obtener valores fuera del intervalo experimental recibe el nombre de extrapolación.

REGLAS PARA GRAFICAR

- Los ejes deben llevar claramente las magnitudes que en ellos se representan y las unidades correspondientes.
- Elegir las unidades en los ejes coordenados de modo que permitan leer e interpretar con facilidad.
- Es conveniente en general, que el origen aparezca en el gráfico. No obstante, las escalas pueden reemplazarse cuando los datos experimentales están en un intervalo que así lo requiere.
- Debe usarse el eje de la abscisa para la variable independiente (aquella que es controlada por el experimentador) y el eje de la ordenada para la variable dependiente. Por ejemplo, si medimos la longitud de una barra metálica al variar la temperatura, se busca a la función $l = f(T)$, entonces es conveniente usar el eje x para T y el eje y para l.
- Los valores experimentales no deben ser graficados como un punto sino que hay que representar "el error con el cual se obtuvo dicho valor". Para ello se usan cruces, cuadrados, círculos, rectángulos, etc., centrados en el valor.

- La recta o curva que representa la función que siguen los puntos, debe tratarse de modo que sea lo más representativo posible del fenómeno.

ERRORES EN LOS GRÁFICOS

En cualquier experimento científico cuantitativo es esencial indicar los posibles errores, en cualquier cantidad medida. Una vez que un error ha sido estimado debe representarse en el gráfico. Por ejemplo, si las extensiones medidas en el alambre (tabla 1) son aproximadas por ± 0,05 *mm*, entonces las primeras dos medidas pueden representarse gráficamente por barras como se muestra en la figura 1. Las barras de errores se extienden por encima y por debajo de los puntos medidos los cuales son indicados por puntos encerrados en círculos. Supóngase además que las masas fueron medidas con un error de ± 0,5 *kg*. Esta incertidumbre puede representarse por barras horizontales que se extienden 0,5 *kg* en ambos lados de las masas representadas (ver figura 1). Generalmente, ambos errores, horizontal y vertical, deben ser mostrados pero pueden ser omitidos si el error asociado a la medida es muy pequeño para representarse.

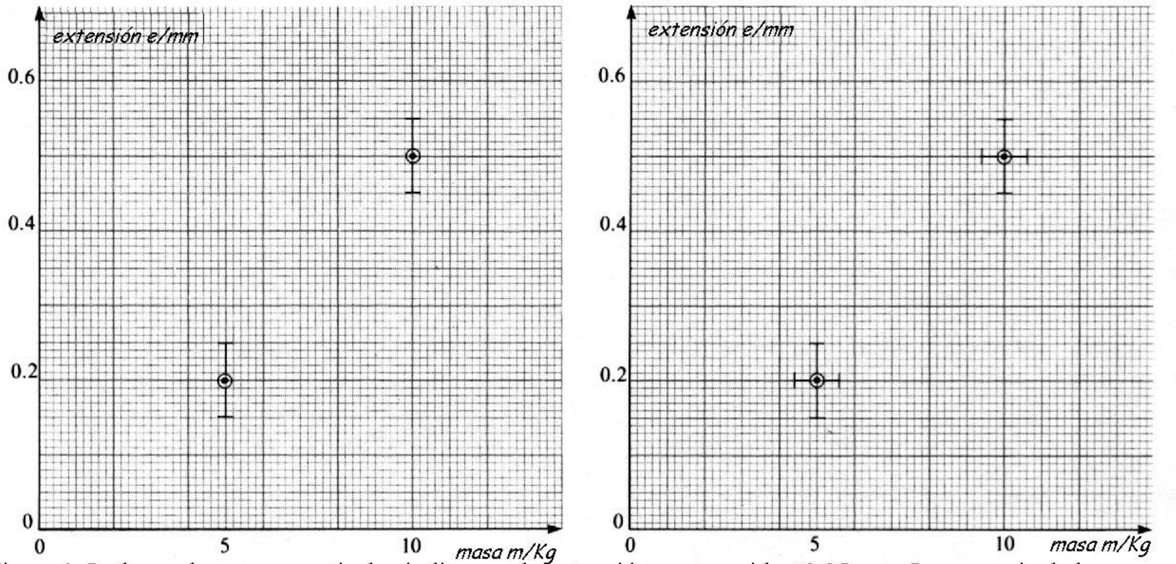

Figura 1. La barra de errores verticales indica que la extensión es conocida ±0,05 mm. La ausencia de barras horizontales indica que la masa es conocida muy aproximadamente en la primera figura. Las barra horizontales en la segunda indica un error de ± 0,5 Kg.

Representar barras de errores es ligeramente más complicado sino se está graficando cantidades x medidas directamente, sino graficando x^2, x^3, $sen\ x$, etc. Se mostrará el procedimiento tomando como ejemplo un experimento en el cual se mide la velocidad v de una bola cayendo y que es medida a varias distancias s. Los resultados se tabulan en las dos primeras columnas de la tabla 2 y se asumirá que el error posible en las velocidades es ± 0,5 *m/s* y el error posible en las distancias es ± 0,2 *m*.

Tabla 2. Datos de una bola cayendo.

A distancia $s(m)$	B Velocidad $v(m/s)$	C v^2 $(m/s)^2$	D $s+\Delta s$ (m)	E $s-\Delta s$ (m)	F $(v+\Delta v)^2$ $(m/s)^2$	G $(v-\Delta v)^2$ $(m/s)^2$
1,0	4,4	19,3	1,2	0,8	24,0	15,2
2,0	6,0	36,0	2,2	1,8	42,3	30,3
3,0	7,9	62,4	3,2	2,8	70,6	54,8
4,0	8,7	75,7	4,2	3,8	84,6	67,2
5,0	9,7	94,1	5,2	4,8	104,0	84,6
6,0	11,1	123,2	6,2	5,8	134,6	112,4

Supóngase que se ha descubierto que v^2 es proporcional a s. Usando los datos de las columnas A y C se obtiene el gráfico mostrado en la figura 2. Para los errores den la distancia s, se usan las columnas D y E. Para producir las barras de error en v^2 se usan las columnas F y G. Lo importante es que si se estima que hay un posible error de $\pm\ \Delta v$ en el valor de v, éste se encuentra entre $v-\Delta v$ y $v+\Delta v$. Por lo tanto v^2 debe ubicarse entre $(v-\Delta v)^2$ y $(v+\Delta v)^2$. Note que aún cuando el error en v sea pequeño, los errores en v^2 se hacen más grande a medida que v se hace más grande.

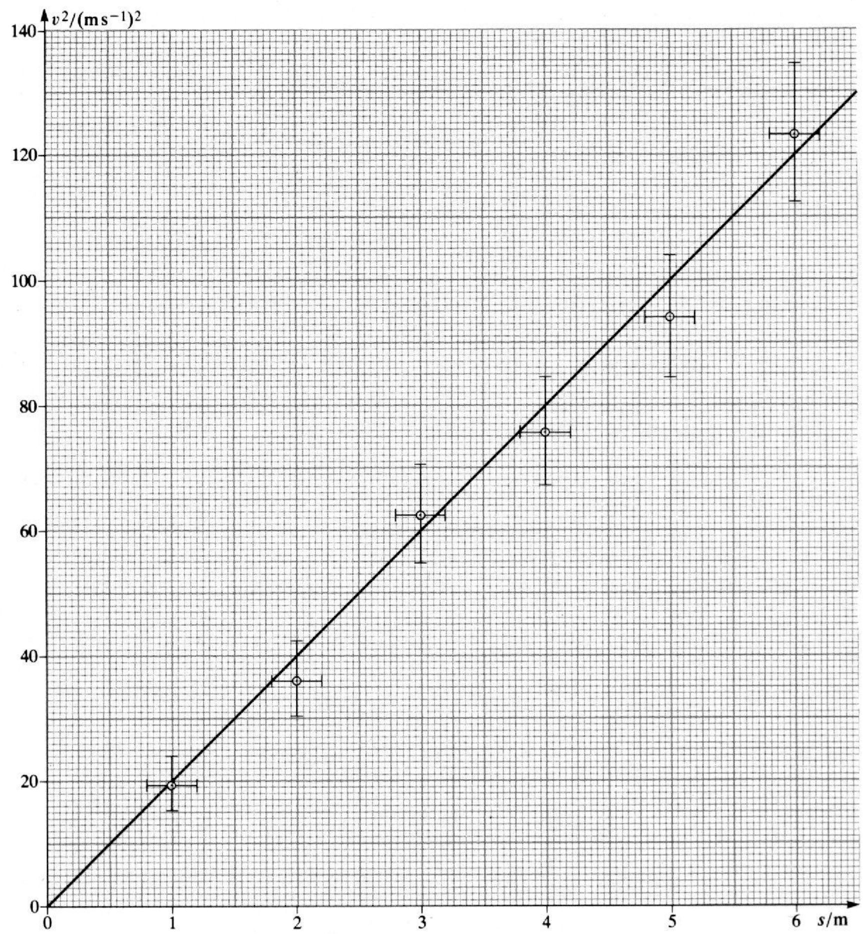

Figura 2. Gráfico que muestra la barra de rrores para v al cuadrado y s.

ANÁLISIS GRÁFICO

En el análisis de un problema físico se puede partir de la teoría que predice una cierta ley física la cual se expresa con una ecuación cuya forma matemática nos guiará al analizar la forma del gráfico. Es decir, graficando los valores experimentales se tendrá una curva uniforme que muestra la tendencia de los puntos. Enseguida se compara la forma de la curva obtenida, con aquello predicho teóricamente. Si concuerdan, ello corresponde a una comprobación experimental de la ley física considerada. La función matemática más simple es la línea recta y es por ello que tiene gran importancia en el análisis de datos experimentales. Por lo tanto es útil linealizar la curva cuando ésta no sea una recta.

IMPORTANCIA DE LA LÍNEA RECTA

- De una curva es muy difícil deducir cuál es la ecuación que podría representar mejor los resultados.
- Es fácil extrapolar más allá de un rango de valores medidos. Sólo se necesita una regla.
- Determinando la pendiente y la intersección con el eje y, se puede deducir valores numéricos de constantes que obteniéndolos de curvas, resulta muy difícil.

A continuación se darán ejemplos de gráficos que en determinadas escalas permiten obtener relaciones lineales.

FUNCIÓN LINEAL

La ecuación de una recta está definida por: $y = ax + b$

Tal es el caso del lanzamiento vertical hacia abajo, cuya ley de movimiento está dada por:

$$v = gt + v_0$$

Si se realiza tal experiencia y se toman valores de $v = f(t)$ se observará que al graficar la tabla de valores de v y t, obtendremos una recta (ver figura 3). Dicha recta nos permitirá determinar la aceleración de gravedad g a través del cálculo de su pendiente. Además se podrá determinar v_0 haciendo una extrapolación de la recta obtenida hasta cortar el eje vertical.
Por lo tanto para graficar una función tal como la indicada, se utilizará papel milimetrado (papel de uso más común cuyos ejes son ambos lineales, es decir, las divisiones están igualmente espaciadas).

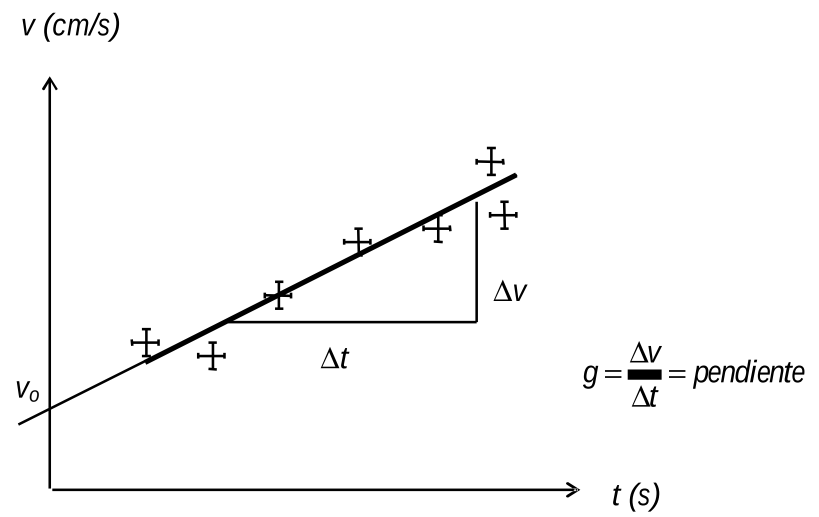

Figura 3

FUNCIÓN POTENCIAL

La ecuación de una función potencial está definida por:

$y = cx^n$, donde c y n son constantes.

Al representar los valores de las variables, dependiente e independiente en una gráfica sobre el papel milimetrado, debe resultar la curva característica de la función potencial de la forma como se indica en la figura 4. Si tomamos logarítmo de ambos lados se obtiene:

$$\log y = n \log x + \log c \qquad (1)$$

Si hacemos el cambio de variables:

$$v = \log y$$
$$u = \log x$$
$$k = \log c\,,$$

tenemos que la ecuación (1) se puede escribir como:

$$v = n\,u + k\,, \qquad (2)$$

que es la ecuación de una recta cuya pendiente viene dada por:

$$n = \frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$

Por lo tanto para graficar una función tal como la ecuación (2), se utilizará papel logarítmico (papel cuyos ejes son ambos logarítmicos con un número de ciclos variables en cada eje) graficando v en función de u y se obtendrá una recta (ver figura 5).

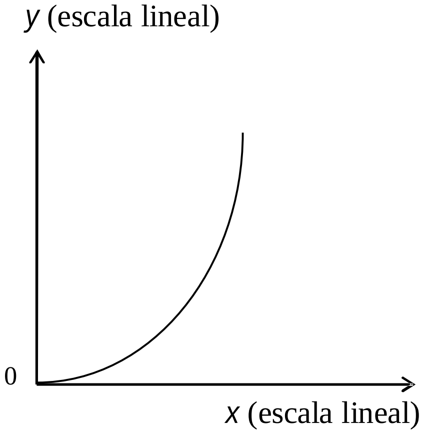

Figura 4

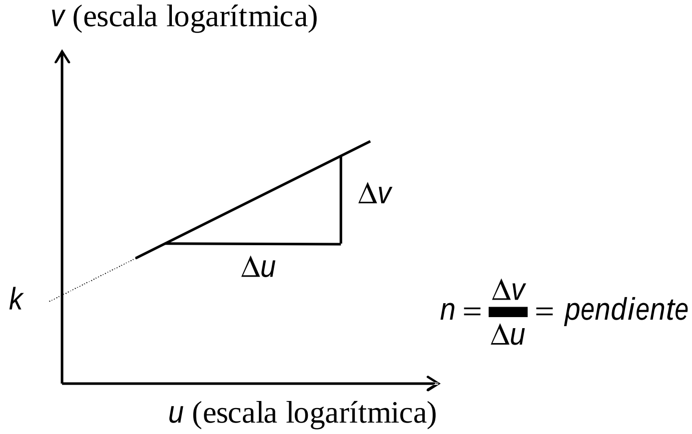

Figura 5

FUNCIÓN EXPONENCIAL

La ecuación de una función exponencial está definida por:

$$y = k\,a^{b\,x}\ , \qquad \text{donde } k, a \text{ y } b \text{ son constantes.}$$

Al representar los valores de las variables, dependiente e independiente en el papel milimetrado, debe resultar la curva característica de la función exponencial tal como se indica en la figura 6.
Si tomamos logarítmo de ambos lados se obtiene:

$$\log y = bx\,(\log a) + \log k$$

Si a vale 10, debe aplicarse logaritmo en base diez. Si a tiene un valor cualquiera, debe aplicarse logaritmo en base a ese mismo valor. Por ejemplo, si $a = 2$, se aplica logaritmo en base 2. valor. Se tiene entonces:

$$\log y = bx + \log k \qquad (3)$$

Si se hace el cambio de variable:

$$u = \log y$$
$$v = \log k\ ,$$

se tiene que la ecuación (3) resulta:

$$u = bx + v$$

que es la ecuación de una recta cuya pendiente viene dada por:

$$b = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log u_2 - \log u_1}{x_2 - x_1}$$

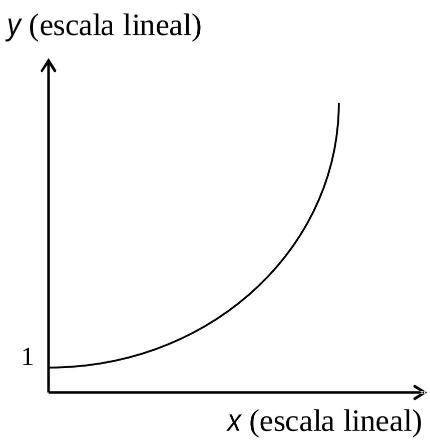

Figura 6

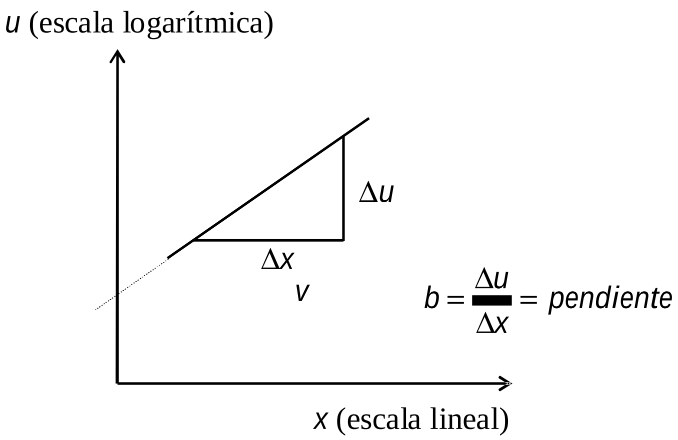

Figura 7

TRAZADO DE UNA RECTA QUE PASE ENTRE VARIOS PUNTOS

Cuando se grafican puntos experimentales y por ejemplo se obtiene una línea recta como gráfico, ésta usualmente no pasará por todos los puntos graficados. Los métodos estadísticos demuestran que, siempre que la dispersión de los puntos experimentales se deba a los errores casuales de medición, la mejor recta pasará por el centroide de los puntos experimentales que es el punto con las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, en donde $\bar{x}$ es el valor medio de las coordenadas *x* de todos los puntos, y $\bar{y}$ el promedio de las coordenadas *y*. Así que es posible dibujar otras rectas alternativas. La pendiente y la intersección pueden ser obtenidos de la mejor recta que se pueda dibujar, o sea, la recta que mejor se ajuste: con igual peso en lo posible, esto es, igual número de puntos por encima y por debajo de la recta. El centroide se calcula entonces como:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}$$

La ecuación de la recta será:

$$y = ax + b$$

El error para la pendiente a y el corte con y, b, viene dado por la lectura de la posición de los puntos sobre la gráfica.

Criterio de máxima y mínima pendiente

Una vez definido el centroide, la recta de máxima pendiente se construye como la recta que pasa por el centroide y por la mayoría de los puntos situados en la parte superior derecha del centroide y en la parte inferior izquierda de éste. La recta de pendiente mínima debe pasar por el centroide y por la mayoría de puntos situados en la parte inferior derecha del centroide y en la parte superior izquierda de él. La ecuación de la recta óptima es la recta equidistante a ambas rectas y que pasa por el centroide (ver figura 8). Así la recta óptima será:

$$y = a_{opt}x + b_{opt}$$

donde a_{opt} y b_{opt} son la pendiente óptima y el punto de corte óptimo con el eje y.

La pendiente óptima y el corte con el eje y de la recta óptima vienen dados por:

$$a_{opt} = \frac{a_{max} + a_{min}}{2} \qquad \mathrm{b}_{\mathrm{opt}} = \frac{b_{max} + b_{min}}{2}$$

Generalmente el trazado de una recta a partir de ciertos valores obtenidos en un experimento, tiene como finalidad calcular la pendiente de esa recta o su corte con uno de los ejes, para de allí determinar alguna magnitud física. Así por ejemplo, en una experiencia del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, del gráfico de la velocidad del móvil v en función del tiempo recorrido t se puede obtener la aceleración del móvil calculando la pendiente a y la velocidad inicial v_o a partir del corte con y por extrapolación a través de las ecuaciones:

$$v = v_o + at$$

$$v = b + ax$$

Dichos cálculos implica obtener un valor de la pendiente a y el corte b en un intervalo de error:

$$a \pm \Delta a \; ; \; b \pm \Delta b$$

Para calcular los valores de Δa y Δb se tiene entonces:

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2} \qquad \Delta \mathrm{b} = \frac{\mathrm{b}_{\mathrm{max}} - b_{min}}{2}$$

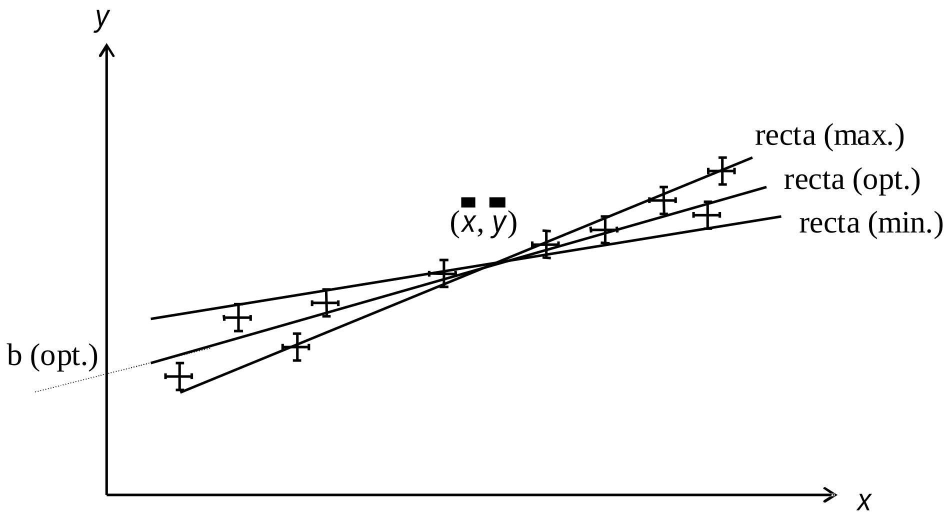

Figura 8

Método de los mínimos cuadrados

Uno de los métodos estadísticos más usados para determinar la mejor recta que pasa entre varios puntos experimentales es el método de los mínimos cuadrados. Para este método no es necesario graficar los puntos experimentales como en el método anterior.

Si la dispersión de los puntos experimentales es debida sólo a los errores casuales en las medidas, la recta óptima será aquella para la cual la suma de los cuadrados de las distancias $\Delta y_i = y_i - y_o$ sea un mínimo (ver figura 9). Por lo tanto, la desviación de un valor cualquiera y_i determinado experimentalmente con respecto a su valor y_o en la recta que se desea obtener, será:

$$\Delta y_i = y_i - y_o = y_i - (b + ax_i)$$

Según el enunciado de este método, entonces la suma mínima para las desviaciones se obtiene cuando:

$$\Sigma(\Delta y_i)^2 = \Sigma\,[\,y_i - (b + ax_i)]^2 = \text{mínimo}$$

Ya que la condición exigida es minimizar la suma anterior, entonces los parámetros a y b deben ajustarse para cumplir con esta condición. Esto se logra calculando las derivadas parciales de la suma con respecto a a y con respecto a b e igualándolas a cero.

$$\frac{\partial\Sigma(\Delta y_i)^2}{\partial a} = 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = 0 \qquad \frac{\partial\Sigma(\Delta y_i)^2}{\partial b} = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2nb = 0$$

La resolución de estas dos ecuaciones con respecto a a y a b, permite obtener:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \qquad \mathrm{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} ,$$

con las cuales se pueden calcular los parámetros a y b determinando así la ecuación de la mejor recta que se puede trazar entre los puntos experimentales y donde n es el número de pares de valores de y y x.

Para usar este método de los mínimos cuadrados se recomienda usar la tabla 4 para así ordenar la información y facilitar los cálculos.

Tabla 4. Ejemplo para construir los datos por el método de los mínimos cuadrados.

y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
$\Sigma =$	$\Sigma =$	$\Sigma =$	$\Sigma =$

Actualmente debido al uso de calculadoras y computadoras es casi de rutina poseer un programa que permita hacer los cálculos necesarios para el ajuste de la recta. Hay que hacer notar que el uso de este método no implica hacer el gráfico de la recta, pero por razones pedagógicas es conveniente hacerlo para así observar más claramente las desviaciones de los puntos experimentales con respecto a la recta calculada. Una vez obtenido los valores de a y b, es necesario calcular sus errores correspondientes Δa y Δb.
Para calcular estos valores por este método, se usan las siguientes expresiones:

$$\Delta a = \sqrt{\frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}}\, S_y \qquad \Delta b = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}}\, S_y$$

donde

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - b - ax_i)^2}{n}}$$

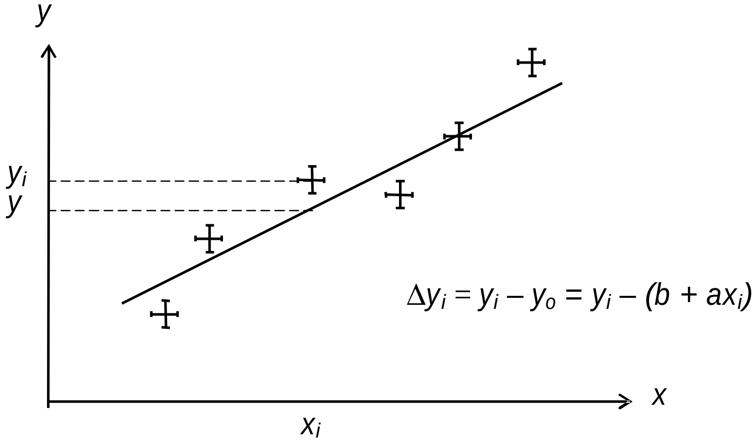

Figura 9

PARTE PRÁCTICA

Experiencia nro. 1

Para un objeto con movimiento uniformemente acelerado se hicieron las siguientes mediciones.

Tabla 2. Velocidad de un objeto con movimiento uniformemente acelerado.

$t\ (s)$	1	2	3	4	5
$v\ (m/s)$	8	11	14	17	20

Siga los siguientes pasos:

a. Grafique en el papel milimetrado.

b. Compare la gráfica, con las estudiadas anteriormente.
¿Con cuál tiene mayor semejanza?____

Se puede sospechar que la función es: ____

c. Si la función es ________________, la ecuación que la regirá es ________________________

d. Como la recta no pasa por el origen de las ordenadas, esto indica que: ____________________

e. Encuentre la pendiente de la recta:

f. Halle la ley que rige el movimiento :

Experiencia nro. 2

Al soltar un objeto en caída libre, se hicieron las mediciones que se indican en la tabla 2. Halle la ley que rige el movimiento.

Tabla 2. Distancia en función del tiempo para un objeto que cae libremente.

t (s)	1	1.5	2	2.5
d (m)	4.9	11	19.6	30.6

Siga los siguientes pasos:

a. Grafique en el papel milimetrado.

b. Compare la curva obtenida con las estudiadas anteriormente.
¿Con cuál tiene mayor similitud? ____

c. Si la función es ________________, la ecuación que la regirá es ____________________

d. Según el tipo de función, ¿puede obtener una línea recta? ¿Cómo lo hace?
____
____

e. Encuentre la pendiente de la recta

f. Sustituya los valores encontrados en la ecuación correspondiente y encuentre la ley que rige el movimiento.

Experiencia nro. 3

Se tiene con una cierta cantidad del elemento químico polonio. Después de 138 días permanecerá solamente la mitad de la misma. Con esta información obtenga la ley que rige el fenómeno. ¿Qué cantidad de polonio quedará después de un año? Proceda a obtener los datos para graficar la tabla 3.

Tabla 3. Porcentaje de Polonio en función del tiempo.

t (días)	0	138	276	414
p (%)	100	50	25	12.5

a. Grafique en papel milimetrado el porcentaje p en función del tiempo t.

Analizando la curva trate de contestar las siguientes preguntas:

b. La relación funcional entre las variables es:
- Lineal ________________________, ¿por qué?
- Potencial ______________________ ¿por qué?
- Exponencial ____________________, ¿por qué?

c. Compare la gráfica obtenida, con las estudiadas anteriormente. ¿Con cuál de ellas tiene mayor semejanza?
Se puede sospechar que la relación funcional es _______________. La ecuación que la rige es ________________

d. Según el tipo de función, ¿puede obtener una línea recta? ¿Cómo lo hace? ____________
____

e. Encuentre la pendiente de la recta

f.- Sustituya los valores encontrados en la ecuación correspondiente y encuentre la ley que rige el fenómeno.

EJERCICIOS

En el papel milimetrado encuentre las gráficas de las ecuaciones:

1. $y = 3x^2$
2. $y = 5 + 2x^2$
3. $y = 2^x$
4. $y = (1/2)^x$

Haga un estudio completo de cada una de ellas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Robert Resnick y David Halliday. Física. Parte 1 y 2. CIA. Editorial Continental, S.A. México D.F. Primera edición, cuarta impresión de 1982.

2. Mike Pentz y Milo Shott. Handling Experimental Data. Open University Press. Primera edición, segunda impresión de 1989.

3. D.C. Baird. An Introduction to Measument Theory and Experiment Design. Prentice-Hall, Inc. New Jersey. Primera impresión de 1962.

4. Yardley Beers. Theory of Error. Addison-Wesley Publishing Company Inc. Segunda edición, tercera impresión de 1962.

5. Arthur J. Lyon. Dealing with Data. Pergamon Press. Primera edición de 1970.

6. González Zaida y Miliani Lilian. Laboratorio I de Física: TEORÍA.Editorial El Viaje del Pez, Venezuela. Primera edición, primera ipresión, 1999.

7. Enciclopedia Microsoft Encarta 99.

Respuestas a las experiencias

Experiencia nro. 1

Ecuación para una línea recta: $y = m x + b$

Si $b = V_o$, y $m = a$ entonces:

$v = a\,t + v_0$ que es la ecuación cinemática del movimiento en línea recta con aceleración constante.

Experiencia nro. 2

Ecuación para la función potencial: $y = c\,x^n$ con c y n constantes.

Si $y = d$, $x = t$, $c = 4{,}9\ m/s^2$ y $n = 2$, entonces:

$d = 4{,}9\ t^2$ que es la ecuación del movimiento en caída libre con velocidad inicial cero:

$$y = v_0 t - (½)\ g\ t^2$$

Experiencia nro. 3

Ecuación para la función exponencial: $y = k\,a^{b\,x}$, donde k, a y b son constantes.

Si $y = p$, $x = t$, $k = 100$, $a = 10$ y $b = -0{,}3/138$ entonces sustituyendo:

$$p = 100\%(10)^{-0{,}3/138(t)} = 100\%\ /(10^{0{,}3/138(t)}) \quad (1)$$

Por otro lado:

$10^{0{,}3} = 10^{1/3} = 2{,}16 \approx 2$, por lo tanto (1) resulta:

$p = 100/(2^{\ t/138})$ que es la ecuación para la desintegración de los elementos radiactivos:

$N(t) = N(0)/(2^{t/\tau})$ con τ el tiempo de vida media del elemento

Ejercicio nro. 2

$y = 5 + 2x^2$

$y\text{-}5 = 2x^2$

$\log\ (y\text{-}5) = \log(2x^2)$

$log\ (y\text{-}5) = log(2) + 2\ log(x^2)$

Si $v = log\ (y\text{-}5)$, $u = log\ (x)$ y $b = log(2)$

Entonces:

$v = b + 2\ u$

x	-2	-1	0	1	2
y-5	8	2	0	2	8

Ejercicio nro. 3

Sea la función: $y = 2^x$. Si se compara con la ecuación general de la función exponencial ($y = k\ a^{b\ x}$), b es la pendiente de la recta que resulta de linealizar la función y, que vale 1. Dando valores a x, se tienen los datos de la tabla 1.

Tabla 1.

x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

Linealizando:

$log_2\ (y) = log_2(2^x) = x\ log_2\ (2) = x$

Si $v = log_2\ (y)$,

entonces:

$v = x$

que es la ecuación de una línea recta de pendiente $b = 1$.

La pendiente de esta línea está dada por:

$$b = \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log_2 v_2 - \log_2 v_1}{x_2 - x_1}$$

que para dos valores de la tabla1, resulta:

$$b = \frac{\log_2 v_2 - \log_2 v_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log_2 4 - \log_2 2}{2-1} = \frac{\log_2 2^2 - \log_2 2}{2-1} = \frac{2\log_2 2 - \log_2 2}{2-1} = \frac{2-1}{2-1} = 1$$

Método de los mínimos cuadrados

$$\sum (\Delta y_i)^2 = \sum [y_i - (b + mx_i)]^2 = \sum \left[y_i^{\,2} - 2y_i(b + mx_i) + (b + mx_i)^2\right]$$

$$\sum (\Delta y_i)^2 = \sum \left[y_i^{\,2} - 2y_i b - 2y_i m x_i + b^2 + 2bmx_i + m^2 x_i^{\,2}\right]$$

$$\sum (\Delta y_i)^2 = \sum \left[y_i^{\,2} + 2(-y_i b - y_i m x_i + bmx_i) + m^2 x_i^{\,2} + b^2\right]$$

$$\frac{\partial \sum (\Delta y_i)^2}{\partial b} = 2m\sum x_i - 2\sum y_i + 2b \qquad \frac{\partial \sum (\Delta y_i)^2}{\partial m} = 2b\sum x_i - 2\sum x_i y_i + 2m\sum x_i^{\,2}$$

$$2m\sum x_i - 2\sum y_i + 2b = 0 \Rightarrow 2b = -2m\sum x_i + 2\sum y_i \Rightarrow b = \frac{-2m\sum x_i + 2\sum y_i}{2} \Rightarrow b = \sum y_i - m\sum x_i$$

Por otro lado:

$$2b\sum x_i - 2\sum x_i y_i + 2m\sum x_i^{\,2} = 0$$

$$2(\sum y_i - m\sum x_i)\sum x_i - 2\sum x_i y_i + 2m\sum x_i^{\,2} = 0$$

$$2\sum y_i \sum x_i - 2m(\sum x_i)^2 - 2\sum x_i y_i + 2m\sum x_i^{\,2} = 0$$

$$2\sum y_i \sum x_i + m(2\sum x_i^{\,2} - 2(\sum x_i)^2) - 2\sum x_i y_i = 0 \;\Rightarrow\; m = \frac{2\sum x_i y_i + 2\sum y_i \sum x_i}{2\sum x_i^{\,2} - 2(\sum x_i)^2} \;\Rightarrow$$

$$m = \frac{\sum x_i y_i + \sum y_i \sum x_i}{\sum x_i^{\,2} - (\sum x_i)^2}$$

Introduciendo m en b, resulta:

$$b = \sum y_i - \left[\frac{\sum x_i y_i + \sum y_i \sum x_i}{\sum x_i^{\ 2} - (\sum x_i)^2} \right] \sum x_i = \sum y_i - \left[\frac{\sum x_i \sum x_i y_i + (\sum x_i)^2 \sum y_i}{\sum x_i^{\ 2} - (\sum x_i)^2} \right]$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^{\ 2} - \sum y_i (\sum x_i)^2 - \sum x_i \sum x_i y_i + (\sum x_i)^2 \sum y_i}{\sum x_i^{\ 2} - (\sum x_i)^2} \Rightarrow b = \frac{\sum y_i \sum x_i^{\ 2} - \sum x_i \sum x_i y_i}{\sum x_i^{\ 2} - (\sum x_i)^2}$$