



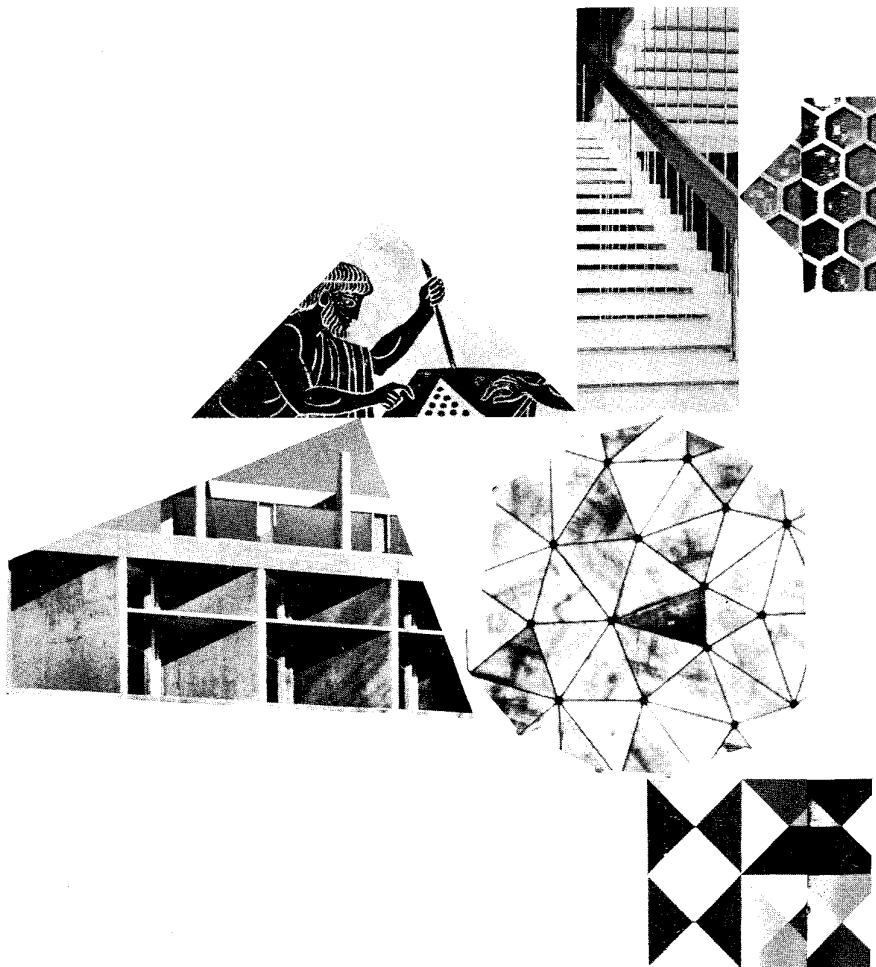
MOISE · DOWNS

# GEOMETRÍA MODERNA



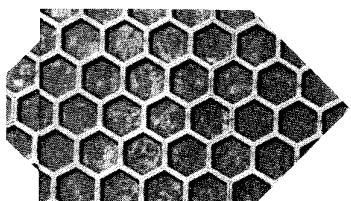
ADDISON-WESLEY IBEROAMERICA

EDWIN E. MOISE, *Harvard University*



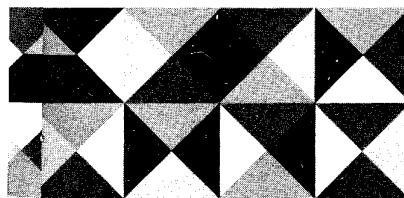
---

**FLOYD L. DOWNS, Jr.,** *Hillsdale High School*  
*San Mateo, California*



Traducido por:

Dr. Mariano García  
Universidad de Puerto Rico



Con la colaboración de:

Dr. José Tola Pasquel  
Universidad Nacional de  
Ingeniería de Perú

Dr. Emilio Lluis Riera  
Universidad Nacional  
Autónoma de México

y la Sociedad Colombiana  
de Matemáticas

**ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA**

Argentina • Brasil • Chile • Colombia • Ecuador • España  
Estados Unidos • México • Perú • Puerto Rico • Venezuela

Versión en español de la obra titulada *Geometry* por Edwin E. Moise y Floyd. Downs, Jr., edición 1964, publicada por Addison-Wesley Publishing Company de Reading, Massachusetts, EE.UU. Primera edición en español, 1966, por la editorial Addison-Wesley.

Esta edición en español es la única autorizada.

© 1970 por Fondo Educativo Interamericano

© 1986 por ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA, S.A.  
Wilmington, Delaware, E.U.A.

© 1986 por Sistemas Técnicos de Edición, S.A. de C.V.  
San Marcos 102, Tlalpan, 14000. México, D.F.

Reservados todos los derechos. Ni todo el libro ni parte de él pueden ser reproducidos, archivados o transmitidos en forma alguna o mediante algún sistema electrónico, mecánico de fotorreproducción, memoria o cualquier otro, sin permiso por escrito del editor. Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial. Registro número 1312.

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

ISBN 0-201-04871-X  
Addison-Wesley Iberoamericana

ISBN 968-50-0017-4  
Sistemas Técnicos de Edición  
GHIJ-M-89

Se terminó de imprimir el día 31 de mayo de 1989,  
en los talleres de la Impresora Azteca, S. A. de C. V.  
Poniente 140 Núm. 681-1 02300 México, D. F.  
La tirada fue de 1,000 ejemplares.

Durante los últimos años, se ha realizado un estudio amplio del contenido del curso de geometría para el décimo grado. Un examen del índice de materias de este libro indicará que hemos seguido fielmente las recomendaciones de la Comisión de Matemáticas del *College Entrance Examination Board* y, también, que el texto titulado *Geometría* del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar (SMSG) ha tenido considerable influencia en nosotros. Así, pues, en la elección de los temas tratados, nos guiamos por las ideas aceptadas corrientemente por estos y otros grupos.

El reconocimiento inmediato de nuestra inmensa deuda con nuestros colegas del SMSG nos parece la manera más sencilla de explicar el espíritu de este libro y el método seguido en su preparación. Tuvimos el privilegio de participar en los trabajos del grupo y fuimos estimulados por el detallado y profundo análisis del estilo y método de la enseñanza de las matemáticas. Naturalmente, hemos escrito este libro basándonos en nuestro propio criterio, después de varios años de trabajo, reflexión y experiencia en los salones de clases del décimo grado. Nuestras innovaciones son tan numerosas que no podemos reclamar para el libro el respaldo incondicional del SMSG. Por otra parte, nuestros puntos de vista sobre cosas fundamentales no han cambiado mucho desde los veranos de 1958, 1959 y 1960; la filosofía del libro del SMSG sigue siendo tan válida ahora como lo era entonces y consideramos que nuestra tarea consistía principalmente en mejorar su realización.

Las características principales del plan general del libro son las siguientes:

(1) Los conceptos de la geometría del espacio se introducen pronto, en el Capítulo 3, y se utilizan de ahí en adelante. Aparecen no solamente en los capítulos posteriores que tratan acerca de la geometría del espacio, sino también en los conjuntos de problemas de los capítulos de la geometría del plano. Por consiguiente, el estudiante ya ha tenido una experiencia intuitiva prolongada y variada con la geometría del espacio, cuando volvemos a su estudio sistemático en el Capítulo 8.

(2) Los sistemas de coordenadas en una recta se introducen en el Capítulo 2 y el álgebra se utiliza libremente de ahí en adelante. Las distancias y los ángulos se miden con números y los métodos del álgebra se utilizan para tratar con ellos. Esto facilita el introducir las coordenadas en el plano, en el Capítulo 13, tan pronto como el estudiante sabe algo acerca del concepto de semejanza y el teorema de Pitágoras.

(3) La teoría acerca del concepto de área se enseña corrientemente al final de un curso de geometría. Aquí, presentamos este tema aproximadamente a mitad del curso, en el Capítulo 11. Hay dos razones para ello. En primer lugar, el concepto de área debe tratarse lo antes posible, porque es fácil de entender, excepto por su exigencia del empleo de las técnicas algebraicas. (Estas técnicas deben practicarse, de todos modos.) En segundo lugar, el concepto es útil en el resto del estudio: da una demostración sencilla del teorema de Pitágoras (pág. 306) y una demostración sencilla del teorema fundamental de la proporcionalidad (pág. 330), del cual depende la teoría de la semejanza.

(4) En casi todos los casos, los conceptos se explican de manera intuitiva, mediante análisis informal y generalmente mediante figuras, antes de definirlos formalmente. Véase, por ejemplo, la definición de conjunto convexo en la página 63.

(5) Las figuras se utilizan ampliamente en la exposición y se marcan para que indiquen tanta información como sea posible. Véase la página 114, donde se explica el empleo de marcas para indicar congruencias. Véase, también, la página 128, donde está explicado el empleo de los signos de exclamación en las figuras. Éstos se utilizan para denotar *conclusiones*. Así, la figura de la página 134 indica el contenido completo del teorema del triángulo isósceles. Al final de la página 135, hay una figura que expresa, de la misma manera, el recíproco del teorema. La figura central de la página 445 nos indica que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

(6) Hemos tratado de dar nombres a un gran número de teoremas, para que se haga más fácil la tarea de recordarlos y de referirse a ellos. Véase, por ejemplo, el teorema de la charnela, en la página 203, y el postulado de la regla, en la página 34.

(7) El propósito fundamental del libro es enseñar a los estudiantes a leer matemática y, también, a escribir sobre ella. Ésta no es una tarea fácil. Si los estudiantes han de aprender a utilizar el lenguaje de las matemáticas, conviene proporcionarles los términos y las notaciones que permitan la significación rápida y precisa. No se acostumbra hacer esto. Por ejemplo, en varios libros, el mismo símbolo  $AB$  se utiliza para denotar (a) la recta que contiene a  $A$  y a  $B$ , (b) el segmento desde  $A$  hasta  $B$ , (c) el rayo que parte de  $A$  y pasa por  $B$ , y (d) la distancia entre  $A$  y  $B$ . También, es frecuente que en un libro se explique primero la distinción entre un segmento y una recta y, luego, se ignore esa distinción. Cuando se utiliza el lenguaje tan descuidadamente, es probable que el alumno concluya que el texto no merece un estudio serio. Hemos tratado de ganar la atención cuidadosa del estudiante, siendo consistentes, claros y precisos.

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a los empleados de la compañía Addison-Wesley por su trabajo esmerado en la impresión y presentación de este libro, de acuerdo con los deseos de los autores.

La edición del maestro correspondiente a este libro fue preparada por el Sr. Gerhard Wichura, de la Escuela Superior Wellesley, Wellesley, Massachusetts.

Expresamos nuestra gratitud por el permiso otorgado para reproducir en esta obra ciertas partes del texto de Geometría del SMSG, propiedad literaria de la Universidad de Yale. Sin embargo, este permiso no debe interpretarse como un endoso a nuestra obra por parte del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar.

Cambridge, Massachusetts  
San Mateo, California

E. E. M.  
F. L. D., Jr.

En esta traducción, se ha procurado uniformar la terminología y el lenguaje geométricos usados corrientemente en Hispanoamérica, tomando como base, lógicamente, la lengua general hablada en los países hispanos. Es natural que las palabras castellanas hayan sufrido transformaciones y deformaciones al ser utilizadas por pueblos diferentes, pero, no obstante, debe tratarse de restaurar lo más posible el sentido y las normas originales del idioma. Así, por ejemplo, es frecuente decir *unión* de conjuntos, siguiendo trivialmente la frase en inglés, olvidando que el verbo *unir* tiene un significado más fuerte y que lo más correcto es decir *reunión*. Lo mismo sucede al decir que tres o más puntos son *coplanares*. Lo correcto es decir que son *coplanarios* (como se forma ternario, cuaternario, etc.) Esta terminología y otras análogas son las establecidas en los mejores textos matemáticos, tanto elementales como superiores, de las escuelas, institutos y universidades de España y, por ello, previa consulta con personas competentes, hemos tratado en todo momento de elegir las formas y los términos más correctos.

También, hemos decidido utilizar simultáneamente el sistema métrico decimal y el sistema angloamericano, en beneficio de los estudiantes de habla española que con frecuencia usan uno u otro en la vida corriente. Por eso, algunos problemas aparecen con datos expresados en el sistema métrico únicamente y otros, en cambio, en el sistema angloamericano.

En los textos de Europa, en general, se usa la coma, en vez del punto, para separar la parte entera de la parte decimal de un numeral escrito en el sistema decimal. Sin embargo, debido a que en Puerto Rico y algunos otros países de América se emplea la coma para agrupar de tres en tres los dígitos de la parte entera de un numeral y el punto para separar la parte entera de la parte decimal, hemos adoptado este último convenio que, por lo demás, dada su escasa importancia, creemos no impida en modo alguno la comprensión del texto.

Finalmente, conviene aclarar que, en el texto, un asterisco (\*) frente a un ejercicio identifica un problema de dificultad moderada y una cruz (+) corresponde a un problema suplementario.

Por la competente ayuda prestada, estoy en deuda con varias personas cuyas valiosas sugerencias y recomendaciones, muchas de ellas incorporadas a la traducción, facilitaron grandemente mi labor. Entre ellas, merecen especial mención el Dr. Tomás Rodríguez Bachiller y el profesor Eugene A. Francis, de la Universidad de Puerto Rico, el Dr. José Tola Pasquel, del Perú, y el Dr. Emilio Lluis, de México. A todos ellos agradezco muy cordialmente su colaboración.

MARIANO GARCÍA

- 14 Fotografía por Ewing Galloway  
54 Cortesía de la Universidad de Harvard  
70 Cortesía del Museo Británico, Londres  
74 Cortesía de R. Buckminster Fuller  
182 Cortesía del Laboratorio Lincoln del Instituto Tecnológico de Massachusetts  
212 Cortesía de Cenco Educational Films, Chicago  
228 Fotografía por A. Devaney  
268 Cortesía de la General Motors, Inc.  
290 Cortesía de Shin Koyama  
320 Fotografía por Harold Lambert  
420 Reproducida con el permiso de los autores del libro *The Feynman Lectures in Physics*,  
por R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley  
Publishing Company  
512 Cortesía del Museo Británico, Londres  
556 Colección Smith, Biblioteca de la Universidad de Columbia, Nueva York

1-1	Dos clases de problemas . . . . .	1
1-2	Un desarrollo lógico sistemático de la geometría . . . . .	8
	Euclides . . . . .	11

2-1	Conjuntos . . . . .	15
2-2	Orden en la recta numérica . . . . .	21
2-3	Valor absoluto . . . . .	26
2-4	Reglas y unidades de distancia . . . . .	28
	Postulado 1. Postulado de la distancia . . . . .	31
2-5	Una regla infinita . . . . .	33
	Postulado 2. Postulado de la regla . . . . .	34
2-6	El postulado de colocación de la regla, interposición, segmentos y rayos . . . . .	38
	Postulado 3. Postulado de colocación de la regla . . . . .	38
	Postulado 4. Postulado de la recta . . . . .	41
2-7	Cambios en la unidad de distancia . . . . .	46

3-1	Introducción . . . . .	55
3-2	Rectas, planos y representaciones . . . . .	56
	Postulado 5 . . . . .	57
3-3	Rectas, planos y representaciones (continuación) . . . . .	59
	Postulado 6 . . . . .	59
	Postulado 7. Postulado del plano . . . . .	60
	Postulado 8 . . . . .	60
3-4	Conjuntos convexos . . . . .	63
	Postulado 9. Postulado de separación del plano . . . . .	64
	Postulado 10. Postulado de separación del espacio . . . . .	65
3-5	Los siete puentes de Königsberg . . . . .	68
	Leonhard Euler . . . . .	70

4-1	Definiciones fundamentales . . . . .	75
4-2	Algunas observaciones acerca de los ángulos . . . . .	80
4-3	Medida angular . . . . .	81
	Postulado 11. Postulado de la medida de ángulos . . . . .	82
	Postulado 12. Postulado de la construcción del ángulo . . . . .	82
	Postulado 13. Postulado de la adición de ángulos . . . . .	82
	Postulado 14. Postulado del suplemento . . . . .	83
4-4	Ángulos rectos, perpendicularidad, ángulos congruentes . . . . .	87
	George David Birkhoff . . . . .	93
4-5	Teoremas enunciados a base de hipótesis y conclusión . . . . .	95
4-6	Redacción de demostraciones sencillas . . . . .	97
5-1	El concepto de congruencia . . . . .	105
5-2	Congruencia de triángulos . . . . .	112
5-3	Los postulados de congruencia para triángulos . . . . .	119
	Postulado 15. Postulado LAL . . . . .	119
	Postulado 16. Postulado ALA . . . . .	120
	Postulado 17. Postulado LLL . . . . .	120
5-4	Redacción de demostraciones . . . . .	122
5-5	Bisectriz de un ángulo . . . . .	132
5-6	Triángulos isósceles y equiláteros . . . . .	134
5-7	Triángulos parcialmente superpuestos. Empleo de la figura para obtener información . . . . .	138
5-8	Cuadriláteros, cuadrados y rectángulos . . . . .	143
6-1	Cómo funciona un sistema deductivo. . . . .	153
6-2	Demostraciones indirectas . . . . .	153
6-3	Teoremas sobre rectas y planos . . . . .	157
6-4	Perpendiculares . . . . .	161
6-5	Introducción del empleo de conjuntos auxiliares en las demostraciones. El empleo de la palabra “sea” . . . . .	169
6-6	Cómo prescindir del postulado ALA . . . . .	174
6-7	Cómo prescindir del postulado LLL . . . . .	175
6-8	Interposición y separación . . . . .	177
7-1	Formulación de conjeturas plausibles. . . . .	183
7-2	Desigualdades para números, segmentos y ángulos . . . . .	185
7-3	El teorema del ángulo externo. . . . .	187

Índice de materias xi

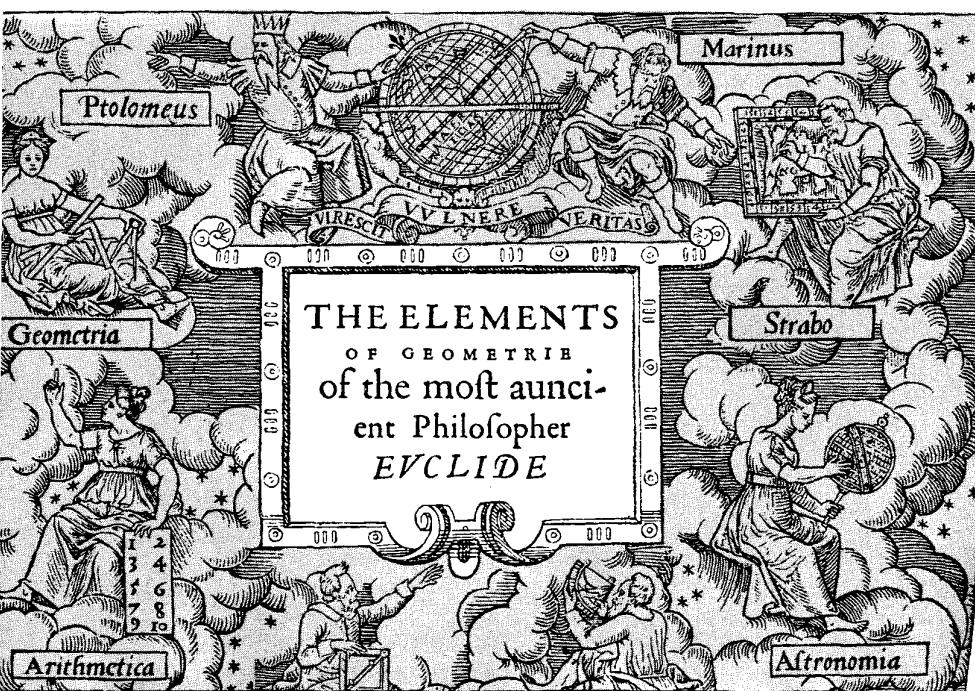
7-4	Teoremas sobre congruencia basados en el teorema del ángulo externo . . . . .	191
7-5	Desigualdades en un mismo triángulo . . . . .	195
7-6	Recíprocos . . . . .	198
7-7	La distancia entre una recta y un punto. La desigualdad del triángulo . . . . .	200
7-8	El teorema de la charnela y su recíproco . . . . .	203
7-9	Alturas de triángulos . . . . .	206
8-1	La definición de perpendicularidad para rectas y planos . . . . .	213
8-2	Un lema . . . . .	215
8-3	El teorema fundamental sobre perpendicularares . . . . .	216
8-4	Existencia y unicidad . . . . .	218
8-5	Rectas y planos perpendicularares: resumen . . . . .	222
9-1	Condiciones que garantizan el paralelismo . . . . .	229
9-2	Ángulos correspondientes . . . . .	236
9-3	El postulado de las paralelas . . . . .	238
	Postulado 18. Postulado de las paralelas . . . . .	238
9-4	Triángulos . . . . .	242
9-5	Cuadriláteros en un plano . . . . .	245
9-6	Rombo, rectángulo y cuadrado . . . . .	251
9-7	Algunos teoremas relacionados con triángulos rectángulos . . . . .	254
9-8	Secantes a varias rectas paralelas . . . . .	256
9-9	Cómo Eratóstenes midió la Tierra . . . . .	261
	Eratóstenes . . . . .	262
10-1	Propiedades fundamentales de los planos paralelos . . . . .	269
10-2	Ángulos diedros, planos perpendicularares . . . . .	275
10-3	Proyecciones . . . . .	281
	Nikolai Ivanovitch Lobachevsky . . . . .	289
11-1	Regiones poligonales . . . . .	291
	Postulado 19. Postulado del área . . . . .	293
	Postulado 20. Postulado de la congruencia . . . . .	293
	Postulado 21. Postulado de adición de áreas . . . . .	294
	Postulado 22. Postulado de la unidad . . . . .	294

11-2	Áreas de triángulos y cuadriláteros . . . . .	298
11-3	El teorema de Pitágoras . . . . .	306
	Pitágoras . . . . .	307
11-4	Triángulos especiales . . . . .	312
12-1	El concepto de semejanza. Proporcionalidad . . . . .	321
12-2	Semejanza de triángulos . . . . .	326
12-3	El teorema fundamental de la proporcionalidad y su recíproco . . . . .	330
12-4	Los teoremas fundamentales de la semejanza . . . . .	336
12-5	Semejanzas en los triángulos rectángulos . . . . .	346
12-6	Áreas de triángulos semejantes . . . . .	349
12-7	Las razones trigonométricas . . . . .	353
12-8	Trigonometría numérica. Empleo de las tablas . . . . .	357
12-9	Relaciones entre las razones trigonométricas . . . . .	363
13-1	Introducción . . . . .	371
13-2	Sistemas de coordenadas en un plano . . . . .	371
	René Descartes . . . . .	377
13-3	Representación de un sistema de coordenadas en papel cuadriculado . . . . .	378
13-4	La pendiente de una recta no vertical . . . . .	383
13-5	Rectas paralelas y perpendiculares . . . . .	389
13-6	La fórmula de la distancia . . . . .	392
13-7	La fórmula del punto medio. El punto que divide a un segmento en una razón dada . . . . .	396
13-8	El empleo de sistemas de coordenadas en la demostración de teoremas geométricos . . . . .	402
13-9	La gráfica de una condición . . . . .	406
13-10	La representación de una recta mediante una ecuación . . . . .	410
14-1	Definiciones básicas . . . . .	421
14-2	Rectas tangentes a las circunferencias . . . . .	425
14-3	Planos tangentes a las superficies esféricas . . . . .	434
14-4	Arcos de circunferencias . . . . .	438
14-5	Ángulos inscritos y arcos interceptados . . . . .	442
14-6	Arcos congruentes . . . . .	448
14-7	Segmentos secantes y tangentes. La potencia de un punto con respecto a una circunferencia . . . . .	453
14-8	Circunferencias en un plano coordenado . . . . .	461

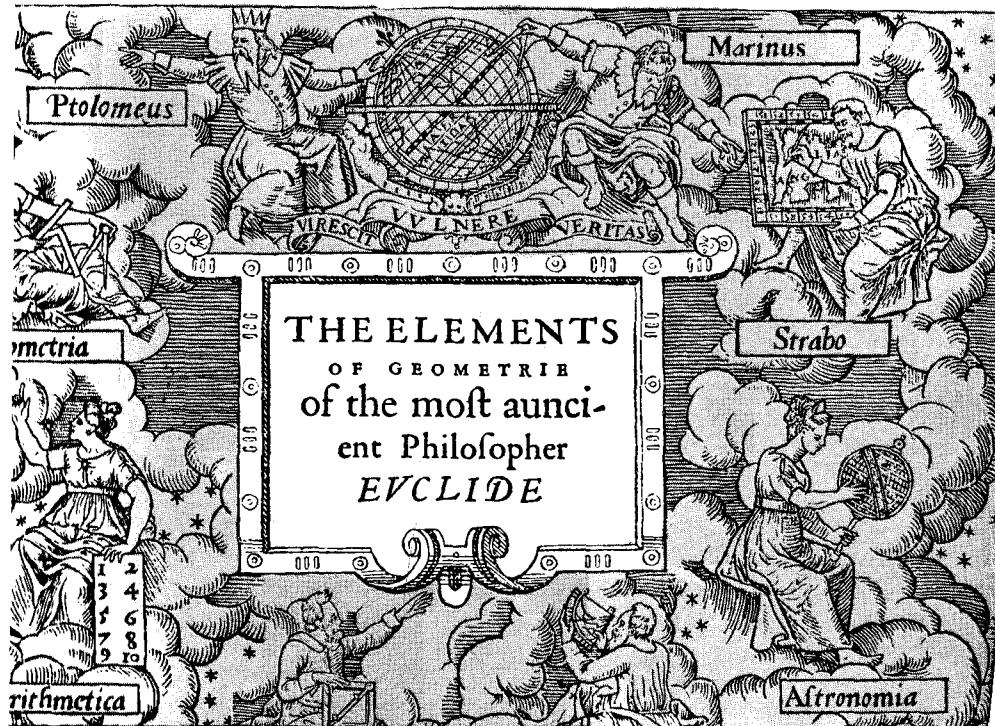
15-1	Caracterizaciones . . . . .	475
15-2	El empleo de caracterizaciones en la geometría cartesiana . . . . .	479
15-3	Teoremas de concurrencia . . . . .	481
15-4	Las bisectrices de los ángulos de un triángulo . . . . .	485
15-5	El teorema de concurrencia de las medianas . . . . .	489
15-6	Construcciones con regla y compás . . . . .	491
15-7	Construcciones elementales . . . . .	493
15-8	Construcciones elementales (continuación) . . . . .	497
15-9	Circunferencias inscrita y circunscrita . . . . .	502
15-10	Los problemas de construcciones imposibles de la antigüedad . . . . .	504

16-1	Polígonos . . . . .	513
16-2	Polígonos regulares . . . . .	517
16-3	La longitud de una circunferencia. El número $\pi$ . . . . .	521
16-4	El área de un círculo . . . . .	524
16-5	Longitudes de arcos y áreas de sectores . . . . .	528

17-1	Prismas . . . . .	537
17-2	Pirámides . . . . .	543
17-3	Volúmenes de prismas y pirámides. El principio de Cavalieri Postulado 23. Postulado de la unidad . . . . .	548
	Postulado 24. Principio de Cavalieri . . . . .	549
	Arquímedes . . . . .	550
17-4	Cilindros y conos . . . . .	556
17-5	El volumen y el área de la superficie de una esfera. . . . .	557
		562



# 1 | El sentido común y el razonamiento exacto

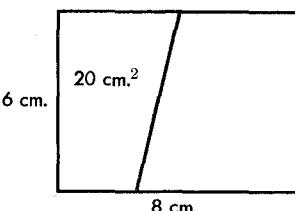


## 1-1. DOS CLASES DE PROBLEMAS

Considérense los siguientes problemas:

(1) Un rectángulo mide 6 centímetros por 8 centímetros. El área de su interior se descompone en dos partes, mediante un segmento rectilíneo. Si el área de una parte es 20 centímetros cuadrados, ¿cuál es el área de la otra parte?

(2) En un cierto rectángulo, la suma de su largo y ancho es 14 unidades. Un segundo rectángulo tiene de largo cinco veces el largo del primero y de ancho tres veces el del primero. El perímetro del segundo rectángulo es 91. ¿Cuáles son las dimensiones del primer rectángulo?



La respuesta al problema 1 puede obtenerse sin mucho esfuerzo. La respuesta es 28 centímetros cuadrados, porque  $6 \cdot 8 = 48$  y  $48 - 20 = 28$ . Desde luego, podríamos resolver este problema algebraicamente, si quisieramos, formulando la ecuación

$$20 + x = 6 \cdot 8$$

y, luego, resolviéndola, para obtener  $x = 28$ . Pero esto parece un poco trivial, por ser innecesario. Es probable que el lector haya resuelto problemas más difíciles que éste, mediante la aritmética, antes de estudiar el álgebra. Y si todas las ecuaciones algebraicas fueran tan superfluas como la que hemos formulado, ninguna persona sería se preocuparía por ellas.

El problema 2, sin embargo, es otra cosa. Si designamos con  $x$  y el largo y el ancho del primer rectángulo, entonces el largo y el ancho del segundo rectángulo serían  $5x$  y  $3y$ . Por tanto,

$$5x + 3y = \frac{91}{2},$$

porque la suma del largo y del ancho es la mitad del perímetro. Sabemos, también, que

$$x + y = 14.$$

Esto nos da un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para resolverlo, multiplicamos cada término de la segunda ecuación por 3, obteniendo

$$3x + 3y = 42,$$

y, luego, restamos término a término esta ecuación de la primera. Esto nos da

$$2x = 45\frac{1}{2} - 42 = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

es decir,

$$x = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

En consecuencia,

$$y = 14 - 1\frac{3}{4} = 12\frac{1}{4}.$$

Es fácil, ahora, comprobar que nuestra respuesta satisface las condiciones del problema.

En cierto modo, estos dos problemas parecen análogos, pero, en un sentido muy importante, son bastante diferentes. El primero es lo que llamaríamos un problema de sentido común. Es fácil anticipar cuál debe ser la respuesta  $y$ , además, es fácil comprobar que la contestación prevista es también la correcta. Por otro lado, adivinar la respuesta al segundo problema es prácticamente imposible. Para resolverlo, necesitamos saber algo acerca de los métodos matemáticos.

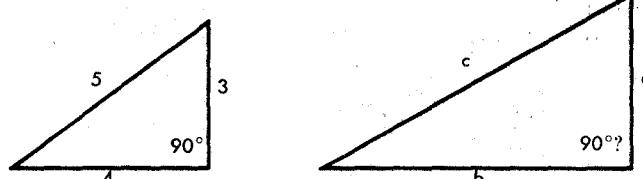
Hay casos parecidos en la geometría. Considérense los siguientes enunciados:

(1) Si un triángulo tiene lados de longitudes 3, 4 y 5, entonces es un triángulo rectángulo y tiene un ángulo recto opuesto al lado mayor.

(2) Se da un triángulo con lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Si

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

el triángulo es rectángulo y tiene un ángulo recto opuesto al lado mayor.

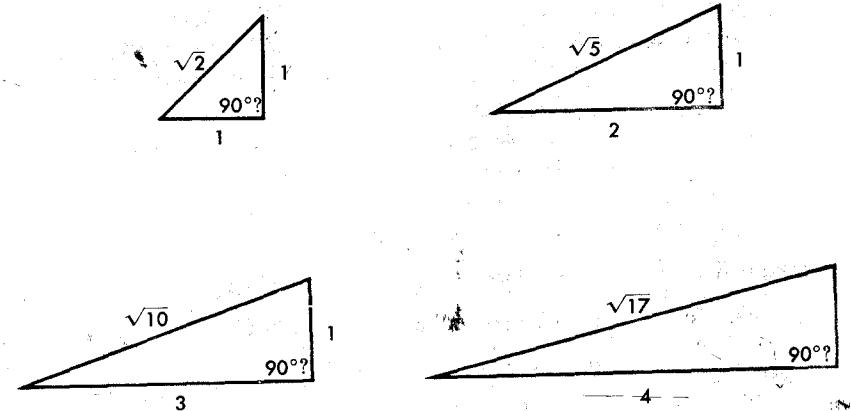


El primero de estos enunciados era conocido de los antiguos egipcios. Lo comprobaron mediante la experimentación. El lector puede verificarlo, dibujando un triángulo de lados 3-4-5 tan exactamente como le sea posible y, luego, midiendo con un transportador el ángulo opuesto al lado mayor. Deberá tenerse en cuenta, sin embargo, que esta clase de comprobación es aproximada. Supongamos, por ejemplo, que el ángulo es realmente  $89^{\circ} 59' 59\frac{1}{2}''$  (es decir, 89 grados, 59 minutos y  $59\frac{1}{2}$  segundos), en vez de exactamente  $90^{\circ} 0' 0''$ . En este caso, difícilmente podría notarse la diferencia

con un transportador, por muy afilado que esté nuestro lápiz y por cuidadosa que sea nuestra figura. Sin embargo, el "método egipcio" es un método de sano sentido común para comprobar un hecho experimental.

Los egipcios tenían gran destreza para medir objetos físicos. Las aristas de la base de la Gran Pirámide de Gizeh tienen cerca de 230 metros de largo y las longitudes de estas cuatro aristas coinciden, salvo un error de unos dos centímetros. Nadie parece saber, hoy día, cómo los constructores lograron tal grado de exactitud. (Mientras más piense el lector sobre este problema, más difícil le parecerá, probablemente.)

El segundo de los enunciados anteriores era desconocido para los egipcios; fue descubierto mucho más tarde, por los griegos. Es imposible comprobar este enunciado mediante la experimentación, por la sencilla razón de que habría que considerar una infinidad de casos. Por ejemplo, habría que construir triángulos y tomar medidas con un transportador, para todos los casos siguientes:

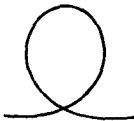


y así sucesivamente, sin acabar nunca. Así, sería inútil la verificación de nuestro enunciado general mediante experimentos, ni siquiera en forma aproximada. Por eso, una persona razonable no quedará convencida de que el segundo enunciado es cierto en todos los casos, hasta que vea alguna razón lógica que implique su certeza en todos los casos.

En realidad, por eso fueron los griegos, y no los egipcios, quienes descubrieron que nuestro segundo enunciado es cierto. Los egipcios eran muy buenos en todo lo concerniente a medidas e hicieron unas conjecturas muy ingeniosas, que más tarde se verificaron como ciertas. Pero los griegos descubrieron un nuevo método mucho más poderoso: el del correcto razonamiento geométrico. Mediante este método, convirtieron conjecturas plausibles en conocimiento firme y aprendieron algunas cosas asombrosas que nadie hubiera creído sin ver su demostración. De esta manera, los griegos sentaron las bases de la matemática moderna y, por consiguiente, de la ciencia moderna en general.

## Conjunto de problemas 1-1

1. Ensáyese el siguiente experimento: Tómese un trozo de cordel, como de 2 metros de largo, y colóquese en el suelo, formando un lazo con sus extremos sueltos:



Luego, tirese de los extremos del cordel, estrechando el lazo hasta que parezca ser del tamaño de la cintura. Márquese el cordel donde se cruza consigo mismo y compruébese el cálculo, midiendo la cintura con el cordel. *Después* de hacer esto, léanse las observaciones sobre el problema 1, al final de este conjunto de problemas.

2. Una página de papel de periódico no es muy gruesa, sólo tiene 0.003 pulgadas de espesor. Con frecuencia, vemos montones de periódicos. Supóngase que colocamos un pliego de papel de periódico en el suelo. Luego, colocamos otro pliego sobre el primero; después, dos pliegos más; luego, cuatro; y así sucesivamente, formando un montón de periódicos. Cada vez, se añaden al montón tantos pliegos como ya hay. *Después* de la décima vez, el montón tendrá, aproximadamente, 3 pulgadas de espesor. Si continuásemos hasta añadir pliegos por quincuagésima vez, ¿cuál sería la altura del montón?

Una de las respuestas de la (a) a la (d), a continuación, es la correcta; todo lo que hay que hacer es elegir o calcular cuál es ésta:

- (a) Aproximadamente, la altura de un salón de clases.
- (b) Aproximadamente, la altura de un edificio de cuatro pisos.
- (c) Aproximadamente, la altura de un edificio de cien pisos.
- (d) Más de dos veces la altura de un edificio de cien pisos.

*Después* de elegir, léanse las observaciones sobre el problema 2, al final de este conjunto de problemas.

3. La primera pregunta, a continuación, puede contestarse por "sentido común". Dése solamente la respuesta. La segunda requiere algún proceso aritmético o algebraico para su resolución. Muéstrese toda la labor necesaria para encontrarla.

- (a) ¿Cuánto es un sexto de 12?
- (b) ¿Cuánto es un sexto de 5,255,622?

4. Sigáñense las mismas instrucciones que para el problema 3:

- (a) Un tercio de la distancia entre dos ciudades es 10 kilómetros. ¿Cuál es la distancia entre ellas?
- (b) La distancia entre dos ciudades es 10 millas más que un tercio de la distancia entre ellas. ¿Cuál es esa distancia?

- \* 5. Sigáñense las mismas instrucciones que para el problema 3:

- (a) Si un trozo de alambre de 5 centímetros se corta en dos partes, de manera que el largo de una parte sea cuatro veces el de la otra, ¿cuál es la longitud de la parte más larga?
- (b) Si un trozo de alambre de 5 centímetros se corta en dos partes, tales que el cuadrado formado doblando una parte tiene cuatro veces el área del cuadrado que se forma doblando la otra, ¿cuál es la longitud de la parte más larga?

6. Si, independientemente uno de otro, dos alumnos miden con cuidado el ancho de un salón, mediante reglas, y uno mide de izquierda a derecha y el otro de derecha a izquierda, es probable que obtengan distintos resultados. *Ensáyese* esto! ¿Cuál o cuáles de las siguientes son explicaciones plausibles de la discrepancia?

- (a) Las reglas tienen longitudes diferentes.
- (b) Los objetos son más largos (o más cortos) de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.
- (c) Los errores resultantes del cambio de posición de la regla se acumulan y la suma de esos pequeños errores representa una diferencia discernible.
- (d) Un alumno puede haber perdido la cuenta.

7. Muéstrese que  $n^2 - 2n + 2 = n$  es cierto si  $n = 1$ . ¿Será cierta la ecuación cuando  $n = 2$ ? ¿Será siempre cierta, es decir, será cierta para cualquier número natural  $n$ ?

8. Una parte importante del aprendizaje de las matemáticas consiste en reconocer leyes generales que sugieren propiedades válidas. Por ejemplo, una ojeada a los enunciados

$$3 + 5 = 8, \quad 9 + 5 = 14, \quad 11 + 17 = 28,$$

puede hacernos pensar que la suma de dos números impares es un número par. ¿Puede el lector pensar en dos números impares cuya suma sea un número impar? ¿Demuestra la respuesta que dos números tales no existen?

9. Considérense los siguientes enunciados:

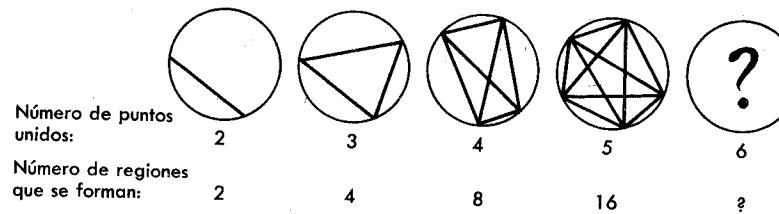
$$1^2 = 1, \quad 3^2 = 9, \quad 5^2 = 25, \quad 7^2 = 49.$$

- (a) Trátese de conseguir una ley acerca de números impares y redáctese un enunciado general a base de esa observación.
- (b) Justifíquese la validez de ese enunciado general.

10. Divídanse  $3^2$ ,  $5^2$  y  $7^2$  por 4.

- (a) ¿Cuál es el resto en cada caso?
- (b) ¿Qué ley general es evidente aquí?
- (c) ¿Cuántos enteros impares habría que elevar al cuadrado y dividir por 4 para garantizar que las divisiones den siempre el mismo resto?

11. Considerense las siguientes figuras y la ley sugerida:



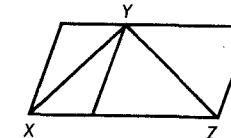
- (a) En el lugar del signo de interrogación debajo del 6, póngase el número que se crea correcto.
- (b) Trácese una circunferencia y únanse seis puntos cualesquiera en ella de todas las maneras posibles. ¿Cuántas regiones se forman? ¿Coincuerda la respuesta con la contestación a la parte (a)?
- (c) ¿Qué nos indica este problema sobre la demostración de que una generalización sea cierta o falsa?

12. Las siguientes ilusiones ópticas demuestran que no siempre podemos juzgar por las apariencias:

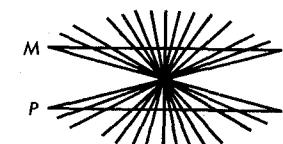
- (a) ¿Será  $CD$  una continuación de  $AB$ ? Compruébese la respuesta, mediante una regla.



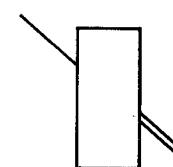
- (b) ¿Tienen los segmentos  $XY$  y  $YZ$  la misma longitud? Compárense las longitudes, mediante regla o compás.



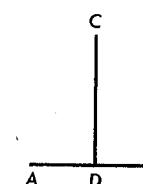
- (c) ¿Son  $MN$  y  $PQ$  segmentos rectilíneos?



- (d) ¿Qué recta a la derecha del rectángulo es la continuación de la recta a la izquierda?



- (e) ¿Cuál es más largo, el segmento  $AB$  o el segmento  $CD$ ?



13. Considérese la expresión  $n^2 - n + 11$ . Si hacemos  $n = 1$ , la expresión es igual a 11. Para  $n = 2$ , la expresión es igual a 13. Para  $n = 3$ , la expresión da el valor 17. Los números 11, 13 y 17 son todos números primos. (Un número primo es un número natural mayor que uno que sólo es divisible por 1 y por sí mismo.) ¿Se obtendrá siempre un número primo al sustituir  $n$  por números naturales en la expresión?

14. (a) Muéstrese que la expresión

$$n^2 - n + k$$

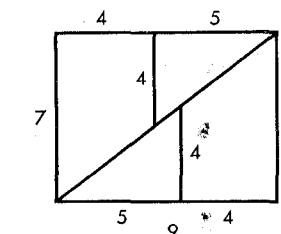
se comporta como

$$n^2 - n + 11$$

(véase el problema 13) cuando  $k$  es 3 ó 5.

- (b) ¿Qué regla general sugiere (a)? ¿Es cierta o falsa?
- (c) ¿Cuál es el próximo número natural  $k$  mayor que 11 que podríamos considerar? ¿Qué sucede cuando  $k = 41$ ?

15. El piloto de un avión de retropropulsión desea hacer un viaje de 1000 kilómetros a una velocidad media de 1000 kilómetros por hora. Si los primeros 800 kilómetros se recorren a 800 kilómetros por hora, ¿a qué velocidad deberá recorrerse la distancia restante?



16. Utilícese una regla para comprobar la exactitud de las medidas de la figura. Si las medidas son correctas, demuéstrelo mediante cálculos que la suma de las áreas de las cuatro partes del rectángulo es mayor que el área del rectángulo. ¡Extraño!, ¿no es así? ¿Puede explicarse esto?

OBSERVACIONES SOBRE EL PROBLEMA 1. Casi todo el mundo escoge un lazo cerca del doble de lo que debiera ser. Se podrán obtener resultados muy satisfactorios, si se razona de la manera siguiente: La longitud de una circunferencia es  $\pi$  veces el diámetro y  $\pi$  es, aproximadamente, igual a 3. Por tanto, el diámetro es como un tercio de la longitud de la circunferencia. Por ejemplo, si el tamaño de cintura es 60 centímetros, el diámetro del lazo deberá ser de unos 20 centímetros. Esto podrá parecer increíblemente pequeño, mas, si hemos analizado el problema matemáticamente, sabremos que nuestro razonamiento es confiable.

Este es uno de los muchos casos corrientes en que es preferible tratar el problema en forma matemática, no importa lo tonta que ésta sea, a dar palos ciegamente.

**OBSERVACIONES SOBRE EL PROBLEMA 2.** Éste es, también, uno de los muchos casos corrientes en que un análisis matemático nos ayuda a descubrir ciertas propiedades que difícilmente averiguaremos de otra manera. El aspecto de descubrimiento en la matemática es tan predominante y tan importante como su uso en la resolución de problemas.

Puesto que cada vez que añadimos al montón, doblamos el número de pliegos, después de 50 veces, tendríamos  $2^{50}$  pliegos. Una tabla de potencias de 2, o la aritmética corriente, nos indicará que tendríamos 1,125,899,906,842,624 pliegos. Un poco más de aritmética nos dirá que el montón tendría más de 53 millones de millas de altura; esto es, más de la mitad de la distancia entre la Tierra y el Sol.

Aun cuando una persona razonara que (d) es la respuesta correcta, es probable que no se diera cuenta de que la altura es mucho mayor de lo que parece indicar (d).

## I-2. UN DESARROLLO LÓGICO SISTEMÁTICO DE LA GEOMETRÍA

Si nos detenemos a pensar, nos daremos cuenta de que ya poseemos muchos conocimientos geométricos. Por ejemplo, sabemos cómo determinar las áreas de varias figuras simples y conocemos la relación pitagórica para los triángulos rectángulos. Algunas de nuestras nociones son tan evidentes que nunca se nos hubiera ocurrido expresarlas con palabras y, menos, considerar por qué son ciertas. La siguiente es una de ellas:

*Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.*

Pero otras, como la relación pitagórica, no son evidentes en absoluto. En este libro, organizaremos ordenadamente nuestro conocimiento de la geometría, de manera que los enunciados más complicados puedan deducirse de los más sencillos. Veremos que la geometría está basada en unos pocos enunciados sencillos y evidentes. Esto nos sugiere la posibilidad de hacer una lista de lo que sabemos de geometría, en un orden tal que cada enunciado en la lista pueda deducirse de los anteriores mediante razonamiento lógico.

La verdad es que llevaremos a cabo el siguiente programa: Enunciaremos definiciones para las *ideas* geométricas, tan clara y exactamente como podamos, y deduciremos los *principios* de la geometría mediante demostraciones lógicas. Llamaremos *teoremas* a los enunciados que demostremos.

Aunque demostraremos casi todas las afirmaciones que hagamos sobre la geometría, habrá algunas excepciones. Los enunciados más sencillos y más fundamentales

se ofrecerán sin demostración. A éstos los llamaremos *postulados*. Análogamente, emplearemos los términos más sencillos y más fundamentales de la geometría, sin intentar definirlos. A éstos los llamaremos *términos no definidos*.

A primera vista, parecería mejor definir todos los términos que empleamos y demostrar toda afirmación que hagamos. Pero es bastante fácil ver que eso es imposible.

Consideremos, primero, la cuestión de los teoremas. Generalmente, cuando demostramos un teorema, lo hacemos señalando que se deduce lógicamente de otros ya demostrados. Pero no siempre pueden hacerse las demostraciones de esa manera. En particular, no es posible hacer así la *primera* demostración, porque, en este caso, no hay teoremas demostrados previamente. Pero tenemos que empezar en algún punto. Esto significa que debemos aceptar algunas afirmaciones sin demostrarlas. Estas afirmaciones no demostradas son los *postulados*.

El mismo principio se aplica a las definiciones. La mayoría de las veces, al ofrecer una definición de un nuevo término, lo hacemos empleando otros términos ya definidos. Pero las definiciones no pueden siempre formularse de esa manera. En particular, la *primera* definición no puede enunciarse así, porque, en este caso, no hay términos definidos con anterioridad. Esto significa que debemos introducir algunos términos geométricos sin definirlos. Por consiguiente, emplearemos los más sencillos y fundamentales sin intentar definirlos. Estos términos no definidos serán *punto, recta y plano*.

Los postulados, desde luego, no se fabrican a capricho. (Si así fuera, ninguna persona sensata les prestaría importancia.) Los postulados describen propiedades fundamentales del espacio. Análogamente, las ideas *punto, recta y plano* están sugeridas por objetos reales. Si se hace una marca en una hoja de papel con la punta de un lápiz, se obtendrá una representación bastante fiel de un punto. La representación será mejor, cuanto más afilado sea el lápiz. El dibujo siempre será aproximado, pues la marca tendrá *algún* área, mientras que un punto carece de área. Pero si se piensa en marcas más y más pequeñas, hechas por lápices cada vez más afilados, se obtendrá una buena idea del término *punto* en la geometría.

Cuando empleamos la palabra *recta*, tenemos siempre en la mente la idea de una *línea recta*. Una recta se extiende indefinidamente en ambos sentidos. Por lo regular, indicaremos esto en las ilustraciones, marcando flechas en los extremos de las porciones de rectas que dibujemos, así:



Las puntas de flecha servirán para recordarnos que la recta no termina en los puntos donde finaliza el dibujo.

Emplearemos la palabra *segmento* para una figura como ésta:



Un cordel fino bien estirado es una buena aproximación a un segmento. Una cuerda delgada de piano, tirante, mediante una fuerte tensión, es una aproximación aún mejor; y así sucesivamente.

Si se piensa en una superficie perfectamente lisa que se extiende indefinidamente en todas las direcciones, se tendrá una buena idea de lo que se supone sea un *plano*.

Debemos tener presente que ninguno de los enunciados anteriores es una definición. Son sencillamente explicaciones de las ideas que la gente se imaginaba, cuando se redactaron los postulados. Al comenzar a demostrar teoremas, la información ofrecida en los postulados será la única que tendremos en la mente acerca de los puntos, las rectas y los planos.

Finalmente, hacemos dos advertencias.

En primer término, hay ciertos límites de lo que la lógica puede hacer por nosotros. La lógica nos permite comprobar nuestras conjeturas, pero no nos ayuda mucho a hacerlas. En el estudio de las matemáticas, nunca se llega a la etapa de prescindir de la ingeniosidad o de la intuición.

En segundo lugar, los primeros teoremas que demostraremos no van a impresionarnos mucho; podría pensarse en por qué no los llamamos postulados, y seguimos adelante. Esta primera parte, en cualquier caso, será fácil; el alumno debe estudiar el texto lo necesario y, luego, hacer los problemas.

Al comienzo del próximo capítulo, presentamos una corta explicación de la idea de conjunto y repasamos brevemente el álgebra de los números reales. Durante el curso, utilizaremos los conjuntos y el álgebra. Éstos no constituirán parte integrante de nuestro sistema de postulados y teoremas sino que pensaremos en ellos como *cosas con las cuales trabajamos y no sobre las cuales trabajamos*. Suponemos que contamos con ellos desde el principio; algunos de nuestros postulados comprenderán números reales y, también, utilizaremos el álgebra en algunas demostraciones. De hecho, la geometría y el álgebra están estrechamente relacionadas y será más fácil aprender las dos si señalamos sus relaciones lo antes posible.



EUCLIDES (SIGLO III A. DE J. C.)

Euclides es, probablemente, el escritor científico de más éxito que jamás vivió. Su famoso libro, los *Elementos*, era un tratado de geometría y de teoría de los números. Durante más de dos mil años, todo estudiante que aprendía geometría, lo hacía siguiendo el libro de Euclides. Y durante todo ese tiempo, los *Elementos* sirvieron de modelo para el razonamiento lógico.

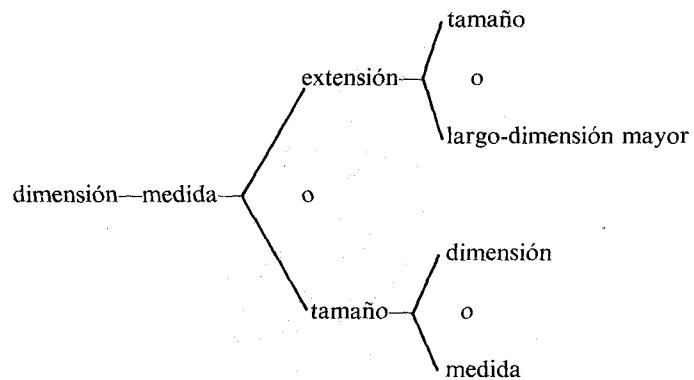
Nadie sabe, hoy día, cuánta de la geometría en los *Elementos* fue desarrollada originariamente por Euclides. Una parte puede haberse basado en libros anteriores, y se supone que algunas de las ideas más importantes de la obra se deben a Eudoxio, quien vivió más o menos en la misma época. En todo caso, de los libros que han llegado hasta nosotros, los *Elementos* es el primero que presenta la geometría de una manera organizada y lógica, comenzando con algunas suposiciones simples y desarrollando los teoremas mediante el razonamiento deductivo.

Éste ha sido el método fundamental de la matemática desde entonces. Es verdaderamente extraordinario que fuera descubierto tan temprano y utilizado tan bien. La lógica juega el mismo papel en las matemáticas que los experimentos en la física. En la matemática y la física, puede ocurrírsenos una idea que creemos es correcta. En la física, vamos al laboratorio a ensayarla; en la matemática, pensamos un poco más e intentamos obtener una demostración.

Aunque el método de Euclides perdurará, sus postulados y la teoría basada en ellos ya no se utilizan en forma corriente. Con el desarrollo del álgebra, el empleo de los números para medir cosas ha adquirido una importancia fundamental. Este método no aparece en los *Elementos*, ya que en la época de Euclides, el álgebra era prácticamente desconocida.

## Conjunto de problemas 1-2

1. Un alumno, a quien interesaba conocer el significado de la palabra *dimensión*, la buscó en un diccionario. Éste ofrecía como sinónimo la palabra *medida*, cuya definición el estudiante inmediatamente buscó. Hizo el siguiente esquema:



- (a) Señálese en el esquema una lista circular de tres palabras, cada una de las cuales tiene a la siguiente como sinónima. (En una lista circular, el primer término sigue al último.)
- (b) Hágase una lista circular que contenga cuatro palabras con esa propiedad.
- \* 2. Preparar un esquema parecido al del problema 1, comenzando con cualquier palabra del diccionario.
3. ¿Qué está mal en las siguientes "definiciones" defectuosas?
- (a) Un cuadrado es algo que no es redondo.
- (b) Una circunferencia es algo que es redondo.
- (c) Un triángulo rectángulo es un triángulo cuyos ángulos son ángulos rectos.
- (d) Un triángulo equilátero es cuando un triángulo tiene tres lados del mismo largo.
- (e) Un diámetro de una circunferencia es una recta que pasa por el centro de la circunferencia.
4. Contestar como en el problema 3:
- (a) El perímetro de un rectángulo es donde se toma la suma de los largos de sus lados.
- (b) La longitud de una circunferencia es cuando se multiplica el diámetro por  $\pi$ .
- (c) Una figura plana con cuatro lados es un rectángulo, si sus lados opuestos tienen igual longitud.
- (d) Un triángulo equilátero es un triángulo con tres lados y tres ángulos y cuyos lados tienen todos el mismo largo y cuyos ángulos tienen todos la misma medida.
- (e) Un triángulo es cuando tres rectas se intersecan entre sí.

- \* 5. Indicar si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso:
- (a) Es posible definir cada término geométrico, empleando términos geométricos más sencillos.
- (b) Los teoremas se demuestran solamente a base de definiciones y términos no definidos.
- (c) El razonamiento geométrico preciso conduce a verdades geométricas que no pueden deducirse de la medición.
- (d) La mejor manera de aprender a demostrar teoremas es observar a otras personas demostrarlos.
- (e) Si se está dispuesto a describir todos los pasos, cada teorema puede deducirse de postulados y términos no definidos, sin hacer referencia a otros teoremas.
- (f) Todo enunciado que parece ser cierto debe tomarse como postulado.
6. Supongamos que sea posible ajustar perfectamente una banda de hierro alrededor de una esfera, digamos la Tierra en su ecuador. La circunferencia de la banda sería de, aproximadamente, 40,000 kilómetros. Supongamos que se intercala en la banda una lámina adicional de hierro de 180 centímetros de largo, de manera que la banda no se ajuste ahora a la esfera. La banda ampliada sobresaldría de la esfera y tendría un radio ligeramente mayor que el radio de la banda original. Aproximadamente, ¿cuánto mayor será el nuevo radio? [Si es necesario, puede suponerse que el radio de la Tierra es de 6400 kilómetros.]

# 2 | Conjuntos, números reales y rectas



## 2.1. CONJUNTOS

Quizás, el alumno nunca haya visto la palabra *conjunto* empleada en las matemáticas, pero la idea es muy conocida. La familia del alumno es un conjunto de personas que consiste en el alumno, sus padres y sus hermanas y hermanos (si los tiene). Estas personas constituyen los *miembros* del conjunto. La clase de geometría es un conjunto de personas. Se dice que un miembro de un conjunto *pertenece* al conjunto. Por ejemplo, el alumno pertenece a su familia y a su clase de geometría. Con frecuencia, llamamos a los miembros de un conjunto sus *elementos*; en la matemática, los dos términos significan lo mismo. Se dice que un conjunto *contiene* a sus miembros. Por ejemplo, ambas, la familia y la clase de geometría, contienen al alumno. Si un conjunto contiene todos los elementos de otro conjunto, entonces decimos que el segundo conjunto es un *subconjunto* del primero. Por ejemplo, la clase de geometría es un subconjunto del alumnado de la escuela, y el alumnado contiene la clase de geometría. Decimos que un subconjunto *está contenido* en el conjunto que lo contiene.

Obsérvese que al definir un subconjunto, permitimos la posibilidad de que éste y el conjunto que lo contiene sean idénticos. Así, todo conjunto es un subconjunto de sí mismo.

Cuando decimos que dos conjuntos son *iguales*, o cuando escribimos la igualdad  $A = B$  entre dos conjuntos  $A$  y  $B$ , entendemos simplemente que los dos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos. Por ejemplo, supongamos que  $A$  es el conjunto de todos los números naturales entre  $9\frac{1}{3}$  y  $14\frac{1}{6}$ , y  $B$  el conjunto de todos los números naturales entre  $9\frac{1}{10}$  y  $14\frac{1}{3}$ . Entonces,  $A = B$ , porque cada uno de los conjuntos  $A$  y  $B$  contiene precisamente los números 10, 11, 12, 13 y 14. En efecto, ocurre casi siempre que el mismo conjunto puede describirse de dos maneras diferentes. Por tanto, si las descripciones parecen diferentes, esto no significa que los conjuntos sean distintos. Algo parecido sucede en el álgebra. Las expresiones  $3 \cdot 17$  y  $39 + 12$  parecen diferentes, pero representan el mismo número; y esto es lo que significa el enunciado  $3 \cdot 17 = 39 + 12$ .

Dos conjuntos se *intersecan* si hay uno o más elementos que pertenecen a ambos. Por ejemplo, el conjunto de la familia del alumno y el conjunto de su clase de geometría se intersecan, porque el alumno pertenece a los dos. (Con toda probabilidad, el alumno es la única persona que pertenece a ambos conjuntos.) La *intersección* de dos conjuntos es el conjunto de todos los objetos que pertenecen a ambos conjuntos.

Pasando a temas matemáticos, vemos que el conjunto de todos los números positivos pares es el conjunto cuyos elementos son

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots$$

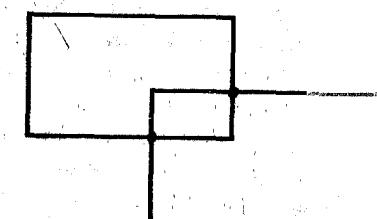
El conjunto de todos los múltiplos positivos de 3 es el conjunto cuyos elementos son

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots$$

La intersección de estos dos conjuntos es el conjunto cuyos elementos son 6, 12, 18, ... (Este es el conjunto de los múltiplos positivos de 6).

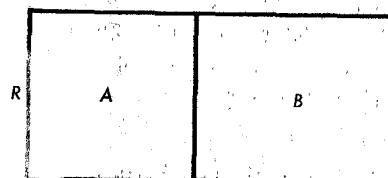
En la figura de la derecha, cada uno de los rectángulos es un conjunto de puntos y su intersección es un conjunto que contiene exactamente dos puntos. Análogamente, cada una de las regiones rectangulares es un conjunto de puntos y su intersección es la pequeña región rectangular en el medio de la figura.

En la figura siguiente, cada una de las dos rectas es un conjunto de puntos y su intersección contiene exactamente un punto:



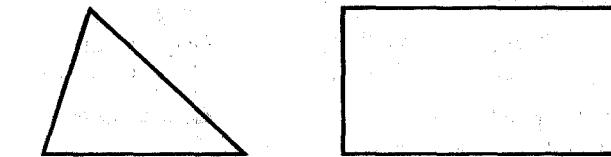
En todo este libro, consideraremos que las rectas y los planos son conjuntos de puntos. (Si se quiere, puede considerarse esta afirmación como nuestro primer postulado.) De hecho, *todas* las figuras geométricas se considerarán como conjuntos de puntos. En la figura de la derecha, vemos dos conjuntos de puntos, cada uno de los cuales es una región rectangular contenida en un plano. Su intersección es un segmento, contenido en una recta.

La *reunión* de dos conjuntos es el conjunto de todos los objetos que pertenecen a uno de los conjuntos o a los dos.



Por ejemplo, en la figura anterior, vemos una región rectangular grande  $R$  que es la reunión de dos regiones rectangulares más pequeñas,  $A$  y  $B$ . El segmento vertical cerca del medio de la figura es la intersección de  $A$  y  $B$ . Los puntos de este segmento pertenecen a la reunión por dos razones.

Para tres o más conjuntos, la intersección y la reunión se definen de manera análoga. Así, un triángulo es la reunión de tres conjuntos, cada uno de los cuales es un segmento. Un rectángulo es la reunión de cuatro conjuntos, cada uno de los cuales es un segmento.



A veces, es conveniente utilizar la idea del conjunto *vacío* o *nulo*. El conjunto vacío es el conjunto que no contiene miembro alguno. Esta idea puede parecer algo extraña al principio, pero, en realidad, es muy parecida a la idea del número cero. Así, las siguientes tres afirmaciones significan exactamente lo mismo:

- (1) No hay elefantes blancos en San Juan.
- (2) El número de elefantes blancos en San Juan es cero.
- (3) El conjunto de los elefantes blancos en San Juan es el conjunto vacío.

Una vez introducida la idea del conjunto vacío, podemos hablar de la intersección de dos conjuntos cualesquiera, teniendo en cuenta que la intersección puede ser el conjunto vacío. Por ejemplo, la intersección del conjunto de todos los números impares y el conjunto de todos los números pares es el conjunto vacío. En la figura anterior, la intersección del triángulo y el rectángulo es el conjunto vacío.

El conjunto vacío se denota por el símbolo  $\emptyset$ .

*Una advertencia:* Si comparamos las definiciones de los términos *intersecar* e *intersección*, vemos que podría surgir confusión en el empleo de los mismos. Cuando hablamos de la *intersección* de dos conjuntos, admitimos la posibilidad de que ésta sea nula, pero cuando decimos que dos conjuntos se *intersecan*, siempre entendemos que contienen un elemento común, por lo menos.

*Otra advertencia:* La idea del cero y la del conjunto vacío están estrechamente relacionadas, pero no son la misma cosa. Por ejemplo, la ecuación

$$x + 3 = 3$$

tiene a cero como solución única y, por tanto, el conjunto de las soluciones no es vacío; el conjunto de las soluciones tiene exactamente un elemento, a saber, 0. Por otra parte, la ecuación

$$x + 1 = x + 2$$

no tiene soluciones. En consecuencia, el conjunto de las soluciones es  $\emptyset$ .

## Conjunto de problemas 2-1

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, determinar si el conjunto  $A$  es igual al conjunto  $B$ :
- $A$  es el conjunto de los números naturales entre  $\frac{3}{2}$  y  $\frac{25}{3}$ .  $B$  es el conjunto cuyos elementos son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
  - $A$  es el conjunto de todos los nombres de mujer que empiezan con la letra  $J$ .  $B$  es el conjunto que consta de los nombres Juana, Josefa, Julia, Juliana, Joaquina, Jovita.
  - $A$  es el conjunto de todos los países de Centro América cuyos nombres empiezan con la letra  $P$ .  $B$  es el conjunto de todos los países de Centro América que pueden cruzarse pasando por un canal.
  - $A$  es el conjunto de todos los estudiantes de la clase de geometría que tienen menos de 10 años de edad.  $B$  es el conjunto de los meses del año cuyos nombres empiezan con la letra  $R$ .
  - $A$  es el conjunto de todos los números que satisfacen a la ecuación  $x + 7 = 12$ .  $B$  es el conjunto de todos los números que satisfacen a la ecuación  $x^2 = 25$ .
  - $A$  es el conjunto de todos los números que satisfacen a  $5x + 8 = 8$ .  $B$  es el conjunto de todos los números que satisfacen a  $7(x^2 + 2) - 5 = 9$ .

2. Sea

$$P = \{2, 5, 7, 10, 14, 17, 19\}.$$

[Nota: Se lee "Sea  $P$  el conjunto cuyos miembros son 2, 5, 7, 10, 14, 17 y 19".]

Sea

$$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}.$$

¿Cuál es la intersección de los conjuntos  $P$  y  $Q$ ? ¿Cuál es la reunión de los conjuntos  $P$  y  $Q$ ?

3. Considérense los siguientes conjuntos:

- $S_1$  es el conjunto de todos los alumnos de una escuela.
- $S_2$  es el conjunto de todos los varones en el alumnado de la escuela.
- $S_3$  es el conjunto de todas las niñas en el alumnado de la escuela.
- $S_4$  es el conjunto de todos los miembros del profesorado de la escuela.
- $S_5$  es el conjunto cuyo único miembro es un alumno de la escuela.

(a) ¿Qué pares de conjuntos se intersecan?

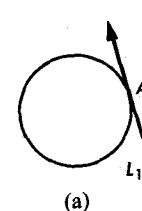
(b) ¿Qué conjunto es la reunión de  $S_2$  y  $S_3$ ?

(c) ¿Qué conjunto es la reunión de  $S_1$  y  $S_5$ ?

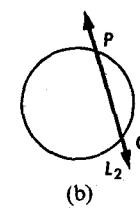
(d) Describir la reunión de  $S_1$  y  $S_4$ .

(e) ¿Cuáles de los conjuntos son subconjuntos de  $S_1$ ?

4. En las siguientes figuras, considérense la recta y la circunferencia como dos conjuntos de puntos. En cada caso, indicar cuál es su intersección.



(a)

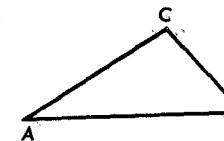


(b)



(c)

5. En la siguiente figura, ¿cuál es la intersección del triángulo  $ABC$  y el segmento  $AC$ ? ¿Cuál es la reunión?



6. Considérense el conjunto  $P$  de todos los números naturales pares y el conjunto  $I$  de todos los números naturales impares.

- Describir la reunión de  $P$  e  $I$ .
- Describir la intersección de  $P$  e  $I$ .

7. Considérese un conjunto de tres niños  $\{A, B, C\}$ . Cualquier subconjunto de este conjunto se llamará un comité.

- Hacer una lista de los subconjuntos de  $\{A, B, C\}$ .
- ¿Cuántos comités de dos miembros pueden formarse del grupo de los tres niños?
- Mostrar que dos comités cualesquiera nombrados en la respuesta al ejercicio (b) se intersecan.
- ¿Qué significa la palabra "intersecar"?

8. Sea  $A$  el conjunto de los pares de números  $(x, y)$  que satisfacen a la ecuación  $3x + y = 15$ .  
 Sea  $B$  el conjunto de los pares de números  $(x, y)$  que satisfacen a la ecuación  $2x + y = 11$ .  
 ¿Cuál es la intersección de los conjuntos  $A$  y  $B$ ?

9. Sea  $A = \{(1, 12), (2, 9), (3, 6), (4, 3), (5, 0)\}$ .

- Sea  $B = \{(1, 9), (2, 7), (3, 5), (4, 3), (5, 1)\}$ .

- Obsérvese que los elementos de los conjuntos  $A$  y  $B$  son pares de números. ¿Cuál es la intersección de  $A$  y  $B$ ?

10. Sea  $A$  el conjunto de todas las soluciones de  $5r + s = 11$ . Sea  $B$  el conjunto de todas las soluciones de  $3r - s = 5$ . ¿Cuál es la intersección de  $A$  y  $B$ ?
11. Sea  $A$  el conjunto de todas las soluciones de  $7x - y = 28$ . Sea  $B$  el conjunto de todas las soluciones de  $3x + 2y = 12$ . ¿Cuál es la intersección de  $A$  y  $B$ ?
12. Sea  $A$  el conjunto de todas las soluciones de  $2m + n = 8$ . Sea  $B$  el conjunto de todas las soluciones de  $4m + 2n = 12$ . ¿Cuál es la intersección de  $A$  y  $B$ ?
- \*13. Considérese el conjunto de todos los números naturales divisibles por 2. Considérese el conjunto de todos los números naturales divisibles por 3.
- Describir la intersección de los dos conjuntos y hacer una lista de sus primeros cuatro miembros.
  - Escribir una expresión algebraica para representar la intersección.
  - Describir la reunión de los dos conjuntos y hacer una lista de sus primeros seis miembros.
14. Imaginemos un punto  $A$ , en la pizarra o en una hoja de papel. ¿Cuántas rectas del plano de la pizarra o del papel contienen el punto  $A$ ? Las rectas que contienen el punto  $A$  forman un conjunto. Cada recta es un elemento del conjunto. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto?
15. (a) Dados dos puntos diferentes  $A$  y  $B$ , ¿cuántos elementos hay en el conjunto de todas las rectas que contienen a  $A$  y a  $B$ ? Con frecuencia, expresamos esta pregunta de manera diferente, así: ¿Cuántas rectas pueden trazarse por dos puntos  $A$  y  $B$ ?
- (b) Dados tres puntos,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , que no están en una recta, ¿cuántas rectas hay que contienen pares de esos tres puntos?
- (c) Dados cuatro puntos,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , tales que cada tres de ellos no están en una recta, ¿cuántas rectas hay que contengan pares de esos puntos? Si se da un quinto punto que cumple las mismas condiciones, ¿cuántas rectas habrá que contengan pares de los cinco puntos?
- \* (d) En las partes (a), (b) y (c), se hace la misma pregunta con respecto a diferentes números de puntos. Contestar la pregunta, si se dan  $n$  puntos.
16. Al hacer una lista de los subconjuntos de un conjunto dado, se incluyen el conjunto mismo y el conjunto vacío como subconjuntos del conjunto dado. Así, el conjunto  $\{a, b\}$  tiene los siguientes subconjuntos:

$$\{a, b\}, \quad \{a\}, \quad \{b\}, \quad \emptyset.$$

Es decir, un conjunto con dos elementos tiene cuatro subconjuntos.

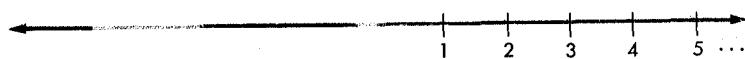
- Hacer una lista de los subconjuntos de  $\{a, b, c\}$ .
- ¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de cuatro elementos?
- ¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de cinco elementos?
- ¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de  $n$  elementos?

## 2.2. ORDEN EN LA RECTA NUMÉRICA

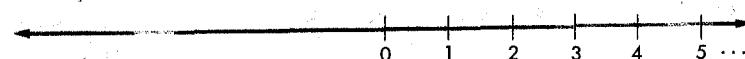
Los primeros números que conocimos son los “números naturales”,

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

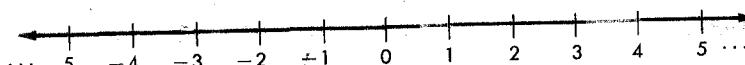
Los números naturales nunca se acaban, porque dado cualquiera de ellos, siempre podemos añadirle 1 para obtener otro. Nos imaginamos los números naturales como dispuestos en una recta, de izquierda a derecha, en esta forma:



A la izquierda del 1, colocamos el número 0:

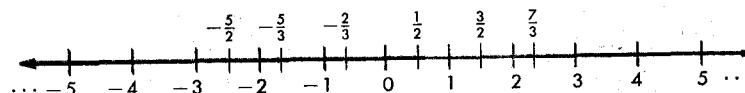


Entonces, colocamos los números enteros negativos, de derecha a izquierda:



Los números que tenemos hasta ahora son los números *enteros* (positivos, negativos y cero). Los números naturales son, desde luego, los enteros positivos y, con frecuencia, nos referimos a ellos mediante ese nombre.

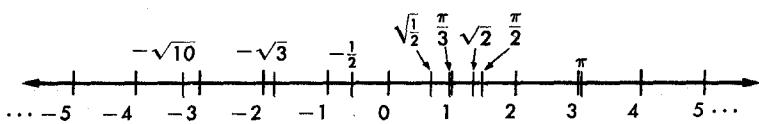
Obsérvese que hay muchos puntos de la recta que todavía no están asociados con números. Necesitamos, por lo menos, colocar las fracciones  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{2}{3}$ , y así sucesivamente. Entre dos números enteros cualesquiera, hay una infinidad de fracciones. Por tanto, en una figura, todo lo que podemos hacer es representar algunas de ellas, como por ejemplo:



Los números que hemos mencionado hasta ahora son los números de la forma  $p/q$ , donde  $p$  y  $q$  son números enteros y  $q$  no es cero. Estos se llaman los *números racionales*. (Este término no pretende sugerir que los demás números no son racionales. Simplemente, se refiere a que los números racionales son *razones* de números enteros.)

Es evidente que los números racionales no llenan totalmente la recta numérica. Hay muchos números que no pueden expresarse como razones de enteros. Por ejemplo,  $\sqrt{2}$  no es un número racional. Lo mismo ocurre con  $\sqrt{3}$  y  $\sqrt{5}$  y, también, con números tan “especiales” como  $\pi$ .

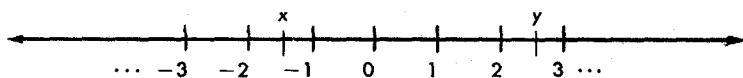
Si colocamos todos estos números de manera que a cada punto de la recta se le haya asignado un número, entonces tendremos el conjunto completo de los *números reales*:



El alumno debe fijarse en que estos números aparezcan en la figura aproximadamente en los sitios que les corresponden.

Los números reales se utilizarán ampliamente en la geometría. De ahora en adelante, convendrá que pensemos en ellos como dispuestos en una recta.

Un número  $x$  es *menor que* un número  $y$ , si  $x$  está a la izquierda de  $y$  en la recta numérica, como se muestra a continuación:



Esto se indica escribiendo  $x < y$ . Evidentemente, todo número negativo está a la izquierda de todo número positivo. Por consiguiente, todo número negativo es menor que cualquier número positivo. Por ejemplo,

$$-1,000,000 < \frac{1}{10},$$

anque el número  $-1,000,000$  puede, en cierto modo, parecer más grande.

Las expresiones en las cuales se emplea el signo  $<$  se llaman *desigualdades*. Cualquier desigualdad puede escribirse al revés:  $y > x$  significa lo mismo que  $x < y$ . Así, pues,  $y > x$ , si  $y$  está a la derecha de  $x$  en la recta numérica.

La expresión  $x \leq y$  significa que  $x < y$  o  $x = y$ . Así,  $-2 \leq 1$ , porque  $-2 < 1$ ; y  $2 \leq 2$ , porque  $2 = 2$ .

En sus estudios de álgebra, ya el alumno ha aprendido mucho acerca de cómo se comportan los números reales respecto de la adición y de la multiplicación. En realidad, el álgebra puede estudiarse de la misma manera que estudiaremos la geometría en este curso. Es decir, toda el álgebra que el alumno sabe puede deducirse de unos pocos enunciados simples. Sin embargo, es probable que no haya estudiado el álgebra de esta manera, pero no tenemos tiempo ahora de volver a estudiar el álgebra nuevamente. Por tanto, en este curso, utilizaremos casi toda el álgebra que el alumno conoce, sin comentarios especiales.

No obstante, debemos ser cuidadosos con respecto a las desigualdades y las raíces cuadradas, pues, con frecuencia, hay confusión en cuanto a su empleo. La relación  $<$  se llama una relación de *ordenación*. Sus propiedades fundamentales son las siguientes:

### O-1. Tricotomía

Para todo par de números  $x, y$ , una y solamente una de las siguientes condiciones se cumple:  $x < y$ ,  $x = y$ ,  $x > y$ .

### O-2. Transitividad

Si  $x < y$  y  $y < z$ , entonces  $x < z$ .

### O-3. Propiedad aditiva

Si  $a < b$  y  $x \leq y$ , entonces  $a + x < b + y$ .

### O-4. Propiedad multiplicativa

Si  $x < y$  y  $a > 0$ , entonces  $ax < ay$ .

Todas las propiedades corrientes de las desigualdades se deducen de las cuatro propiedades anteriores.

Finalmente, necesitaremos la siguiente propiedad de los números reales:

### R-1. Existencia de raíces cuadradas

Todo número positivo tiene por lo menos una raíz cuadrada positiva.

Hay un detalle un poco engañoso en relación con las raíces cuadradas. Cuando decimos con palabras que  $x$  es una *raíz cuadrada de  $a$* , sencillamente entendemos que  $x^2 = a$ . Por ejemplo, 2 es una raíz cuadrada de 4, porque  $2^2 = 4$ .  $-2$  es, también, una raíz cuadrada de 4, porque  $(-2)^2 = 4$ . Pero, cuando escribimos con símbolos que  $x = \sqrt{a}$ , esto significa que  $x$  es la raíz cuadrada *no negativa* de  $a$ . En consecuencia, las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, según se indica:

Cierta:  $-2$  es una raíz cuadrada de 4.

Falsa:  $-2 = \sqrt{4}$ .

El porqué de este convenio es sencillo. Si  $\sqrt{a}$  pudiera denotar lo mismo la raíz no negativa que la no positiva, entonces, no tendríamos un símbolo para representar la raíz no negativa de 7. El colocar un signo *más* antes de la expresión  $\sqrt{7}$  a nada nos conduce, porque un signo *más* nunca altera el valor de una expresión. Si  $\sqrt{7}$

si fuera negativa, entonces  $+\sqrt{7}$  también lo sería. Por esta razón, convenimos en que  $\sqrt{a}$  denota siempre la raíz no negativa de  $a$ . La raíz no positiva de  $a$  es  $-\sqrt{a}$ ; y  $\sqrt{0} = 0$ .

Quizás, sea conveniente referirse a las siguientes propiedades al exponer las razones para algunas afirmaciones que se hagan en razonamientos algebraicos:

### Propiedad aditiva de la igualdad

Si  $a = b$  y  $c = d$ , entonces  $a + c = b + d$ .

### Propiedad de la igualdad con respecto a la sustracción

Si  $a = b$  y  $c = d$ , entonces  $a - c = b - d$ .

### Propiedad multiplicativa de la igualdad

Si  $a = b$  y  $c = d$ , entonces  $ac = bd$ .

### Conjunto de problemas 2-2

1. Construir una tabla cuyas columnas tengan los siguientes titulares: "Números reales", "Números racionales", "Enteros", "Números irracionales". Debajo del titular "Números reales", escribanse los siguientes números:

$$7, \frac{2}{3}, \sqrt{11}, 0.02, \sqrt{4}, 1\frac{3}{4}, 14.003, -3,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{5}, -\sqrt{\frac{3}{8}}, 0, 1.414, -\sqrt{\frac{9}{16}}, \pi.$$

Completese la tabla, colocando cada número debajo del nombre de cada subconjunto de los números reales a que pertenece.

2. Indicar si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso:

- Los números negativos son números reales.
- La recta de los números reales tiene al menos un extremo.
- $-x$  es un número negativo para todo  $x$ .
- El punto que corresponde a  $\frac{7}{8}$  en la recta de los números reales está entre los puntos correspondientes a  $\frac{6}{7}$  y  $\frac{8}{9}$ .
- Existe un punto en la recta de los números reales que corresponde a  $\sqrt{2}$ , el cual es diferente del punto que corresponde a 1.414.
- Si  $x$  es un número negativo, entonces  $-x$  es un número positivo.
- Si  $x > y$ , entonces  $x - y > 0$ .

3. Indicar el orden en que dispondríamos sobre una recta numérica en la cual los números positivos están a la derecha del cero, los puntos correspondientes a los números de los siguientes conjuntos:

- $\frac{7}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{5}{8}$ .
- $4.1, 4.06, 4.012$ .
- $-1.3, -0.7, -2.14$ .
- $\frac{8}{5}, -1\frac{2}{3}, -1\frac{7}{8}$ .

4. Escribir los siguientes enunciados, utilizando los símbolos de ordenación (es decir,  $<$ ,  $\geq$ , etc.):

- $x$  es un número mayor que 0.
- $y$  es un número entre  $-1$  y  $2$ .
- $w$  es un número entre  $-1$  y  $2$ , inclusive.
- $k$  es un número positivo.
- $m$  es un número negativo.
- $n$  es un número no negativo.

5. Escribir con palabras cada uno de los siguientes enunciados:

- $AB > CD$ .
- $m \leq n$ .
- $-11 < 5 < 8$ .
- $-2 \leq k \leq 2$ .
- $x < 0$ .
- $y \geq 0$ .

6. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

- $\sqrt{16} = 4$ .
- $\sqrt{25} = -5$ .
- $-\sqrt{64} = -8$ .
- $-\sqrt{0.36} = -0.6$ .
- $-\sqrt{0.04} = 0.2$ .

7. ¿Para cuáles de los siguientes enunciados será cierto que  $\sqrt{x^2} = x$ ?

- $x = 3$ .
- $x = -3$ .
- $x = 0$ .
- $x = 1$ .
- $x = -1$ .
- $x < 0$ .
- $x \geq 0$ .
- $\frac{1}{x} > 0$ .

8. Sobre una recta numérica, marcar intervalos unidad de 1 centímetro y colocar correctamente los siguientes números:

$$0, 1, \sqrt{4}, -\sqrt{4}, \sqrt{9}, -\sqrt{9}, \sqrt{16}, -\sqrt{25}.$$

9. Si  $r$  y  $s$  son números reales distintos de 0 y  $r > s$ , indicar si los siguientes enunciados son ciertos para todo  $r$  y todo  $s$  (C), son ciertos para algunos  $r$  y  $s$  solamente (A), o nunca son ciertos (N):

- $s > r$ .
- $r - s > 0$ .
- $\frac{r}{s} > 1$ .
- $s^2 < r^2$ .

- \* 10. Seguir las instrucciones del problema anterior en los siguientes ejercicios:

- $\frac{1}{r} > \frac{1}{s}$ .
- $r^3 > s^3$ .
- $-r < -s$ .
- $r - 2 < s - 2$ .

### 2-3. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número  $x$  se denota por  $|x|$ . El significado del símbolo  $|x|$  se comprende rápidamente, si se examinan algunos ejemplos:

$$|0|=0, \quad |-8|=8,$$

$$|2|=2, \quad |87|=87,$$

$$|-2|=2, \quad |-95|=95,$$

$$|7|=7, \quad |-\sqrt{13}|=\sqrt{13},$$

y así sucesivamente. En los ejemplos anteriores, utilizamos las siguientes reglas:

- (1) Si  $x \geq 0$ , entonces  $|x| = x$ .
- (2) Si  $x < 0$ , entonces  $|x|$  es el número positivo correspondiente.

Si un número determinado se escribe aritméticamente, es fácil ver cómo se escribe su valor absoluto. Si no hay un signo *menos* antes del número, no hacemos cambio alguno. Si hay un signo *menos* antes del número, omitimos dicho símbolo para obtener el valor absoluto.

Pero cuando trabajamos algebraicamente con expresiones como  $|x|$ ,  $|a - b|$ , etc., es conveniente tener una forma algebraica de la condición (2) anterior. Así, dado un número negativo  $x$ , nos interesa tener una manera algebraica de describir el número positivo correspondiente. Si el número negativo se denota por  $x$ , entonces no podemos “omitar el signo *menos*”, porque no hay tal signo *menos* que omitir. Podemos resolver esta dificultad mediante un sencillo artificio: *si  $x < 0$ , entonces el número positivo que le corresponde es  $-x$* . He aquí algunos ejemplos:

$$x = -2, \quad -x = -(-2) = 2,$$

$$x = -3, \quad -x = -(-3) = 3,$$

y así sucesivamente.

Ahora, podemos dar una segunda descripción de  $|x|$ , como sigue:

- (1) Si  $x \geq 0$ , entonces  $|x| = x$ .
- (2) Si  $x < 0$ , entonces  $|x| = -x$ .

Esta segunda forma es más difícil de comprender al principio, pero es más fácil de emplear más tarde. El alumno debe tratar de aplicarla a varios números hasta que se convenza de que realmente dice lo que pretendemos.

### Conjunto de problemas 2-3

1. Evaluar cada uno de los siguientes:

- |                    |                    |                  |
|--------------------|--------------------|------------------|
| (a) $ 5 $ .        | (b) $ -6 $ .       | (c) $- -6 $ .    |
| (d) $ 2  + (-2)$ . | (e) $ 2  +  -2 $ . | (f) $ 8 - 5 $ .  |
| (g) $ 5 - 8 $ .    | (h) $ 5  -  8 $ .  | (i) $ -8 - 5 $ . |

2. Indicar cuáles de los siguientes enunciados son siempre ciertos:

- |   |                           |
|---|---------------------------|
| (a) $ -3  = 3$ .                          | (b) $ 3  = -3$ .          |
| (c) $ 7 - 9  =  9 - 7 $ .                 | (d) $ 0 - 4  =  4 - 0 $ . |
| (e) $ k  = k$ para todo número real $k$ . |                           |

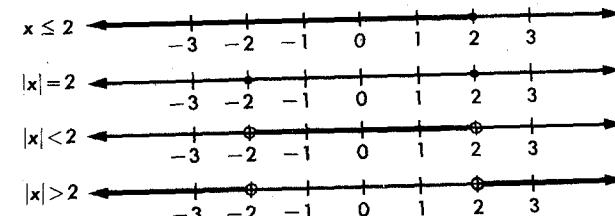
3. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para todos los valores de las variables?

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| (a) $ -n  = -n$ .         | (b) $ n^2  = n^2$ .       |
| (c) $ x - 3  =  3 - x $ . | (d) $ a - b  =  b - a $ . |
| (e) $ d + 1  =  d  + 1$ . |                           |

4. Completar cada uno de los siguientes enunciados:

- (a) Si  $k > 0$ , entonces  $|k| = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (b) Si  $k < 0$ , entonces  $|k| = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (c) Si  $k = 0$ , entonces  $|k| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. Cada una de las figuras siguientes es la gráfica en la recta numérica del enunciado algebraico escrito a su izquierda:

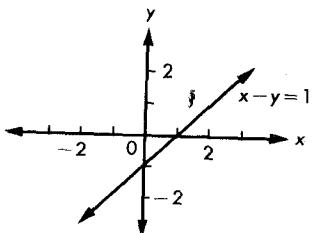


Construir gráficas para los siguientes enunciados:

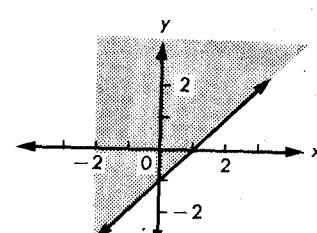
- |                    |                                |                    |
|--------------------|--------------------------------|--------------------|
| (a) $x = 1$ .      | (b) $x$ es un número negativo. |                    |
| (c) $x > 1$ .      | (d) $x \geq 0$ .               | (e) $ x  = 1$ .    |
| (f) $ x  \leq 1$ . | (g) $ x  > 1$ .                | (h) $ x  \geq 0$ . |

6. (a) ¿En qué se diferencia la gráfica de  $x < 0$  de la gráfica de  $x \leq 0$ ?
- (b) ¿En qué se diferencia la gráfica de  $|x| = 1$  de la gráfica de  $|x| \leq 1$ ?
- (c) ¿En qué se diferencia la gráfica de  $-1 \leq x \leq 1$  de la gráfica de  $|x| < 1$ ?

- \* 7. Si consideramos enunciados algebraicos con dos variables  $x$  y  $y$ , donde  $x$  y  $y$  son números reales, podemos construir gráficas de dichos enunciados en el plano  $xy$ . Por los estudios anteriores de matemáticas, se recordará que representamos gráficamente el conjunto de todos los pares ordenados  $(x, y)$  que hacen cierto el enunciado algebraico. Así, la gráfica de  $x - y = 1$  se muestra a la izquierda y la gráfica de  $x - y \leq 1$  se muestra a la derecha.



(a) Trazar la gráfica de  $y = |x|$ .



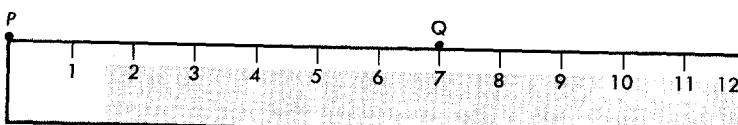
(b) Trazar la gráfica de  $y > |x|$ .

- \* 8. Utilizar el ejercicio anterior como una introducción para este problema:

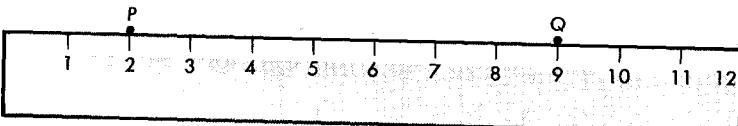
- (a) Construir la gráfica de  $|x| + |y| = 1$ .  
 (b) Construir la gráfica de  $|x| + |y| < 1$ .

## 2-4. REGLAS Y UNIDADES DE DISTANCIA

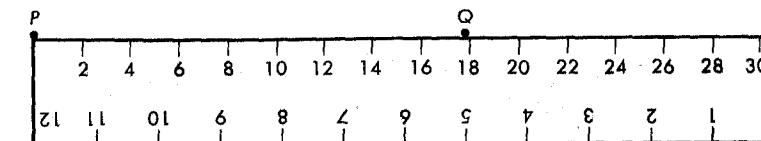
Si la distancia entre dos puntos  $P$  y  $Q$  no es mayor que un pie, podemos medir dicha distancia mediante una regla ordinaria:



En la figura, la distancia es de 7 pulgadas. Desde luego, no necesitábamos colocar el punto cero de la regla en  $P$ . Lo mismo podíamos haber colocado la regla así:



En este caso, hallamos que la distancia entre  $P$  y  $Q$ , medida en pulgadas, es  $9 - 2 = 7$ , igual que antes.



Muchas reglas tienen un borde marcado en centímetros. Utilizando la escala de centímetros, podríamos haber colocado la regla como se indica en la figura anterior. Esto nos daría una distancia aproximada de 18 cm., donde cm. significa centímetros.

Desde luego, un pie es equivalente a 12 pulgadas, y una yarda es equivalente a 36 pulgadas. Un metro (m.) equivale a cien centímetros. Un milímetro (mm.) es una milésima de un metro. Por consiguiente, podemos medir la distancia entre  $P$  y  $Q$  al menos de estas seis maneras: 180 mm., 18 cm., 0.18 m., 7 pulgadas,  $\frac{7}{12}$  pie,  $\frac{7}{36}$  yarda. Así, el *número* que obtenemos como una medida de la distancia depende de la *unidad de medida*.

### Conjunto de problemas 2-4A

1. La distancia del punto  $H$  al punto  $K$ , medida en metros, es 4. Si elegimos el centímetro como unidad, ¿qué número representará la medida de la distancia entre  $H$  y  $K$ ?
2. La distancia entre  $K$  y  $M$ , medida en pulgadas, es 9. ¿Qué número da la medida en pies de la distancia entre  $K$  y  $M$ ?

- 3.

- (a) Se utilizaron reglas marcadas con varias escalas para medir las distancias  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PT$  y  $QT$ , y se tabularon los resultados. Completar la tabla:

Unidad de medida	$PQ$	$PR$	$PT$	$QT$
Pulgada	2			
Pie		$\frac{1}{4}$		
Yarda	$\frac{1}{18}$			$\frac{1}{9}$
Centímetro	5.08			
Milímetro			0.0762	
Metro				50.8
Cuarta				0.364
Palma	0.54			

- (b) ¿Cuál es la razón de  $PQ$  a  $PR$ ? ¿Y de  $PQ$  a  $PT$ ?  
 (c) ¿Cambia la razón de  $PQ$  a  $PT$  cuando se utilizan diferentes unidades?  
 (d) ¿Cuánto mide  $QR$  en pulgadas?; ¿en centímetros?; ¿y en cuartas?

4. Comentar acerca de las siguientes preguntas:

- ¿Por qué tenemos tantas unidades diferentes para medir distancias?
- Supongamos que pudiéramos establecer una sola unidad universal para medir distancias. ¿Qué ventajas ganaríamos? ¿Qué desventajas resultarían?

5. Completar cada uno de los siguientes enunciados con los números apropiados:

- 6 pulgadas = \_\_\_\_\_ pies = \_\_\_\_\_ yardas.
- \_\_\_\_\_ pulgadas =  $7\frac{1}{2}$  pies = \_\_\_\_\_ yardas.
- \_\_\_\_\_ pulgadas = \_\_\_\_\_ pies =  $\frac{2}{3}$  yardas.

6. Completar cada uno de los siguientes enunciados con los números apropiados:

- 2 m. = \_\_\_\_\_ cm. = \_\_\_\_\_ mm.
- \_\_\_\_\_ m. = 50 cm. = \_\_\_\_\_ mm.
- \_\_\_\_\_ m. = \_\_\_\_\_ cm. = 1 mm.

7.



*A, B y C* son tres puntos de una recta dispuestos como se muestra en la figura. Calcular  $AC$ , si se da que:

- $AB = 6$  cm. y  $BC = 12$  cm.
- $AB = 6$  metros y  $BC = 12$  metros.
- $AB = 6$  Km. y  $BC = 12$  Km.

8. *A, B y C* son tres puntos de una recta dispuestos en el orden que se indica en la figura, para el problema anterior. Determinar  $AC$ , si se da que:

- $AB = 6$  pies y  $BC = 12$  pulgadas.
- $AB = 6$  pulgadas y  $BC = 12$  pies.
- $AB = 6$  yardas y  $BC = 12$  pulgadas.

9. Obsérvese que en los problemas 7 y 8 aparecen solamente los números 6 y 12. Explicar por qué en el problema 7 las respuestas a las tres partes son el mismo número, aunque las unidades son distintas, mientras que en el problema 8 todas las respuestas son diferentes.

lógicamente hablando, una unidad es tan buena como otra. Sin embargo, utilizar varias unidades en un mismo problema podría causar dificultades innecesarias. Elijamos, pues, una unidad y convengamos en utilizar esa unidad en todos nuestros teoremas. (No importa qué unidad elijamos. Si se prefieren pulgadas, codos o leguas, estamos en libertad de considerar que son éas las unidades que emplearemos. *Todos nuestros teoremas serán ciertos para cualesquier unidades.*)

Así, una vez elijamos una unidad, para cualquier par de puntos  $P, Q$ , habrá un número que nos diga cuánto dista  $P$  de  $Q$ . A este número le llamamos la *distancia* entre  $P$  y  $Q$ .

Expondremos esto en forma más precisa, enunciando un postulado y una definición.

### POSTULADO 1. Postulado de la distancia

*A cada par de puntos diferentes corresponde un número positivo único.*

### Definición

La *distancia* entre dos puntos es el número obtenido mediante el postulado de la distancia. Si los puntos son  $P$  y  $Q$ , entonces indicamos la distancia por  $PQ$ .

Admitimos la posibilidad de que  $P = Q$ , es decir, de que  $P$  y  $Q$  sean el mismo punto. En este caso,  $PQ = 0$ . La distancia se define simplemente con relación a un par de puntos y no depende del orden en que se consideren los puntos. En consecuencia, siempre tenemos que  $PQ = QP$ .

En algunos de los problemas presentados en el texto, se utilizan varias unidades, tales como centímetros, pies, kilómetros, etc. Según indicamos anteriormente, todos nuestros teoremas serán aplicables a cualquiera de estas unidades, siempre que *consistentemente se utilice sólo una unidad cada vez que se aplique un teorema*. En otras palabras, puede hacerse la elección que se prefiera, siempre que se mantenga, pero no podemos cambiar las unidades en medio de un teorema.

### Conjunto de problemas 2-4B

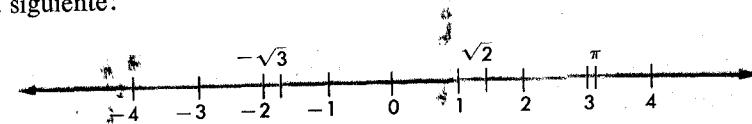
- Alberto, Braulio y Carlos midieron, en centímetros, la distancia entre dos puntos,  $P$  y  $Q$ , marcados en la pizarra. Alberto dijo que  $PQ = 27$ , Braulio dijo que  $PQ = 27.5$  y Carlos dijo que  $PQ = 26.75$ . ¿Cuántos de los niños pueden estar en lo cierto? ¿Por qué? ¿Tenía que ser necesariamente correcta alguna de las respuestas? Justifíquese esto.
- Si la distancia  $PQ$  es 135 cm., ¿cuánto es  $PQ$  medida en metros? ¿Y medida en kilómetros?
- Si la distancia  $RS$  es 15 pies, ¿cuánto es  $RS$  medida en pulgadas? ¿Y medida en yardas?

4. Eduardo y Francisco calculaban las distancias entre los mismos puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Eduardo dijo: "Si  $AB = 1$ , entonces  $BC = 2\frac{1}{2}$ ". Francisco dijo: "Si  $AB = 12$ , entonces  $BC = 30$ ". Si ambos niños estaban en lo cierto, explicar cómo pudieron obtener diferentes números para las mismas distancias. ¿Está esto de acuerdo con el postulado de la distancia?
5. Si la distancia  $RS$  es  $x$  pies, ¿cuál es  $RS$  medida en pulgadas? ¿Y medida en yardas?
- \* 6. La distancia  $AB$  medida en centímetros es 150 unidades mayor que 25 veces la misma distancia medida en metros. ¿Cuál es la distancia  $AB$  en metros?
- \* 7. El perímetro de un triángulo medido en pulgadas es 10 más que 10 veces su perímetro medido en pies. ¿Cuál es el perímetro en pies?
- + 8. Si la longitud de cada lado de un cuadrado es de 4 metros, entonces su perímetro es de 16 metros y su área de 16 metros cuadrados. Puesto que  $16 = 16$ , el enunciado, "El área de un cuadrado es igual a su perímetro", es cierto para este cuadrado.
- (a) ¿Será cierto el enunciado, si los lados de este cuadrado se miden en centímetros? ¿Y si se miden en kilómetros?
- (b) Describir otros dos cuadrados para los cuales el enunciado es cierto.
- (c) ¿Qué tienen en común los tres cuadrados para los cuales es cierto el enunciado?
- + 9. Si un rectángulo mide 6 pies de largo y 4 pies de ancho, el enunciado, "El perímetro del rectángulo es la suma del doble de la medida de la longitud y el doble de la medida del ancho", es cierto para este rectángulo.
- (a) ¿Será cierto el enunciado si la longitud y el ancho se miden en pulgadas? ¿Y si se miden en yardas?
- (b) ¿Depende la veracidad de este enunciado de una elección especial de los números? ¿Y de una elección especial de las unidades?
- + 10. El radio de una circunferencia es de 2 metros, la longitud de la circunferencia ( $C = 2\pi r$ ) es de  $4\pi$  metros y el área del círculo asociado ( $A = \pi r^2$ ) es de  $4\pi$  metros cuadrados. Entonces, el enunciado, "El área del círculo es igual a la longitud de la circunferencia asociada", es cierto en este caso.
- (a) ¿Será cierto el enunciado si el radio se mide en centímetros?
- (b) Describir otras dos circunferencias para las cuales el enunciado es cierto.
- (c) ¿Depende la veracidad del enunciado de una elección especial de los números? ¿Y de una elección especial de las unidades?
11. En los problemas 8, 9 y 10, se observaría que algunos enunciados geométricos son ciertos para un cierto número solamente, no importa qué unidad se utilice. Otros enunciados son ciertos, no importa qué números o qué unidades se utilicen.

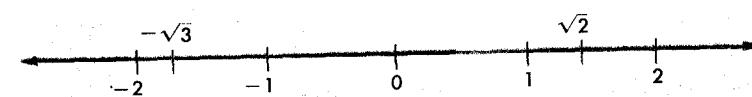
- Verificar que cada uno de los siguientes enunciados es cierto. Luego, indíquese si cada uno sigue siendo válido al medirse las longitudes en una unidad diferente. Indíquese, además, qué enunciados siguen siendo válidos únicamente si se utiliza el mismo número, o el mismo conjunto de números, para todas las unidades:
- (a) El perímetro de un rectángulo de 3 metros de ancho y 4 metros de largo, es 14 metros.
- (b) El perímetro de un cuadrado cada uno de cuyos lados mide 2 pies, es el doble del área del cuadrado.
- (c) El perímetro de un triángulo cada uno de cuyos lados mide 12 centímetros, es 36 centímetros.
- (d) Un triángulo cuyos lados miden 3 metros, 4 metros y 5 metros, respectivamente, es un triángulo rectángulo. (Utilícese la relación pitagórica.)
- (e) Un triángulo cuyos lados miden 9 pulgadas, 12 pulgadas y 15 pulgadas, respectivamente, es un triángulo rectángulo.
- (f) El área de un círculo cuyo radio mide 4 pies es igual al doble de la longitud de la circunferencia asociada.

## 2-5. UNA REGLA INFINITA

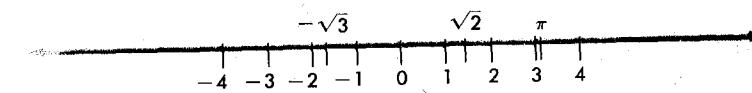
Al comenzar el capítulo, marcamos una escala numérica sobre una recta de la manera siguiente:



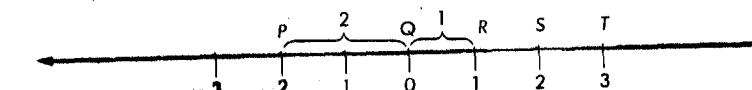
Después, pudimos haber utilizado una escala más grande:



o una escala más pequeña:



Pero, convengamos en que, de ahora en adelante, cada vez que marquemos una escala numérica sobre una recta, utilizaremos la escala dada por el postulado de la distancia.



Es decir, el punto marcado 1 deberá estar a una distancia 1 del punto marcado 0; el punto marcado  $-2$  deberá estar a una distancia 2 del punto marcado 0; y así sucesivamente. En la figura, podemos leer directamente las distancias

$$QR = 1,$$

$$QS = 2,$$

$$QT = 3.$$

Restando, obtenemos

$$RS = 2 - 1 = 1,$$

$$RT = 3 - 1 = 2,$$

$$PR = 1 - (-2) = 3.$$

En efecto, parece que siempre podemos obtener las distancias, calculando la diferencia entre los números correspondientes.

Esta afirmación no es totalmente correcta. Si tomamos los puntos  $P$  y  $R$  en el orden inverso, obtenemos la respuesta errónea

$$RP = -2 - 1 = -3,$$

que es el *negativo* de la respuesta correcta. En efecto, la resta da una respuesta negativa aproximadamente en la mitad de los casos.

Sin embargo, es fácil eliminar esta dificultad: tomamos el *valor absoluto* de la diferencia de los números correspondientes. Cuando hacemos esto, todas nuestras respuestas correctas siguen siendo correctas y todas nuestras respuestas erróneas se convierten en correctas. Por ejemplo,

$$PR = |1 - (-2)| = |3| = 3,$$

$$RP = |-2 - 1| = |-3| = 3,$$

como debe ser.

Vemos, pues, que la distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

El razonamiento anterior se hace más formal resumiéndolo en forma de postulado.

## POSTULADO 2. Postulado de la regla

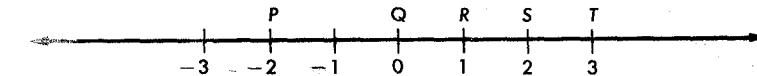
*Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que*

- (1) *a cada punto de la recta corresponde exactamente un número real;*
- (2) *a cada número real corresponde exactamente un punto de la recta; y*
- (3) *la distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.*

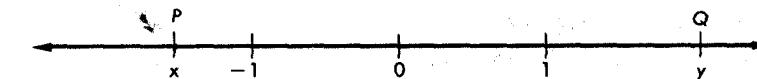
Llamamos a éste el postulado de la regla, porque, en efecto, nos proporciona una regla infinita que puede colocarse sobre cualquier recta y, mediante ella, podemos medir la distancia entre dos puntos cualesquiera.

## Definiciones

Una correspondencia como la descrita en el postulado de la regla se llama un *sistema de coordenadas*. El número correspondiente a un punto dado se llama la *coordenada del punto*.



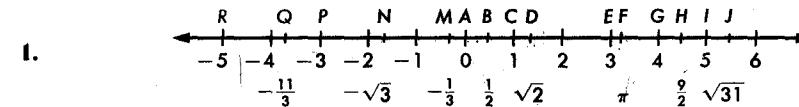
Por ejemplo, en la figura anterior, la coordenada de  $P$  es  $-2$ , la coordenada de  $Q$  es  $0$ , la coordenada de  $R$  es  $1$ , y así sucesivamente.



Si la coordenada de  $P$  es  $x$  y la coordenada de  $Q$  es  $y$ , entonces el postulado de la regla nos dice que

$$PQ = |y - x|.$$

## Conjunto de problemas 2-5



En la figura anterior, se marcó un sistema de coordenadas en una recta, con el punto 0 en  $A$  y el punto 1 en  $C$ . Para hacer más fácil la lectura, se marcaron las coordenadas que corresponden a números no enteros un poco más abajo que las correspondientes a enteros. Determinar las distancias siguientes:

- |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| (a) $AC$ | (b) $AD$ | (c) $EI$ | (d) $PR$ |
| (e) $RI$ | (f) $AN$ | (g) $BH$ | (h) $QM$ |
| (i) $AF$ | (j) $DJ$ | (k) $ND$ | (l) $PF$ |

### 2. Simplificar:

- |                    |                  |                  |
|--------------------|------------------|------------------|
| (a) $ 6 - 2 $      | (b) $ 2 - 6 $    | (c) $ 5 - 0 $    |
| (d) $ 0 - 5 $      | (e) $ 0 - (-5) $ | (f) $ 4 - (-4) $ |
| (g) $ x $          | (h) $ x - 0 $    | (i) $ x - (-x) $ |
| (j) $ x  -   - x $ |                  |                  |

## 36 Conjuntos, números reales y rectas

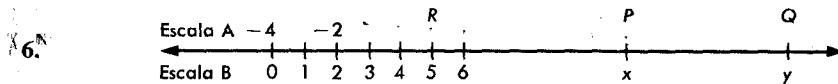
3. Utilizar el postulado de la regla para hallar la distancia entre los pares de puntos con las coordenadas siguientes:

- (a) 0 y 8 (b) 8 y 0 (c) 0 y  $-8$   
 (d)  $-5$  y  $-7$  (e)  $-\frac{2}{3}$  y  $\frac{1}{3}$  (f)  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{5}$   
 (g)  $\sqrt{3}$  y  $-\sqrt{5}$  (h)  $x$  y  $y$  (i)  $2a$  y  $-a$   
 (j) 0 y  $x$

4. Si se utiliza una regla corriente para medir la distancia entre dos puntos marcados en una hoja de papel, ¿será necesario colocar el cero de la regla en uno de los puntos? Explíquese.

5. Supongamos que al medir la distancia entre dos puntos  $P$  y  $Q$ , pensamos en colocar el cero de la regla en  $P$  y leer un número positivo en  $Q$ . Indíquese cómo será posible todavía determinar la distancia  $PQ$ , si, en lugar de hacer lo que pensamos, colocamos la regla de manera que  $P$  corresponda a  $\frac{1}{2}$  y, además,

- (a)  $Q$  corresponda a un número positivo,  
 (b)  $Q$  corresponda a un número negativo.



En la figura anterior, en las escalas A y B se utilizó la misma unidad, pero se marcaron los números de manera diferente.

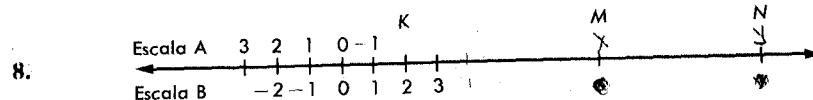
- (a) ¿Cuáles son las coordenadas de  $R$ ,  $P$  y  $Q$  en la escala A?  
 (b) Mostrar cómo hallar la distancia  $RQ$ , utilizando la escala B y utilizando la escala A.  
 (c) ¿Cuál es la distancia  $PQ$  en la escala A? ¿Y en la escala B?

7. Considérese un sistema de coordenadas sobre una recta. Supongamos que se le añade 3 a la coordenada de cada punto y que esta nueva suma viene a ser el nuevo número asignado a cada punto.

- (a) Si la coordenada original de  $P$  era 5, ¿cuál será su nueva coordenada? Si la coordenada de  $Q$  era  $-2$ , ¿cuál será su nueva coordenada?  
 (b) Si dos puntos de la recta tenían las coordenadas  $a$  y  $b$ , ¿cuáles serán sus nuevas coordenadas?  
 (c) ¿Corresponderá cada punto de la recta a un nuevo número? ¿Corresponderá cada nuevo número a un punto de la recta?  
 (d) Demostrar que la fórmula

$$[(\text{Nuevo número asignado a un punto}) - (\text{Nuevo número asignado a otro punto})] = \text{distancia entre los dos puntos}$$

- (e) ¿Satisface la nueva correspondencia entre puntos y números a cada una de las tres condiciones del postulado de la regla? ¿Puede llamarse a cada nuevo número la coordenada de un punto? ¿Por qué?



En la figura anterior, utilizamos la misma unidad en las escalas A y B, pero se marcaron los números de manera diferente.

- (a) ¿Cuál es la coordenada de  $K$  en la escala A?  
 (b) ¿Cuáles son las coordenadas de  $M$  y  $N$  en la escala B?  
 (c) Si  $x = -6$ , ¿cuál es la coordenada de  $M$  en la escala B?  
 (d) Si la coordenada de  $N$  en la escala B es  $9\frac{1}{2}$ , ¿cuál será el valor de  $y$ ?  
 (e) ¿Cuál es la distancia  $KM$ ? ¿Y la distancia  $MN$ ?

9. ¿Cuántos números reales hay? ¿Cómo lo sabemos? ¿Dice esto algo acerca del número de puntos de una recta? ¿Cuántos puntos contiene una recta? ¿Qué papel juega el postulado de la regla en nuestro razonamiento?

10. En un cierto país, los pueblos Arroyo, Bonanza y Colinas están en línea recta, aunque no necesariamente en ese orden. La distancia de Arroyo a Bonanza es 8 kilómetros, y la distancia de Bonanza a Colinas es 14 kilómetros.

- (a) ¿Será posible decir qué pueblo está entre los otros dos? ¿Qué pueblo no está entre los otros dos?  
 (b) Utilizar un dibujo para determinar la distancia de Arroyo a Colinas. ¿Habrá más de una posibilidad?  
 (c) Si sabemos, además, que la distancia de Arroyo a Colinas es 6 kilómetros, ¿qué pueblo estará, entonces, entre los otros dos?  
 (d) Si la distancia entre Arroyo y Bonanza fuera  $k$  kilómetros, la distancia entre Arroyo y Colinas  $m$  kilómetros, y la distancia entre Bonanza y Colinas  $k+m$  kilómetros, ¿qué pueblo estaría entre los otros dos?

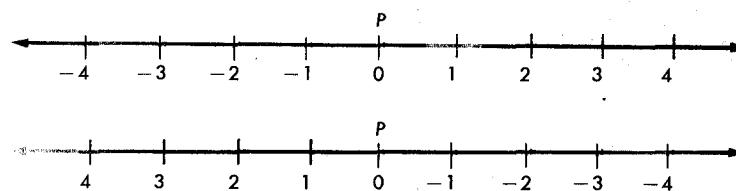
11.  $E$ ,  $H$ ,  $K$  son tres puntos de una recta.  $E$  y  $H$  están a 3 pulgadas de distancia y  $H$  y  $K$  están a 5 pulgadas de distancia. ¿De cuántas maneras será posible disponer los tres puntos? Explicar mediante un dibujo.

12. Se asignan tres sistemas distintos de coordenadas a la misma recta. A tres puntos fijos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  de la recta se le asignan las siguientes coordenadas:

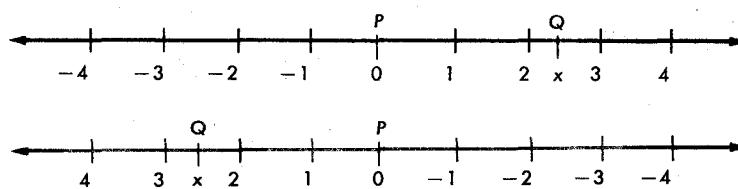
- En el sistema I, la coordenada de  $A$  es  $-6$  y la de  $B$  es  $-2$ .  
 En el sistema II, las coordenadas de  $A$  y  $C$  son  $-4$  y  $-3$ , respectivamente.  
 En el sistema III, las coordenadas de  $C$  y  $B$  son  $7$  y  $4$ , respectivamente.  
 (a) ¿Qué punto está entre los otros dos?  
 (b) Evaluar  $AB + AC + BC$ .

## 2-6. EL POSTULADO DE COLOCACIÓN DE LA REGLA, INTERPOSICIÓN, SEGMENTOS Y RAYOS

El postulado de la regla nos dice que podemos, sobre cualquier recta, fijar un sistema de coordenadas marcando una escala numérica. Evidentemente, esto puede hacerse de muchas maneras diferentes. Por ejemplo, dado un punto cualquiera  $P$  de la recta, podemos colocar el cero en  $P$  y seguir marcando el resto de la escala en cualquiera de los dos sentidos, como sigue:



Por tanto, si  $Q$  es otro punto cualquiera de la recta, podemos marcar la escala de manera que la coordenada de  $Q$  sea positiva, según se indica a continuación:



En cada caso, se marcó la escala de manera que  $x > 0$ .

Hacemos esta observación más formal, enunciándola como un postulado.

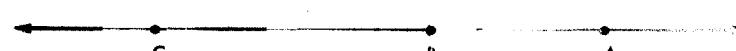
### POSTULADO 3. El postulado de colocación de la regla

*Dados dos puntos  $P$  y  $Q$  de una recta, se puede escoger el sistema de coordenadas de manera que la coordenada de  $P$  sea cero y la coordenada de  $Q$  sea positiva.*

Todos sabemos lo que significa decir que un punto  $B$  está entre dos puntos  $A$  y  $C$ . Significa que los tres puntos están en una recta y que están colocados de esta manera:



o de esta otra:



Hasta ahora, todo va bien. No creemos que nadie tenga dificultad alguna en comprender el significado de la palabra *entre*, una vez se hayan presentado varios dibujos. Pero, en el Capítulo 1, prometimos que definiríamos todos nuestros términos geométricos, con la excepción de *punto*, *recta* y *plano*. Así, pues, debemos cumplir nuestra promesa, dando una definición matemática de *entre* que conlleve la idea que tenemos en mente. Esto se hace con facilidad.

### Definición

$B$  está *entre*  $A$  y  $C$ , si (1)  $A$ ,  $B$  y  $C$  son puntos distintos de una misma recta, y  
(2)  $AB + BC = AC$ .

Es fácil comprobar que esta definición, en efecto, describe la idea que se trata de describir.

Sin embargo, hay un detalle un tanto sutil en la manera de enunciar la definición. Consiste en el empleo de la palabra *si*. Cuando en una definición se enlazan dos cláusulas mediante la palabra *si*, las dos cláusulas deben considerarse completamente equivalentes. Así, si sabemos que  $B$  está entre  $A$  y  $C$ , podemos concluir que las condiciones (1) y (2) se cumplen; y si sabemos que (1) y (2) se cumplen, podemos concluir que  $B$  está entre  $A$  y  $C$ . Este empleo de la palabra *si* es especial, porque es diferente del empleo que se le da en el lenguaje corriente. Tampoco se emplea de ese modo en los postulados y teoremas. Solamente en definiciones la palabra *si* significa *es equivalente a*.

### Conjunto de problemas 2-6A

1. Considérese un sistema de coordenadas en una recta. Los puntos  $R$  y  $S$  tienen coordenadas  $x$  y  $y$ , respectivamente. Se aplica el postulado de colocación de la regla, es decir, se altera la escala, de manera que la coordenada de  $R$  sea 0 y la coordenada de  $S$  sea un número positivo. Indicar cuál será ese número positivo, si los valores de  $x$  y  $y$  son los siguientes:

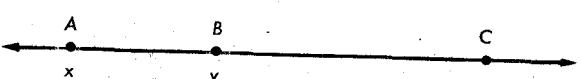
- (a)  $x = -3$ ,  $y = 4$ . (b)  $x = -4$ ,  $y = -10$ .  
(c)  $x = 8$ ,  $y = -2$ . (d)  $x = \frac{9}{2}$ ,  $y = -4$ .  
(e)  $x = 5.2$ ,  $y = 6.1$ . (f)  $x = a$ ,  $y = b$ .

2.  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres puntos de una recta.  $AC = BC = 5$ . La coordenada de  $C$  es 8 y la coordenada de  $A$  es mayor que la coordenada de  $B$ . ¿Cuáles son las coordenadas de  $A$  y  $B$ ?

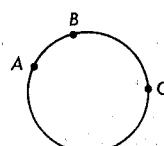
3.  $A, B$  y  $C$  son tres puntos de una recta.  $AC = BC = 10$ . La coordenada de  $C$  es 8 y la coordenada de  $A$  es mayor que la coordenada de  $B$ . ¿Cuáles son las coordenadas de  $A$  y  $B$ ?
4.  $M, N$  y  $P$  son tres puntos de una recta.  $MN = 7$ ,  $NP = 9$  y  $MP = 2$ . La coordenada de  $M$  es 3. Indicar cuáles son las coordenadas de  $N$  y  $P$ , si:  
 (a) la coordenada de  $M$  es menor que la de  $N$ ;  
 (b) la coordenada de  $M$  es mayor que la de  $N$ .
5. Supongamos que  $R, S$  y  $T$  son tres puntos de una recta. ¿Qué relación debe existir entre  $RS, ST$  y  $RT$ , si  $R$  está entre  $S$  y  $T$ ?
6.  $P, Q$  y  $R$  son tres puntos de una recta. Si  $PQ = 12$ ,  $PR = 7$  y  $QR = 5$ , ¿qué punto está entre los otros dos? ¿Qué postulado o definición sirve de fundamento a la respuesta?
7.  $G, H$  y  $K$  son tres puntos de una recta. Las coordenadas de  $G$  y  $H$  son 4 y  $-3$ , respectivamente. Si  $H$  está entre  $G$  y  $K$ , y  $GK = 13$ , ¿cuál es la coordenada de  $K$ ?
- \* 8.  $A, E$  y  $K$  son tres puntos de una recta. Las coordenadas de  $A$  y  $K$  son  $\sqrt{2}$  y  $-\sqrt{18}$ , respectivamente. Si  $AE = EK$ , ¿cuál es la coordenada de  $E$ ?
- \* 9.  $A, B$  y  $C$  son tres puntos de una recta y sus coordenadas son  $a, b$  y  $c$ , respectivamente. Si  $|a - c| + |c - b| = |a - b|$ , ¿qué punto está entre los otros dos? Justifíquese la respuesta.
- \* 10. ¿Es el siguiente enunciado una definición de interposición para los puntos de una recta?  $F, G$  y  $H$  son puntos distintos de la misma recta y  $FG + GH = FH$ , si  $G$  está entre  $F$  y  $H$ .  
 ¿En qué difiere este enunciado de la definición presentada en el texto?
- \* 11. Si  $A, B$  y  $C$  son tres puntos de una circunferencia, ¿puede decirse qué punto está entre los otros dos? Comentar esto.

Las dos siguientes afirmaciones son evidentes:

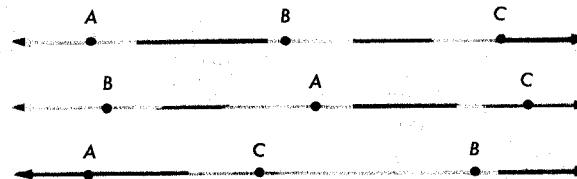
(1) Sean  $A, B$  y  $C$  tres puntos de una recta, con coordenadas  $x, y$  y  $z$ :



Si  $x < y < z$ , entonces  $B$  está entre  $A$  y  $C$ .



- (2) Si  $A, B$  y  $C$  son tres puntos distintos de la misma recta, entonces exactamente uno de ellos está entre los otros dos.



En efecto, las dos afirmaciones anteriores pueden demostrarse mediante el postulado de la regla. Sin esta demostración, pueden considerarse las dos afirmaciones como postulados.

Ahora, hemos llegado a una etapa en la cual necesitamos el siguiente postulado:

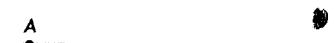
#### POSTULADO 4. Postulado de la recta

*Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene.*



La recta que contiene los puntos  $A$  y  $B$  se denota por  $\overleftrightarrow{AB}$ . Aquí, la raya con dos puntas de flecha sobre las letras  $A$  y  $B$  se supone que nos recuerde la figura que utilizamos para representar rectas. La notación sugiere que la recta se determina al nombrar los puntos  $A$  y  $B$ , y esto es exactamente lo que nos acaba de decir el postulado de la recta. Desde luego, algunas veces, es más sencillo denotar la recta por una letra como  $L, W$ , u otra cualquiera.

Un segmento de recta se representa así:



Una descripción más precisa se da mediante las siguientes definiciones:

#### Definiciones

Para dos puntos cualesquiera  $A$  y  $B$ , el segmento  $\overline{AB}$  es el conjunto de los puntos  $A$  y  $B$ , y de todos los puntos que están entre  $A$  y  $B$ . Los puntos  $A$  y  $B$  se llaman los extremos de  $\overline{AB}$ .

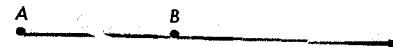
En el símbolo  $\overline{AB}$ , la raya horizontal sobre las letras se supone que nos recuerde la figura que utilizamos para representar un segmento. Obsérvese que hay una gran diferencia entre el segmento  $\overline{AB}$  y la distancia  $AB$ . En efecto, son conceptos completamente diferentes:  $\overline{AB}$  es una figura geométrica, es decir, un conjunto de

puntos, mientras que  $AB$  es un número que da la medida de la distancia entre los extremos.

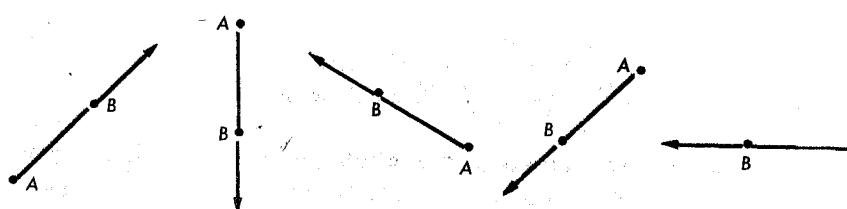
### Definición

El número  $AB$  se llama la *longitud* del segmento  $\overline{AB}$ .

Un rayo es una figura que se representa así:



Mediante la figura, se indica que el rayo empieza en  $A$ , pasa por  $B$  en línea recta, y sigue indefinidamente en el mismo sentido. En el símbolo para representar un rayo, la flecha siempre se dibuja apuntando hacia la derecha, no importa cuál sea el sentido del rayo. Por ejemplo, todos los rayos representados a continuación se denotan por  $\overrightarrow{AB}$ :

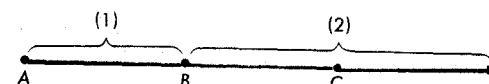


Habiendo explicado intuitivamente lo que es un rayo, procedemos a dar una definición matemática.

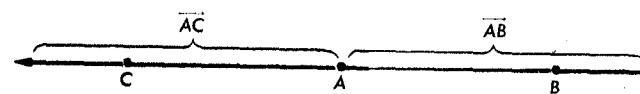
### Definiciones

Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de una recta  $L$ . El *rayo*  $\overrightarrow{AB}$  es el conjunto de puntos que es la reunión de (1) el segmento  $\overline{AB}$  y (2) el conjunto de todos los puntos  $C$  para los cuales es cierto que  $B$  está entre  $A$  y  $C$ . El punto  $A$  se llama el *extremo* de  $\overrightarrow{AB}$ .

Las dos partes del rayo se representan así:



Si  $A$  está entre  $B$  y  $C$  en  $L$ , entonces los dos rayos  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  "tendrán sentidos opuestos":

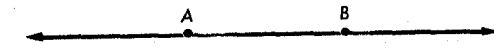


### Definición

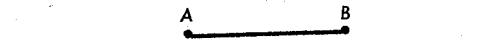
Si  $A$  está entre  $B$  y  $C$ , entonces  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  se llaman *rayos opuestos*.

Obsérvese que un par de puntos  $A$  y  $B$  determina, por lo menos, seis figuras geométricas y un número. Las seis figuras geométricas son:

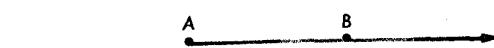
La recta  $\overleftrightarrow{AB}$



El segmento  $\overline{AB}$



El rayo  $\overrightarrow{AB}$



El rayo opuesto a  $\overrightarrow{AB}$



El rayo  $\overrightarrow{BA}$



El rayo opuesto a  $\overrightarrow{BA}$



Desde luego, el número determinado por  $A$  y  $B$  es la distancia  $AB$ .

### Conjunto de problemas 2-6B

1.  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres puntos de una recta con coordenadas 7, 3 y 12, respectivamente. ¿Qué punto está entre los otros dos?
2.  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son tres puntos de una recta con coordenadas  $-5$ ,  $-\sqrt{4}$  y  $-\sqrt{12}$ , respectivamente. ¿Qué punto está entre los otros dos?
3.  $G$ ,  $H$  y  $K$  son tres puntos de una recta. ¿Cuáles de los siguientes enunciados pueden ser ciertos?
  - (a)  $K$  está entre  $G$  y  $H$ , y  $H$  está entre  $G$  y  $K$ .
  - (b)  $H$  está entre  $K$  y  $G$ , y  $H$  está entre  $G$  y  $K$ .
  - (c)  $G$  está entre  $H$  y  $K$ , y  $K$  está entre  $G$  y  $H$ .
  - (d)  $K$  está entre  $H$  y  $G$ , y  $G$  está entre  $K$  y  $H$ .
  - (e)  $G$  está entre  $K$  y  $H$ , y  $G$  está entre  $H$  y  $K$ .
4. Si tres puntos están en una recta, ¿cuántos de ellos no están entre los otros dos?
5. Tres puntos de una recta,  $R$ ,  $S$ ,  $T$ , tienen coordenadas  $a$ ,  $b$  y  $a+b$ , respectivamente;  $a > 0$  y  $a > b$ . Indicar qué punto está entre los otros dos, si:
  - (a)  $b > 0$ .
  - (b)  $b < 0$ .
  - (c)  $b = 0$ .

6.  $D, E$  y  $F$  son tres puntos que no están en una recta. ¿Cuántas rectas determinan? ¿Cuáles son?
7.  $D, E, F$  y  $G$  son cuatro puntos tales que tres cualesquiera de ellos no están en una recta. ¿Cuántas rectas determinan? ¿Cuáles son?
8.  $P, Q$  y  $R$  son tres puntos. ¿Cuántos segmentos determinan? ¿Cuáles son? ¿Cuántas rectas determinan?
9. (a) ¿Es  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$ ? ¿Por qué?  
 (b) ¿Es  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ ? ¿Por qué?  
 (c) ¿Es  $\overline{AB} = \overline{BA}$ ? ¿Por qué?
10. ¿Es  $\overline{AB} = AB$ ? ¿Por qué? ¿Qué es  $AB$ ?
11. (a) Copiar el siguiente párrafo y escribir sobre cada par de letras el símbolo apropiado, si lo hay:  $XZ$  contiene los puntos  $Y$  y  $V$ , pero  $XZ$  no contiene ni a  $Y$  ni a  $V$ .  $V$  pertenece a  $XZ$ , pero no así  $Y$ .  $YZ + ZV = YV$ .  
 (b) Hacer un dibujo que muestre la posición relativa de los cuatro puntos nombrados en la parte (a).
12. Si  $\overrightarrow{RS}$  es opuesto a  $\overrightarrow{RT}$ , ¿cuál de los puntos  $R, S, T$  está entre los otros dos?
13. ¿Cuál es la intersección de  $\overrightarrow{CD}$  y  $\overrightarrow{DC}$ ? ¿Y la de  $\overleftrightarrow{CD}$  y  $\overrightarrow{DC}$ ?
14. Si  $A, B$  y  $C$  son tres puntos de una recta tales que  $AC + BC = AB$ , ¿cuál es la intersección de  $\overrightarrow{CB}$  y  $\overrightarrow{BA}$ ? ¿De  $\overrightarrow{AC}$  y  $\overrightarrow{AB}$ ? ¿Y la de  $\overrightarrow{CA}$  y  $\overrightarrow{CB}$ ?
15. ¿Es el siguiente enunciado una definición correcta del rayo  $\overrightarrow{AB}$ ?  
 El rayo  $\overrightarrow{AB}$  es el conjunto de todos los puntos  $D$  de  $\overrightarrow{AB}$  para los cuales no es cierto el enunciado “ $A$  está entre  $D$  y  $B$ ”.

El siguiente teorema es una consecuencia del postulado de colocación de la regla:

### Teorema 2-1. El teorema de localización de puntos

Sea  $\overrightarrow{AB}$  un rayo y sea  $x$  un número positivo. Entonces, existe exactamente un punto  $P$  de  $\overrightarrow{AB}$  tal que  $AP = x$ .

**Demuestra**. Por el postulado de colocación de la regla, podemos elegir un sistema de coordenadas en la recta  $\overleftrightarrow{AB}$ , de manera que la coordenada de  $A$  sea igual a 0 y la coordenada de  $B$  sea un número positivo  $r$ .

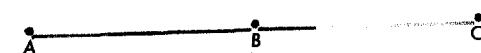


Sea  $P$  el punto cuya coordenada es el número dado  $x$ . Entonces,  $P$  está en  $\overrightarrow{AB}$ , porque  $x > 0$ ; y  $AP = |x - 0| = |x| = x$ . (Por definición de valor absoluto,  $|x| = x$  cuando  $x > 0$ .) Como solamente un punto del rayo tiene coordenada  $x$ , sólo un punto del rayo estará a una distancia  $x$  de  $A$ .

(Obsérvese que esta demostración es análoga al procedimiento que utilizaríamos si dibujáramos el rayo en una hoja de papel y localizáramos el punto  $P$  con una regla. Colocaríamos el punto cero de la regla en  $A$  y entonces marcaríamos el punto correspondiente al número  $x$  en la escala.)

### Definición

Un punto  $B$  se llama *punto medio* de un segmento  $\overline{AC}$ , si  $B$  está entre  $A$  y  $C$  y  $AB = BC$ .



### Teorema 2-2

Todo segmento tiene exactamente un punto medio.

**Demuestra**. Nos interesa obtener un punto que satisfaga las siguientes condiciones:

$$AB + BC = AC, AB = BC.$$

Las dos ecuaciones nos dicen que

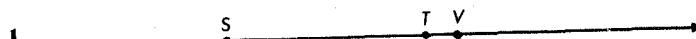
$$AB = \frac{AC}{2}.$$

Por el teorema anterior, hay exactamente un punto  $B$  del rayo  $\overrightarrow{AC}$  que está a la distancia  $AC/2$  de  $A$ . Por consiguiente,  $\overline{AC}$  tiene exactamente un punto medio.

### Definición

Decimos que el punto medio de un segmento *biseca* al segmento.

### Conjunto de problemas 2-6C



En  $\overrightarrow{ST}$ ,  $S, T$  y  $V$  son puntos distintos. ¿Será posible que  $ST = SV$ ? ¿Por qué?

2.  $P$  es un punto de una recta y  $n$  es un número positivo. ¿Cuántos puntos de la recta están a una distancia  $n$  de  $P$ ? ¿Qué definiciones o teoremas sirven de fundamento a la respuesta?

3.  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres puntos de una recta. La coordenada de  $A$  es 0 y la coordenada de  $C$  es 6. Si  $B$  es el punto medio de  $\overline{AC}$ , ¿cuál es la coordenada de  $B$ ?

4.  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres puntos de una recta. Las coordenadas de  $A$  y  $B$  son  $-2$  y  $8$ , respectivamente. Si  $C$  biseca a  $\overline{AB}$ , ¿cuál es la coordenada de  $C$ ?

5. La coordenada de  $B$ , el punto medio de  $\overline{AC}$ , es 5. Si la coordenada de  $A$  es mayor que la coordenada de  $C$ , y si  $BC = 9$ , ¿cuáles son las coordenadas de  $A$  y  $C$ ?

6. ¿Puede definirse el punto medio de una recta?

7. (a) Si las coordenadas de  $P$  y  $Q$  son 4 y 10, respectivamente, y  $M$  biseca a  $\overline{PQ}$ , ¿cuál es la coordenada de  $M$ ?

(b) ¿Qué palabra (o palabras) completa el siguiente enunciado?

Si  $M$  es el punto medio de  $\overline{PQ}$ , entonces la coordenada de  $M$  es la \_\_\_\_\_ de las coordenadas de  $P$  y  $Q$ .

8. ¿Por qué no constituye el siguiente enunciado una definición del punto medio de un segmento?

Un punto  $B$  se llama el punto medio de un segmento  $\overline{AC}$ , si  $AB = BC$ .

9. (a) Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres puntos distintos y  $AB + BC = AC$ , ¿cuál es la relación entre los tres puntos?

(b) Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres puntos distintos, ¿podrá ser cierto que  $AB + BC > AC$ ? Si no puede ser cierto, explicar por qué. Si es cierto, ¿cuál es la relación entre  $A$ ,  $B$  y  $C$ ?

## 2-7. CAMBIOS EN LA UNIDAD DE DISTANCIA

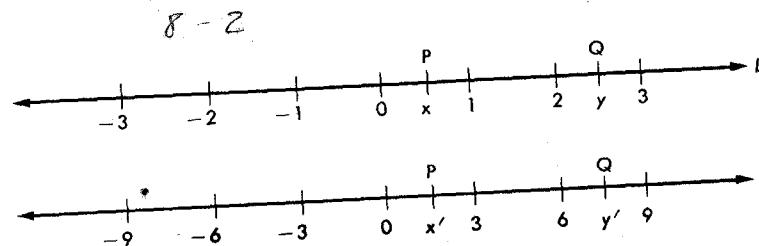
En la sección 2-4, explicamos que al tratar problemas de geometría podemos elegir una unidad cualquiera de distancia, siempre que en un problema particular utilicemos consistentemente la unidad elegida. Por otra parte, estamos en libertad de empezar de nuevo, utilizando una nueva unidad en cualquier momento.

Por ejemplo, supongamos que la distancia dada por el postulado de la distancia viene medida en yardas, de manera que para dos puntos cualesquiera,  $P$  y  $Q$ , el número  $PQ$  es el número de yardas entre  $P$  y  $Q$ . Si decidimos que es mejor utilizar

pies, debemos multiplicar todas las distancias por 3. Es decir, si  $(PQ)'$  [se pronuncia "PQ prima"] es la nueva distancia entre  $P$  y  $Q$ , entonces

$$(PQ)' = 3PQ.$$

La nueva distancia es tan correcta como la otra. El postulado de la regla aún es válido para la nueva distancia, como lo era para la otra.



En cada recta  $L$ , hay un sistema de coordenadas en el cual

$$PQ = |y - x|.$$

Para obtener un sistema de coordenadas que sea apropiado para la nueva distancia, lo único que hacemos es multiplicar por 3 cada una de las coordenadas originales. Así, en la figura,  $x' = 3x$  y  $y' = 3y$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} |y' - x'| &= |3y - 3x| \\ &= 3|y - x| \\ &= 3PQ \\ &= (PQ)', \end{aligned}$$

tal como debe ser.

De hecho, empezando con dos puntos  $A$  y  $B$  cualesquiera, podemos elegir una nueva distancia de manera que  $(AB)' = 1$ . Lo que hacemos es dividir por  $AB$  todas las distancias originales, es decir,

$$(PQ)' = \frac{PQ}{AB}.$$

Entonces,

$$(AB)' = \frac{AB}{AB} = 1,$$

que es lo que deseábamos. Para obtener un sistema de coordenadas en una recta,

que sea apropiado para la nueva distancia  $(PQ)'$ , dividimos por  $AB$  todas las coordenadas originales. Es decir,

$$x' = \frac{x}{AB}, \quad y' = \frac{y}{AB}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |y' - x'| &= \left| \frac{y}{AB} - \frac{x}{AB} \right| \\ &= \frac{|y - x|}{AB} \\ &= \frac{PQ}{AB} \\ &= (PQ)', \end{aligned}$$

como debe ser.

### Conjunto de problemas 2-7

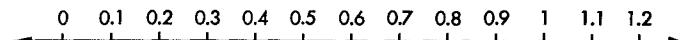
1.



En la figura, si  $AB = 3$  y  $AB = BC = CD = DE = EF$ , entonces  $AF = 15$ . Si  $(AB)'$  es la nueva distancia entre  $A$  y  $B$  para la cual se empleó  $AB$  como unidad, ¿cuál será la distancia  $(AF)'$ ?

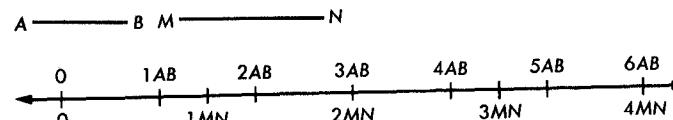
- En el problema 1, si  $(AC)'$  es la distancia entre  $A$  y  $C$  para la cual se emplea  $AC$  como unidad, ¿cuál será la distancia  $(AE)'$ ?; ¿la distancia  $(A^c)'$ ?; ¿y la distancia  $(AB)'$ ?
  - Considerar los siguientes dos enunciados y, para cada uno, decidir si la validez del enunciado depende de una elección especial de la unidad de distancia:
    - Si  $A, B, C, D, E$  y  $F$  son puntos distintos de una recta tales que  $AB = BC = CD = DE = EF$ , entonces  $AC = BD = CE = DF$ .
    - Si  $A, B, C, D, E$  y  $F$  son puntos distintos de una recta tales que  $AB = BC = CD = DE = EF$ , entonces  $AF$  es exactamente divisible por 5. (Es decir,  $AF/5$  es un entero.)
- ¿Cuál de los enunciados podría considerarse más "utilizable"?

4.



El sistema de coordenadas indicado en la figura funciona cuando la distancia se mide en metros. Copiar la figura en una hoja de papel y, colocando numerales debajo de la recta, indicar un sistema de coordenadas que funcione cuando la distancia se mide en decímetros. Hacer lo mismo si la distancia se mide en centímetros y en medios centímetros.

5.

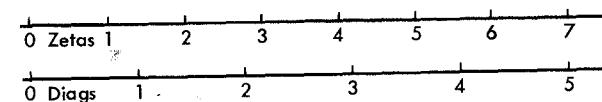


En la figura, la recta está marcada con dos escalas. En la escala superior, se utiliza la longitud de  $AB$  como unidad; en la escala inferior, se utiliza la longitud de  $MN$  como unidad. Obsérvese que  $6AB = 4MN$ .

- ¿Cuál es la razón de  $AB$  a  $MN$ ?
- ¿Cuál es la razón de  $MN$  a  $AB$ ?
- ¿Cuántas veces  $AB$  es igual a  $3MN$ ?
- ¿Cuántas veces  $MN$  es igual a  $4AB$ ?
- Completar la siguiente tabla:

$$\begin{array}{ll} 1AB = \underline{\hspace{2cm}} MN. & 1MN = \underline{\hspace{2cm}} AB. \\ 2AB = \underline{\hspace{2cm}} MN. & 2MN = \underline{\hspace{2cm}} AB. \\ 3AB = \underline{\hspace{2cm}} MN. & 3MN = \underline{\hspace{2cm}} AB. \\ 4AB = \underline{\hspace{2cm}} MN. & 4MN = \underline{\hspace{2cm}} AB. \\ 5AB = \underline{\hspace{2cm}} MN. & xMN = \underline{\hspace{2cm}} AB. \\ 6AB = \underline{\hspace{2cm}} MN. & \\ xAB = \underline{\hspace{2cm}} MN. & \end{array}$$

- Al excavar en las ruinas de una antigua civilización, un grupo de arqueólogos encontró trozos de dos reglas viejas marcadas con símbolos numéricos, pero en cada una se utilizaba una unidad de medida diferente. Los arqueólogos llamaron una de las escalas la "escala Zeta", porque en la regla aparecía tallado un símbolo parecido a una "Z". Después de experimentar con las dos reglas, determinaron que la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 zeta era la unidad de medida de la otra escala. Así, pues, llamaron esta escala la "escala Diags". Entonces, utilizando la relación de Pitágoras para un triángulo rectángulo, supieron que  $1 \text{ diag} = \sqrt{2} \text{ zetas}$ . A continuación, se presenta un diagrama de las dos escalas:



- ¿Cuál es la medida en zetas de un segmento cuya medida en diags es 1?; 2?; 5?
- Hacer una tabla para pasar de diags a zetas, que llegue hasta 10 diags.
- ¿Cuál es la medida en diags de un segmento cuya medida en zetas es 1?; 4?; 5?; 8?;  $n$ ?

- (d) Completar la siguiente tabla para pasar de zetas a diag, hasta 10 zetas.

Número de zetas	Número de diag	Aproximación decimal
1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.707
2	$\sqrt{2}$	1.414
3	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

### Repaso del capítulo

1. Sea  $A$  el conjunto de todos los meses del año cuyos nombres empiezan con la letra J. Sea  $B$  el conjunto de todos los meses del año que tienen exactamente 30 días. Sea  $C$  el conjunto de todos los meses del año cuyos nombres empiezan con la letra F.

- (a) ¿Cuál es la intersección de  $A$  y  $B$ ?  
 (b) ¿Cuál es la reunión de  $A$  y  $C$ ?  
 (c) ¿Cuál es la intersección de  $B$  y  $C$ ?  
 (d) ¿Es  $C$  un subconjunto del conjunto  $A$ ? ¿Del conjunto  $B$ ? ¿Y del conjunto  $C$ ?

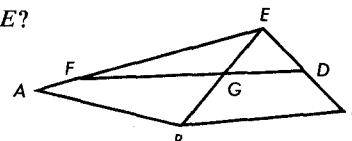
2. (a) ¿Cuál es la intersección de  $\overline{FD}$  y  $\overline{BE}$ ?

- (b) ¿Cuál es la intersección de  $\overline{AE}$  y el triángulo  $FGE$ ?

- (c) ¿Cuál es la reunión de  $\overline{ED}$  y  $\overline{DC}$ ?

- (d) ¿Cuál es la reunión de  $\overline{BG}$  y  $\overline{BE}$ ?

- (e) ¿Cuál es la intersección de  $\overline{AB}$  y  $\overline{EG}$ ?



3. (a) ¿Cuántos cuadrados tiene un número positivo dado?

- (b) ¿Cuál es el cuadrado de 4?

- (c) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene un número positivo dado?

- (d) ¿Es  $\sqrt{4}$  negativo?

4. Expresar los siguientes números sin el símbolo de valor absoluto:

- |                  |                  |                 |
|------------------|------------------|-----------------|
| (a) $ -6 $       | (b) $ 5 - 7 $    | (c) $ 5  -  7 $ |
| (d) $ -5 $       | (e) $ n $        | (f) $ -n $      |
| (g) $ n + (-n) $ | (h) $ n  +  -n $ |                 |

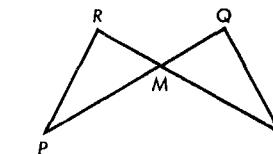
5. (a) Si  $a < b$ , entonces  $a - b$  es \_\_\_\_\_.

- (b) Si  $a = b$ , entonces  $a - b$  es \_\_\_\_\_.

- (c) Si  $a > b$ , entonces  $a - b$  es \_\_\_\_\_.

6. (a) ¿Qué ecuación define las posiciones relativas de los puntos  $P$ ,  $M$  y  $Q$ ?

- (b) ¿En qué condiciones sería  $M$  el punto medio de  $\overline{RS}$ ?



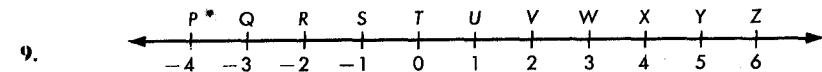
7. Cuatro puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se disponen a lo largo de una recta de manera que  $AC > AB$  y  $BD < BC$ . Hacer un dibujo de los cuatro puntos colocados de la manera indicada. ¿Habrá más de un orden posible? Explíquese.

8.  $G$  es el conjunto de todos los pares de números enteros  $x$  y  $y$  cuya suma es 21.  $H$  es el conjunto de todos los pares de números enteros  $x$  y  $y$  cuya diferencia es 5.

- (a) ¿Pertenece a  $G$  el par 15 y 6?

- (b) ¿Pertenece a  $H$  el par 9 y 4?

- (c) ¿Cuál es la intersección de  $G$  y  $H$ ?



- (a) ¿Cuál es la coordenada de  $W$ ? ¿Y la de  $S$ ?

- (b) ¿Cuál es el nombre del punto cuya coordenada es 0?; ¿cuya coordenada es -3?; ¿y cuya coordenada es 5?

- (c) Evaluar  $RT$ ,  $VZ$ ,  $TW$ ,  $TQ$ ,  $RW$ ,  $PZ$ ,  $XS$ ,  $YQ$ .

10. Se da un sistema de coordenadas en una recta. La coordenada de  $A$  es 6, la de  $B$  es -2, la de  $C$  es 1, la de  $D$  es  $x$ , y la de  $E$  es  $y$ .

- (a) ¿Qué punto tiene que estar entre otros dos puntos, y cuáles son éstos?

- (b) Evaluar  $AB$ ,  $BC$ ,  $AD$ ,  $CE$ ,  $BE$  y  $DE$ .

- (c) Si  $x - 6 > 0$  y  $y - (-2) < 0$ , ¿en qué orden están dispuestos los cinco puntos en la recta?

11. Se da un sistema de coordenadas en una recta. La coordenada de  $P$  es 7 y la coordenada de  $Q$  es -12. ¿Cuál es la coordenada de  $M$ , si  $MP = MQ$ ?

12. Indicar si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso:

- (a) -5 es un entero. (b)  $\frac{4}{7}$  es un número real.

- (c) 0 es un número racional. (d)  $\sqrt{8}$  es un número racional.

- (e)  $\sqrt{9}$  es un entero. (f)  $-\frac{31}{6}$  es un número racional.

- (g)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  es un número racional. (h)  $-x$  es un número negativo para todo número real  $x$ .

- (i)  $-\sqrt{\frac{4}{9}}$  es un número racional. (j)  $|x| = x$ .

13. Si la distancia de  $A$  a  $B$ , medida en centímetros, es  $k$ , ¿cuál será la distancia  $AB$  medida en metros?

14. Si la distancia de  $P$  a  $M$ , medida en yardas, es  $t$ , ¿cuánto es  $PM$ , en pulgadas?

15. Los pares de letras en el siguiente párrafo representan o bien números, o rectas, o segmentos de recta o rayos. Copiar el párrafo, colocando los símbolos apropiados.

$AB + BC = \overleftrightarrow{AC}$ .  $DB$  contiene los puntos  $A$  y  $C$ , pero  $DB$  no contiene ni el punto  $A$  ni el punto  $C$ .  $A$  pertenece a  $DB$ , pero  $C$  no.

Hacer un dibujo que muestre las posiciones relativas de los cuatro puntos.

16. Si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son puntos distintos tales que  $\overleftrightarrow{AC}$  contiene a  $B$  y  $\overleftrightarrow{BD}$  contiene a  $C$ , ¿cuáles de los siguientes enunciados tienen que ser ciertos?

- (a)  $B$  está entre  $A$  y  $C$ . (b)  $\overleftrightarrow{BC}$  contiene a  $A$ .  
 (c)  $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BD}$ . (d)  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{BD}$  se intersecan en  $B$  y  $C$  solamente.  
 (e)  $\overleftrightarrow{AD}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$  no se intersecan. (f)  $\overrightarrow{AC}$  es opuesto a  $\overrightarrow{DB}$ .

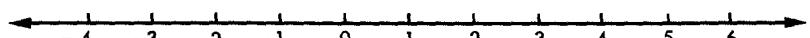
17. Se da un sistema de coordenadas en  $\overleftrightarrow{AB}$  tal que  $\overleftrightarrow{AB}$  es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas  $x$  satisfacen la condición  $-5 \leq x \leq 7$ . La coordenada de  $A$  es menor que la coordenada de  $B$ .

- (a) ¿Cuál es la coordenada del extremo de  $\overrightarrow{AB}$ ? ¿Del extremo de  $\overrightarrow{BA}$ ? ¿Y del extremo del rayo opuesto a  $\overrightarrow{BA}$ ?  
 (b) ¿Cuál es la coordenada del punto medio de  $\overleftrightarrow{AB}$ ?

18. (a) Dibujar dos segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  para los cuales la intersección de  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  es el conjunto vacío, pero la intersección de  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{CD}$  es exactamente un punto.

- (b) Dibujar dos segmentos  $\overline{PQ}$  y  $\overline{RS}$  para los cuales la intersección de  $\overline{PQ}$  y  $\overline{RS}$  es el conjunto vacío, pero  $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{RS}$ .

19. La primera numeración de los puntos de la recta siguiente representa un sistema de coordenadas. Basándose en el postulado de la regla y en el postulado de colocación de la regla, determinar cuáles de las numeraciones dadas en (a) a (e) no representan sistemas de coordenadas.

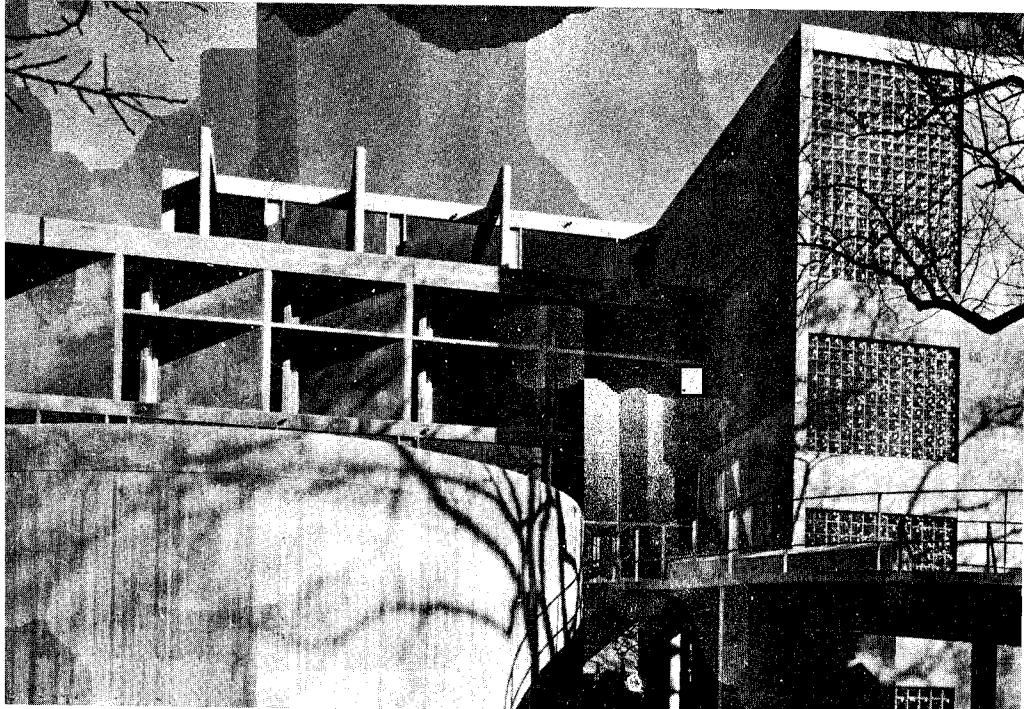


- (a) -4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6  
 (b) -6 +5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4  
 (c) 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0  
 (d) -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0  
 (e) 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5

20. Para cada uno de los siguientes enunciados, considerar el conjunto de puntos de una recta cuyas coordenadas  $x$  satisfacen la condición dada:

- (a)  $x \leq 3$ . (b)  $x = 1$ . (c)  $5 \geq x \geq 0$ .  
 (d)  $x \geq 1$ . (e)  $x = -4$ . (f)  $x \leq -2$  o  $x \geq 2$ .  
 (g)  $|x| \leq 2$ . (h)  $|x| \geq 0$ .  
 ¿Cuáles de los conjuntos es un rayo?; ¿un punto?; ¿una recta?; ¿y un segmento? Hacer un dibujo de cada una de las figuras.

# 3 | Rectas, planos y separación



## 3-1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior, hablábamos sólo acerca de rectas y la medida de distancias. De hecho, hablábamos acerca de las rectas individualmente, sin estudiar ninguna relación entre ellas. Empezaremos ahora el estudio de las rectas y los planos en el espacio. Recordemos que nuestros términos fundamentales no definidos son *punto*, *recta* y *plano*; las rectas y los planos son conjuntos de puntos.

### Definición

El conjunto de todos los puntos se llama *espacio*.

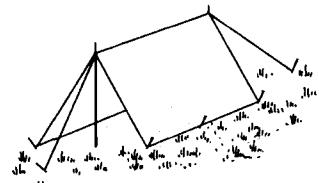
En la siguiente sección, explicaremos algunos de los términos que habremos de utilizar en el estudio de las rectas y los planos y enunciaremos algunos principios fundamentales referentes a ellos. La mayor parte de estos principios se enunciarán como postulados; otros como teoremas. En un capítulo posterior, veremos que todos los teoremas de este capítulo pueden demostrarse a base de los postulados. Pero, aquí, no nos ocuparemos de las demostraciones, excepto en un caso muy fácil. Todo lo que nos proponemos por el momento es puntualizar algunos principios fundamentales y aprender a dibujar representaciones de figuras en el espacio.

### Conjunto de problemas 3-1

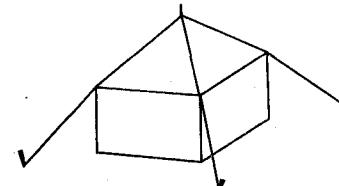
[*Nota:* Cuando se estudian relaciones entre puntos, rectas y planos en el espacio tridimensional, a menudo, es conveniente utilizar hojas de cartulina para representar planos, y un lápiz para representar una recta.]

1. Manténgase un brazo extendido hacia el frente. Considérense un punto *A* en la punta del dedo índice, y un punto *B* en la esquina superior derecha del frente del salón. ¿Cuántas rectas contienen a los puntos *A* y *B*? ¿Qué postulado justifica la respuesta?
2. Tómese un libro o una lámina de cartón duro. ¿Se podrá mantener el libro en una posición lija, si se coloca sobre las puntas de dos lápices? ¿Cuál es el número mínimo de lápices necesario para sostenerlo en esa forma?
3. ¿Pueden estar tres puntos en una sola recta? ¿Tendrán tres puntos que estar en una sola recta?
4. Sea la esquina de un escritorio, representación de un punto *P*, el interruptor de la luz en la pared, representación de un punto *Q* y una esquina del salón, representación de un punto *R*. ¿Habrá un plano que contenga los puntos *P*, *Q* y *R*?
5. ¿Cuál es el número mínimo de puntos necesario para determinar un plano? ¿Será cierto que tres puntos siempre determinan un plano?

6. En el esquema de una tienda de campaña, ¿qué segmentos de recta hay que imaginar a fin de completar el dibujo? ¿Cuál es la intersección de los planos que contienen los dos lados de la tienda?

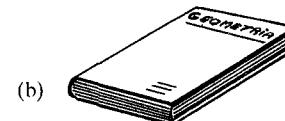


7. La tienda representada por el esquema de la derecha tiene piso cuadrado. ¿Qué segmentos de recta completarán el dibujo de la tienda?



8. Manténganse dos lápices juntos por sus puntas afiladas entre los dedos pulgar e índice. Si los lápices representan dos rectas que se intersecan, ¿cuántos planos contienen estas dos rectas?

9. ¿Cuál de los dos siguientes dibujos constituye una mejor representación de un libro? ¿Cómo habría que sostener un libro para que se viera como en el esquema (a)?; ¿y como en el esquema (b)?



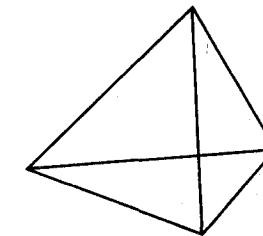
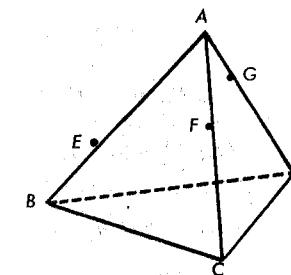
10. Se hizo una marca en el medio de una tabla de 4 metros de largo, es decir, se hizo la marca a 2 metros de cualquiera de los extremos de la tabla. Una persona aserró la tabla exactamente por la marca; no obstante, ninguno de los dos trozos resultantes midió 2 metros de largo. Aún más, la suma de las longitudes de los dos trozos no resultó igual que la longitud original de la tabla completa. ¿Cómo puede explicarse esto?

### 3-2. RECTAS, PLANOS Y REPRESENTACIONES

El dibujo de la izquierda en la página 57 es una representación de una pirámide triangular. Los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BD}$  y  $\overline{CD}$  se llaman las *aristas*. Obsérvese que la arista  $\overline{BD}$  se representó mediante una recta de trazos; esto se debe a que la arista quedaría oculta si la pirámide fuera sólida. Si la figura se dibujara como se muestra a la derecha, parecería un conjunto de puntos en un mismo plano.

Los puntos  $A$ ,  $E$ ,  $B$ ,  $C$  y  $F$  están todos en un mismo plano, a saber, el plano que contiene la cara superior delantera de la pirámide. Los puntos de un tal conjunto se dicen *coplanarios*. Desde luego, los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  no son coplanarios.

Los puntos  $A$ ,  $E$  y  $B$  están todos en una misma recta, a saber, la recta  $\overleftrightarrow{AB}$ . Tales puntos se dice que son *colineales* o que están *alineados*. Desde luego, los puntos  $A$ ,  $B$ ,



y  $C$  no están alineados. Análogamente,  $A$ ,  $F$  y  $C$  están alineados, pero,  $A$ ,  $F$  y  $G$  no lo están.

Ahora, presentaremos estas ideas más formalmente.

#### Definición

Los puntos de un conjunto están *alineados* o son *colineales*, si hay una recta que los contiene a todos.

#### Definición

Los puntos de un conjunto son *coplanarios*, si hay un plano que los contiene a todos.

[*Pregunta:* En la figura anterior de la izquierda, los puntos  $E$ ,  $F$  y  $G$  no están en una sola cara de la pirámide. ¿Podría deducirse que  $E$ ,  $F$  y  $G$  no son coplanarios?]

Para emplear la geometría a base del esquema descrito en el Capítulo 1, necesitamos postulados que expresen el significado real de nuestros términos no definidos: *punto*, *recta* y *plano*. Para las rectas, ya lo hemos hecho. El postulado de la regla constituye una buena descripción de cómo se ven las rectas cuando se las mira una por una. También, en el enunciado del postulado 4 en la página 41, hemos dicho que dos puntos cualesquiera determinan una recta.

#### POSTULADO 4. El postulado de la recta

*Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene.*

Ahora, queremos enunciar postulados que describan los planos y el espacio. El primer paso consiste en un postulado que garantiza la existencia en nuestra geometría de figuras del tipo representado al comienzo de esta sección.

#### POSTULADO 5

*(a) Todo plano contiene al menos tres puntos que no están alineados.*

*(b) El espacio contiene al menos cuatro puntos que no están en un plano.*

Esto es simplemente otra manera de decir que los planos son amplios y que el espacio no es llano.

Finalmente, observamos que el postulado de la recta da alguna información acerca de la intersección de rectas.

### Teorema 3-1

Si dos rectas diferentes se intersecan, su intersección contiene un punto solamente.

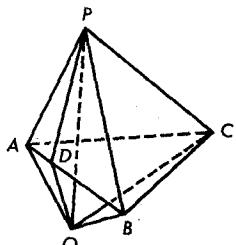
**Demostración.** Si dos rectas diferentes se intersecan en dos puntos diferentes  $P$  y  $Q$ , entonces habría dos rectas que contienen a los puntos  $P$  y  $Q$ . Pero, el postulado de la recta nos dice que esto no puede suceder.

De ahora en adelante, siempre que hablemos de *dos* rectas, o *dos* planos, entenderemos que las rectas o los planos son distintos. Es decir, cuando hablamos de dos cosas, entenderemos siempre que son, en realidad, dos cosas distintas. Pero, si decimos simplemente que  $P$  y  $Q$  son *puntos*, se admite la posibilidad de que  $P = Q$ .

### Conjunto de problemas 3-2

1. Mediante la inspección del siguiente dibujo de una figura tridimensional, decidir si los puntos de los conjuntos indicados a continuación (1) están alineados, (2) no están alineados, pero son coplanarios, o (3) no son coplanarios:

- (a)  $\{A, B, C, D\}$ .
- (b)  $\{A, D, B\}$ .
- (c)  $\{P, D, Q\}$ .
- (d)  $\{P, B, C\}$ .
- (e)  $\{A, B, C, Q\}$ .



2. ¿Cuántas rectas pueden contener un punto dado?; ¿dos puntos dados?; ¿y tres puntos dados cualesquiera?

3. Datos:  $P$  y  $Q$  son puntos distintos. La recta  $L_1$  contiene a  $P$  y a  $Q$ . La recta  $L_2$  contiene a  $P$  y a  $Q$ .

¿Qué podemos asegurar acerca de  $L_1$  y  $L_2$ ? ¿Qué postulado o teorema justifica la conclusión?

4. Datos:  $L_1$  y  $L_2$  son rectas distintas. El punto  $P$  está en  $L_1$  y en  $L_2$ . El punto  $Q$  está en  $L_1$  y en  $L_2$ .

¿Qué podemos asegurar acerca de  $P$  y  $Q$ ? ¿Qué postulado o teorema justifica la conclusión?

5. Enunciar una definición precisa de un conjunto de puntos no alineados.
6. Indicar cuántas rectas pueden dibujarse pasando por pares de los puntos distintos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , si:
  - (a)  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados;
  - (b) cada tres puntos no están alineados;
  - (c) los puntos no son coplanarios.
7. Dada una recta  $L$ , ¿cuántos planos en el espacio pueden contenerla?
8. Construir un modelo de la figura en el problema 1, utilizando palillos y cola.

### 3-3. RECTAS, PLANOS Y REPRESENTACIONES [CONTINUACIÓN]

El siguiente postulado describe la condición de "llaneza" de los planos:

#### POSTULADO 6

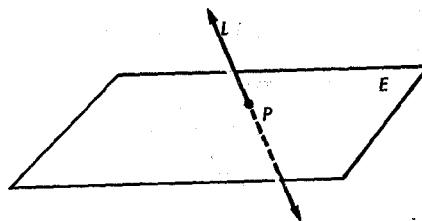
*Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces la recta está en el mismo plano.*

El siguiente teorema describe la intersección de las rectas y los planos:

### Teorema 3-2

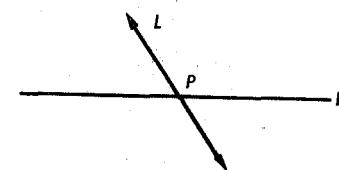
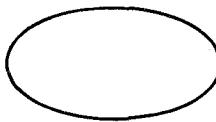
Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección contiene un solo punto.

(Más adelante, veremos que el teorema 3-2 no ofrece información nueva, pues se deduce del postulado 6 de la misma manera que el teorema 3-1 se deduce del postulado 4.)



En la figura, vemos una recta  $L$  que interseca a un plano  $E$  de la manera que indica el teorema 3-2. Veremos varias figuras como ésta; tales figuras deben examinarse cuidadosamente a fin de aprender a dibujarlas. Desde luego, para representar una recta, dibujamos primero un segmento de la recta y, luego, dibujamos puntos de recta, dibujamos primero un segmento de la recta y, luego, dibujamos puntos de

flechas en los extremos del mismo para indicar que la recta continúa indefinidamente. Por lo regular, se indica un plano mediante un rectángulo dibujado en el plano. Cuando miramos un rectángulo oblicuamente, como se supone que lo hagamos en la figura anterior, el rectángulo parece un paralelogramo. Análogamente, una circunferencia, vista en perspectiva, parece una elipse, como se indica a continuación, en la figura de la izquierda. Si nuestros ojos estuvieran en el plano del rectángulo, éste se vería simplemente como un segmento, según indica la figura de la derecha, y el dibujo sería correcto desde el punto de vista de la lógica, pero no sería instructivo.



El postulado 4 nos dijo que dos puntos determinan una recta. Para determinar un plano, se necesitan tres puntos no alineados.

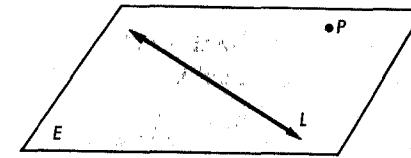
#### POSTULADO 7. El postulado del plano

*Tres puntos cualesquiera están al menos en un plano, y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un plano.*

Más brevemente, *tres puntos cualesquiera son coplanarios, y tres puntos cualesquiera no alineados determinan un plano.*

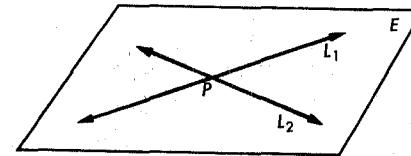
#### Teorema 3-3

Dada una recta y un punto fuera de ella, hay exactamente un plano que contiene a ambos.



#### Teorema 3-4

Dadas dos rectas que se intersecan, hay exactamente un plano que las contiene.



Finalmente, enunciamos el siguiente postulado:

#### POSTULADO 8

*Si dos planos diferentes se intersecan, su intersección es una recta.*

Quizás, parezca que habremos de continuar enunciando postulados indefinidamente, para describir nuestras ideas intuitivas acerca del espacio. Sin embargo, resultará que no es necesario hacer esto. En este libro, estudiaremos la geometría del espacio basándonos en sólo veinticuatro enunciados fundamentales. Todo lo demás puede deducirse de estos enunciados y, en este texto, aprenderemos cómo hacerlo.

No debemos considerar veinticuatro enunciados como un número grande de datos fundamentales. En realidad, es tan pequeño que hace la geometría completamente distinta de una ciencia como, por ejemplo, la biología. En la biología, veinticuatro datos no nos llevarían a ninguna parte; para obtener los miles de otros datos que se necesitan saber, tenemos que trabajar en el laboratorio, examinando plantas y animales reales. En vez de un laboratorio, la geometría emplea el razonamiento lógico, comenzando con un número muy pequeño de datos fundamentales.

#### Conjunto de problemas 3-3

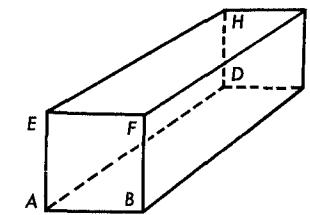
1. ¿Cuántos planos pueden contener un punto dado?; ¿dos puntos dados?; ¿y tres puntos dados?
2. En un piso liso, a veces cojeará una mesa de cuatro patas, mientras que una de tres patas siempre estará firme. Explíquese.
3. ¿Qué postulado ilustra la figura de la derecha?
4. Completar el enunciado: Dos rectas diferentes pueden intersecarse en \_\_\_\_\_, y \_\_\_\_\_ planos diferentes pueden intersecarse en \_\_\_\_\_.
5. Dato: El plano  $E$  contiene los puntos  $R$  y  $T$ . ¿Qué puede concluirse acerca de  $\overleftrightarrow{RT}$ ? ¿Qué postulado o teorema justifica la respuesta? Dibújese una figura para ilustrar este ejercicio.
6. Dibújese un plano  $E$ , utilizando un paralelogramo para indicar el mismo. Dibújese un segmento de recta que esté en el plano  $E$ . Dibújese un segmento de recta que interseque al plano  $E$  en un solo punto, pero que no interseque al otro segmento.
7. Si  $\overleftrightarrow{AB}$  y el plano  $F$  tienen los puntos comunes  $K$  y  $M$ , ¿qué puede concluirse acerca de  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $F$ ? ¿Por qué?
8. Una recta puede denotarse mediante dos de sus puntos. ¿Cuántos puntos de un plano tienen que emplearse para denotar el plano?
9. Se da que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están en el plano  $E$  y que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están en el plano  $F$ . ¿Se podrá concluir que  $E$  y  $F$  son un mismo plano? Explíquese.



10. Datos:  $L_1$  y  $L_2$  son dos rectas distintas.  $L_1$  está en el plano  $E$ .  $L_2$  está en el plano  $F$ .  $L_1$  y  $L_2$  se intersecan en el punto  $P$ . El punto  $Q$ , distinto de  $P$ , está en  $L_1$  y en  $F$ . El punto  $R$ , distinto de  $P$ , está en  $L_2$  y en  $E$ .

¿Qué puede concluirse acerca del plano  $E$  y del plano  $F$ ? ¿Qué postulados o teoremas justifican la respuesta?

11. Examíñese la figura de la derecha, de un sólido rectangular, hasta darse cuenta de cómo se dibujó para que se viera como una figura tridimensional. Entonces, ciérrese el libro y dibújese de memoria una figura como ésta. Practíquese hasta obtener resultados satisfactorios.



12. Despues de completar el problema 11, dibújese una figura de un cubo.

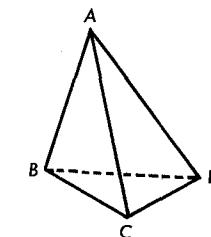
13. La figura que es la reunión de todos los segmentos cuyos extremos son cuatro puntos no coplanares, se llama pirámide triangular, o tetraedro. Los cuatro puntos son los vértices del tetraedro.

(a) Redactar una definición de una arista de un tetraedro.

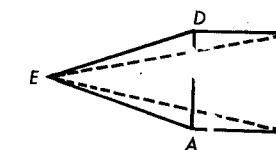
(b) ¿Cuántas aristas tiene el tetraedro? ¿Cuáles son?

(c) ¿Habrá algunos pares de aristas que no se intersequen?

(d) Una cara es una región triangular determinada por tres vértices cualesquiera. Nómbrense las cuatro caras. ¿Habrá algunos pares de caras que no se intersequen?



14. La figura de la derecha representa una pirámide cuadrada cuya base, un cuadrado, se supone que esté más cercana al lector. Nombrar los planos que determinan sus vértices. (Deberán indicarse siete planos.)



15. Considérense las siguientes definiciones:

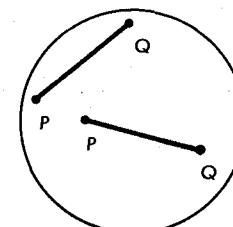
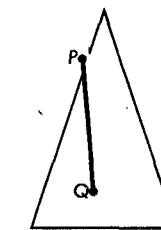
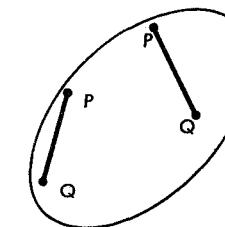
El espacio  $M$  es un conjunto cuyos únicos elementos son cuatro puntos no coplanares  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Una recta es un par de puntos cualesquiera que pertenecen al espacio  $M$ . Un plano es una terna de puntos cualesquiera pertenecientes al espacio  $M$ .

Mediante un examen cuidadoso de todos los pares y las ternas de puntos, muéstrese que el espacio  $M$  satisface a los postulados 4, 5, 6, 7 y 8, y a los teoremas 3-1, 3-2, 3-3 y 3-4. Un sistema tal se llama una geometría de cuatro puntos.

¿Qué postulado se incluyó en el texto, que nos asegura que el espacio corriente contiene una infinitud de puntos?

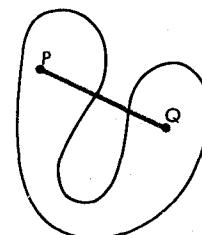
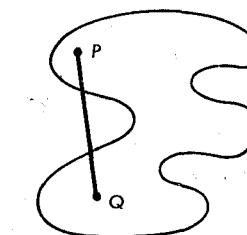
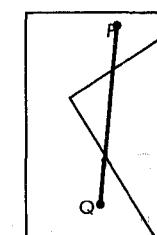
### 3-4. CONJUNTOS CONVEXOS

Un conjunto de puntos se llama *convexo*, si nunca hay que salir del conjunto para tomar un atajo. Por ejemplo, los conjuntos indicados a continuación son convexos:



Cada uno de estos conjuntos es una región completa del plano, no simplemente la frontera. En cada uno de ellos, siempre se puede pasar de un punto  $P$  cualquiera a otro punto  $Q$  cualquiera, moviéndose a lo largo de una recta, sin salir del conjunto. Examíñense los ejemplos presentados anteriormente.

Por otra parte, ninguno de los siguientes conjuntos es convexo:



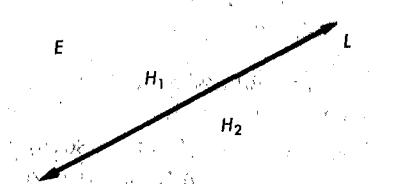
Hemos indicado por qué no lo son, dando ejemplos de pares de puntos  $P$  y  $Q$ , que no pueden unirse mediante segmentos que estén totalmente en el conjunto.

Enunciamos todo esto en una forma matemática mejor, mediante la siguiente definición:

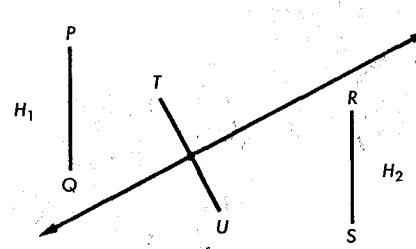
#### Definición

Un conjunto  $A$  se llama *convexo*, si para cada dos puntos  $P$  y  $Q$  del conjunto, todo el segmento  $\overline{PQ}$  está en  $A$ .

Los conjuntos acerca de los cuales hemos estado hablando hasta ahora son “pequeños”, pero un conjunto convexo puede ser muy extenso. Por ejemplo, todo plano es un conjunto convexo; y una recta de un plano divide al plano en dos conjuntos, cada uno de los cuales es convexo y se extiende indefinidamente. Estos dos conjuntos,  $H_1$  y  $H_2$ , se llaman *semiplanos* o *lados* de la recta  $L$ , y  $L$  se llama la *arista* o el *borde* de cada uno de ellos.



Los semiplanos son convexos, porque si dos puntos están al mismo lado de la recta, el segmento que los une nunca cruza la recta.



Por otra parte, si  $T$  y  $U$  son puntos en lados opuestos de la recta, el segmento  $\overline{TU}$  siempre interseca a la recta.

Ahora, resumimos las observaciones anteriores en un postulado y algunas definiciones.

#### POSTULADO 9. El postulado de separación del plano

*Se da una recta y un plano que la contiene. Los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos tales que*

- (1) *cada uno de los conjuntos es convexo, y*
- (2) *si  $P$  está en uno de los conjuntos y  $Q$  en el otro, entonces el segmento  $\overline{PQ}$  interseca a la recta.*

#### Definiciones

Dada una recta  $L$  y un plano  $E$  que la contiene, los dos conjuntos determinados por el postulado de separación del plano se llaman *semiplanos* o *lados* de  $L$ , y  $L$  se llama la *arista* o el *borde* de cada uno de ellos. Si  $P$  está en uno de los semiplanos y  $Q$  está en el otro, entonces decimos que  $P$  y  $Q$  están a lados opuestos de  $L$ .

El postulado nos dice dos cosas acerca del modo que una recta separa al plano en dos semiplanos:

- (1) *Si dos puntos están en el mismo semiplano, entonces el segmento que los une está en el mismo semiplano y, por tanto, nunca interseca a la recta.*
- (2) *Si dos puntos están en semiplanos opuestos, entonces el segmento que une los dos puntos siempre interseca a la recta.*

Mientras que una recta tiene solamente dos lados en un plano dado, toda recta tiene una infinidad de lados en el espacio. En la siguiente figura, se presentan cinco

de la infinidad de semiplanos en el espacio que tienen la recta  $L$  como arista.

[Pregunta: ¿Habrá alguna diferencia entre los siguientes dos enunciados?]

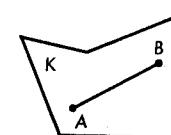
- (1)  $P$  y  $Q$  están en lados distintos de  $L$ .
  - (2)  $P$  y  $Q$  están en lados opuestos de  $L$ .]
- 
- Un plano separa al espacio exactamente del mismo modo que una recta separa a un plano.
- 
- Los dos conjuntos en que un plano separa al espacio se llaman *semiespacios*, o *lados* del plano. En la figura anterior, estos lados son  $H_1$  (encima del plano) y  $H_2$  (debajo del plano). Cada uno de los dos semiespacios es convexo. Si  $R$  está en uno de ellos y  $S$  está en el otro, el segmento  $\overline{RS}$  siempre interseca al plano.
- Nuevamente, resumimos lo que hemos dicho, mediante un postulado y algunas definiciones.
- #### POSTULADO 10. El postulado de separación del espacio
- Los puntos del espacio que no están en un plano dado forman dos conjuntos tales que*
- (1) *cada uno de los conjuntos es convexo, y*
  - (2) *si  $P$  está en uno de los conjuntos y  $Q$  está en el otro, entonces el segmento  $\overline{PQ}$  interseca al plano.*
- #### Definiciones
- Los dos conjuntos determinados por el postulado de separación del espacio se llaman *semiespacios*, y el plano dado se llama la *cara* de cada uno de ellos.
- Obsérvese que mientras toda recta en el espacio es la arista de una infinidad de semiplanos, todo plano en el espacio es cara de solamente dos semiespacios.

## Conjunto de problemas 3-4

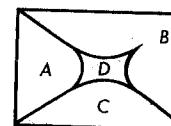
[Nota: Al resolver los problemas de este conjunto, utilícese el conocimiento intuitivo en los casos en que no se aplica nuestra estructura axiomática.]

- El alumno deberá estar preparado para analizar las siguientes preguntas oralmente:
  - ¿Es una recta un conjunto convexo? Explíquese.
  - ¿Es convexo un conjunto que consiste solamente en dos puntos? ¿Por qué?
  - Si le quitamos un punto a una recta, ¿formarán los puntos restantes un conjunto convexo?
  - ¿Es una circunferencia un conjunto convexo?
  - ¿Es el interior de una circunferencia un conjunto convexo?
  - ¿Es una superficie esférica un conjunto convexo?
  - ¿Es convexo el espacio encerrado por una superficie esférica?
  - ¿Separa un punto a un plano?; ¿al espacio?; ¿y a una recta?
  - ¿Separa un rayo a un plano? Y una recta, ¿lo separa? ¿Y un segmento?
  - ¿Pueden dos rectas en un plano separarlo en dos regiones?; ¿en tres regiones?; ¿en cuatro regiones?; ¿y en cinco regiones?

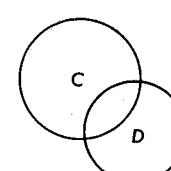
- Todo punto de  $\overline{AB}$  está contenido en el conjunto  $K$ . ¿Quiere decir eso que  $K$  es un conjunto convexo? Explíquese.



- ¿Es todo plano un conjunto convexo? Explíquese. ¿Qué postulado es indispensable en la explicación?



- ¿Cuáles de las regiones marcadas con letras mayúsculas son conjuntos convexos?



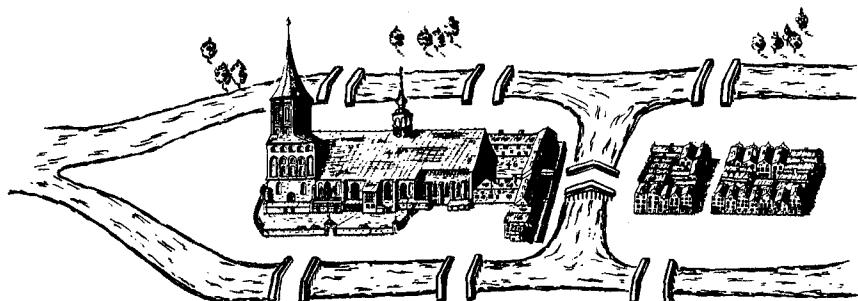
- Si le quitamos un punto a un plano, ¿será convexo el conjunto resultante?
- Los interiores,  $C$  y  $D$ , de las dos circunferencias son cada uno un conjunto convexo.
  - ¿Será su intersección un conjunto convexo?
  - ¿Será su reunión un conjunto convexo?
- Si  $L$  es una recta en el plano  $E$ , ¿será convexo el conjunto de todos los puntos de  $E$  que están a un lado de  $L$ ?

- Dibujar un cuadrilátero (una figura con cuatro lados) plano cuyo interior sea convexo. Dibujar uno cuyo interior no sea convexo.
- ¿Será convexo el conjunto que consiste en todos los puntos de una superficie esférica y todos los puntos en el interior de la superficie esférica?
- ¿Es un toro (una figura que tiene la forma de una rosquilla) un conjunto convexo?
- Dibujar dos semiplanos que tengan una arista común y que sean coplanarios. Dibujar dos que tengan una arista común, pero que no sean coplanarios.
- Dibujar dos semiplanos que sean coplanarios, pero que no tengan una arista común.
- $H_1$  y  $H_2$  son dos semiplanos que están contenidos en un plano. Indicar si la reunión de  $H_1$  y  $H_2$  es todo el plano cuando
  - $H_1$  y  $H_2$  tienen la misma arista. Explíquese.
  - la arista de  $H_1$  interseca a la arista de  $H_2$  exactamente en un punto. Explíquese.
- ¿En cuántos conjuntos separa a una recta, un punto de ella? ¿Qué nombre podría dársele a cada uno de estos conjuntos?
  - Utilizando la terminología desarrollada en la parte (a), redáctese un enunciado de separación de la recta parecido a los postulados 9 y 10.
- ¿En qué difiere un rayo de una semirrecta?
- ¿Podrán tres rectas en un plano separarlo en tres regiones?; ¿en cuatro regiones?; ¿en cinco regiones?; ¿en seis regiones?; ¿y en siete regiones?
- ¿En cuántos conjuntos separan al espacio dos planos que se intersecan? ¿Y dos planos paralelos?
- ¿Cuál es el número mayor de conjuntos en que tres planos distintos pueden separar al espacio? ¿Y el número menor?
- ¿Es el siguiente enunciado cierto o falso? La reunión de dos conjuntos convexos cualesquiera, que tienen al menos dos puntos comunes, es un conjunto convexo. Justifíquese la respuesta.
- Redactar una explicación rigurosa de por qué es cierto el siguiente enunciado: La intersección de dos conjuntos convexos cualesquiera, que tienen al menos dos puntos comunes, es un conjunto convexo. [Sugerencia: Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos comunes cualesquiera. ¿Qué conjuntos deben contener a  $\overline{PQ}$ ?]
- Dibujar cualquier cuerpo geométrico limitado por superficies planas, tal que el conjunto de puntos del interior de la figura no sea convexo.

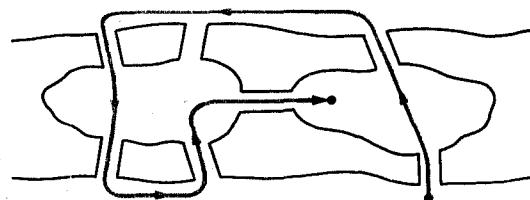
## 3-5. LOS SIETE PUENTES DE KÖNIGSBERG

Quizás, el alumno piense que no hay nada complicado en relación con la idea de cruzar calles, puentes, etc.; pero, en efecto, hay un problema famoso en matemáticas que trata acerca de la idea de cruzar y apenas contiene alguna otra idea.

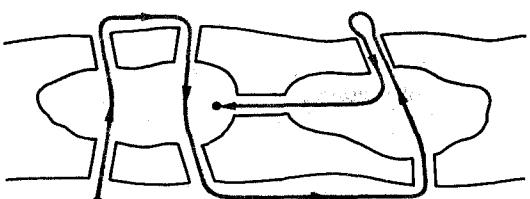
La ciudad de Königsberg está en la costa del mar Báltico, en la desembocadura del río Pregel. En el río, hay dos islas comunicadas entre sí y con las márgenes del río mediante siete puentes, como se ilustra a continuación:



Las personas que paseaban alrededor de las islas descubrieron que si partían de la margen sur del río, no podían proyectar su paseo de manera que se cruzara cada uno de los puentes exactamente una vez. Parecía que tenía que dejar de cruzarse un puente, por lo menos:

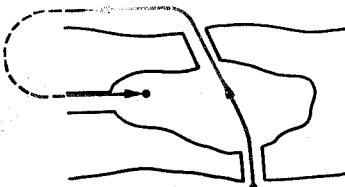


o cruzarse alguno de los puentes dos veces:



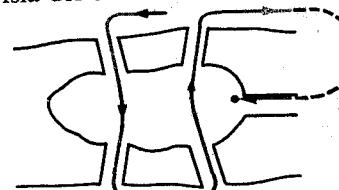
La gente estaba convencida de que no podía cruzarse cada puente exactamente una vez, pero nadie estaba seguro de ello. Finalmente, en el año 1735, alguien propuso el problema al gran matemático suizo, Leonhard Euler. Euler descubrió que los paseantes harían bien en abandonar su empresa y presentó el siguiente análisis del problema:

Primero, considérese la isla del este:



Hay tres puentes que conducen a ella. Puesto que se partió de la orilla sur, como requiere el problema, debió haberse partido de un punto *fuera de* la isla del este. Como se hace cada uno de los tres cruces exactamente una vez, se termina *en* la isla del este. (Análogamente, si las luces están *apagadas* y se le da al conmutador tres veces, las luces estarán *encendidas*.)

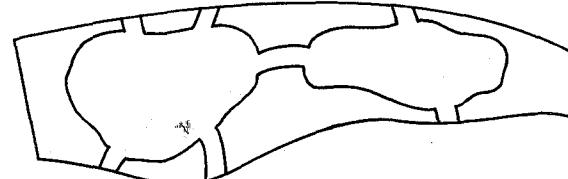
Ahora, consideremos la isla del oeste:



Hay cinco puentes que conducen a ella, y cinco es un número impar. Por tanto, como se partió de un lugar *fuera de* la isla del oeste, deberá terminarse *en* la isla del oeste. (Esto es análogo a darle al conmutador de la luz cinco veces: si la luz estaba apagada al comienzo, estará encendida al final.)

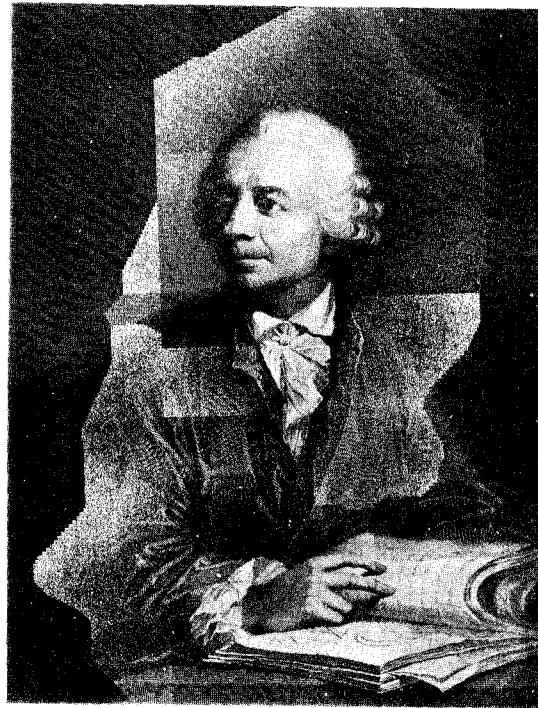
Pero esto significa que el "Paseo de Königsberg" es imposible, porque no se puede terminar en dos lugares al mismo tiempo.

La solución de Euler a este problema fue un suceso muy importante en la historia de la matemática, porque constituyó la primera vez que alguien resolvía este *tipo* de problema. Obsérvese que si se dibujara el mapa de las islas en una hoja de caucho, podría estirarse el caucho de cualquier manera que se quisiera, sin que se altere el problema.



Partiendo del análisis de Euler del "Paseo de Königsberg", se desarrolló una rama completa de la matemática, llamada *topología combinatoria*, que se ocupa de problemas de esta clase.

Incidentalmente, si se quiere encontrar la ciudad de Königsberg en el mapa, habrá que buscarla en un mapa antiguo. La ciudad está en la Unión Soviética y se ha cambiado el nombre por el de Kaliningrado. Nadie se ha ocupado de cambiarle el nombre al problema.



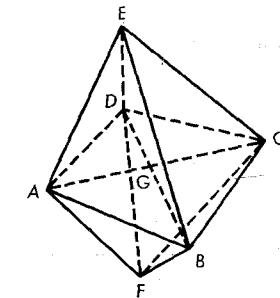
LEONHARD EULER (1707-1783)

La solución de Euler al problema de los siete puentes de Königsberg era típica de su saber e ingenio. Antes de su época, a nadie se le había ocurrido que este tipo de problema pertenecía a la matemática. Desde entonces, la matemática ha crecido rápidamente y en muchas direcciones insospechadas. El análisis de Euler al problema de los puentes de Königsberg fue el primer paso hacia una nueva rama de la matemática que ahora se conoce con el nombre de topología, la cual ha llegado a su mayor desarrollo en el siglo veinte y aún sigue creciendo.

Euler no sólo era muy inteligente, sino también muy perseverante; produjo trabajos originales en la matemática en tal cantidad que muy difícilmente se ha igualado. La colección de sus trabajos llena más de sesenta volúmenes grandes. A la edad de veintiocho años, perdió la vista de un ojo y, a los cincuenta, quedó casi totalmente ciego. Pero su memoria era asombrosa; sabía de memoria toda la Eneida de Virgilio y siempre había podido efectuar cálculos complicados mentalmente. Así, pudo seguir trabajando de la misma manera durante el resto de su vida.

### Repaso del capítulo

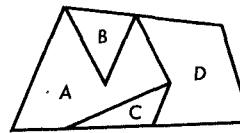
- (a) Los puntos de un conjunto están alineados, si \_\_\_\_\_  
 (b) Los puntos de un conjunto son coplanarios, si \_\_\_\_\_  
 (c) ¿Pueden estar alineados 4 puntos?  
 (d) ¿Tendrán que estar alineados 2 puntos?  
 (e) ¿Tendrán que estar alineados 4 puntos?  
 (f) ¿Pueden estar alineados  $n$  puntos?  
 (g) ¿Tendrán que ser coplanarios 4 puntos?  
 (h) ¿Pueden ser coplanarios  $n$  puntos?
- Indicar si es cierto cada uno de los siguientes enunciados. Explíquese:
  - Si 3 puntos están alineados, entonces son coplanarios.
  - Si 3 puntos son coplanarios, entonces están alineados.
- Comentar el siguiente enunciado: "El tablero de la mesa es un plano".
- Estúdiese la figura tridimensional (en la cual  $A, B, C$  y  $D$  son coplanarios), y contéstense las siguientes preguntas:
  - ¿Están  $E, D$  y  $F$  alineados?
  - ¿Son  $E, C, B$  y  $F$  coplanarios?
  - ¿Se intersecan  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ ?
  - ¿Se intersecan  $\overline{AC}$  y  $\overline{DF}$ ?
  - ¿Son  $E, B$  y  $F$  coplanarios?
  - ¿Son  $F, B, G$  y  $D$  coplanarios?
- Hacer una lista de todas las condiciones que hemos estudiado, que determinan un plano. Por ejemplo, "Una recta y un punto fuera de la recta determinan un plano" (Teorema 3-3).
- ¿Cuántos planos contendrán tres puntos dados, si no todos están en la misma recta?
- La recta  $L_1$  interseca al plano  $E$  en  $P$ , pero, no está en  $E$ . La recta  $L_2$  está en el plano  $E$ , pero no contiene al punto  $P$ . ¿Será posible que  $L_1$  interseque a  $L_2$ ? Explíquese.
- Dos planos  $E$  y  $F$  se intersecan en  $\overleftrightarrow{AB}$ . Cada uno de los puntos  $P$  y  $Q$  está en los planos  $E$  y  $F$ . ¿Tendrán que estar en  $\overleftrightarrow{AB}$  los puntos  $P$  y  $Q$ ? Explíquese.



9. Indicar si los siguientes enunciados son ciertos o falsos:

- El espacio tridimensional contiene, por lo menos, cuatro puntos.
- Todo semiplano contiene su arista.
- Un rayo separa a un plano.
- Todo plano separa al espacio en dos conjuntos convexos.
- Si la recta  $L$  separa al plano  $E$  en los semiplanos  $H_1$  y  $H_2$ , y si  $P$  es un punto de  $H_1$  y  $Q$  es un punto de  $H_2$ , entonces  $\overline{PQ}$  interseca a  $L$ .
- Dos semiplanos cualesquiera son coplanares.

10. ¿Cuáles de las regiones marcadas con letras mayúsculas son conjuntos convexos?



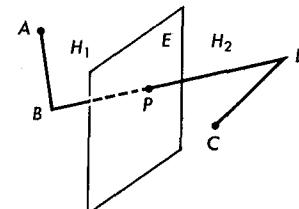
11. ¿Qué propiedad común tienen los semiplanos y los semiespacios?

12. Redactar una definición de un conjunto convexo.

13. ¿Es la reunión de dos semiplanos siempre un plano? ¿Podrá alguna vez ser un plano? Explíquese.

14. Completar los siguientes enunciados acerca de la figura de la derecha:

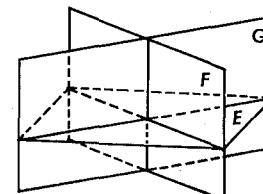
En la figura, \_\_\_\_\_  $E$  separa al espacio en \_\_\_\_\_  $H_1$  y \_\_\_\_\_. Sabemos que  $A$  y \_\_\_\_\_ están al mismo lado del \_\_\_\_\_, puesto que \_\_\_\_\_ no interseca al plano  $E$ . También,  $B$  y  $D$  están \_\_\_\_\_ de  $E$ , puesto que \_\_\_\_\_. Podemos demostrar que  $\overline{AC}$  \_\_\_\_\_, mostrando que  $A$  y \_\_\_\_\_ están \_\_\_\_\_ del plano  $E$ .



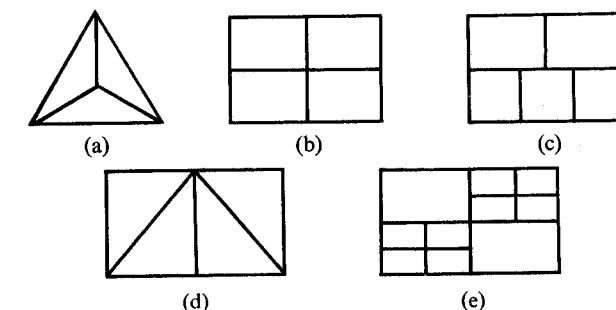
15. Dibújese una recta  $L$  que separe al plano en dos semiplanos. Denótense los planos por  $H_1$  y  $H_2$ . Elijanse dos puntos,  $D$  y  $K$ , de  $H_1$  y un punto  $F$  de  $H_2$ .

- ¿Cuál es la intersección de  $\overline{DK}$  y  $L$ ? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la intersección de  $\overline{KF}$  y  $L$ ? ¿Por qué?

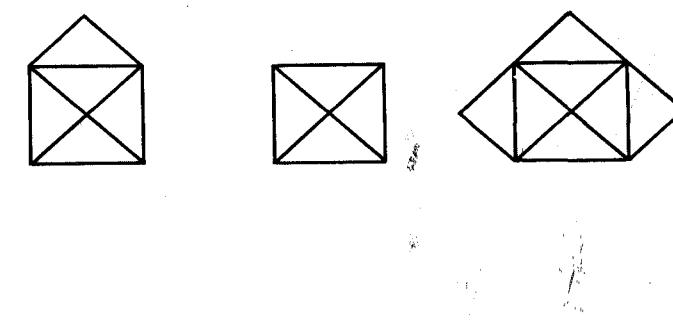
16. Cada uno de los planos  $E$ ,  $F$  y  $G$  de la figura interseca a los otros dos, como se indica. ¿En cuántas regiones convexas separan al espacio?



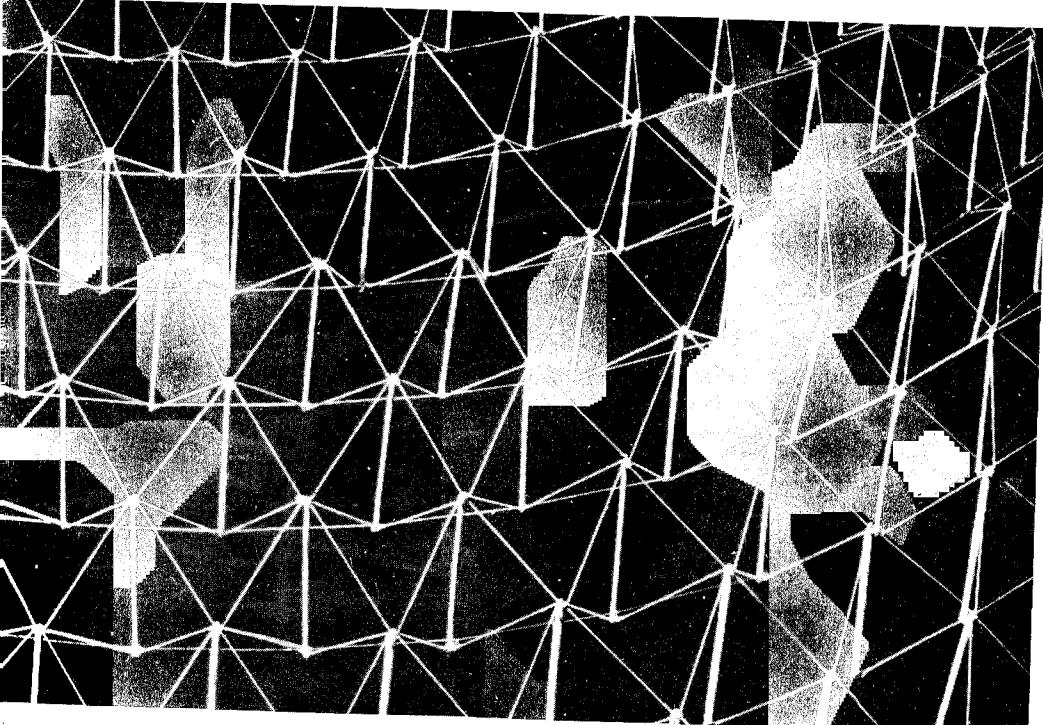
17. En este problema, el alumno "gana", si puede cruzar cada uno de los segmentos de la figura exactamente una vez, sin levantar el lápiz del papel. Cópiense las figuras en una hoja de papel y trátese de descubrir en cuáles dos de las cinco figuras es posible "ganar". ¿Habrá una manera de construir figuras con las cuales siempre se "pierda"?



18. De las tres figuras presentadas a continuación, dos pueden dibujarse sin tener que levantar el lápiz del papel o volver a pasar por encima de algún segmento de recta, mientras que resulta imposible hacerlo con la tercera. ¿Cuáles dos pueden dibujarse de esta manera? Trátese de reproducir cada figura en una hoja de papel, sin levantar el lápiz o pasar de nuevo por encima de algún segmento. ¿Habrá una manera más fácil de llegar a una conclusión?

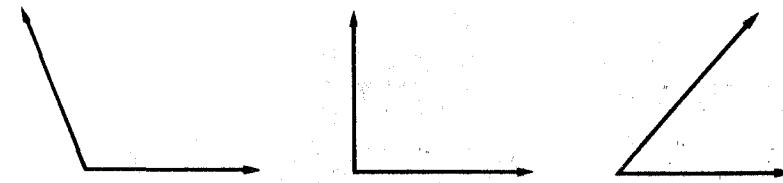


# 4 | Ángulos y triángulos



## 4.1. DEFINICIONES FUNDAMENTALES

Un ángulo es una figura como una de éstas:

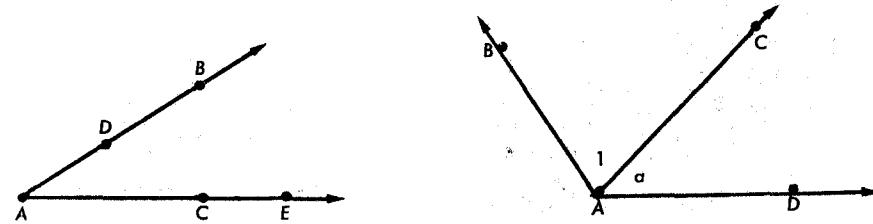


### Definiciones

Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un *ángulo*. Los dos rayos se llaman los *lados* del ángulo y el extremo común se llama el *vértice*.

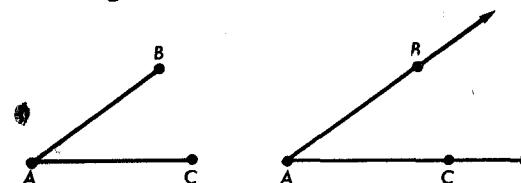
Si los rayos son  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ , entonces el ángulo se indica con  $\angle BAC$  o con  $\angle CAB$ .

Es indiferente qué lado se nombre primero. Más aún, no importa qué punto se nombra en cada uno de los dos lados. El ángulo en la figura siguiente, a la izquierda, puede designarse por  $\angle BAC$ ,  $\angle DAE$ ,  $\angle BAE$ , y así sucesivamente. Para abreviar, podemos escribir sencillamente  $\angle A$ , si conocemos los lados a que nos referimos.



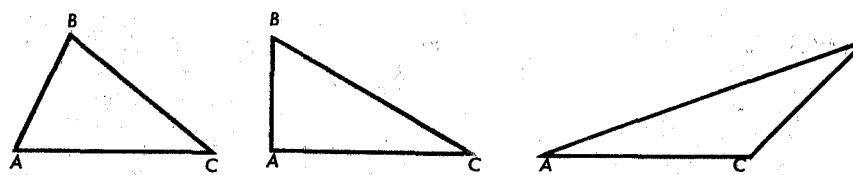
En figuras como la anterior, a la derecha, podemos escribir números y letras dentro de los ángulos; así, por ejemplo, podemos escribir  $\angle 1$  por  $\angle BAC$ ,  $\angle a$  por  $\angle CAD$ , y así sucesivamente.

Los lados de un ángulo son rayos y no segmentos. Por tanto, la figura siguiente, a la izquierda, no es un ángulo:



Desde luego, la figura *determina* un ángulo, como se indica a la derecha. (De la misma manera, un segmento *determina* una recta sin ser una recta.)

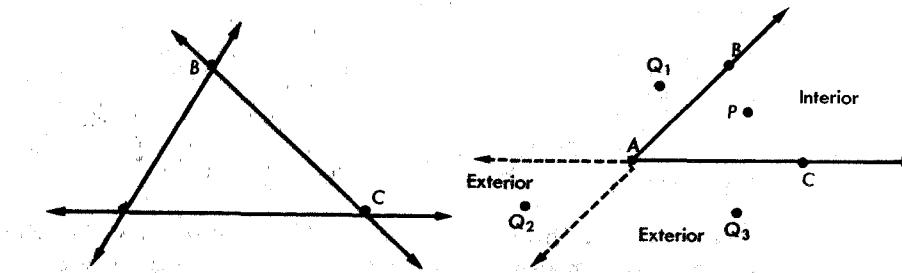
Un *triángulo* es una figura como una de las siguientes:



### Definiciones

Si  $A, B, C$  son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  se llama un *triángulo*, y se indica con  $\triangle ABC$ . Los puntos  $A, B$  y  $C$  se llaman *vértices*, y los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  se llaman *lados*. Todo triángulo  $\triangle ABC$  determina tres ángulos:  $\angle BAC$ ,  $\angle ABC$  y  $\angle ACB$ . A éstos los llamamos los *ángulos* del  $\triangle ABC$ . Si está claro a qué triángulo nos referimos, frecuentemente podemos designarlos por  $\angle A$ ,  $\angle B$  y  $\angle C$ .

Se notará que cuando dibujamos un triángulo, no necesariamente hemos dibujado sus ángulos. Lo mismo que una escuela no contiene a sus graduados, así, un triángulo no contiene sus propios ángulos. Si queremos dibujar los ángulos, debemos prolongar los lados y utilizar flechas, como se indica en la figura siguiente, a la izquierda. Generalmente, no hay necesidad de hacer esto, porque sabemos claramente cuáles deben ser los ángulos.



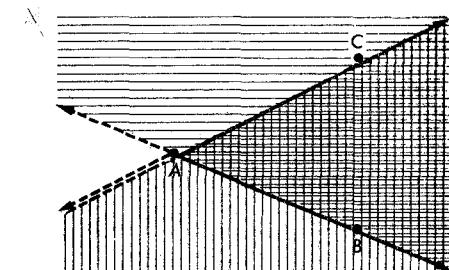
El *interior* y el *exterior* de un ángulo son como se indica en la figura anterior, a la derecha.

### Definiciones

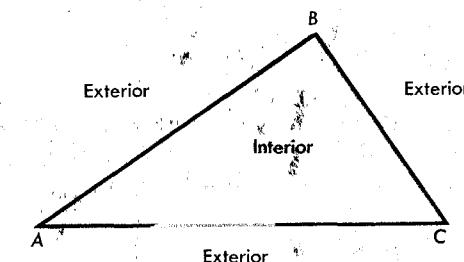
Sea  $\angle BAC$  un ángulo en el plano  $E$ . Un punto  $P$  está en el *interior* del  $\angle BAC$ , si (1)  $P$  y  $B$  están del mismo lado de la recta  $\overleftrightarrow{AC}$ , y (2)  $P$  y  $C$  están del mismo lado de la recta  $\overleftrightarrow{AB}$ . El *exterior* del  $\angle BAC$  es el conjunto de todos los puntos de  $E$  que no están en el ángulo y que tampoco están en su interior.

Debe examinarse esta definición, comparándola con la figura, para asegurarnos de que dice realmente lo que tenemos en mente. Por ejemplo,  $P$  está en el interior, porque satisface a ambas condiciones (1) y (2).  $Q_1$  no está en el interior, pues satisface a (1), pero no a (2).  $Q_2$  no está en el interior, porque no satisface ni a (1) ni a (2).  $Q_3$  satisface a (2), pero no a (1).

Se notará que hemos definido el interior de un ángulo como la intersección de dos semiplanos. Uno de ellos está del lado de  $\overleftrightarrow{AC}$  que contiene a  $B$  y el otro del lado de  $\overleftrightarrow{AB}$  que contiene a  $C$ .



El *interior* y el *exterior* de un triángulo son como se indican en la figura siguiente:



### Definiciones

Un punto está en el *interior* de un triángulo, si está en el interior de cada uno de los ángulos del triángulo. Un punto está en el *exterior* de un triángulo, si está en el plano del triángulo, pero no está en el triángulo o en su interior.

Debe examinarse esta definición, comparándola con la figura, como anteriormente, para asegurarnos de que dice realmente lo que pretendemos. (Si exigimos solamente que un punto esté en el interior de *dos* de los ángulos, en vez de los tres, ¿sería esto suficiente para describir el interior?) Las definiciones son más fáciles de aprender si las examinamos de esa manera. De hecho, cuando no las recordamos, es por haber tratado de aprenderlas de memoria, sin pararnos a considerar hasta qué punto expresan las ideas que se supone deben expresar.

En ocasiones, utilizaremos el simbolismo  $X-Y-Z$  para indicar que "Y está entre  $X$  y  $Z$ ", como en el problema 21 de la página 79.

### Conjunto de problemas 4-1

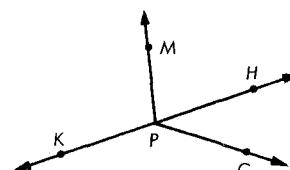
1. Completar la siguiente definición:

Un ángulo es la \_\_\_\_\_ de dos \_\_\_\_\_ que tienen el mismo \_\_\_\_\_, pero que no están en la misma \_\_\_\_\_.

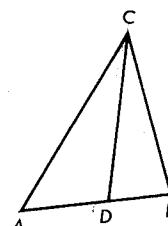
2. Completar la siguiente definición:

Un triángulo es la \_\_\_\_\_ de los tres \_\_\_\_\_ que unen, dos a dos, tres puntos \_\_\_\_\_.

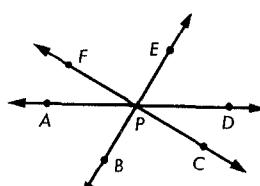
3. En la figura, los puntos  $K$ ,  $P$  y  $H$  están alineados. Nombrar los cinco ángulos.



4. Se da el  $\triangle ABC$ . ¿Son  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$  los lados del  $\angle A$ ? Explíquese.

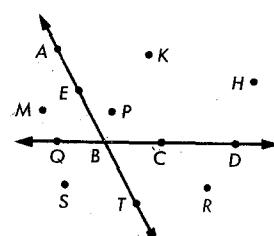


5. ¿Cuántos ángulos están determinados por la figura de la derecha? Nombrarlos. ¿Cuántos de ellos sería posible nombrar utilizando solamente la letra del vértice?



6. ¿Pueden dos ángulos de un triángulo tener un lado común? Explíquese.

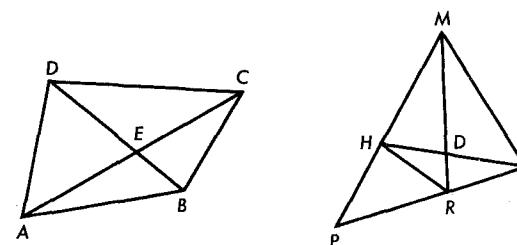
7. ¿Cuántos ángulos hay en esta figura? (Hay más de seis.)



8. ¿Es cierto el siguiente enunciado? El  $\triangle ABC$  es la reunión del  $\angle CAB$  y el  $\angle CBA$ . ¿Por qué?

9. ¿Qué puntos de la figura están en  
 (a) el interior del  $\angle CBA$ ?  
 (b) el exterior del  $\angle EBC$ ?  
 (c) el interior del  $\angle ABD$ ?  
 (d) el interior del  $\angle ABQ$ ?

10. ¿Está el vértice de un ángulo en el interior del ángulo?; ¿en su exterior?  
 11. ¿En cuántas regiones separa un triángulo al plano del triángulo?  
 12. ¿En cuántas regiones separan los ángulos de un triángulo al plano del triángulo?  
 13. Nombrar todos los triángulos de la figura siguiente, a la izquierda: (Hay más de cuatro.)



14. ¿Cuántos triángulos hay en la figura anterior, a la derecha? (Una manera fácil de abordar el problema es escribir  $PRHMDK$  y, luego, escribir todas las posibles combinaciones de tres letras y cotejar cada combinación con la figura.)

15. ¿Será el interior de un ángulo un conjunto convexo? ¿Y el exterior?

16. ¿Será un triángulo un conjunto convexo?

17. ¿Será el interior de un triángulo un conjunto convexo? ¿Y el exterior?

18. Se da el  $\triangle ABC$  y el punto  $P$  en el interior del  $\angle A$  y, también, en el interior del  $\angle C$ . ¿Qué se puede concluir acerca de  $P$ ?

19. (a) ¿Podrá un punto estar en el exterior de un triángulo y, también, en el interior de un ángulo del triángulo? Ilustrar la respuesta.

- (b) ¿Podrá un punto estar en el exterior de un triángulo, pero no en el interior de ninguno de los ángulos del triángulo? Ilustrar la respuesta.

20. Se da el  $\triangle ABC$  y un punto  $P$ .  $P$  y  $A$  están del mismo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$ .  $P$  y  $B$  están del mismo lado de  $\overleftrightarrow{AC}$ .

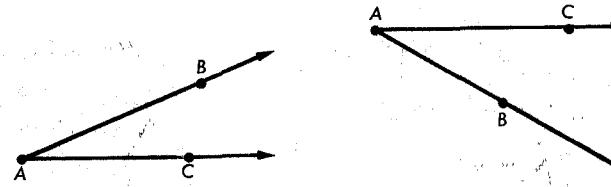
- (a) ¿Está  $P$  en el interior del  $\angle ACB$ ?  
 (b) ¿Está  $P$  en el interior del  $\triangle ACB$ ?

21. Se da el  $\triangle ABC$  y, además,  $A-D-B$ ,  $B-E-C$ ,  $C-F-D$  y  $D-G-E$ .

- (a) ¿Está  $G$  en el interior o en el exterior del  $\triangle ABC$ ?  
 (b) ¿Interseca  $\overrightarrow{BG}$  a  $\overrightarrow{AC}$ ?  
 (c)  $G$  y  $F$  están en lados opuestos de \_\_\_\_\_.  
 (d) ¿Cómo podemos estar seguros de la respuesta a la parte (a)?

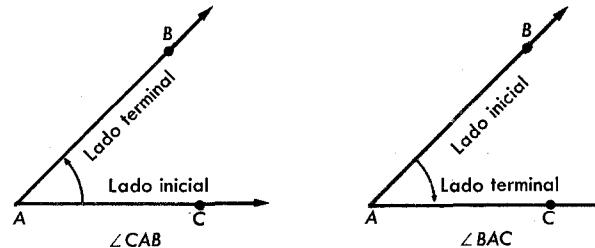
## 4-2. ALGUNAS OBSERVACIONES ACERCA DE LOS ÁNGULOS

Según los hemos definido en este capítulo, los ángulos son simplemente conjuntos de puntos. Por ejemplo:



Es indiferente el orden en que se nombran los lados de un ángulo.

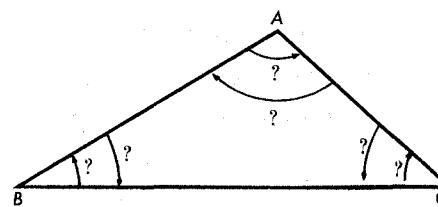
Ésta es la forma más sencilla de la definición de un ángulo. Es la idea que necesitamos para los propósitos de este curso. Más adelante, sin embargo, en el estudio de la trigonometría, la definición de ángulo aparecerá en una forma diferente. En la trigonometría, importa qué lado del ángulo se nombre primero:



Esto es, en la trigonometría, distinguimos entre el  $\angle CAB$  y el  $\angle BAC$ . En el  $\angle CAB$ ,  $\overrightarrow{AC}$  es el *lado inicial* y  $\overrightarrow{AB}$  es el *lado terminal*. En el  $\angle BAC$ ,  $\overrightarrow{AB}$  es el lado inicial y  $\overrightarrow{AC}$  es el lado terminal. Ángulos como éstos se llaman ángulos *orientados*. Cuando utilizamos ángulos orientados, permitimos los "ángulo cero" y los "ángulos llanos".

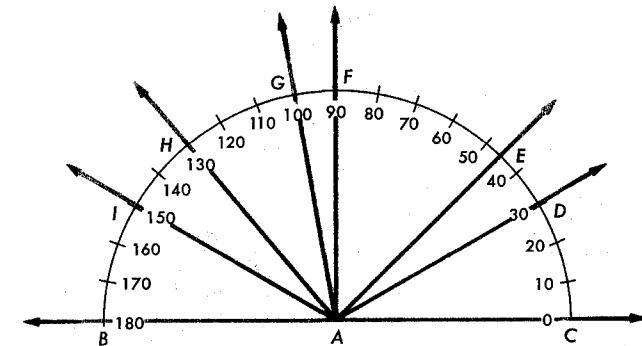


En este curso, los ángulos orientados no se emplearán, porque no se necesitan en la geometría elemental. Por ejemplo, los ángulos de un triángulo jamás son ángulos cero ni ángulos llanos y no hay modo razonable alguno de decidir qué orientación deben tener. Para asignarles orientación, tendríamos que proceder al azar, y estas orientaciones de los ángulos no tendrían utilidad para nosotros, porque no estarían relacionadas con los problemas que tratásemos.



## 4-3. MEDIDA ANGULAR

Así como medimos segmentos con una regla, medimos los ángulos con un transportador.



El número de grados de un ángulo se llama su *medida*. Si hay  $r$  grados en el  $\angle PQR$ , entonces escribimos

$$m\angle PQR = r.$$

De las marcas del transportador, vemos que

$$m\angle CAD = 30, \quad m\angle CAF = 90,$$

$$m\angle CAE = 45, \quad m\angle CAG = 100,$$

y así sucesivamente.

No notará que no necesitamos emplear el signo para grados cuando escribimos 10, 45, y así sucesivamente, porque la letra  $m$  se encarga de ello:  $m\angle PQR$  es el *número de grados* en el  $\angle PQR$ .

De la misma manera que hallamos distancias mediante sustracción, utilizando una regla, podemos emplear la sustracción para hallar las medidas de los ángulos. Por ejemplo, tenemos que  $m\angle DAE = 15$ , porque  $15 = 45 - 30 = m\angle CAE - m\angle CAD$ . Por el mismo artificio, tenemos

$$m\angle GAD = 100 - 30 = 70.$$

No notará que 180 no es la medida de ningún ángulo en la figura. (No existe un ángulo  $\angle BAC$ , porque  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  son colineales.) Sin embargo, podemos todavía restar de 180, para obtener

$$m\angle BAI = 180 - 150 = 30,$$

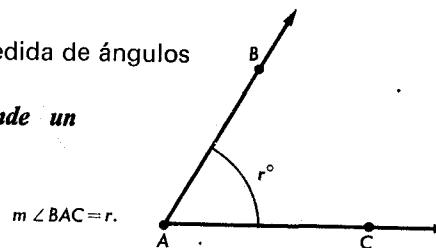
$$m\angle BAH = 180 - 130 = 50,$$

y así sucesivamente.

Los siguientes postulados resumen los principios acerca de los transportadores que hemos estado utilizando. En las figuras que ilustran estos principios, escribimos  $r^\circ$ ,  $s^\circ$ , y así sucesivamente, para recordar que esos números son las medidas de los ángulos en grados.

### POSTULADO 11. El postulado de la medida de ángulos

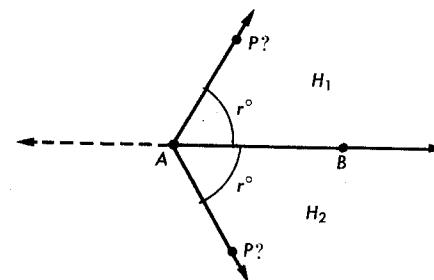
*A cada ángulo  $\angle BAC$  le corresponde un número real entre 0 y 180.*



### Definiciones

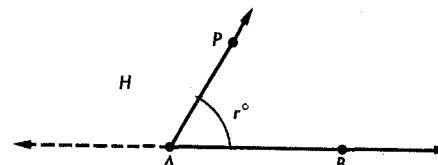
El número dado por el postulado de la medida de ángulos se llama la *medida* del  $\angle BAC$ , y se escribe  $m\angle BAC$ .

Siempre que lo deseemos, podemos construir un ángulo con cualquier medida entre 0 y 180. Claro está, si comenzamos con un rayo en el plano y el número  $r$ , podemos construir el ángulo en cualquiera de los lados de la recta que contiene al rayo. Así, tenemos las condiciones para el siguiente postulado:



### POSTULADO 12. El postulado de la construcción del ángulo

*Sea  $\overrightarrow{AB}$  un rayo de la arista del semiplano  $H$ . Para cada número  $r$  entre 0 y 180, hay exactamente un rayo  $\overrightarrow{AP}$ , con P en  $H$ , tal que  $m\angle PAB = r$ .*

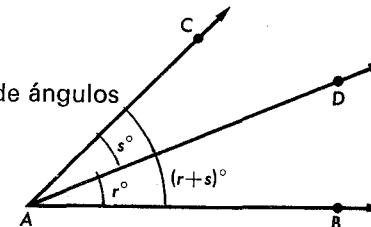


Podemos calcular medidas de ángulos por adición y por sustracción, utilizando el siguiente postulado:

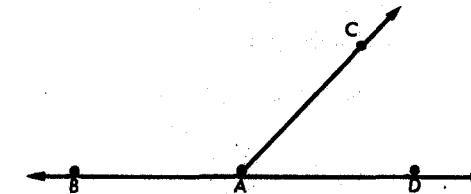
### POSTULADO 13. El postulado de la adición de ángulos

*Si D está en el interior del  $\angle BAC$ , entonces  $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$ .*

De ahí, obtenemos  $m\angle CAD = m\angle CAB - m\angle DAB$ .



Dos ángulos forman un *par lineal*, si son como éstos:



Para ser más precisos, tenemos la siguiente definición:

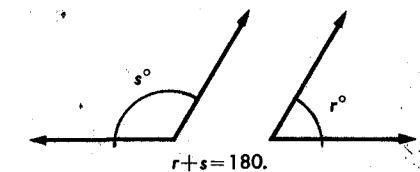
### Definición

Si  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AD}$  son rayos opuestos, y  $\overrightarrow{AC}$  es otro rayo cualquiera, entonces  $\angle BAC$  y  $\angle CAD$  forman un *par lineal*.

La siguiente definición trata simplemente de medida angular; no dice nada acerca de cómo son los ángulos:

### Definición

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180, entonces decimos que los ángulos son *suplementarios*, y que cada uno es el *suplemento* del otro.



Los ángulos *pueden*, sin embargo, formar un par lineal y, en ese caso, son siempre suplementarios.

### POSTULADO 14. El postulado del suplemento

*Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.*

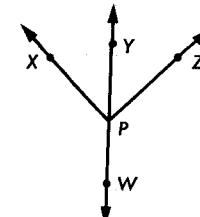
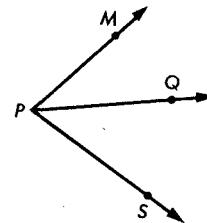
Para abreviar, podemos referirnos a estos postulados como *PMA*, *PCA*, *PAA* y *PS*. Éstas son, naturalmente, abreviaturas del postulado de la medida de ángulos, del postulado de la construcción del ángulo, del postulado de la adición de ángulos y del postulado del suplemento.

Se recordará que, al tratar la medida de distancias, encontramos que podíamos emplear cualquier unidad. Si decidimos cambiar la unidad de distancia, entonces simplemente multiplicamos todas las distancias por un cierto número, y todos los postulados para la distancia continúan siendo válidos. Esto no es cierto, sin embargo, para la medida angular, porque el postulado del suplemento determina la unidad. En virtud de nuestra definición de *ángulos suplementarios*, el postulado 14 nos dice que si dos ángulos forman un par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180. Esta condición deja de ser válida si duplicamos la medida de cada ángulo, o si dividimos la medida de cada ángulo por 2.

## Conjunto de problemas 4-3

1. Si  $m\angle A = 63$  y  $m\angle B = 117$ , entonces  $\angle A$  y  $\angle B$  son \_\_\_\_\_.

2. Si en la figura,  $m\angle QPS = 41$  y  $m\angle QPM = 37$ , ¿cuál es  $m\angle MPS$ ? ¿Qué postulado justifica la conclusión?



3. Se da la figura, con  $Y, P, W$  alineados y  $m\angle XPY = m\angle ZPY$ .

(a) Nombrar dos pares lineales.

(b) Nombrar tres conjuntos de ángulos suplementarios.

4. Se da que  $A-K-F$  y  $D$  no es un punto de  $\overleftrightarrow{AF}$ .

(a)  $\angle AKD$  y  $\angle FKD$  forman \_\_\_\_\_.

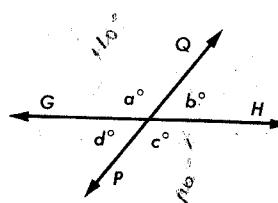
(b)  $m\angle AKD + m\angle FKD =$  \_\_\_\_\_.

¿Qué postulado es esencial para la respuesta?

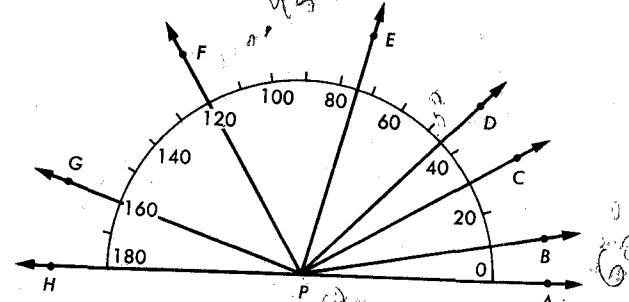
5. En la figura,  $\overleftrightarrow{GH}$  y  $\overleftrightarrow{PQ}$  se cortan, formando cuatro ángulos.

(a) Si  $b = 52$ , ¿cuál es el valor de  $a$ ?

(b) Si  $a = 110$ , ¿cuáles son los valores de  $b, c$  y  $d$ ?



6.



Utilizando la figura, evaluar cada uno de los siguientes:

(a)  $m\angle APC$ .

(b)  $m\angle EPD$ .

(c)  $m\angle GPA$ .

(d)  $m\angle DPB$ .

(e)  $m\angle FPC$ .

(f)  $m\angle APB + m\angle BPE$ .

(g)  $m\angle HPG + m\angle FPC$ .

(h)  $m\angle APC + m\angle CPH$ .

(i)  $m\angle FPA - m\angle DPA$ .

(j)  $m\angle FPH - m\angle FPG$ .

7. Utilizar el transportador para evaluar cada uno de los siguientes:

(a)  $m\angle RPS$ .

(b)  $m\angle VPR$ .

(c)  $m\angle VPS$ .

(d)  $m\angle TPR$ .

(e)  $m\angle XPR$ .

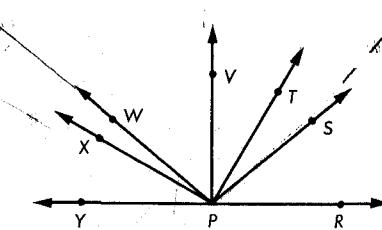
(f)  $m\angle XPY$ .

(g)  $m\angle WPS$ .

(h)  $m\angle XPW$ .

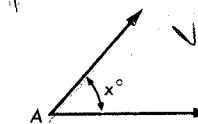
(i)  $m\angle XPS$ .

(j)  $m\angle TPR + m\angle SPW$ .

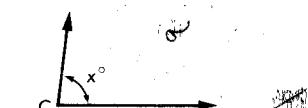


8. Con práctica, se podrá aprender a calcular con bastante precisión el tamaño de los ángulos, sin necesidad de utilizar un transportador. En los ejercicios a continuación, no debe emplearse un transportador para decidir cuáles de los ángulos de la figura tienen las medidas anotadas. Aparear los ángulos a la derecha con las medidas indicadas en la columna de la izquierda.

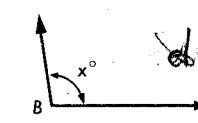
(a)  $80 < x < 95$ .



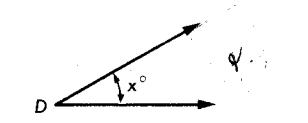
(b)  $55 < x < 70$ .



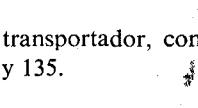
(c)  $40 < x < 60$ .



(d)  $90 < x < 105$ .



(e)  $20 < x < 45$ .



(f)  $110 < x < 125$ .

9. Usando una regla y un transportador, construir ángulos que tengan las medidas angulares 30, 60, 15, 90, 100 y 135.

10. Usando solamente una regla, y no un transportador, trazar ángulos cuyas medidas sean, aproximadamente, 10, 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150. Deberá utilizarse el transportador, después, para comprobar las figuras.

11. Sobre la arista de un semiplano, tomar los puntos  $M, K, A$  tal que  $M-A-K$ . Dibujar  $\overrightarrow{AT}$  tal que  $m\angle TAK = 35$ . En el mismo semiplano, tomar  $\overrightarrow{AV}$  tal que  $m\angle MAV = 85$ . Medir  $\angle TAV$  con un transportador. ¿Concuerda el resultado con un cálculo correcto?

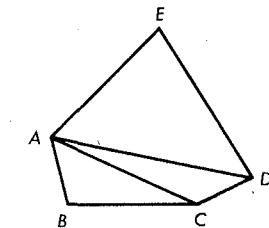
12. En la figura plana,

(a)  $m\angle CAB + m\angle DAC = m\angle$  \_\_\_\_\_.

(b)  $m\angle EAD + m\angle DAC = m\angle$  \_\_\_\_\_.

(c)  $m\angle EAD + m\angle DAB = m\angle$  \_\_\_\_\_.

(d)  $m\angle EAC - m\angle DAC = m\angle$  \_\_\_\_\_.



13. Determinar la medida del suplemento del ángulo cuya medida es:

(a) 80.

(b) 48.

(c) 144.

(d) 25, 5.

(e)  $n$ .

(f)  $n + k$ .

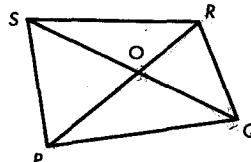
(g)  $180 - n$ .

(h)  $90 - n$ .

14. En la figura,

S P Q

- (a)  $m\angle SPR + m\angle QPO = m\angle \underline{\hspace{1cm}}$ ?
- (b)  $m\angle RSQ + m\angle \underline{\hspace{1cm}} = m\angle RSP$
- (c)  $m\angle POQ + m\angle POS = \underline{\hspace{1cm}}$ ?
- (d)  $m\angle SRQ - m\angle SRO = m\angle \underline{\hspace{1cm}}$ ?
- (e)  $m\angle ROQ = 180 - m\angle \underline{\hspace{1cm}}$ ?
- (f)  $SO + OQ = \underline{\hspace{1cm}}$



15. Si dos ángulos suplementarios tienen medidas iguales, ¿cuál es la medida de cada ángulo?

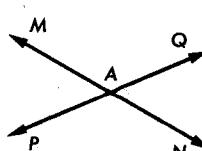
16. Si la medida de un ángulo es tres veces la medida de su suplemento, ¿cuál es la medida del ángulo?

17. La medida de un ángulo es 24 más que la medida de su suplemento. Hallar la medida de cada ángulo.

\* 18. Dos veces la medida de un ángulo es 30 menos que cinco veces la medida de su suplemento. ¿Cuál es la medida del ángulo?

\* 19. Si en un plano,  $m\angle BAD = 65$  y  $m\angle DAC = 32$ , ¿cuánto es  $m\angle CAB$ ?20. Se da la figura, con  $\overleftrightarrow{MN}$  y  $\overleftrightarrow{PQ}$ , que se intersecan en A. ¿En qué postulados o definiciones se fundamenta cada uno de los siguientes enunciados?

- (a)  $\angle PAM$  y  $\angle QAM$  forman un par lineal.
- (b)  $\angle PAM$  y  $\angle QAM$  son suplementarios.
- (c)  $m\angle PAM + m\angle QAM = 180$ .
- (d)  $m\angle QAM + m\angle QAN = 180$ .

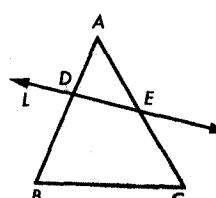
\* 21. Si  $m\angle ABC + m\angle DBC = 180$  y  $m\angle MAS + m\angle NAS = 180$ , ¿será  $m\angle ABC + m\angle DBC = m\angle MAS + m\angle NAS$ ? ¿Por qué? Si, también, decimos que  $m\angle DBC = m\angle NAS$ , ¿qué podemos concluir? ¿Por qué?

### PROBLEMA OPTATIVO

¿Por qué es cierto el siguiente enunciado?

Si una recta  $L$  corta a dos lados del  $\triangle ABC$  en los puntos  $D$  y  $E$  (siendo  $D$  y  $E$  diferentes de  $A$ ,  $B$  y  $C$ ), entonces  $L$  no corta al tercer lado.

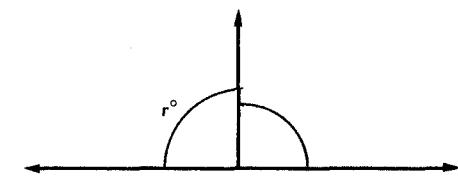
[Sugerencia: Refiérase a la sección 3-4 y demuéstrese que  $B$  y  $C$  están del mismo lado de  $L$ .]



### 4.4. ÁNGULOS RECTOS, PERPENDICULARIDAD, ÁNGULOS CONGRUENTES

#### Definición

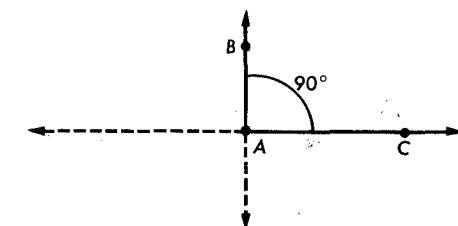
Si los ángulos de un par lineal tienen la misma medida, entonces cada uno de ellos se llama un **ángulo recto**.



En este caso, tenemos  $r + r = 180$ , por el postulado del suplemento. Por tanto, podemos escribir igualmente la siguiente definición de ángulo recto:

#### Definición

Un **ángulo recto** es un ángulo cuya medida es 90.



#### Definiciones

Si  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  forman un ángulo recto, entonces se llaman **perpendiculares**, y escribimos

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}.$$

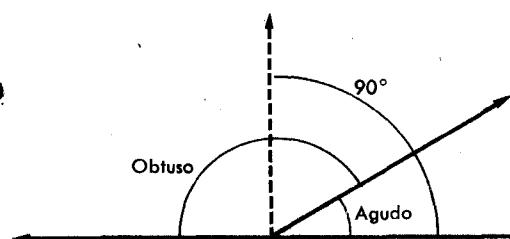
Empleamos el mismo término y la misma notación para rectas y segmentos; así, pues, si el  $\angle BAC$  es un ángulo recto, escribimos

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}, \quad \overline{AB} \perp \overline{AC}, \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC},$$

y así sucesivamente, para cualquier combinación de rectas, rayos o segmentos.

#### Definiciones

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90, entonces los ángulos se llaman **complementarios** y cada uno de ellos se llama el **complemento** del otro. Un ángulo con medida menor que 90 se llama **agudo**. Un ángulo con medida mayor que 90 se llama **obtuso**.



**Definición**

Dos ángulos con la misma medida se llaman **ángulos congruentes**.

Así,  $\angle ABC$  y  $\angle DEF$  son congruentes, si

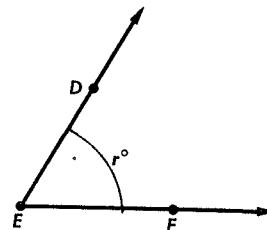
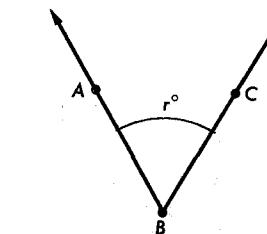
$$m\angle ABC = m\angle DEF$$

y, en este caso, escribimos

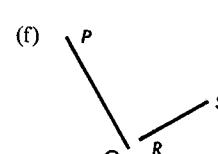
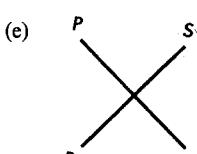
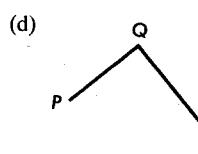
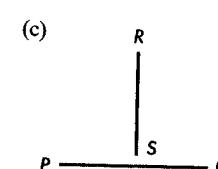
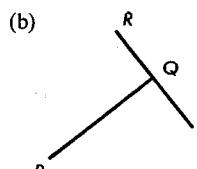
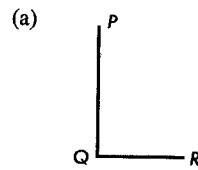
$$\angle ABC \cong \angle DEF.$$

El símbolo  $\cong$  se lee "es congruente con".

Se notará que la igualdad  $m\angle ABC = m\angle DEF$  y la congruencia  $\angle ABC \cong \angle DEF$  son equivalentes, pues significan exactamente la misma cosa. Podemos sustituir uno de los enunciados por el otro siempre que queramos.

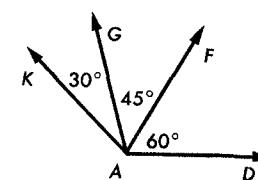
**Conjunto de problemas 4-4A**

1. En este problema, los segmentos que parecen ser perpendiculares deben considerarse como perpendiculares. Identificar los pares de segmentos perpendiculares. Si se cree que un par no es perpendicular, explicar por qué.



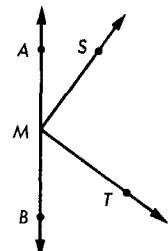
2. En la figura, los ángulos tienen las medidas indicadas.

- (a) Nombrar un par de ángulos complementarios.  
(b) ¿Qué postulado permite asegurar que  $m\angle DAG = 105$ ?



3. Se da la figura, con el vértice  $M$  del ángulo recto  $\angle SMT$  en  $\overleftrightarrow{AB}$ , y  $m\angle TMB = 50$ .

- (a) Nombrar un par de rayos perpendiculares, si hay alguno.  
(b) Nombrar un par de ángulos complementarios, si lo hay.  
(c) Nombrar un par de ángulos congruentes, si hay alguno.  
(d) Nombrar un par de ángulos suplementarios, si lo hay.



4. El punto  $A$  es el extremo de los dos rayos perpendiculares  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ .  $D$  está en el interior del  $\angle BAC$  y  $E$  es un punto del exterior del  $\angle BAC$ , tal que  $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$ .

- (a) Nombrar un par de ángulos complementarios, si hay alguno.  
(b) Nombrar un par de ángulos suplementarios, si lo hay.  
(c) Nombrar un par de ángulos congruentes, si hay alguno.

5. Completar cada uno de los siguientes enunciados para que resulten ciertos:

- (a) Si  $m\angle MPS = 39$  y  $m\angle THN = 39$ , entonces  $\angle MPS$  es \_\_\_\_\_  $\angle THN$ .  
(b) El suplemento de un ángulo agudo es un ángulo \_\_\_\_\_.  
(c) El complemento de un ángulo agudo es un ángulo \_\_\_\_\_.  
(d) Si  $\angle ADK \cong \angle BEH$ , las medidas de los ángulos son \_\_\_\_\_.

6. Si la medida de un ángulo es dos veces la medida de su complemento, ¿cuál es la medida de cada ángulo?

7. Determinar la medida del complemento del ángulo cuya medida es:

- (a) 20 (b) 68 (c) 46.5 (d)  $n$  (e)  $90 - n$  (f)  $45 + n$

8. ¿Cuál es la medida de un ángulo, si se sabe que la medida de su suplemento es 39 más que dos veces la medida de su complemento?

Es fácil darse cuenta de que los siguientes teoremas son ciertos, una vez recordemos claramente el significado de las palabras empleadas:

**Teorema 4-1**

Si dos ángulos son complementarios, entonces ambos son agudos.

**Teorema 4-2**

Todo ángulo es congruente consigo mismo.

(Siempre tenemos que  $m\angle A = m\angle A$ .)

**Teorema 4-3**

Dos ángulos rectos cualesquiera son congruentes.

**Teorema 4-4**

Si dos ángulos son a la vez congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.

[*Sugerencia:* Si son congruentes, tienen la misma medida  $r$ . Demostrar que  $r$  tiene que ser 90.]

**Teorema 4-5**

Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.



**De otro modo:** Si (1)  $\angle A \cong \angle B$ , (2)  $\angle A$  y  $\angle C$  son suplementarios, y (3)  $\angle B$  y  $\angle D$  son suplementarios, entonces (4)  $\angle C \cong \angle D$ .

**Demuestra.** Sea  $r = m\angle A$ , como se indica en la figura anterior. Presentamos el resto de la demostración en un estilo tal que pueda utilizarse como patrón para escribir otras demostraciones.

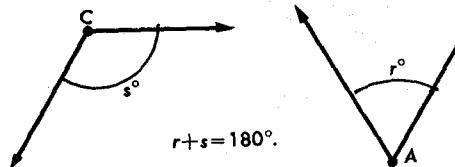
AFIRMACIONES	RAZONES
1. $r + m\angle C = 180$ .	$\angle A$ y $\angle C$ son suplementarios.
2. $r = m\angle B$ .	$\angle A \cong \angle B$ .
3. $r + m\angle D = 180$ .	$\angle B$ y $\angle D$ son suplementarios.
4. $m\angle C = 180 - r$ .	Afirmación 1.
5. $m\angle D = 180 - r$ .	Afirmación 3.
6. $m\angle C = m\angle D$ y $\angle C \cong \angle D$ .	Afirmaciones 4 y 5.

Tiene ventajas el estilo de doble columna para escribir demostraciones. Si se hace así, es más fácil organizar el trabajo y recordar que siempre que hacemos una afirmación en la demostración, estamos obligados a dar una razón.

Se notará que antes de comenzar la demostración de este teorema, lo enunciamos de otra manera. Éste es un artificio que será muy útil en el futuro. Siempre que

podamos, enunciaremos el teorema con palabras, empleando muy poca notación, si hubiera alguna. Entonces, los teoremas serán fáciles de leer y de recordar. En el nuevo enunciado, introducimos la notación que será utilizada en la demostración.

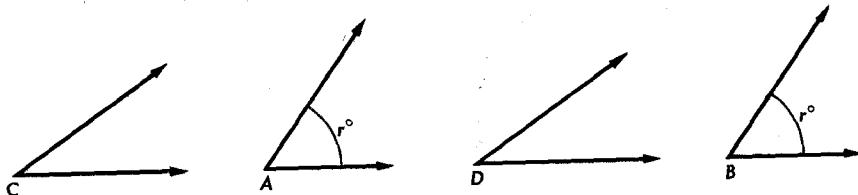
La figura empleada en esta demostración presenta un caso muy especial: dos ángulos pueden ser suplementarios sin estar alineados en tal forma que parezca evidente que son suplementarios. Los ángulos suplementarios podrían verse así:



Generalmente, una figura es sólo una ilustración de un teorema o problema. No debemos creer que las figuras dadas en este libro son, en cada caso, las únicas correctas.

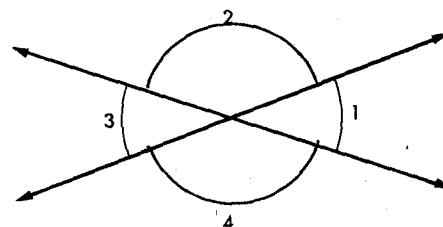
**Teorema 4-6**

Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.



La demostración es muy parecida a la del teorema 4-5 y el alumno deberá estar dispuesto a hacerla él mismo. De hecho, *debe* hacerla. La figura anterior le ayudará. El alumno deberá ofrecer su propia redacción del teorema.

Cuando dos rectas se intersecan, forman cuatro ángulos. En la figura,  $\angle 1$  y  $\angle 3$  se llaman *ángulos opuestos por el vértice* y  $\angle 2$  y  $\angle 4$  se llaman *ángulos adyacentes*. Esto es:

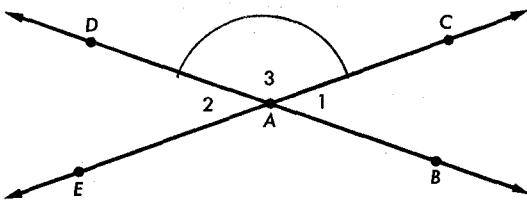
**Definición**

Dos ángulos son *opuestos por el vértice*, si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.

En la figura, parece que los pares de ángulos opuestos por el vértice son congruentes; en efecto, ése es siempre el caso, como se demuestra en el siguiente teorema:

**Teorema 4-7.** Teorema de los ángulos opuestos por el vértice

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



**Demostración.** Sabemos que  $\angle 1$  y  $\angle 2$  son opuestos por el vértice; esto es,

- (1)  $\overrightarrow{AC}$  y  $\overrightarrow{AE}$  son rayos opuestos, al igual que  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AD}$ . Por tanto,
- (2)  $\angle 1$  y  $\angle 3$  forman un par lineal, al igual que  $\angle 2$  y  $\angle 3$ .
- (3)  $\angle 3 \cong \angle 3$ .
- (4)  $\angle 1$  y  $\angle 2$  son suplementos de ángulos congruentes. Por el teorema 4-5, esto implica que
- (5)  $\angle 1 \cong \angle 2$ .

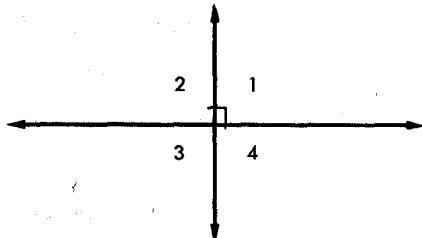
**Teorema 4-8**

Si dos rectas que se cortan forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos.

**Demostración.** En la figura, el cuadrado pequeño en el vértice del  $\angle 1$  indica que  $\angle 1$  es un ángulo recto. Esto es un dato. Debemos demostrar que  $\angle 2$ ,  $\angle 3$  y  $\angle 4$  son ángulos rectos. Los pasos fundamentales son los siguientes: (Debe justificarse cada afirmación.)

- (1)  $\angle 3$  es un ángulo recto.
- (2)  $\angle 2$  y  $\angle 1$  son suplementarios.
- (3)  $m\angle 2 + 90 = 180$ .
- (4)  $\angle 2$  es un ángulo recto.
- (5)  $\angle 4$  es un ángulo recto.

Las afirmaciones 1 y 5 están basadas en un teorema. La justificación de la afirmación 2 es un postulado. Las afirmaciones 3 y 4 están basadas en definiciones.



GEORGE DAVID BIRKHOFF (1884-1944)

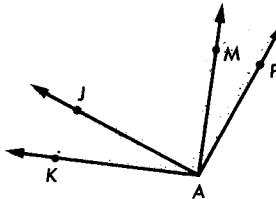
G. D. Birkhoff fue uno de los matemáticos más hábiles y fecundos de su generación. Escribió ciento noventa memorias en varios campos de la matemática pura y aplicada. Sus obras constituyen tres volúmenes grandes. También, escribió varios libros acerca de la matemática y la teoría de la relatividad.

Los postulados para la geometría utilizados en este libro son modificaciones del conjunto de postulados de Birkhoff. Durante varios siglos, el concepto de medida, tanto para segmentos como para ángulos, ha sido una idea central en geometría. Los postulados de Birkhoff introducen este concepto desde el principio; describen los métodos que todo el mundo emplea. Así, aun cuando los postulados de Birkhoff no están entre sus grandes contribuciones al conocimiento matemático, ellos, no obstante, contribuyeron grandemente a un entendimiento mejor de la geometría.

## Conjunto de problemas 4-4B

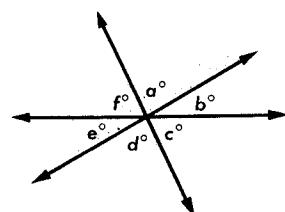
- $\angle ABC \cong \angle DEH$  y  $\angle ABC$  es el suplemento del  $\angle DEH$ . ¿Qué conclusión resulta? ¿Qué postulado, definición o teorema justifica esa conclusión?
- Si el  $\angle M$  es el suplemento del  $\angle K$ , el  $\angle P$  es el suplemento del  $\angle Q$ , y  $\angle Q \cong \angle M$ , ¿qué se deduce acerca de  $\angle K$  y  $\angle P$ ? ¿Qué enunciado justifica la conclusión?

3. Si  $\angle PAM$  y  $\angle MAJ$  son complementarios y  $\angle KAJ$  y  $\angle MAJ$  son complementarios, ¿por qué es  $\angle KAJ \cong \angle PAM$ ?



- Si dos rectas se cortan, ¿cuántos pares de ángulos opuestos por el vértice se forman?
- Si la medida de uno de los ángulos en la parte (a) es 62, ¿cuál es la medida de cada uno de los otros ángulos?
- Si los cuatro ángulos de la parte (a) son congruentes, ¿cuál es la medida de cada uno?

5. En la figura, tres rectas se cortan en el mismo punto. Se da que  $a = 85$  y  $e = 30$ . Hallar  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $f$ .

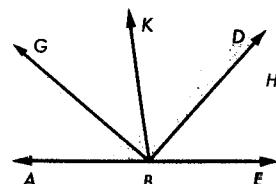


6. Si uno de un par de ángulos opuestos por el vértice tiene medida  $x$ , escribir fórmulas para las medidas de los otros tres ángulos que se forman.

7. Demostrar el teorema 4-3.

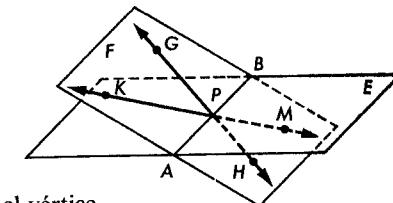
8. Demostrar el teorema 4-4.

9. Se da la recta  $\overleftrightarrow{AB}$ , separando a dos semiplanos  $H_1$  y  $H_2$ .  $P$  es un punto de  $H_1$  tal que  $m\angle PAB = 30$ . Si  $Q$  es un punto de  $H_2$  tal que  $\angle QAB \cong \angle PAB$ , entonces  $B$  está en el \_\_\_\_\_ del  $\angle PAQ$  y  $m\angle PAQ = \text{_____}$ . Si  $\overrightarrow{AQ}$  es opuesto a  $\overrightarrow{AP}$ , entonces  $\angle PAB$  es \_\_\_\_\_  $\angle QAB$  y  $m\angle QAB = \text{_____}$ .



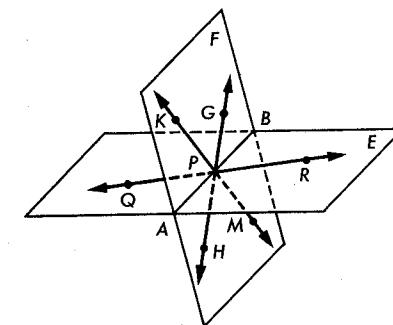
- \* 10. En el semiplano  $H$ ,  $\overrightarrow{BA}$  y  $\overrightarrow{BE}$  son rayos opuestos,  $\angle ABG \cong \angle KBG$  y  $\angle KBD \cong \angle DBE$ . Hallar  $m\angle GBD$ . [Sugerencia: Sean  $m\angle ABG = x$  y  $m\angle DBE = y$ .]

11. En la figura, el plano  $E$  interseca al plano  $F$  en  $\overleftrightarrow{AB}$ .  $\overleftrightarrow{GH}$  y  $\overleftrightarrow{KM}$ , ambas en el plano  $F$ , intersecan a  $\overleftrightarrow{AB}$  en  $P$ .



- Nombrar dos pares de ángulos opuestos por el vértice.
- Nombrar dos pares de ángulos suplementarios.
- Si  $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{AB}$ , nombrar dos pares de ángulos complementarios.

12. En la figura,  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{QR}$ ,  $\overleftrightarrow{GH}$  y  $\overleftrightarrow{KM}$  se intersecan en  $P$ ,  $\overleftrightarrow{QR}$  está en  $E$ , y  $\overleftrightarrow{GH}$  y  $\overleftrightarrow{KM}$  están en  $F$ .  $\overleftrightarrow{AB}$  es la intersección de los planos  $E$  y  $F$ .



- ¿Cuáles dos ángulos son suplementarios del  $\angle APG$ ?
- ¿Cuáles dos ángulos son suplementarios del  $\angle HPM$ ?
- Si  $\angle BPR \cong \angle KPG$ , ¿qué otros ángulos tienen que ser congruentes?
- Si  $\angle RPG$  es un ángulo recto, ¿qué otros ángulos tienen que ser rectos?

## 4-5. TEOREMAS ENUNCIADOS A BASE DE HIPÓTESIS Y CONCLUSIÓN

Todo teorema es una afirmación de que *si* una cierta cosa es verdadera, *entonces* otra cosa es también verdadera. Por ejemplo, el teorema 4-8 dice que *si* dos rectas que se cortan forman un ángulo recto, *entonces* forman cuatro ángulos rectos. La parte *si* de un teorema se llama la *hipótesis*; enuncia lo que se *supone*. La parte *entonces* se llama la *conclusión*; enuncia lo que hay que *demostrar*. Podemos expresar el teorema 4-8 de la manera siguiente:

## Teorema 4-8

*Hipótesis:*  $L_1$  y  $L_2$  forman un ángulo recto.

*Conclusión:*  $L_1$  y  $L_2$  forman cuatro ángulos rectos.

Analógicamente, podemos escribir el teorema 4-3 como sigue:

## Teorema 4-3

*Hipótesis:*  $\angle A$  y  $\angle B$  son ángulos rectos.

*Conclusión:*  $\angle A \cong \angle B$ .

Los postulados son como los teoremas, excepto que no van a ser demostrados. La mayor parte de ellos pueden ponerse en la forma *si... entonces*, al igual que los teoremas. Por ejemplo, el postulado de la adición de ángulos puede redactarse como sigue:

**POSTULADO 13.** Postulado de la adición de ángulos

*Hipótesis:*  $D$  está en el interior del  $\angle BAC$ .

*Conclusión:*  $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$ .

En algunos casos, la forma de hipótesis-conclusión no es natural o útil. Por ejemplo, si queremos decir que el espacio contiene cuatro puntos no coplanarios, no habría ventaja alguna en expresarlo así:

*Hipótesis:*  $S$  es el espacio.

*Conclusión:*  $S$  contiene cuatro puntos no coplanarios.

No es necesario, desde luego, que todos los teoremas se enuncien en la forma de hipótesis-conclusión. No importa en qué forma esté redactado el teorema, debe estar claro qué es lo que se da o se supone y lo que se va a demostrar. En la mayoría de los casos, sin embargo, debemos estar *dispuestos* a enunciar un teorema en la forma de hipótesis-conclusión, porque, de lo contrario, lo que probablemente ocurre es que no entendemos exactamente lo que dice el teorema.

**Conjunto de problemas 4-5**

**1.** Identificar la hipótesis y la conclusión en cada uno de los siguientes enunciados:

- Si dos ángulos son complementarios, entonces cada uno es agudo.
- Si  $a = b$  y  $b = c$ , entonces  $a = c$ .
- Si  $a = b$ , entonces  $a + c = b + c$ .
- Si dos ángulos son a la vez congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.
- Si las dimensiones de un rectángulo son  $a$  y  $b$ , entonces su área es  $ab$ .
- Si dos planos se cortan, entonces su intersección es una recta.

**2.** Escribir cada uno de los siguientes enunciados en la forma *si... entonces*:

- Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.
- El área de un triángulo de altura  $a$  y base  $b$  es  $\frac{1}{2}ab$ .
- La intersección de dos planos es una recta.
- Tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un plano.
- Dos ángulos que forman un par lineal son suplementarios.

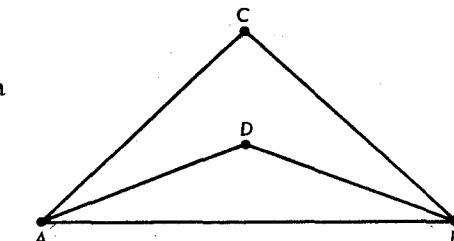
**4-6. REDACCIÓN DE DEMOSTRACIONES SENCILLAS**

Muy pronto, la redacción de demostraciones constituirá una gran parte de nuestro trabajo. Conviene, pues, tener más práctica en la redacción de demostraciones sencillas, antes de abordar las más difíciles en el siguiente capítulo. Probablemente, la mejor forma de indicar cómo deben ser las demostraciones es poner más ejemplos. En los ejemplos y problemas, podrá suponerse que las figuras están en un mismo plano, a menos que se indique lo contrario.

*Ejemplo 1*

*Datos:*  $\triangle ABC$  y  $\triangle ABD$ , como en la figura de la derecha, con  $\angle DAB \cong \angle DBA$  y  $\angle CAD \cong \angle CBD$ .

*Demostrar:*  $\angle CAB \cong \angle CBA$ .

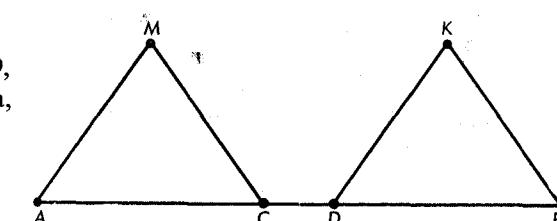


**Demostración**

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $m\angle DAB = m\angle DBA$ .	Dato.
2. $m\angle CAD = m\angle CBD$ .	Dato.
3. $m\angle DAB + m\angle CAD = m\angle DBA + m\angle CBD$ .	Propiedad aditiva de la igualdad.
4. $m\angle CAB = m\angle CBA$ .	Postulado de la adición de ángulos.
5. $\angle CAB \cong \angle CBA$ .	Definición de congruencia de ángulos.

*Ejemplo 2*

*Datos:* Los puntos  $A, B, C, D, M$ , como en la figura de la derecha, con  $AD = CB$ .



*Demostrar:*  $AC = DB$ .

**Demostración**

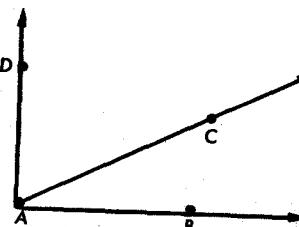
AFIRMACIONES	RAZONES
1. $AC + CD = AD$ .	Definición de estar entre.
2. $CD + DB = CB$ .	Definición de estar entre.
3. $AD = CB$ .	Dato.
4. $AC + CD = CD + DB$ .	Sustitución, en las afirmaciones 1, 2 y 3.
5. $AC = DB$ .	Propiedad de la igualdad con respecto a la sustracción.

## Ejemplo 3

Datos: Los rayos  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  y  $\overrightarrow{AD}$ , con  $C$  en el interior del  $\angle BAD$ , y con

$$m\angle BAC + m\angle CAD = 90.$$

Demostrar:  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ .



## Demostración

## AFIRMACIONES

## RAZONES

- $m\angle BAC + m\angle CAD = 90.$
- $m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD.$
- $m\angle BAD = 90.$
- $\angle BAD$  es un ángulo recto.
- $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ .

Dato.

Postulado de la adición de ángulos.

Afirmaciones 1 y 2.

Definición de ángulo recto.

Definición de rayos perpendiculares.

## Conjunto de problemas 4-6

1. Copiar lo siguiente y completar la demostración:

Datos:  $m\angle A = 38$ ,  $m\angle B = 52$ .Demostrar:  $\angle A$  es el complemento del  $\angle B$ .

## Demostración

## AFIRMACIONES

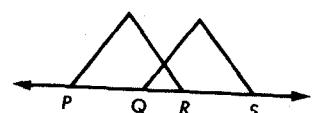
## RAZONES

- $m\angle A = \underline{\hspace{1cm}}$ .
- $m\angle B = \underline{\hspace{1cm}}$ .
- $m\angle A + m\angle B = \underline{\hspace{1cm}}$ .
- $\angle A$  es el complemento del  $\angle B$ .

Dato.

 $\underline{\hspace{1cm}}$ . $\underline{\hspace{1cm}}$ . $\underline{\hspace{1cm}}$ .

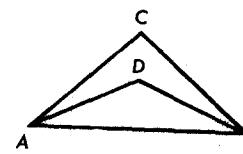
2. Copiar y desarrollar una demostración:

Datos: La figura, con  $PQ = RS$ .Demostrar:  $PR = QS$ .

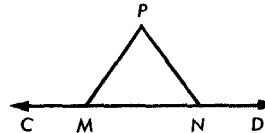
3. Copiar y desarrollar una demostración:

Datos: La figura, con

$$\begin{aligned} m\angle CAB &= m\angle CBA, \\ m\angle DAB &= m\angle DBA. \end{aligned}$$

Demostrar:  $m\angle CAD = m\angle CBD$ .

4. Copiar y completar la demostración:

Datos: La figura, con  $\angle PMN \cong \angle PNM$ .Demostrar:  $\angle CMP \cong \angle DNP$ .

## Demostración

## AFIRMACIONES

## RAZONES

- $\angle CMP$  es el suplemento del  $\angle PMN$ .
- $\angle DNP$  es  $\underline{\hspace{1cm}}$ .
- $\underline{\hspace{1cm}}$ .
- $\angle CMP \cong \angle DNP$ .

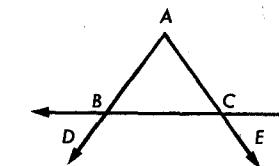
Dos ángulos que forman un par lineal son suplementarios.

Dato.

5. Copiar y desarrollar una demostración:

Datos: La figura, con

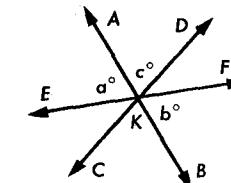
$$\angle DBC \cong \angle ECB.$$

Demostrar:  $\angle ABC \cong \angle ACB$ .

6. Copiar y determinar las razones:

Datos:  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{CD}$  y  $\overleftrightarrow{EF}$  se cortan en  $K$ :

$$a = c.$$

Demostrar:  $b = c$ .

## Demostración

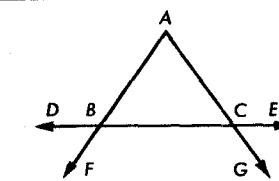
## AFIRMACIONES

## RAZONES

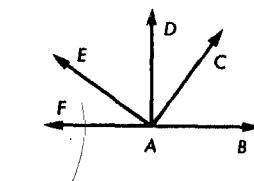
- $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{EF}$  se cortan en  $K$ .
- $\angle AKE$  y  $\angle BKF$  son ángulos opuestos por el vértice.
- $\angle AKE \cong \angle BKF$ .
- $a = b$ .
- $a = c$ .
- $b = c$ .

$\underline{\hspace{1cm}}$ .  
 $\underline{\hspace{1cm}}$ .  
 $\underline{\hspace{1cm}}$ .  
 $\underline{\hspace{1cm}}$ .  
 $\underline{\hspace{1cm}}$ .

7. Copiar y desarrollar una demostración:

Datos: La figura, con  $\angle ABC \cong \angle ACB$ .Demostrar:  $\angle DBF \cong \angle ECG$ .

8. Copiar y demostrar:

Datos:  $\overrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{FB}$  y  $\angle BAC \cong \angle DAE$ .Demostrar:  $\angle DAC \cong \angle FAE$ .

## Repaso del capítulo

En los problemas del 1 al 15, completar cada una de las afirmaciones dadas:

1. A todo ángulo corresponde un número real entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_, que se llama la medida del ángulo.
2. El instrumento utilizado para medir ángulos es el \_\_\_\_\_.
3. Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90, entonces cada ángulo es el \_\_\_\_\_ del otro.
4. Un ángulo cuya medida es menor que 90 se llama \_\_\_\_\_.
5. Un ángulo cuya medida es mayor que 90 se llama \_\_\_\_\_.
6. Dos ángulos formados por la reunión de dos rayos opuestos y un tercer rayo, los tres con el mismo extremo, se llaman un \_\_\_\_\_.
7. Los ángulos que tienen medidas iguales se llaman ángulos \_\_\_\_\_.
8. Dos ángulos que son complementarios tienen que ser cada uno \_\_\_\_\_.
9. Si dos ángulos son congruentes, sus suplementos son \_\_\_\_\_.
10. Dos ángulos a la vez congruentes y suplementarios son cada uno \_\_\_\_\_.
11. Todo triángulo tiene \_\_\_\_\_ lados y \_\_\_\_\_ ángulos; un triángulo contiene sus \_\_\_\_\_, pero no contiene sus \_\_\_\_\_.
12. La suma de las medidas de dos ángulos complementarios es \_\_\_\_\_; la suma de las medidas de dos ángulos suplementarios es \_\_\_\_\_.
13. La suma de las medidas de dos ángulos \_\_\_\_\_ es siempre menor que 180, y la suma de las medidas de dos ángulos \_\_\_\_\_ es siempre menor que \_\_\_\_\_.
14. Si los lados de dos ángulos son rayos opuestos, los ángulos se llaman \_\_\_\_\_.
15. Un punto  $M$  está en el interior del  $\angle GHK$ , si  $M$  y \_\_\_\_\_ están al mismo lado de  $\overleftrightarrow{HK}$  y si  $M$  y \_\_\_\_\_ están al mismo lado de \_\_\_\_\_.

Los problemas del 16 al 25 se refieren a la figura de la parte superior de la página siguiente. (Los puntos que parecen alineados, están alineados.)

16. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

17. ¿Es  $m\angle BFC = m\angle BFD$ ?

18. ¿Es  $\angle BFC = \angle BFD$ ?

19. ¿Es  $\angle FDB \cong \angle EDC$ ?

20. Nombrar el ángulo suplementario del  $\angle ABE$ .

21.  $m\angle AGB + m\angle BGF = ?$

22.  $m\angle GFC + m\angle DFE = ?$

23. Nombrar un conjunto de ángulos opuestos por el vértice.

24. Si  $\angle GBF$  es complementario del  $\angle FBE$ , entonces  $\overline{GB}$  y  $\overline{BE}$  tienen que ser \_\_\_\_\_.

25. ¿Cuántos ángulos están indicados en la figura?

26. La medida de un ángulo es cinco veces la medida de su complemento. Hallar la medida de cada ángulo.

27. La medida del suplemento de un ángulo es cinco veces la medida del complemento del mismo ángulo. Hallar la medida del ángulo.

28. ¿Es la suma de las medidas de dos ángulos siempre igual a la medida de otro ángulo? Explíquese.

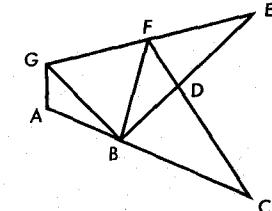
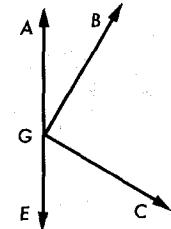


Figura para los problemas del 16 al 25



Demostración

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\overrightarrow{GA}$ es opuesto a $\overrightarrow{GE}$ .	Postulado del suplemento.
2. $\angle AGB$ es el suplemento del $\angle BGE$ .	
3. $m\angle AGB + m\angle BGE = 180$ .	
4. $\overrightarrow{GB} \perp \overrightarrow{GC}$ .	Definición de perpendicularidad y de ángulo recto.
5. $m\angle BFC = 90$ .	
6. $m\angle BGE = m\angle EGC + 90$ .	Sustitución de la afirmación 6 en la afirmación 3.
7. $m\angle AGB + m\angle EGC + 90 = 180$ .	
8. $m\angle AGB + m\angle EGC = 90$ .	
9. $\angle AGB$ es el complemento del $\angle EGC$ .	

30.  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  son rayos opuestos; los puntos  $E, F$  y  $H$  están al mismo lado de  $\overleftrightarrow{AB}$ ; los puntos  $E$  y  $H$  están a lados opuestos de  $\overleftrightarrow{BF}$ ; los puntos  $A$  y  $H$  están al mismo lado de  $\overleftrightarrow{BF}$ ;  $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ;  $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{BH}$ ;  $m\angle FBE = 20$ . Dibujar la figura y hallar:
- (a)  $m\angle EBA$ . (b)  $m\angle FBH$ . (c)  $m\angle EBC$ .

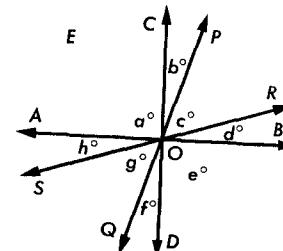
31. ¿Habrá un punto en el plano de un triángulo que no esté ni en el exterior ni en el interior del triángulo, ni tampoco en el interior o exterior de cualesquiera de los ángulos del triángulo?

32. Se da el  $\triangle ABC$  y el punto  $P$  en el mismo plano.  $P$  y  $A$  están del mismo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$ .  $P$  y  $B$  están del mismo lado de  $\overleftrightarrow{AC}$ .

- (a) ¿En el interior de qué ángulo está el punto  $P$ ?  
 (b) ¿Tiene que estar  $P$  en el interior del  $\triangle ABC$ ?

33. Si se da que  $\angle a$  es complementario del  $\angle y$ ,  $\angle b$  es complementario del  $\angle x$ , y  $\angle x \cong \angle y$ , ¿qué postulado o teorema se utilizaría para demostrar que  $\angle a \cong \angle b$ ?

34. ¿Es el siguiente enunciado cierto? Si  $\overleftrightarrow{PQ}$  y  $\overleftrightarrow{RS}$  se intersecan en  $O$ , entonces  $\angle POR \cong \angle QOS$ .

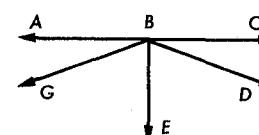


35. Datos: En el plano  $E$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{CD}$ ,  $\overleftrightarrow{PQ}$  y  $\overleftrightarrow{RS}$  se intersecan en  $O$ , y  $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ . Completar la demostración de que

$$b + g + d = a.$$

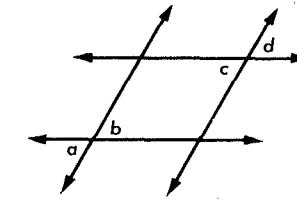
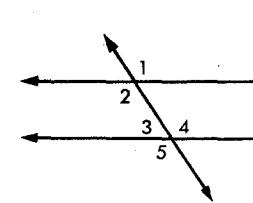
**Demostración:** Aplicando dos veces el PAA, tenemos que  $m\angle COB = b + c + d$ . Pero, como  $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ,  $m\angle COB = a$ . Por tanto,  $a = b + c + d$ . Además,  $\angle POR$  y  $\angle QOS$  son ángulos  $\cong$ ; luego,  $c = f$ . Sustituyendo  $c$  por  $f$ , concluimos que  $b + g + d = a$ .

36. ¿Es correcta la siguiente redacción del postulado de la construcción de ángulos?  
 Dado el rayo  $\overrightarrow{RS}$  y un número  $k$  entre 0 y 180, existe exactamente un rayo  $\overrightarrow{RP}$  tal que  $m\angle SRP = k$ .



37. Datos: La figura, con  $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{AC}$  y  $\angle ABG \cong \angle CBD$ .  
 Demostrar:  $\angle GBE \cong \angle DBE$ .

38. Se da la figura, con  $\angle 2$  y  $\angle 3$  suplementarios. Demostrar que  $\angle 1 \cong \angle 4$ .



39. Si, en la figura,  $\angle b \cong \angle c$ , demostrar que  $\angle a \cong \angle d$ .

40. En la recta  $L$ , se tiene  $A-B-C$ . Los puntos  $D$  y  $E$  están en lados opuestos de  $L$  tal que, al trazar  $\overleftrightarrow{BD}$  y  $\overleftrightarrow{BE}$ , resulta  $\angle CBD \cong \angle CBE$ . Demostrar que

$$m\angle ABD = m\angle ABE.$$

41. Jaime y Jorge deseaban escribir el siguiente enunciado en la forma *si... entonces*:  
 "Dos rectas que se intersecan se cortan exactamente en un punto".

Jorge escribió: "Si  $P$  es un punto, entonces  $L_1$  y  $L_2$  se cortan exactamente en  $P$ ". Jaime escribió: " $L_1$  y  $L_2$  se cortan exactamente en un punto, si se intersecan y son diferentes". ¿Lo hizo bien Jaime? ¿Y Jorge?

42. Si  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  y  $\overrightarrow{OC}$  son tres rayos distintos en el plano, tales que ningún par de ellos son opuestos, ¿será cada uno de los siguientes enunciados cierto o falso?

$$(a) m\angle AOB + m\angle BOC = m\angle AOC.$$

$$(b) m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle AOC = 360.$$

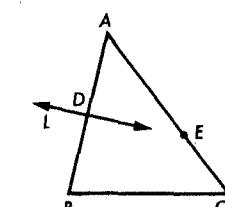
$$m\angle AOC = 360 - m\angle AOB - m\angle BOC$$

43. ¿Podría el interior de un triángulo definirse como la intersección de tres semiplanos? Explíquese. Si el punto  $X$  es cualquier punto en el interior del  $\triangle ABC$ , escribe una definición del interior del  $\triangle ABC$ . (Refiérase a la definición del interior de un ángulo en la sección 4-1.)

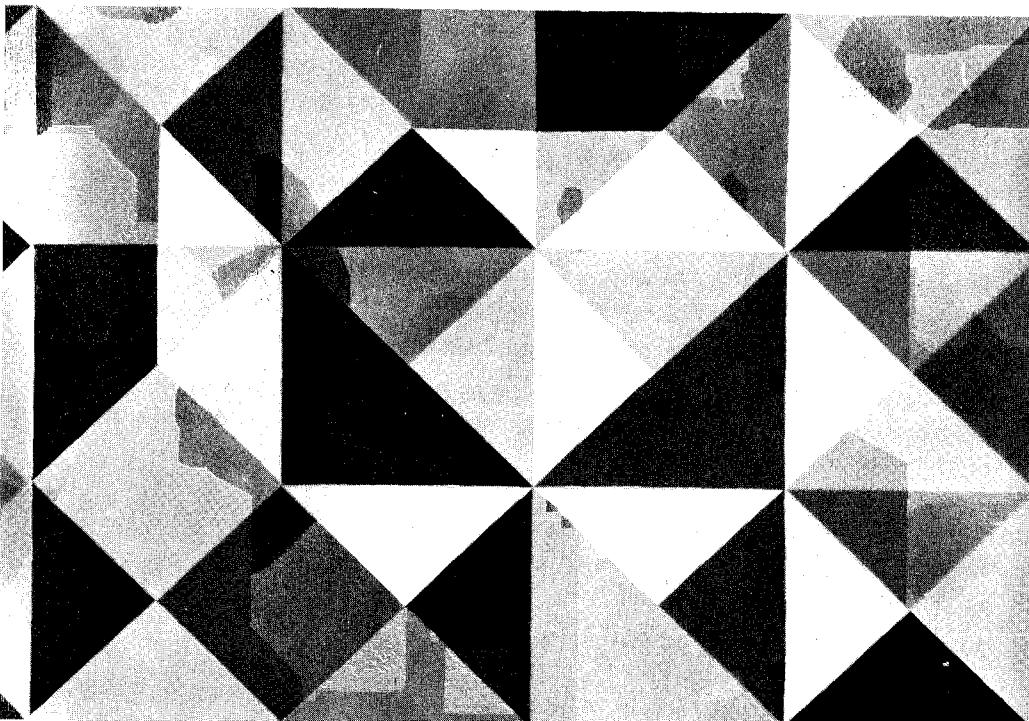
44. ¿Está el interior del  $\triangle ABC$  completamente determinado por la intersección de los interiores de dos cualesquiera de sus ángulos? Ilústrese esto y formúlese una definición. ¿Es ésta equivalente a la definición anterior?

$$m\angle AOC = 180$$

45. Explicar por qué es cierto el siguiente enunciado: Si la recta  $L$  corta al  $\triangle ABC$  en un punto  $D$  tal que  $A-D-B$ , y  $L$  no corta a  $\overleftrightarrow{BC}$ , entonces  $L$  tiene que cortar a  $\overleftrightarrow{AC}$  en un punto  $E$  tal que  $A-E-C$ .

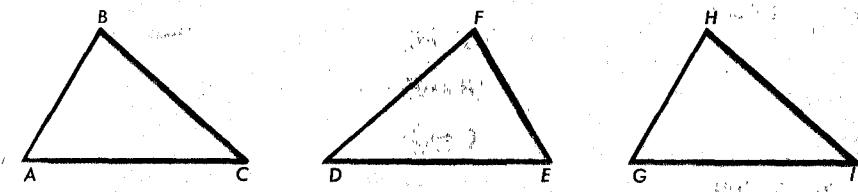


# 5 | Congruencias



## 5-1. EL CONCEPTO DE CONGRUENCIA

En el lenguaje corriente, dirímos que dos figuras geométricas son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. Por ejemplo, los tres triángulos representados a continuación son congruentes:



Una manera de describir la situación es decir que uno cualquiera de estos triángulos puede colocarse sobre cualquier otro de manera que coincida con él exactamente. Así, para ilustrar lo que entendemos al decir que dos triángulos son congruentes, debemos explicar qué puntos han de superponerse dos a dos. Por ejemplo, para llevar el  $\triangle ABC$  sobre el  $\triangle DFE$ , debemos colocar  $A$  sobre  $E$ ,  $B$  sobre  $F$ , y  $C$  sobre  $D$ . Podemos escribir así los pares de vértices correspondientes:

$$A \leftrightarrow E,$$

$$B \leftrightarrow F,$$

$$C \leftrightarrow D.$$

Para describir la congruencia del primer triángulo y el tercero, debemos aparear los vértices de esta manera:

$$A \leftrightarrow G,$$

$$B \leftrightarrow H,$$

$$C \leftrightarrow I.$$

¿Cómo aparearíamos los vértices para describir la congruencia del segundo triángulo con el tercero?

Un apareamiento como cualquiera de los descritos se llama una *correspondencia biunívoca* entre los vértices de los dos triángulos. Si los triángulos coinciden al aparear los vértices de la manera descrita, entonces la correspondencia biunívoca se llama una *congruencia* entre los dos triángulos. Por ejemplo, las correspondencias que acabamos de presentar son congruencias. Por otra parte, si escribimos

$$A \leftrightarrow F,$$

$$B \leftrightarrow D,$$

$$C \leftrightarrow E,$$

obtenemos una correspondencia biunívoca, pero *no* una congruencia, pues los triángulos primero y segundo no pueden hacerse coincidir mediante este apareamiento particular. Esta correspondencia da lugar a muchas dificultades.  $\overline{AB}$  es demasiado corto para que pueda coincidir con  $\overline{FD}$ ,  $\overline{AC}$  es demasiado largo para que pueda coincidir con  $\overline{FE}$ , y así sucesivamente.

Todavía podemos escribir más brevemente estas correspondencias. Por ejemplo, la correspondencia

$$A \leftrightarrow E,$$

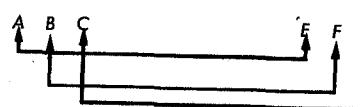
$$B \leftrightarrow F,$$

$$C \leftrightarrow D,$$

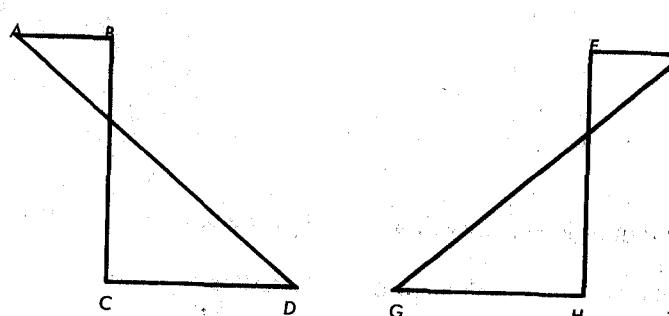
que ofrecemos como primer ejemplo, puede escribirse en una sola línea así:

$$ABC \leftrightarrow EFD.$$

Aquí debe sobrentenderse que la primera letra de la izquierda corresponde a la primera letra de la derecha, la segunda corresponde a la segunda, y la tercera corresponde a la tercera, según se indica a continuación:



Tomemos otro ejemplo más. Las dos figuras siguientes tienen la misma forma y el mismo tamaño:



Para mostrar cómo la una puede colocarse sobre la otra, debemos aparear los vértices como sigue:

$$A \leftrightarrow F,$$

$$B \leftrightarrow E,$$

$$C \leftrightarrow H,$$

$$D \leftrightarrow G.$$

Esta correspondencia es una congruencia; esto es, las figuras pueden hacerse coincidir si los vértices se aparean en la forma dada. Abreviadamente, esta congruencia puede escribirse en una sola línea así:

$$ABCD \leftrightarrow FEHG.$$

No observará que no importa el orden en que se escriban las *parejas* de puntos. Pudimos haber escrito nuestra lista de parejas de este modo:

$$D \leftrightarrow G,$$

$$B \leftrightarrow E,$$

$$C \leftrightarrow H,$$

$$A \leftrightarrow F;$$

y pudimos también haber escrito nuestra correspondencia biunívoca en una sola línea, así:

$$DBCA \leftrightarrow GEHF.$$

Todo lo que importa es saber qué puntos se aparean entre sí.

Es posible que dos figuras sean congruentes de más de una manera. Aquí, la correspondencia

$$ABC \leftrightarrow FDE$$

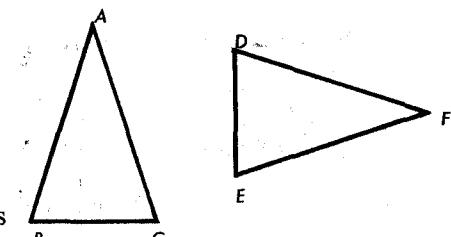
en una congruencia, y la correspondencia

$$ABC \leftrightarrow FED$$

en una congruencia diferente entre las mismas dos figuras.

Evidentemente, el  $\triangle ABC$  coincide consigo mismo. Si convenimos en aparear cada vértice consigo mismo, tendremos la congruencia

$$ABC \leftrightarrow ABC.$$



Esta se llama la congruencia *identidad*. Sin embargo, hay otra manera de aparear los vértices de este triángulo. Podemos emplear la correspondencia

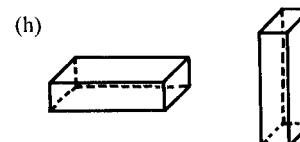
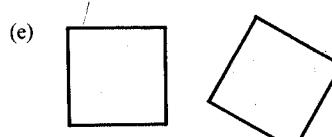
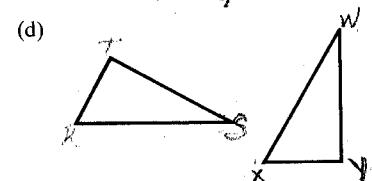
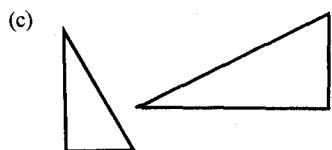
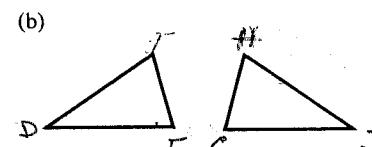
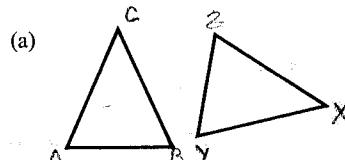
$$ABC \leftrightarrow ACB.$$

Mediante esta correspondencia, la figura se hace coincidir con ella misma, pero se intercambian los vértices  $B$  y  $C$ . Esto no es posible en modo alguno para todos los triángulos; vale solamente cuando dos lados del triángulo, al menos, tienen la misma longitud.

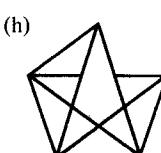
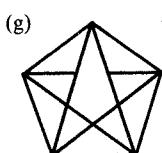
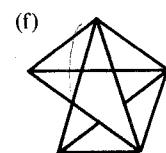
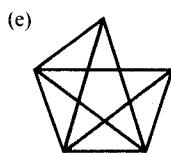
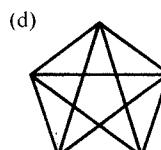
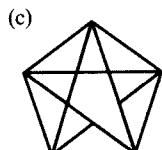
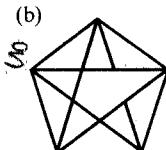
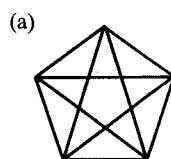
## Conjunto de problemas 5-1

En algunos de los ejercicios de este conjunto de problemas, el lector ha de determinar congruencias por simple inspección. Dicho de otro modo: Las correspondencias que *parecen* ser congruencias, al medir las figuras con cierto cuidado, se supone que son congruencias. (No hay truco alguno en el modo de dibujar las figuras.)

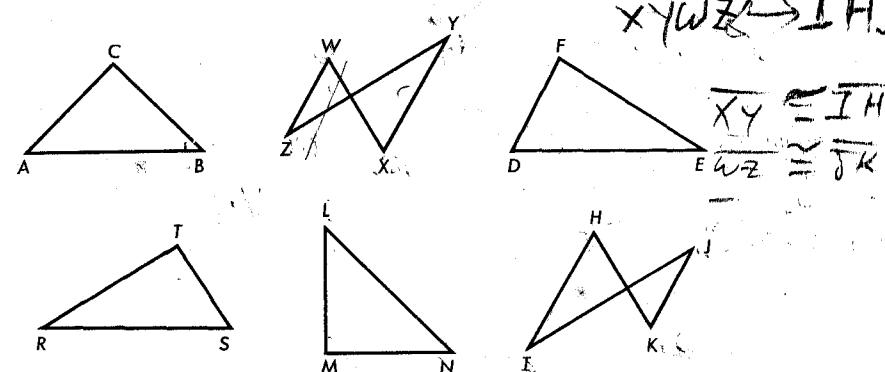
1. ¿Cuáles de los siguientes pares de figuras son congruentes?



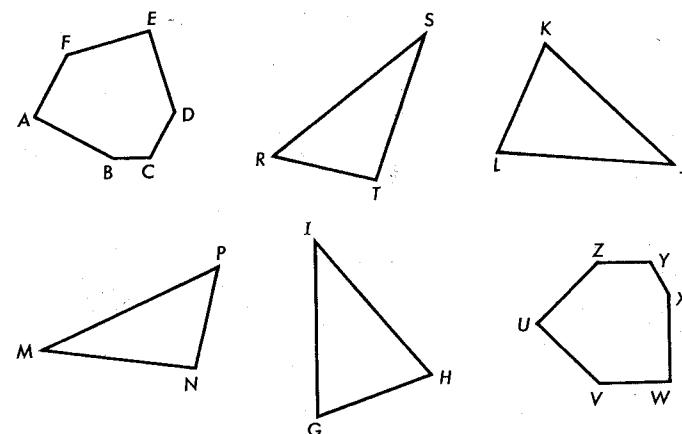
2. ¿Cuáles de las siguientes figuras no tienen una con la cual aparearse?



3. Obsérvense las figuras a continuación. Escríbanse tantas congruencias como puedan determinarse entre esas figuras. Deberán encontrarse seis congruencias. (Se puede prescindir de la congruencia identidad en todas las figuras, pero deberá incluirse la congruencia, diferente de la congruencia identidad, entre un triángulo y él mismo, si el triángulo tiene dos lados congruentes. Una congruencia es  $ACB \leftrightarrow LMN$ .)

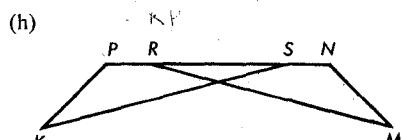
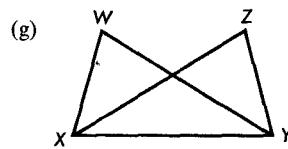
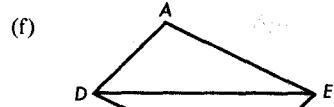
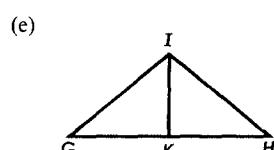
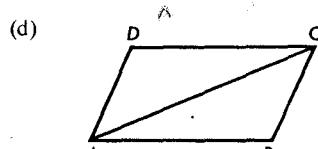
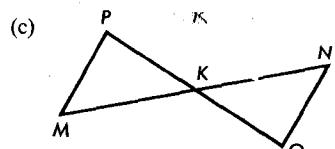
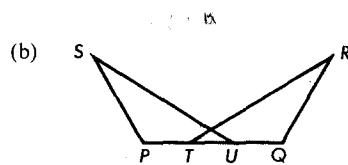
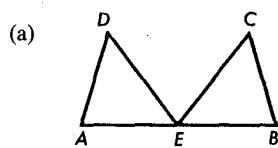


4. Seguir las instrucciones del problema 3 para las figuras a continuación:



5. (a) ¿Es una figura congruente consigo misma? *Sí* *Re*
- (b) Si dos figuras son cada una de ellas congruentes con una tercera, ¿serán congruentes entre sí? *Sí* *Re*
- (c) ¿Son congruentes los lados de un cuadrado?
- (d) ¿Son congruentes los lados de un rectángulo?
- (e) ¿Son congruentes dos caras opuestas de un cubo?
- (f) ¿Son congruentes dos caras adyacentes de un cubo?
- (g) ¿Son congruentes dos caras opuestas de un bloque rectangular, tal como un ladrillo?
- (h) ¿Son congruentes dos caras adyacentes de un ladrillo?

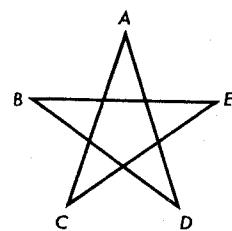
6. Los triángulos en cada uno de los siguientes pares de figuras son congruentes. Escríbanse las congruencias para cada par. (La primera es  $AED \leftrightarrow BEC$ .)



7. ¿En qué condiciones serían congruentes los siguientes pares de figuras?

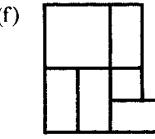
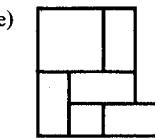
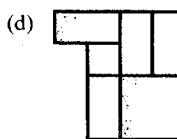
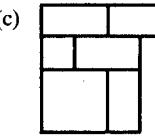
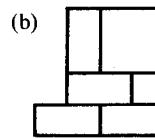
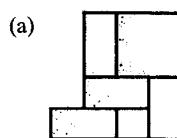
- (a) Dos segmentos. (b) Dos rectas. (c) Dos ángulos.  
(d) Dos circunferencias. (e) Dos cuadrados. (f) Dos triángulos.

8. La figura a continuación es una estrella de cinco puntas  $ABCDE$ . Escríbanse todas las congruencias que admite la estrella consigo misma, comenzando con  $ABCDE \leftrightarrow ABCDE$ .

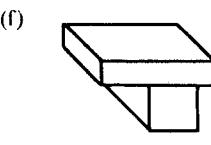
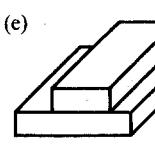
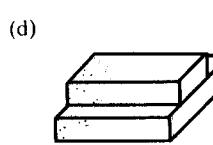
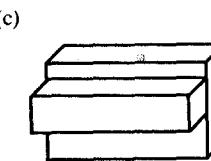
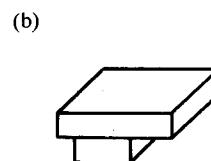
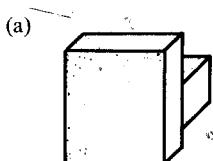


9. El triángulo  $ABC$  es equilátero; es decir,  $AB = BC = AC$ . Escríbanse todas las congruencias posibles del triángulo consigo mismo, comenzando con la congruencia identidad  $ABC \leftrightarrow ABC$ . (Hay más de cuatro.)

- 10. ¿Cuáles de las siguientes figuras planas pueden coincidir con otras? Para cada par de ellas, indíquese qué movimientos (dar una vuelta en el espacio a una de las figuras, o deslizarla, o girarla en el plano) son necesarios para que las figuras coincidan:



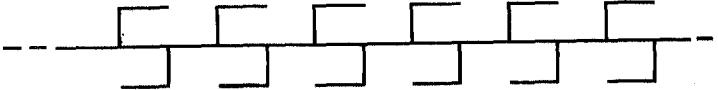
- 11. ¿Cuáles de estas figuras tridimensionales son congruentes?



- 12. Supongamos que el friso ornamental de la figura se extiende indefinidamente en ambas direcciones, como es el caso de una recta. Consideraremos una traslación horizontal del friso que transformaría cada pestaña en la pestaña siguiente del mismo lado de la recta. Podríamos decir que este movimiento da una congruencia del friso consigo mismo.



- (a) Describanse movimientos de tipo diferente que den congruencias del friso consigo mismo. ¿Cuántas de esas congruencias hay?  
(b) Describanse dos tipos de movimientos que den congruencias del friso a continuación consigo mismo:



## 5-2. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

En la sección anterior, dimos una explicación intuitiva de lo que es una congruencia. Veamos ahora algunas definiciones, con el propósito de tratar la idea matemáticamente.

En el caso de ángulos y segmentos, es fácil expresar exactamente lo que queremos decir.

### Definiciones

Dos ángulos son *congruentes*, si tienen la misma medida. Dos segmentos son *congruentes*, si tienen la misma longitud.

Desde luego, la primera de estas definiciones es una repetición de la que se dio en la sección 4-4.

### Teorema 5-1

Todo segmento es congruente consigo mismo.

La demostración es evidente, porque un segmento tiene su misma longitud. En demostraciones futuras, nos referiremos a este teorema mediante la frase *congruencia idéntica*.

De la misma manera que escribimos  $\angle A \cong \angle B$  para indicar que  $\angle A$  y  $\angle B$  son congruentes, escribimos

$$\overline{AB} \cong \overline{CD},$$

para indicar que  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  son congruentes. Así,

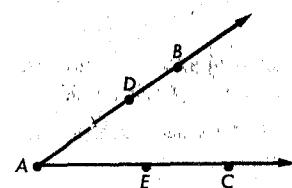
$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \text{significa que} \quad AB = CD,$$

$$\text{y} \quad \angle A \cong \angle B \quad \text{significa que} \quad m\angle A = m\angle B.$$

Cada una de las *igualdades* de la derecha es una *igualdad entre números*. Cada una de las *congruencias* de la izquierda es una *congruencia entre figuras geométricas*. No escribiremos  $=$  entre dos nombres de figuras geométricas, a menos que queramos decir que las figuras son exactamente una misma, y esas ocasiones serán muy pocas. Un ejemplo se presenta a la derecha. Aquí, es correcto escribir que

$$\angle BAC = \angle EAD,$$

porque  $\angle BAC$  y  $\angle EAD$  son, no solamente congruentes, sino *exactamente el mismo ángulo*. De manera análoga,  $\overline{AB}$  y  $\overline{BA}$  son siempre el mismo segmento y, por eso, es correcto escribir, no solamente  $\overline{AB} \cong \overline{BA}$ , sino también  $\overline{AB} = \overline{BA}$ .



Consideremos ahora una correspondencia

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

entre los vértices de dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ . Esto automáticamente nos da una correspondencia entre los lados de los dos triángulos:

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE},$$

$$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF},$$

$$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF},$$

y también nos da una correspondencia entre los ángulos de los dos triángulos:

$$\angle A \leftrightarrow \angle D,$$

$$\angle B \leftrightarrow \angle E,$$

$$\angle C \leftrightarrow \angle F.$$

Podemos ahora enunciar la definición de una congruencia entre dos triángulos.

### Definición

Sea

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

una correspondencia entre los vértices de dos triángulos. Si los pares de lados correspondientes son congruentes, y los pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia  $ABC \leftrightarrow DEF$  se llama una *congruencia entre los dos triángulos*.

Cuando escribimos  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ , queremos decir que la correspondencia  $ABC \leftrightarrow DEF$  es una congruencia. Ésta es una taquigrafía muy eficiente, pues una sola expresión como  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  nos dice a la vez *seis* cosas, a saber:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \quad \text{o} \quad AB = DE,$$

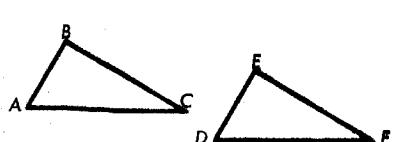
$$\overline{AC} \cong \overline{DF}, \quad \text{o} \quad AC = DF,$$

$$\overline{BC} \cong \overline{EF}, \quad \text{o} \quad BC = EF,$$

$$\angle A \cong \angle D, \quad \text{o} \quad m\angle A = m\angle D,$$

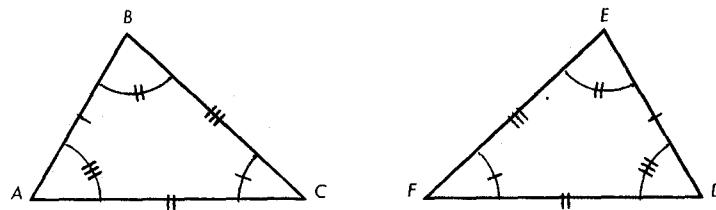
$$\angle B \cong \angle E, \quad \text{o} \quad m\angle B = m\angle E,$$

$$\angle C \cong \angle F, \quad \text{o} \quad m\angle C = m\angle F.$$



En cada una de las seis líneas anteriores, la congruencia de la izquierda significa lo mismo que la igualdad de la derecha. Podemos, por tanto, utilizar una u otra notación, según nos convenga. Generalmente, escribiremos  $AB = DE$  en vez de  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ , porque es más fácil de escribir. Por la misma razón, corrientemente escribiremos  $\angle A \cong \angle D$  en vez de  $m\angle A = m\angle D$ . Con frecuencia, nos referiremos a las seis partes de la definición anterior mediante el enunciado: "Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes."

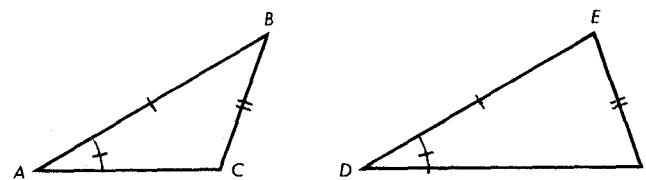
En las figuras, a veces conviene indicar congruencias entre segmentos y ángulos del modo siguiente:



En este caso, las seis congruencias indicadas por las marcas nos dicen que

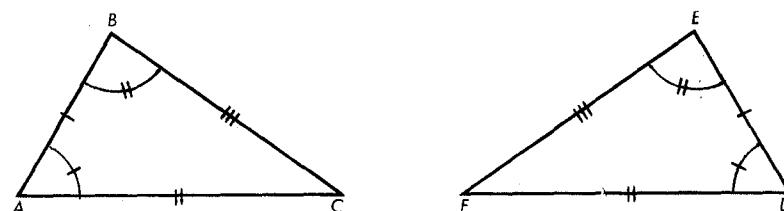
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

En la figura a continuación, las marcas nos dicen menos:



En efecto, es bastante fácil darse cuenta de que esos dos triángulos no son congruentes mediante correspondencia alguna.

En algunos casos, aún con información parcial solamente, podremos deducir que una correspondencia es una congruencia.



En la correspondencia  $ABC \leftrightarrow DEF$ , se da que los tres pares de lados correspondientes son congruentes y dos de los tres pares de ángulos correspondientes son congruentes. Evidentemente, debe ser cierto que  $\angle C \cong \angle F$  y, por tanto,  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . En efecto, deberíamos poder llegar a la misma conclusión aún con menos

información. En la parte final del siguiente conjunto de problemas, el alumno descubrirá las condiciones en las cuales puede concluirse que una correspondencia entre dos triángulos es una congruencia. Las propiedades de estas relaciones no son difíciles de imaginar, según se verá más adelante.

### Definiciones

Un *lado* de un triángulo se dice estar *comprendido* por los ángulos cuyos vértices son los extremos del segmento.

Un *ángulo* de un triángulo se dice estar *comprendido* por los lados del triángulo que están en los lados del ángulo.

Por ejemplo, en el  $\triangle ABC$  anterior,  $\overline{AC}$  está comprendido por los ángulos  $\angle A$  y  $\angle C$ , y el  $\angle A$  está comprendido por los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ .

### Conjunto de problemas 5-2

1. Si  $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ , complétense los siguientes enunciados con los símbolos que faltan: La correspondencia  $A \underline{\hspace{1cm}} \leftrightarrow D \underline{\hspace{1cm}} C$  es una congruencia.

$$\angle A \cong \angle D.$$

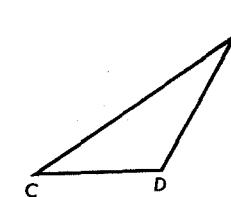
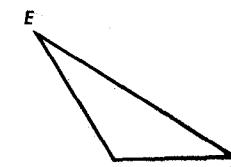
$$\angle B \cong \underline{\hspace{1cm}} \angle C.$$

$$\angle E \cong \underline{\hspace{1cm}} \angle F.$$

$$\overline{AB} \cong \underline{\hspace{1cm}} \overline{DC}.$$

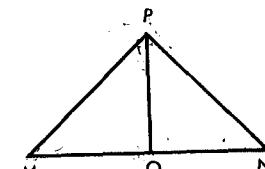
$$\overline{AE} \cong \underline{\hspace{1cm}} \overline{DF}.$$

$$\overline{BE} \cong \underline{\hspace{1cm}} \overline{CF}.$$



2. Se da que  $\triangle MQP \cong \triangle NQP$ . Hacer una lista de los seis pares de partes correspondientes congruentes de estos dos triángulos.

$$\begin{array}{ll} \angle M \cong \angle N & \angle P \cong \angle Q \\ \angle Q \cong \angle Q & \overline{MP} \cong \overline{NP} \\ \angle P \cong \angle P & \overline{QP} \cong \overline{QP} \end{array}$$



3. Para cada una de las congruencias indicadas a continuación, hacer una lista de los seis pares de partes correspondientes congruentes:

(a)  $\triangle RQF \cong \triangle ABX$ . Puede utilizarse una figura, si se desea.

(b)  $\triangle FHW \cong \triangle MRK$ . No debe utilizarse una figura.

(c)  $\triangle AZW \cong \triangle BWZ$ . No debe utilizarse una figura.

4. Escribir la congruencia para dos triángulos, determinada por los siguientes seis pares de partes congruentes:

$$\overline{AK} \cong \overline{BW}; \quad \angle A \cong \angle B.$$

$$\triangle AKT \cong \triangle BWR$$

$$\overline{KT} \cong \overline{WR}; \quad \angle K \cong \angle W.$$

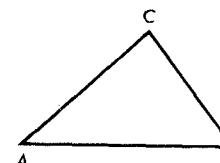
$$\overline{AT} \cong \overline{BR}; \quad \angle T \cong \angle R.$$

5. (a) En el  $\triangle ABC$ , ¿cuál es el ángulo comprendido por los lados  $\overline{BC}$  y  $\overline{AB}$ ?

- (b) ¿Cuál es el lado comprendido por los ángulos  $\angle A$  y  $\angle C$ ?

- (c) ¿Qué lados comprenden el  $\angle C$ ?

- (d) ¿Qué ángulos comprenden el lado  $\overline{BC}$ ?



6. Considérese el  $\triangle GHK$ . Sin dibujar una figura, ¿puede descubrirse un método fácil para decidir qué lados y qué ángulos son lados comprendidos y ángulos comprendidos?

- (a) ¿Está el  $\angle H$  comprendido por los lados  $\overline{GH}$  y  $\overline{HK}$ ?

- (b) ¿Está el lado  $\overline{GK}$  comprendido por los ángulos  $\angle G$  y  $\angle K$ ?

- (c) ¿Cuál es el ángulo comprendido por  $\overline{GH}$  y  $\overline{GK}$ ?

- (d) ¿Cuál es el lado comprendido por  $\angle G$  y  $\angle H$ ?

[Nota: En los problemas del 7 al 13, deben utilizarse un transportador y una regla para construir los ángulos y segmentos.]

7. Construir el  $\triangle RST$ , en el cual  $RS = 2\frac{1}{2}$  cm.,  $RT = 1\frac{1}{2}$  cm. y  $m\angle R = 35$ .



8. Construir el  $\triangle ABC$ , en el cual  $AB = 2$  pulgadas,  $m\angle A = 45$  y  $m\angle B = 60$ . Si se construyen varios triángulos con las medidas dadas, ¿qué característica común tendrán todos esos triángulos?



9. Construir el  $\triangle MNP$ , en el cual  $MN = 3$  cm.,  $NP = 2$  cm. y  $PM = 3\frac{1}{2}$  cm. Quizás, sea necesario utilizar un compás para completar la construcción.



10. Utilizando solamente una regla, constrúyase un triángulo cualquiera que no tenga dos lados congruentes. Luego, constrúyase un segundo triángulo congruente con el primero y describanse los pasos efectuados. ¿Existe más de una manera de obtener el segundo triángulo del primero? ¿Cuántas de las seis partes del primer triángulo se utilizaron para construir el segundo triángulo? ¿Cuál es el número mínimo de partes congruentes necesario para asegurar que los dos triángulos son congruentes?

11. Construir el  $\triangle ABC$ , en el cual  $m\angle A = 40$ ,  $AC = 3$  pulgadas y  $CB = 2$  pulgadas. Luego, construir el  $\triangle DEF$ , en el cual  $m\angle D = 40$ ,  $DF = 3$  pulgadas y  $FE = 2$  pulgadas. ¿Deberán ser congruentes los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ ?

12. En el problema 8, debió concluirse que todos los triángulos cuyas partes tienen las medidas dadas son congruentes, esto es, todas las partes correspondientes son congruentes. Cuando sucede esto, decimos que las tres partes dadas *determinan* un triángulo. En el problema 11, deben haberse hallado dos triángulos que no son congruentes, pero que tienen las medidas dadas. En el problema 7, ¿se determina un triángulo o más de uno? ¿Y en el problema 9? ¿Será posible asignar medidas a ángulos o segmentos de tal modo que ningún triángulo esté determinado?

13. Construir el triángulo determinado por cada conjunto de medidas dadas a continuación. Si la información determina dos triángulos, construir ambos. Si pueden construirse más de dos triángulos, o no puede construirse ninguno, explicar por qué.

(a)  $m\angle M = 30$ ,  $MO = 2$ ,  $m\angle O = 90$ .



(b)  $m\angle B = 55$ ,  $AB = 5$ ,  $BC = 3$ .



(c)  $m\angle G = 35$ ,  $GH = 6$ ,  $HI = 4$ .



(d)  $AB = 5$ ,  $BC = 3$ ,  $AC = 4$ .



(e)  $m\angle M = 80$ ,  $MO = 2$ ,  $m\angle O = 120$ .



(f)  $DE = 8$ ,  $EF = 3$ ,  $DF = 4$ .



(g)  $DE = 4$ ,  $DF = 8$ ,  $m\angle D = 60$ .



(h)  $m\angle A = 70$ ,  $m\angle B = 60$ ,  $m\angle C = 50$ .

14. (a) Los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$  no se intersecan y  $M$  es un punto entre  $B$  y  $C$ . ¿Cuál de los dos símbolos  $=$  o  $\cong$  corresponde colocar en cada uno de los espacios en blanco para completar un enunciado que tenga sentido y que posiblemente sea cierto?

(i)  $\triangle ABC \underline{\hspace{1cm}} \triangle DEF$ .

(v)  $\angle E \underline{\hspace{1cm}} \angle F$ .

(ii)  $m\angle B \underline{\hspace{1cm}} m\angle E$ .

(vi)  $\angle ABM \underline{\hspace{1cm}} \angle ABC$ .

(iii)  $BC \underline{\hspace{1cm}} EF$ .

(vii)  $m\angle ABM \underline{\hspace{1cm}} m\angle DEF$ .

(iv)  $\overline{AB} \underline{\hspace{1cm}} \overline{DE}$ .

(viii)  $AB \underline{\hspace{1cm}} DE$ .

- (b) ¿Qué espacio en blanco se pudo llenar con cualquiera de los dos símbolos?

- (c) Si  $\overline{AB}$  hubiera sido el mismo segmento que  $\overline{DE}$ , pero  $C$  fuera un punto diferente de  $F$ , ¿en qué caso se cambiaría  $\cong$  por  $=$ ?

15. Se da el triángulo  $\triangle ABC$ . Si

$$\triangle ABC \cong \triangle BAC \quad \text{y} \quad \triangle ABC \cong \triangle ACB,$$

- ¿qué conclusión se puede obtener acerca del  $\triangle ABC$ ? ¿Cómo se demostraría que la conclusión es válida?

- \* 16. Se da  $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{KM}$  con  $K-P-M$ . Los puntos  $A$  y  $B$  están del mismo lado de  $\overleftrightarrow{KM}$  que  $C$ , pero  $A$  y  $B$  están en lados opuestos de  $\overleftrightarrow{PC}$ .  $A$  está del mismo lado de  $\overleftrightarrow{PC}$  que  $K$ .  $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ . Demostrar que  $\angle KPA \cong \angle MPB$ .

- \* 17. Si

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \quad \text{y} \quad \triangle DEF \cong \triangle GHK,$$

¿qué conclusión se puede obtener acerca de los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle GHK$ ? ¿Cómo se demostraría que la conclusión es válida? Enúnciese un teorema que generalice esta situación.

### PROBLEMA OPTATIVO

Una *relación de equivalencia* se define como una relación  $*$  entre los elementos de un conjunto, que tiene las siguientes propiedades:

Si  $a, b, c$  son elementos cualesquiera del conjunto, entonces

- (i)  $a * a$ . (Reflexiva)
- (ii) Si  $a * b$ , entonces  $b * a$ . (Simétrica)
- (iii) Si  $a * b$  y  $b * c$ , entonces  $a * c$ . (Transitiva)

Al aplicar esta definición a una relación particular, debe remplazarse el asterisco ( $*$ ) por la relación. Por ejemplo, considérese la relación “tiene el mismo lugar de nacimiento que”, definida en el conjunto de todos los niños nacidos en el Hospital San Antonio. Tendríamos:

- (i)  $a$  tiene el mismo lugar de nacimiento que  $a$ .
- (ii) Si  $a$  tiene el mismo lugar de nacimiento que  $b$ , entonces  $b$  tiene el mismo lugar de nacimiento que  $a$ .
- (iii) Si  $a$  tiene el mismo lugar de nacimiento que  $b$  y  $b$  tiene el mismo lugar de nacimiento que  $c$ , entonces  $a$  tiene el mismo lugar de nacimiento que  $c$ .

Como todas las afirmaciones anteriores son ciertas, decimos que la relación es una relación de equivalencia.

(a) Demostrar que la congruencia de triángulos es una relación de equivalencia. Debe explicarse por qué cada una de las tres afirmaciones es cierta. En la explicación, puede utilizarse el problema 17.

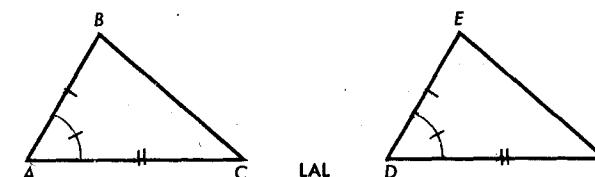
(b) Elegir un conjunto apropiado para cada una de las siguientes relaciones y, luego, determinar cuáles son relaciones de equivalencia:

“es menor que”, “es igual a”, “es el recíproco de”, “es condiscípulo de”, “es un residente del mismo pueblo que”, “es más alto que”, “es más rápido que”, “es tan húmedo como”.

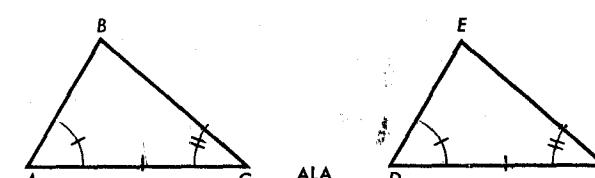
### 6-8. LOS POSTULADOS DE CONGRUENCIA PARA TRIÁNGULOS

Nin duda, el alumno habrá descubierto que hay por lo menos tres casos en los cuales podemos concluir que una correspondencia entre dos triángulos es una congruencia.

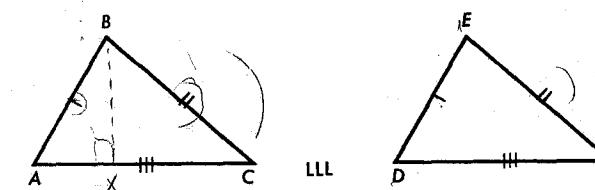
En el primer caso,  $ABC \leftrightarrow DEF$  se llama una correspondencia *LAL*; con esto, queremos decir que dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo. (“LAL” representa “lado-ángulo-lado”.) En este caso, se deduce que  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .



En el segundo caso,  $ABC \leftrightarrow DEF$  se llama una correspondencia *ALA*; con esto, queremos decir que dos ángulos y el lado comprendido del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo. (“ALA” representa “ángulo-lado-ángulo”.) En este caso, también, se deduce que  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .



Finalmente, en el tercer caso,  $ABC \leftrightarrow DEF$  se llama una correspondencia *LLL*; con esto, queremos decir que los tres lados del primer triángulo son congruentes con los lados correspondientes del segundo triángulo. (“LLL” representa “lado-lado-lado”.) Aquí, debemos tener  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .



Hacemos oficiales estas observaciones en los siguientes postulados:

#### POSTULADO 15. El postulado LAL

Toda correspondencia LAL es una congruencia.

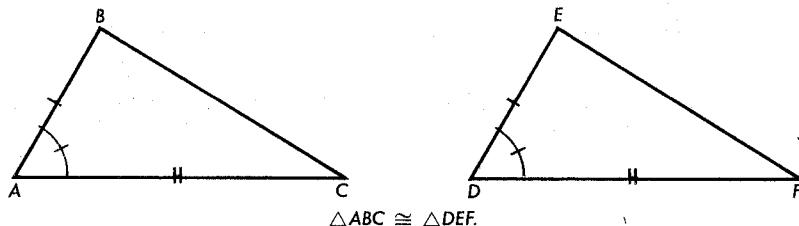
**POSTULADO 16.** El postulado ALA

*Toda correspondencia ALA es una congruencia.*

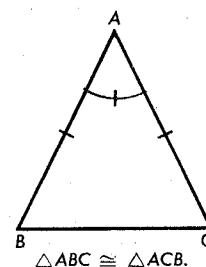
**POSTULADO 17.** El postulado LLI

*Toda correspondencia LLL es una congruencia.*

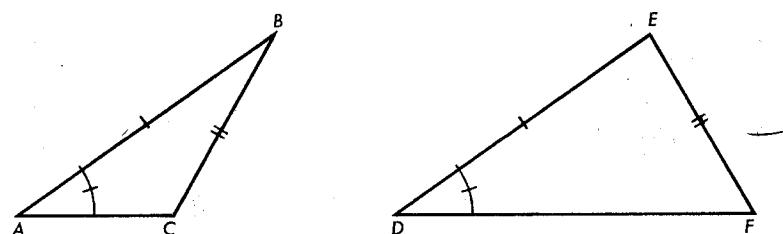
La mayor parte de las veces, aplicaremos esos postulados a correspondencias entre dos triángulos diferentes. Hemos visto, sin embargo, que en algunos casos, podemos establecer una correspondencia de un triángulo consigo mismo, y los tres postulados anteriores valen en esos casos. Así, pues, una correspondencia LAL podría ilustrarse de este modo:



o posiblemente como se indica en la figura de la derecha. Aquí, las marcas nos dicen que  $ABC \leftrightarrow ACB$  es una correspondencia LAL. Podemos, entonces, aplicar el postulado LAL y concluir que  $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ .



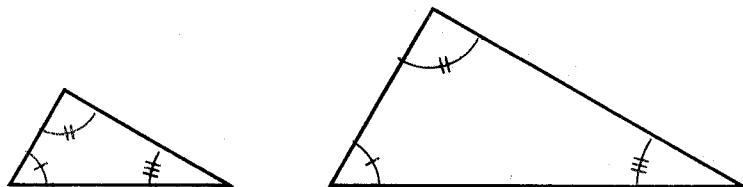
*Advertencia:* ¡No hay tal cosa como un postulado LLA!



En la figura anterior,  $ABC \leftrightarrow DEF$  es una “correspondencia LLA”; dos lados y un ángulo no comprendido del  $\triangle ABC$  son congruentes con las partes correspondientes del  $\triangle DEF$ . Pero la correspondencia, evidentemente, no es una congruencia;

de hecho,  $\overline{DF}$  es demasiado largo,  $\angle E$  es demasiado grande y  $\angle F$  es demasiado pequeño.

Desde luego, si los ángulos correspondientes son congruentes, simplemente se deduce que los dos triángulos tienen la misma *forma*; pero no necesariamente tienen el mismo *tamaño*.

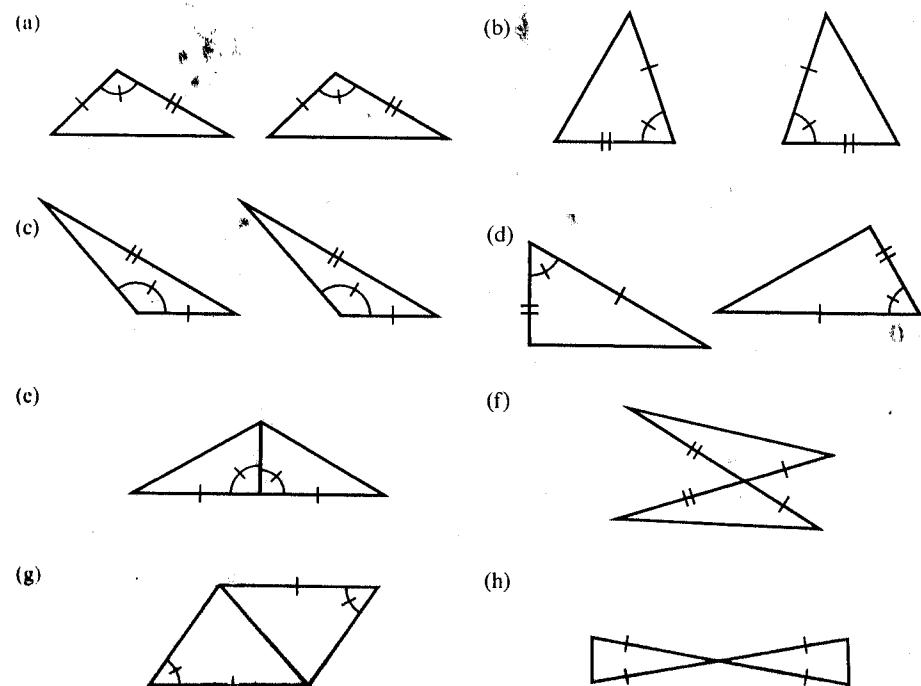


Los triángulos relacionados en esa forma se llaman *semejantes*.

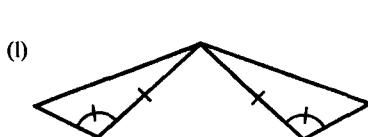
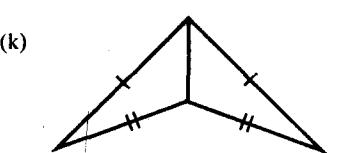
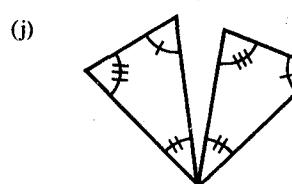
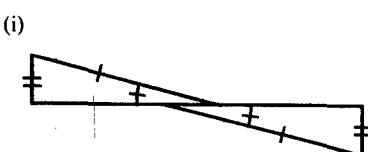
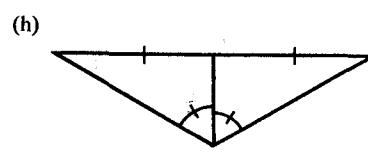
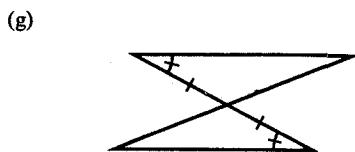
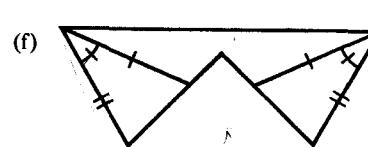
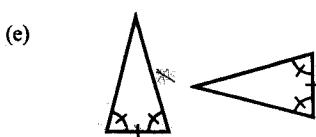
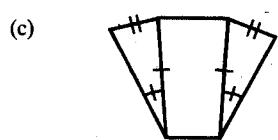
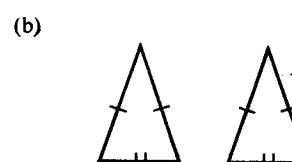
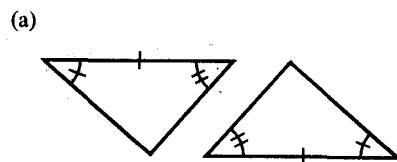
En lo sucesivo, nos referiremos a nuestros tres postulados de congruencia mediante las abreviaturas LAL, ALA y LLL.

**Conjunto de problemas 5-3**

1. En cada par de triángulos dibujados a continuación, si las marcas semejantes indican partes congruentes, ¿qué triángulos son congruentes en virtud del postulado LAL?



2. Para cada par de triángulos dibujados a continuación, si las marcas semejantes indican partes congruentes, citar el postulado de congruencia (LAL, ALA, LLL), si lo hay, que demostraría la congruencia de los triángulos:



#### 5-4. REDACCIÓN DE DEMOSTRACIONES

A estas alturas, ya el alumno cuenta con suficiente información fundamental para poder redactar verdaderas demostraciones geométricas. De ahora en adelante, la redacción de demostraciones constituirá una parte muy importante de este curso, parte que confiamos sea también del agrado del alumno.

Veamos un par de ejemplos para indicar lo que se hace para encontrar una demostración y, luego, redactarla.

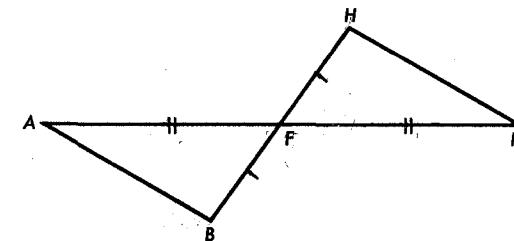
#### Ejemplo 1

Si dos segmentos se bisecan, entonces los segmentos que unen los extremos de los segmentos dados son congruentes.

Al empezar a tratar un problema como éste, se debe, primero, dibujar una figura y ponerle letras, empleando una mayúscula para cada vértice. Entonces, se enuncian la hipótesis y la conclusión en términos de las letras de la figura.

Dato:  $\overline{AR}$  y  $\overline{BH}$  se bisecan en  $F$ .

Demostrar:  $\overline{AB} \cong \overline{RH}$ .



Se indican, con marcas en la figura, las partes congruentes dadas.

Luego, se divide la página en dos columnas, como de costumbre, y se escriben los encabezamientos, "Afirmaciones" y "Razones".

Todo esto de nada nos servirá, desde luego, a menos que se nos ocurra una demostración para redactarla.

Como nuestra finalidad es demostrar que dos segmentos son congruentes, debemos recordar lo que sabemos acerca de segmentos congruentes. Las marcas en la figura indican que  $\overline{FB} \cong \overline{FH}$ , y esto es cierto, en virtud de la definición de punto medio. Por la misma razón,  $\overline{AF} \cong \overline{RF}$ . Si se quiere demostrar que  $\overline{AB} \cong \overline{RH}$ , lo mejor es demostrar que son partes correspondientes de triángulos congruentes. Para ello, se necesita establecer una correspondencia entre los triángulos de la figura y, luego, demostrar que se tiene una correspondencia LAL, una correspondencia ALA o una correspondencia LLL. Por la figura, parece que esta correspondencia debiera ser

$$AFB \leftrightarrow RFH.$$

Dos pares de lados son congruentes, porque

$$\overline{AF} \cong \overline{RF} \quad \text{y} \quad \overline{FB} \cong \overline{FH}.$$

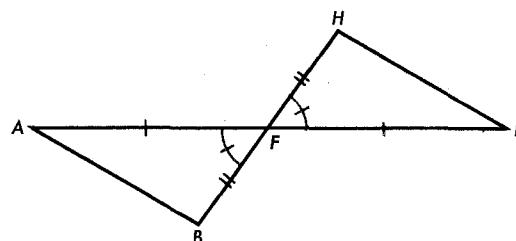
¿Y qué hay de los ángulos comprendidos? Si también son congruentes, entonces podemos aplicar el postulado LAL. Y son congruentes, pues son ángulos opuestos por el vértice. Por tanto, en virtud del postulado LAL, nuestra correspondencia es

una congruencia. Los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{RH}$  son lados correspondientes y, por tanto, son congruentes. Esto es lo que deseábamos demostrar.

Escrita ahora en la forma de doble columna, nuestra demostración resultaría así:

Dato:  $\overline{AR}$  y  $\overline{BH}$  se bisecan en  $F$ .

Demostrar:  $\overline{AB} \cong \overline{RH}$ .



AFIRMACIONES

RAZONES

Demostración	
AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\overline{AR}$ y $\overline{BH}$ se bisecan.	Dato.
2. $AF = RF$ .	Definición de "bisecar".
3. $FB = FH$ .	Definición de "bisecar".
4. $\angle AFB \cong \angle RFH$ .	Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
5. $\triangle AFB \cong \triangle RFH$ .	Postulado LAL.
6. $\overline{AB} \cong \overline{RH}$ .	Definición de congruencia de triángulos.

Esta demostración es sencillamente una muestra de cómo se podría presentar el trabajo. Hay un límite en cuanto al "tipo" que esperamos vaya a tener la forma de una demostración. Por ejemplo, en los pasos 2 y 3 anteriores, hemos indicado congruencias de segmentos, escribiendo

$$AF = RF \quad \text{y} \quad FB = FH.$$

Pudimos igualmente haber escrito

$$\overline{AF} \cong \overline{RF} \quad \text{y} \quad \overline{FB} \cong \overline{FH},$$

porque, en cada caso, la congruencia de segmentos y el enunciado de la igualdad de sus longitudes significan lo mismo.

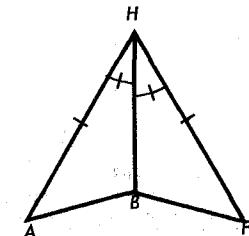
También, tenemos bastante libertad de elección para decidir cuántos detalles se incluirán en una demostración. A medida que el alumno adquiera más conocimientos y práctica, podrá escribir demostraciones con menos detalles. El maestro deberá decidir cuándo el alumno esté listo para hacer esto y cuántos detalles podrán omitirse.

Puesto que ya el alumno debe tener idea de cómo se procede, ofrecemos un segundo ejemplo, en forma incompleta. El problema consistirá en llenar los espacios en blanco, de manera que se logre una demostración.

Ejemplo 2

Datos:  $\overline{AH} \cong \overline{FH}$ ,  $\angle AHB \cong \angle FHB$ .

Demostrar:  $\angle A \cong \angle F$ .



Demostración

AFIRMACIONES

RAZONES

1. $\overline{AH} \cong \overline{FH}$ .	Dato. <u>Hipótesis</u>
2. $\angle AHB \cong \angle FHB$ .	Todo segmento es congruente consigo mismo.
3. $\overline{HB} \cong \overline{HB}$ .	<u>Por LAL</u> <u>Por ángulos correspondientes de congruencia</u>
4. $\triangle AHB \cong \triangle FHB$ .	
5. $\angle A \cong \angle F$ .	

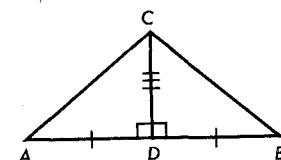
#### Auto de problemas 5-4A

1. Copiar el siguiente problema en una hoja de papel y llenar la información que falta:

Dato: La figura, con

$$\overline{CD} \perp \overline{AB} \text{ y } \overline{AD} \cong \overline{BD}.$$

Demostrar:  $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ .



Demostración

AFIRMACIONES

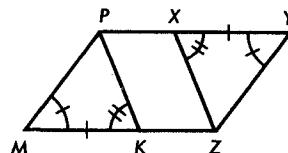
RAZONES

1. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ .	Dato. <u>Def segmento perpendicular</u>
2. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ .	Definición de perpendicularidad y de ángulo recto.
3. $\angle ADC \cong \angle BDC$ .	Identidad (Todo segmento es congruente consigo mismo.)
4. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ .	<u>Por LAL</u>
5. $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ .	

2. Copiar el siguiente problema en una hoja de papel y llenar la información que falta:

Datos:  $\triangle MKP$  y  $\triangle XYZ$  tales que  $\angle M \cong \angle Y$ ,  
 $\angle MKP \cong \angle YXZ$  y  $MK = XY$ .

Demostrar:  $\overline{PK} \cong \overline{ZX}$ .



Demostración

Afirmaciones

1.  $\angle M \cong \angle Y$ .

$MK = XY$ .

$\angle MKP \cong \angle YXZ$ .

2.  $\triangle MKP \cong \triangle XYZ$ .

3.  $\overline{PK} \cong \overline{ZX}$ .

Razones

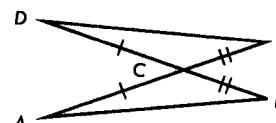
Hipótesis.

Hipótesis.

por A.A.A.

Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

3. En la figura,  $\overline{AE}$  interseca a  $\overline{BD}$  en  $C$ , tal que  $AC = DC$  y  $BC = EC$ . Demostrar que  $\angle A \cong \angle D$ , copiando la siguiente demostración y supliendo las razones que faltan:



Demostración

Afirmaciones

1.  $AC = DC$ .

2.  $\angle ACB \cong \angle DCE$ .

3.  $BC = EC$ .

4.  $\triangle ACB \cong \triangle DCE$ .

5.  $\angle A \cong \angle D$ .

Razones

Dato.

Un ángulo opuesto.

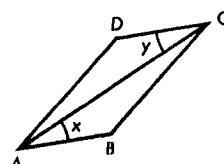
Hip.

LA

Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

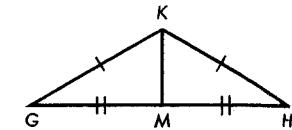
[Nota: Aun cuando los enunciados 2 y 4 son muy parecidos, uno se refiere a ángulos y el otro a triángulos. Esto deberá tomarse en consideración al presentar las razones correspondientes.]

4. En la figura de la derecha,  $AB = CD$  y  $m\angle x = m\angle y$ . Demostrar que  $m\angle ACB = m\angle DAC$ .



5. Copiar el siguiente problema y completar la demostración de que si, en la figura,  $GK = HK$  y  $M$  es el punto medio de  $\overline{GH}$ , entonces  $\angle G \cong \angle H$ .

$h = GK = HK$



Demostración

Afirmaciones

1.  $GK = HK$ .

2.  $M$  es el punto medio de  $GH$ .

3. \_\_\_\_\_.

4. \_\_\_\_\_.

5.  $\triangle GMK \cong \triangle HMK$ .

6. \_\_\_\_\_.

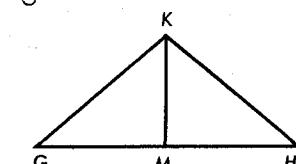
Dato.

Definición de punto medio.

Identidad.

LLL

Por ángulos correspondientes de triángulos congruentes.



6. Demostrar que si en el  $\triangle GHK$ ,  $GK = HK$  y  $G-M-H$  tal que  $\angle GKM \cong \angle HKM$ , entonces  $M$  es el punto medio de  $\overline{GH}$ .

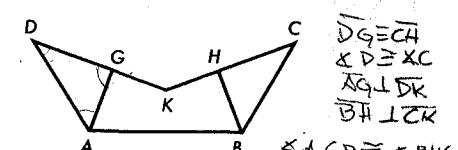
7. Demostrar que si los segmentos  $\overline{AE}$  y  $\overline{DF}$  se bisecan en  $P$ , entonces  $\triangle PDA \cong \triangle PFE$ . (Deberá construirse una figura.)

8. Datos: Un segmento  $\overleftrightarrow{RS}$  y los puntos  $T$  y  $U$  en lados opuestos de  $\overleftrightarrow{RS}$  tales que  $TR = UR$ ,  $TS = US$  y  $UR < US$ .

Demostrar:  $m\angle T = m\angle U$ .

9. Datos:  $DG = CH$ ,  $\angle D \cong \angle C$ ,  $\overline{AG} \perp \overline{DK}$ ,  $\overline{BH} \perp \overline{CK}$ .

Demostrar:  $AD = BC$ .



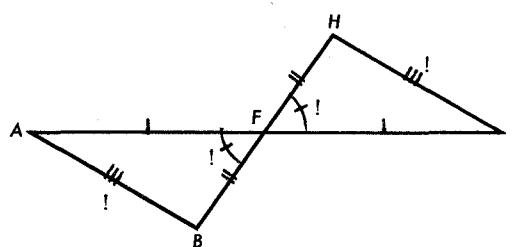
10. Datos: Los puntos  $A$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  están alineados con  $A-E-D$  y  $A-D-C$ .  $B$  es un punto que no está en  $\overleftrightarrow{AC}$ , tal que  $AB = CB$ ,  $EB = DB$  y  $AE = CD$ .

Demostrar:  $\angle ABE \cong \angle DBC$ .

11. Se sabe que  $\overleftrightarrow{BQ}$  biseca a  $\overleftrightarrow{PA}$  en  $R$ , pero  $BQ \neq PA$ .  $B$  y  $Q$  están en lados opuestos de  $\overleftrightarrow{PA}$ .  $S$  y  $C$  son puntos en  $\overleftrightarrow{PR}$  y  $\overleftrightarrow{AR}$ , respectivamente, tales que  $RS = RC$ ,  $\overline{BC} \perp \overline{PA}$  y  $\overline{QS} \perp \overline{PA}$ . También,  $\angle BAR \cong \angle QPR$ . Demostrar que  $\overleftrightarrow{PA}$  biseca a  $\overleftrightarrow{BQ}$  y que  $\angle ABC \cong \angle PQS$ .

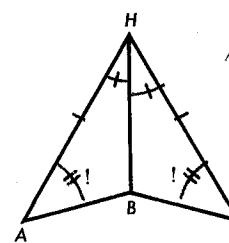
12. Se da el  $\triangle HRE$ , con  $RH = RE$ . Los puntos  $M$  y  $K$  están en los lados del  $\angle HRE$  de tal manera que  $R-H-M$  y  $R-E-K$ .  $\overline{EM}$  y  $\overline{HK}$  se intersecan en  $T$ .  $\angle HRT \cong \angle ERT$ . Demostrar que  $\triangle MTH \cong \triangle KTE$ .

Después de haber terminado una demostración, a menudo se encontrará que la figura puede hacerse más instructiva colocando marcas adicionales en ella.

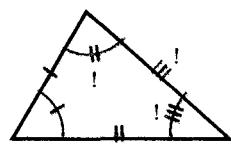


La figura anterior ilustra el ejemplo 1 y su demostración. Las marcas en  $\overline{AF}$  y  $\overline{FR}$  indican que la congruencia  $\overline{AF} \cong \overline{FR}$  es un *dato*. Igualmente, las marcas en  $\overline{FH}$  y  $\overline{FB}$  indican que  $\overline{FH} \cong \overline{FB}$  es un *dato*. Las marcas en el  $\angle AFB$  y en el  $\angle RFH$ , con signos de exclamación, indican que la congruencia  $\angle AFB \cong \angle RFH$  se *dedujo*. Y las marcas en  $\overline{AB}$  y  $\overline{RH}$  indican que  $\overline{AB} \cong \overline{RH}$  se *dedujo*.

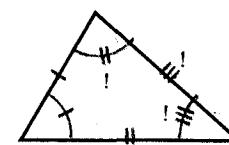
Análogamente, las marcas en la figura de la derecha nos indican los datos y lo que se dedujo en el ejemplo 2.



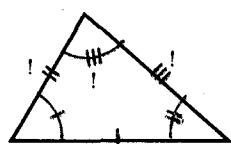
De igual manera, nuestros tres postulados de congruencia, LAL, ALA y LLL, justifican los signos de exclamación en las siguientes figuras:



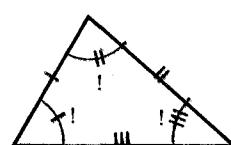
LAL



ALA

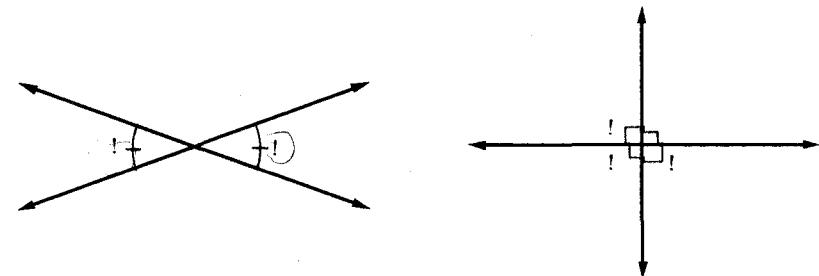


ALA



LLL

En general, es una buena idea marcar las figuras de tal forma que puedan indicar la mayor información posible. A veces, podemos dibujar una figura que es un cuadro completo de un teorema. Por ejemplo, las siguientes figuras son cuadros de teoremas estudiados en el Capítulo 4. ¿Cuáles son esos teoremas?



Un error frecuente al redactar demostraciones es que el alumno *supone* ser cierto precisamente aquello que trata de *demostrar*. Otro error corriente es el de presentar como una razón en la demostración de un teorema, otro teorema que es en realidad una *consecuencia* del principio que se trata de demostrar. Este tipo de razonamiento constituye lo que llamamos círculo vicioso y carece de valor como argumentación lógica.

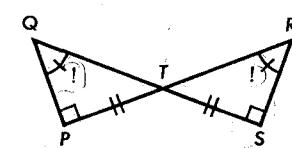
Un ejemplo particularmente desacertado de círculo vicioso es el que utiliza el teorema que se va a demostrar como una razón en una de las etapas de la "demonstración".

122. d

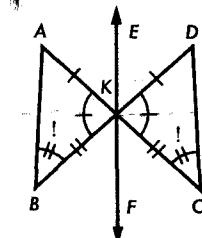
### Conjunto de problemas 5-4B

1. Las figuras a continuación están marcadas de tal manera que indican la hipótesis y la conclusión. Escribir, para cada una, los datos y lo que hay que demostrar.

(a)

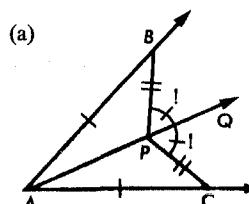


(b)

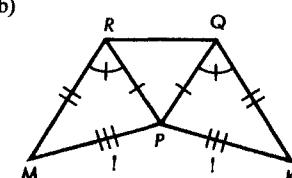


2. Seguir las instrucciones del problema 1 para las figuras a continuación:

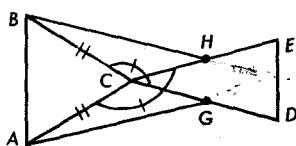
(a)



(b)



3. Copiar el siguiente problema y completar la demostración: Se da la figura, con  $AC = BC$ ,  $DC = EC$ ,  $G$  es el punto medio de  $\overline{DC}$ ,  $H$  es el punto medio de  $\overline{EC}$ ,  $\angle ACE \cong \angle BCD$ . Demostrar que  $AG = BH$ .



## Demostración

## AFIRMACIONES

## RAZONES

1. $AC = BC$ .	_____.
2. $DC = EC$ . $G$ es el punto medio de $\overline{DC}$ . _____ es el _____.	_____.
3. $DG = GC = \frac{1}{2}DC$ .	Definición de punto medio.
4. $EH = HC = \frac{1}{2}EC$ .	_____.
5. $GC = HC$ .	Pasos 2, 3 y 4 y sustitución.
6. $m\angle ACE = m\angle BCD$ .	Dato y definición de congruencia de ángulos.
7. $m\angle ACG + m\angle GCH = m\angle BCH + m\angle GCH$ .	Postulado de la adición de ángulos y _____ en el paso 6.
8. $m\angle GCH = m\angle GCH$ .	_____.
9. $m\angle ACG = m\angle BCH$ .	Principio de la igualdad respecto de la sustacción.
10. $\triangle AGC \cong \triangle BHC$ .	Pasos 1, 5 y 9 y el postulado _____.
11. $AG = BH$ .	_____.

4. En la figura de la derecha, si  $AE = BC$ ,  $AD = BD$  y  $DE = DC$ , demostrar que  $\angle E \cong \angle C$ .

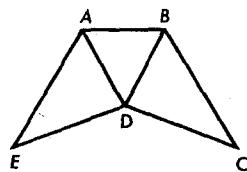
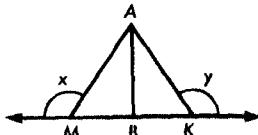


Figura para los problemas 4, 5, 6, 7

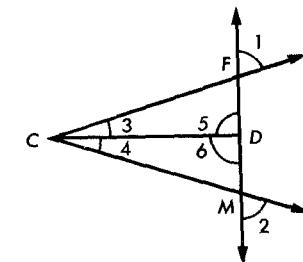
5. En la misma figura, si  $AE = BC$ ,  $AD = BD$  y  $\angle EAD \cong \angle CBD$ , demostrar que  $\angle BDE \cong \angle ADC$ .
6. En la figura anterior, si  $AE = BC$ ,  $AD = BD$  y  $\angle E \cong \angle C$ , ¿se podrá demostrar que  $ED = CD$ ? Si se puede, hágase la demostración. Si no se puede, explíquese por qué.

- \* 7. En la figura anterior, si  $\angle E \cong \angle C$ ,  $ED = CD$  y  $\angle BDE \cong \angle ADC$ , ¿se podrá demostrar que  $AE = BC$ ? Si se puede, hágase la demostración. Si no se puede, explíquese por qué.

8. Datos: La figura de la derecha, con  $\overline{AB} \perp \overline{MK}$ , y  $B$  el punto medio de  $\overline{MK}$ .

Demostrar:  $\angle x \cong \angle y$ .

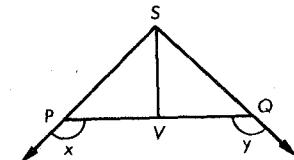
9. Se sabe que el rayo  $\overrightarrow{AE}$  biseca a  $\overline{BK}$  en  $R$  tal que  $AB = AK$ . Demostrar que  $\overrightarrow{AE} \perp \overline{BK}$ .



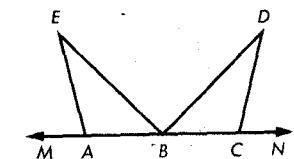
10. En la figura de la derecha,  $CF = CM$ ,  $\angle 1 \cong \angle 2$  y  $\angle 3 \cong \angle 4$ .

Demostrar que  $\angle 5 \cong \angle 6$ .

11. Se sabe que  $\overline{PR}$  y  $\overline{RS}$  se intersecan en  $T$ , con  $P-T-Q$  y  $R-T-S$ , tal que  $RT = QT$ ,  $\overline{PR} \perp \overline{RS}$  y  $\overline{SQ} \perp \overline{PQ}$ . Demostrar que  $\angle P \cong \angle S$ .



12. Demostrar que si, en la figura,  $PS = QS$ ,  $PV = QV$  y  $\angle x \cong \angle y$ , entonces  $\overline{SV} \perp \overline{PQ}$ .



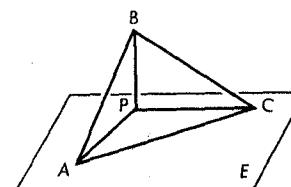
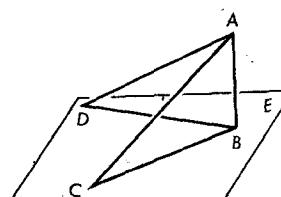
13. En la figura de la derecha, si  $AB = CB$ ,  $\angle MAE \cong \angle NCD$  y  $AE = CD$ , demostrar que  $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ .

14. En la misma figura, si  $\angle EAB \cong \angle DCB$ ,  $\angle EBA \cong \angle DBC$  y  $\angle E \cong \angle D$ , ¿se podrá demostrar que  $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ ? Explíquese.

Figura para los problemas 13, 14, 15

- \* 15. En la misma figura anterior, si  $AB = CB$ ,  $m\angle MAE = m\angle NCD$  y  $m\angle ABD = m\angle CBE$ , ¿se podrá demostrar que  $BE = BD$ ? Si la respuesta es afirmativa, desarrollar una demostración.

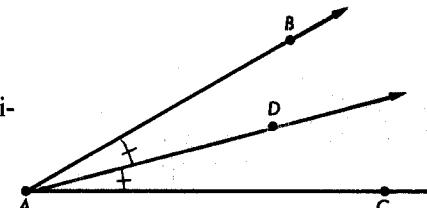
16. En la figura siguiente de la izquierda, se sabe que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son puntos no coplanarios, y que  $B$ ,  $C$  y  $D$  están en el plano  $E$ . Si  $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ,  $\overline{AB} \perp \overline{BD}$  y  $BC = BD$ , demostrar que  $AC = AD$ .



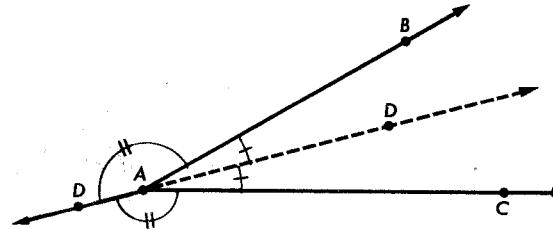
- \* 17. En la figura anterior de la derecha, si  $\angle ABP \cong \angle CBP$ ,  $\overline{BP} \perp \overline{AP}$  y  $\overline{BP} \perp \overline{CP}$ , demostrar que  $AB = CB$ .

## 5-5. BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Las marcas en la figura de la derecha indican que  $\overrightarrow{AD}$  biseca al  $\angle BAC$ .



En la siguiente figura,  $\overrightarrow{AD}$  no biseca al  $\angle BAC$ , porque “señala en el sentido contrario”.



Así, llegamos a la siguiente definición

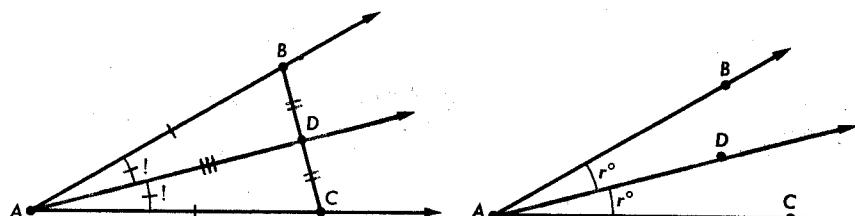
## Definición

Si  $D$  está en el interior del  $\angle BAC$ , y  $\angle BAD \cong \angle DAC$ , entonces  $\overrightarrow{AD}$  biseca a  $\angle BAC$ , y  $\overrightarrow{AD}$  se llama la *bisectriz* del  $\angle BAC$ .

### Teorema 5-2

Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.

**Demuestra:** (1) En la figura siguiente de la izquierda, tómense  $B$  y  $C$  en los lados del  $\angle A$ , de manera que  $AB = AC$ . Sea  $D$  el punto medio de  $\overline{BC}$ . Entonces,  $ADB \leftrightarrow ADC$  es una correspondencia LLL. Por el postulado LLL,  $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ . Por tanto,  $\angle BAD \cong \angle CAD$ , pues son ángulos correspondientes. Luego,  $\angle A$  tiene una bisectriz.

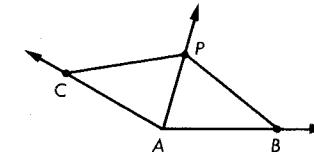


(2) Supongamos que  $\overrightarrow{AD}$  biseca al  $\angle BAC$ , como se indica en la figura anterior de la derecha. Sea  $r = m\angle DAC$ . Entonces,  $r = m\angle DAB$ , porque estos ángulos son congruentes. Por el postulado 13,  $r + r = m\angle BAC$  y, así,  $r = \frac{1}{2}m\angle BAC$ . Pero, también, sabemos que  $D$  está del mismo lado de  $\overleftrightarrow{AC}$  que  $B$ . (¿Por qué?) En virtud del postulado de la construcción del ángulo, existe solamente un rayo “que está en el lado debido de  $\overleftrightarrow{AC}$ ” y que “da un ángulo con la medida correcta”.

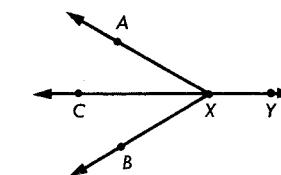
### Conjunto de problemas 5-

1. Decidir si los siguientes enunciados son ciertos o falsos y explicar la respuesta:

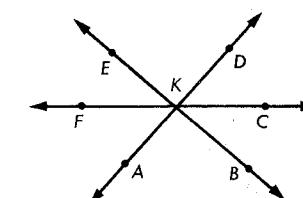
  - (a) La bisectriz de un ángulo está enteramente en el interior del ángulo.
  - (b) La bisectriz de un ángulo forma dos ángulos agudos con los lados del ángulo.



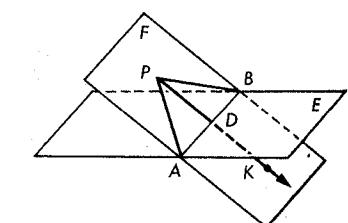
2. Se sabe que  $\overrightarrow{AP}$  biseca al  $\angle BAC$  y que  $AC = AL$ .  
Demostrar que  $PC = PB$ .



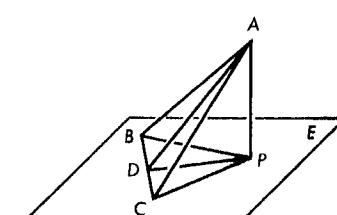
3. Los puntos  $A$  y  $B$  están en lados opuestos de  $\overleftrightarrow{CY}$ .  
 $C$  está en el interior del  $\angle AXB$ , y  $C-X-Y$ . Si  $\angle AXY \cong \angle BXY$ , demostrar que  $\overrightarrow{XC}$  biseca al  $\angle AXB$ .



4. Se sabe que dos ángulos forman un par lineal. Demostrar que sus bisectrices son perpendiculares.



7. En la figura de la derecha, los planos  $E$  y  $F$  se intersecan en la recta  $\overleftrightarrow{AB}$ .  $\overleftrightarrow{PK}$  está en el plano  $F$  y corta a  $\overleftrightarrow{AB}$  en  $D$ .  $PA = PB$ ,  $\angle PAB \cong \angle PBA$  y  $D$  es el punto medio de  $\overrightarrow{AB}$ . Demostrar que  $\overleftrightarrow{PK}$  biseca al  $\angle APB$ .



8. En la figura de la derecha,  $P$ ,  $B$ ,  $D$  y  $C$  son puntos en el plano  $E$ , y  $A$  no está en el plano  $E$ .  $\triangle ABC$  y  $\triangle PBC$  son isósceles, con  $AB = AC$  y  $PB = PC$ , respectivamente. Si  $\overrightarrow{AD}$  biseca al  $\angle BAC$ , demostrar que  $\overrightarrow{PD}$  biseca al  $\angle BPC$ .

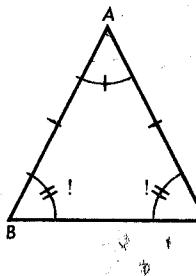
## 5-6. TRIÁNGULOS ISÓSCELES Y EQUILÁTEROS

Al final de la sección 5-1, mencionamos la posibilidad de aparear los vértices de un triángulo  $\triangle ABC$  en el cual por lo menos dos lados son de igual longitud. Éste es, efectivamente, el caso con el cual trabajamos en el primer teorema de congruencia.

### Teorema 5-3. El teorema del triángulo isósceles

Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

**O de otro modo:** Se da el  $\triangle ABC$ . Si  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ , entonces  $\angle B \cong \angle C$ .



**Demostración:** Considérese la correspondencia

$$ABC \leftrightarrow ACB$$

del  $\triangle ABC$  consigo mismo. En esta correspondencia, tenemos que

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{AC},$$

$$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{AB},$$

$$\angle A \leftrightarrow \angle A.$$

Ésta es una correspondencia LAL y, en virtud del postulado LAL, se tiene que

$$\triangle ABC \cong \triangle ACB,$$

esto es, la correspondencia  $ABC \leftrightarrow ACB$  es una congruencia. Por la definición de congruencia de triángulos, todos los pares de partes correspondientes son congruentes. Por tanto,  $\angle B \cong \angle C$ , porque estos ángulos son partes correspondientes.

Veremos ahora cómo resultaría la demostración en la forma de dos columnas. Se utiliza la misma figura anterior.

### Demostración

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ .	Dato.
2. $\angle A \cong \angle A$ .	Congruencia idéntica.
3. $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ .	Pasos 1 y 2 y LAL.
4. $\angle B \cong \angle C$ .	Definición de congruencia de triángulos.

### Definiciones

Un triángulo con dos lados congruentes se llama *isósceles*. El otro lado es la *base*. Los dos ángulos asociados con la base son *ángulos en la base*. El ángulo opuesto a la base es el *ángulo en el vértice*.

Utilizando estos términos, podemos enunciar el teorema 5-3 de la siguiente manera: "Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes".

### Definiciones

Un triángulo con sus tres lados congruentes se llama *equilátero*.

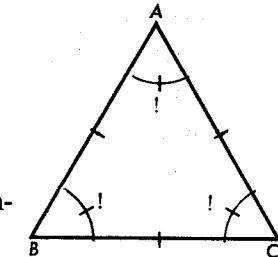
Un triángulo para el cual dos lados cualesquiera no son congruentes se llama *escaleno*.

Un triángulo es *equiángulo*, si sus tres ángulos son congruentes.

Utilizando los términos *equilátero* y *equiángulo*, enunciamos ahora un teorema que deduce fácilmente del teorema 5-3. Llamaremos a este teorema el corolario 5-3.1. Un *corolario* es un teorema que se deduce fácilmente de otro teorema.

### Corolario 5-3.1

Todo triángulo equilátero es equiángulo.



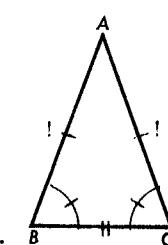
**O de otro modo:** Se da el  $\triangle ABC$ . Si  $BC = AC = AB$ , entonces  $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ .

Para demostrar el corolario, aplicamos el teorema 5-3 dos veces. Los detalles se dejan al alumno.

El siguiente teorema se parece al teorema 5-3, pero, en realidad, es diferente. Una ojeada al teorema enunciado de otro modo demuestra esto con bastante claridad. Obsérvese también la diferencia en las marcas de las figuras.

### Teorema 5-4

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.



**O de otro modo:** Se da el  $\triangle ABC$ . Si  $\angle B \cong \angle C$ , entonces  $AB = AC$ .

**Demostración:** Como  $\angle B \cong \angle C$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{CB}$  y  $\angle C \cong \angle B$ , la correspondencia

$$ABC \leftrightarrow ACB$$

es una correspondencia ALA. Por tanto, es una congruencia y se tiene

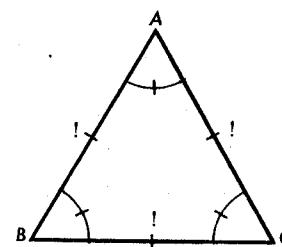
$$\triangle ABC \cong \triangle ACB.$$

Luego,  $AB = AC$ , porque los lados correspondientes son congruentes.

### Corolario 5-4.1

Todo triángulo equiángulo es equilátero.

Se podrá redactar el teorema de otro modo y desarrollar una demostración.

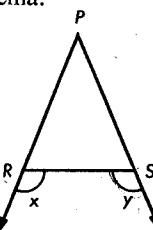


### Conjunto de problemas 5-6

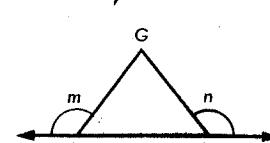
1. Elegir la alternativa que completa correctamente cada uno de los siguientes enunciados:

- (a) La bisectriz de un ángulo es un
  - (i) segmento.
  - (ii) rayo.
  - (iii) plano.
- (b) Un triángulo equilátero
  - (i) es isósceles.
  - (ii) es escaleno.
  - (iii) no es isósceles.
- (c) Un corolario es
  - (i) una definición.
  - (ii) un postulado.
  - (iii) un teorema.
- (d) Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, podemos concluir que el triángulo tiene dos lados congruentes, en virtud de
  - (i) una definición.
  - (ii) un corolario.
  - (iii) un teorema.

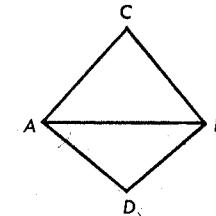
2. En la figura de la derecha, el  $\triangle PRS$  es isósceles, con  $PR = PS$ . Demostrar que  $\angle x \cong \angle y$ .



3. En la figura de la derecha, si  $\angle m \cong \angle n$ , demostrar que el  $\triangle GHK$  es isósceles.



4. Datos: La figura plana  $ADBC$ , con  $AD = BD$  y  $AC = BC$ .  
Demostrar:  $\angle CAD \cong \angle CBD$ .



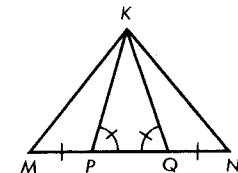
5. Datos: La figura plana  $ADBC$ , con  $AC = BC$  y  $\angle CAD \cong \angle CBD$ . Demostrar:  $AD = BD$ .

6. En los problemas 4 y 5, ¿será necesario especificar en la hipótesis que la figura está en un plano? Explíquese.

7. Demostrar el corolario 5-4.1:

Todo triángulo equiángulo es equilátero.

8. Se da la figura de la derecha con las marcas indicadas. Demostrar que el  $\triangle MNK$  es isósceles.



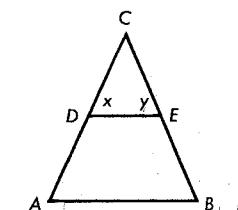
9. Se da el  $\triangle ABC$  en el cual la correspondencia  $ABC \leftrightarrow CAB$  es una congruencia. Podemos concluir que el  $\triangle ABC$  es

- (a) escaleno.
- (b) isósceles.
- (c) equilátero.

10. Se da el  $\triangle ABC$  en el cual la correspondencia  $ABC \leftrightarrow CAB$  es una congruencia. Podemos concluir que el  $\triangle ABC$  es

- (a) escaleno.
- (b) isósceles.
- (c) equilátero.

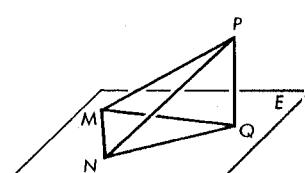
11. Demostrar que la bisectriz del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles biseca y es perpendicular a la base.



12. En la figura,  $AC = BC$ ,  $\angle A \cong \angle y$ , y  $\angle B \cong \angle x$ . Demostrar que el  $\triangle CDE$  es isósceles.

13. En un plano, los puntos  $C$  y  $D$  están en lados opuestos de  $\overleftrightarrow{AB}$  de tal modo que el  $\triangle ABC$  es un triángulo equilátero y el  $\triangle ABD$  es un triángulo equiángulo. Demostrar que  $\angle C \cong \angle D$ .

14. Se sabe que en la figura de la derecha,  $\overline{PQ} \perp \overline{MQ}$ ,  $\overline{PQ} \perp \overline{NQ}$  y  $MQ = NQ$ . Demostrar que el  $\triangle MNP$  es isósceles.



15. En la misma figura, si  $\angle PMN \cong \angle PNM$  y  $\angle MPQ \cong \angle NPQ$ , demostrar que  $\angle PMQ \cong \angle PNQ$ .

Figura para los problemas 4, 5, 6

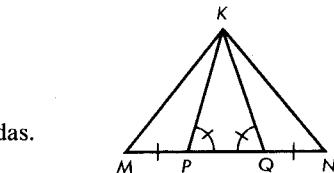


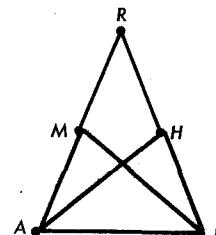
Figura para los problemas 14 y 15

## 5-7. TRIÁNGULOS PARCIALMENTE SUPERPUERTOS. EMPLEO DE LA FIGURA PARA OBTENER INFORMACIÓN

Con frecuencia, necesitamos trabajar con triángulos que no aparecen completamente separados en las figuras, sino que en parte están superpuestos. Así ocurre con el  $\triangle A FM$  y el  $\triangle FAH$  en la figura de la derecha.

Para evitar confusiones y equivocaciones al tratar estos casos, es muy importante escribir las congruencias correctamente:

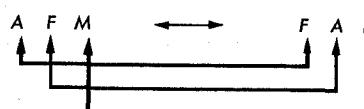
$$\triangle A FM \cong \triangle FAH.$$



Comprobamos primero que la correspondencia  $AFM \leftrightarrow FAH$  es realmente una congruencia y, luego, nos referimos a la congruencia  $\triangle A FM \cong \triangle FAH$  cuando deseamos concluir que dos lados correspondientes (o dos ángulos correspondientes) son congruentes. Considerando sólo la congruencia  $\triangle A FM \cong \triangle FAH$ , sin mirar la figura, sabemos que

$$AF = FA, \quad FM = AH, \quad AM = FH,$$

porque son lados correspondientes en la correspondencia

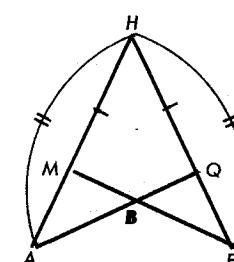


Esta manera de abordar el problema es más confiable que volver la cabeza para dar una mirada de soslayo a la figura con la esperanza de que no nos confundirá.

Consideremos un caso en que esta situación surge al demostrar un teorema.

*Datos:*  $HA = HF$ ;  $HM = HQ$ .

*Demostrar:*  $FM = AQ$ .



Una manera corriente de demostrar que dos segmentos son congruentes es la de mostrar que son lados correspondientes de triángulos congruentes. Si este método puede

utilizarse con éxito aquí, entonces, debemos primeramente indicar los triángulos que contienen a  $FM$  y a  $AQ$ . Son éstos el  $\triangle HMF$  y el  $\triangle HQA$ , que coinciden parcialmente. El problema ahora consiste en demostrar que los dos triángulos son congruentes. La demostración, escrita en forma de doble columna, se da a continuación:

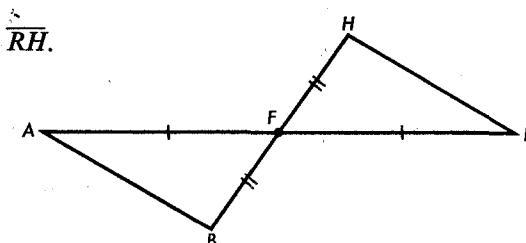
### Demostración

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $HA = HF$ .	Dato.
2. $\angle H \cong \angle H$ .	Un ángulo es congruente consigo mismo.
3. $HM = HQ$ .	¿Por qué?
4. $\triangle HMF \cong \triangle HQA$ .	¿Por qué?
5. $FM = AQ$ .	¿Por qué?

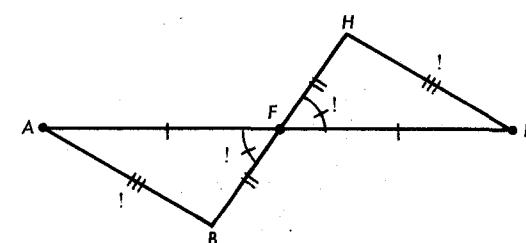
Una demostración estrictamente lógica no debe depender de una figura, sino ser consecuencia de los postulados, las definiciones y los teoremas ya establecidos. Pero los geómetras suelen utilizar figuras libremente como taquigrafía para explicar en primer lugar en qué consistía el problema. Con este espíritu fue como enunciamos el ejemplo 1 al comienzo de la sección 5-4 de la siguiente manera:

*Datos:*  $\overline{AR}$  y  $\overline{BH}$  se bisecan en  $F$ .

*Demostrar:*  $\triangle AFB \cong \triangle RFB$ .



Explicamos luego que todo el teorema podría ser expresado mediante marcas adicionales en la figura, sin emplear una sola palabra, como se indica a continuación:

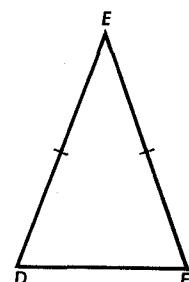
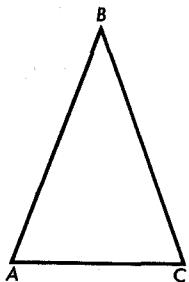


Si prescindieramos de una figura, tendríamos que volver a enunciar el ejemplo 1 en la siguiente forma:

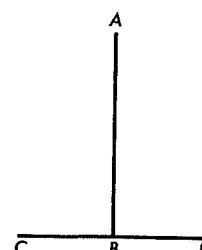
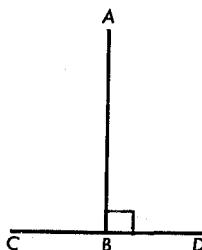
## Ejemplo 1

Sean  $A, B, F, H$  y  $R$  cinco puntos no alineados en un plano. Si (1)  $F$  está entre  $A$  y  $R$ , (2)  $F$  está entre  $B$  y  $H$ , (3)  $AF = FR$  y (4)  $BF = FH$ , entonces (5)  $AB = RH$ .

Mediante el empleo de figuras, las primeras dos redacciones del ejemplo son seguramente más fáciles de leer que la tercera y son igualmente exactas, una vez que se entienda el modo de utilizar las figuras como una taquigrafía. Utilizaremos figuras para indicar la colinealidad de puntos, el orden de los puntos en una recta, la localización de un punto en el interior de un ángulo y, en general, las posiciones relativas de puntos, rectas y planos. Por otra parte, a base de figuras *no* debe inferirse congruencia de segmentos, o de ángulos, sencillamente porque se ven así. Para obtener esta clase de información mediante una figura, debemos *marcarla* en la forma usual.



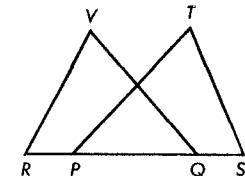
Por ejemplo, la figura de la derecha nos dice que  $\overline{DE} \cong \overline{EF}$ , pero la figura de la izquierda no nos dice que  $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ , aun cuando una medición cuidadosa sugiere que éste debiera ser el caso.



Análogamente, la figura anterior de la izquierda nos dice que  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ , pero no así la figura de la derecha.

## Conjunto de problemas 5-7

1. En la figura,  $RV = ST$ ,  $RQ = SP$  y  $\angle VRQ \cong \angle TSP$ .  
Completar la demostración de que  $QV = PT$ .



## Demostración

## AFIRMACIONES

## RAZONES

1.  $RV = ST$ .
2.  $\angle VRQ \cong \angle TSP$ .
3. \_\_\_\_\_.
4.  $\triangle RQV \cong$  \_\_\_\_\_.
5. \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_.

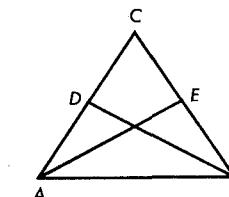
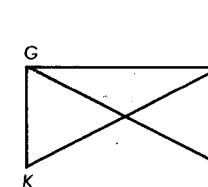
\_\_\_\_\_.

Dato.

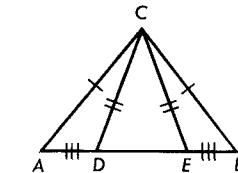
\_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_.

2. En la siguiente figura de la izquierda, si  $\overline{KG} \perp \overline{GH}$ ,  $\overline{LH} \perp \overline{GH}$  y  $\angle KHG \cong \angle LGH$ , demostrar que  $\overline{KH} \cong \overline{LG}$ .



3. En la figura anterior de la derecha,  $AC = BC$  y  $\angle CAE \cong \angle CBD$ . Demostrar que  $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ .



4. En la figura,  $AC = BC$ ,  $DC = EC$  y  $AD = BE$ .  
Completar la demostración de que

$$\angle ACE \cong \angle BCD.$$

## Demostración

## AFIRMACIONES

## RAZONES

1.  $AC = BC$ .
2.  $AD = BE$ .
3.  $DE = DE$ .
4.  $AD + DE = BE + DE$ .
5.  $AE = BD$ .
6. \_\_\_\_\_.
7.  $\angle ACE \cong \angle BCD$ .

Datos.

\_\_\_\_\_.

Propiedad aditiva de la igualdad.

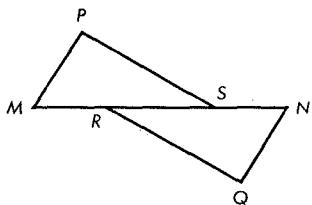
Definición de “estar entre” y paso 4.

\_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_.

5. En la figura,  $PM = QN$ ,  $PS = QR$  y  $MR = NS$ .  
Demostrar que

$$\angle PSN \cong \angle QRM.$$



6. En la figura de la derecha, si  $AF = BG$ ,  $\angle A \cong \angle B$  y  $AE = BD$ , demostrar que  $EF = DG$ .

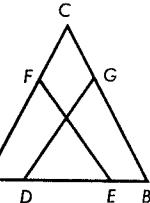
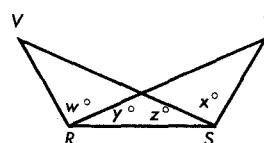
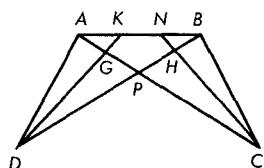


Figura para los problemas 6 y 7

- \* 7. En la figura de la derecha, si  $\angle A \cong \angle B$ ,  $AD = BE$  y  $\angle ADG \cong \angle BEF$ , demostrar que  $\angle CFE \cong \angle CGD$ .



9. Se da la figura plana anterior de la derecha, con  $w = x$  y  $y = z$ . Demostrar que  $RV = ST$ .

10. Se sabe que en la figura de la derecha,  $\angle x \cong \angle y$  y  $\angle m \cong \angle n$ . Demostrar que  $AC = BC$ .

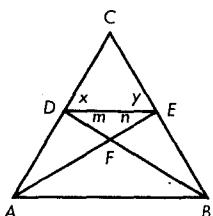


Figura para los problemas 10, 11 y 12

- \* 11. En la misma figura, si  $DF = EF$  y  $\angle x \cong \angle y$ , demostrar que el  $\triangle AFB$  es isósceles.

- \* 12. Si, en la misma figura anterior,  $AC = BC$  y  $DC = EC$ , demostrar que  $DF = EF$ .

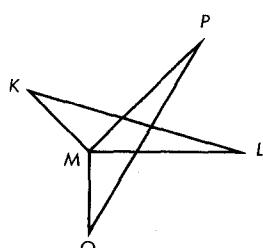
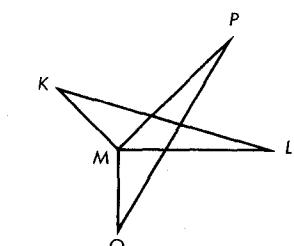


Figura para los problemas 13 y 14

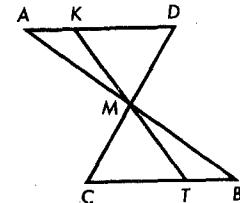
- \* 13. En la figura de la derecha, si  $MK = MQ$ ,  $ML = MP$  y  $KL = QP$ , hallar el ángulo congruente con el  $\angle KML$  y justificar la respuesta.



- \* 14. Si, en la misma figura,  $MK = MQ$ ,  $\angle K \cong \angle Q$ ,  $PM \perp MK$  y  $LM \perp MQ$ , demostrar que  $\angle L \cong \angle P$ .

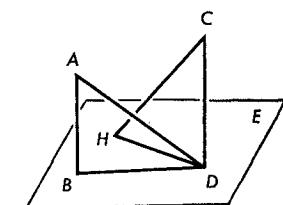
15. En los lados del  $\angle A$ , se toman los puntos  $B$  y  $C$  de tal modo que  $AB \sim AC$ . Una recta por  $B$  es perpendicular a  $AC$  en  $D$ . Análogamente, una recta por  $C$  es perpendicular a  $AB$  en  $E$ . Si  $AD = AE$ , demostrar que  $BD = CE$ .

- \* 16. La recta  $L$  es perpendicular a  $\overline{XY}$  y biseca a  $\overline{XY}$  en  $S$ . Los puntos  $R$  y  $T$  son los puntos medios de  $\overleftrightarrow{XS}$  y  $\overleftrightarrow{YS}$ , respectivamente. Los puntos  $A$  y  $B$  se toman en  $L$  en lados opuestos de  $\overline{XY}$  de tal modo que  $AX = BY$  y  $AT = BR$ . Demostrar que  $AS = BS$ .



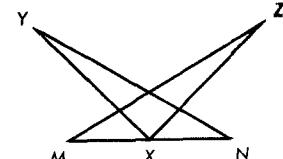
- \* 17. Se da la figura de la derecha. Demostrar que si  $\angle D \cong \angle DKM$  y  $KM = CM = TM$ , entonces  $AD = BC$ .

18. En la figura de la derecha,  $B$ ,  $D$  y  $H$  están en el plano  $E$ , pero  $A$  y  $C$  no están en el plano  $E$ . Si  $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ ,  $\overline{CD} \perp \overline{HD}$ ,  $AB = HD$  y  $CD = BD$ , demostrar que  $AD = HC$ .



19. (a) Demostrar que si, en la siguiente figura de la derecha,  $X$  es el punto medio de  $\overline{MN}$ ,  $MZ \neq NY$  y  $XZ = XY$ , entonces  $\angle Y \cong \angle Z$ .

- (b) ¿Será necesario que  $M$ ,  $N$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  sean coplanaarios?



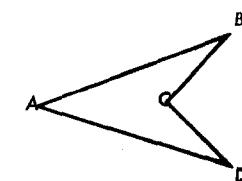
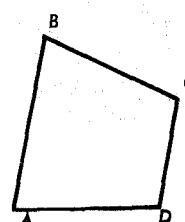
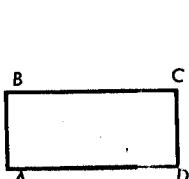
- \* 20. (a) En la misma figura, si  $M$ ,  $N$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son coplanaarios,  $X$  es el punto medio de  $\overline{MN}$ ,  $\angle M \cong \angle N$  y  $\angle MXY \cong \angle NXZ$ , demostrar que  $\angle Y \cong \angle Z$ .

- (b) ¿Será necesario que  $M$ ,  $N$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  sean coplanaarios? Explíquese.

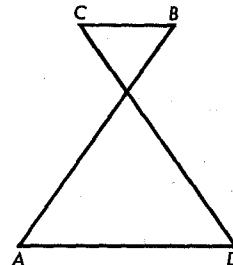
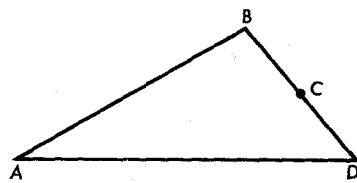
Figura para los problemas 19 y 20

### 5-8. CUADRILÁTEROS, CUADRADOS Y RECTÁNGULOS

Un cuadrilátero es una figura plana de cuatro lados. Algunos ejemplos son:



Una figura como la siguiente de la izquierda *no* es un cuadrilátero:

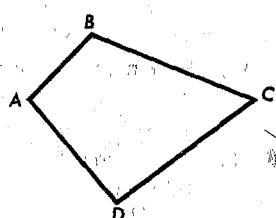


Además, los lados de un cuadrilátero no deben cruzarse uno al otro. La figura anterior de la derecha *no* es un cuadrilátero.

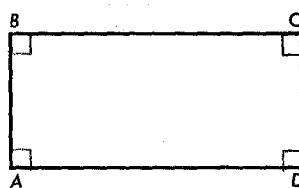
Las siguientes definiciones están enunciadas de tal forma que incluyen solamente los casos que deseamos incluir:

### Definiciones

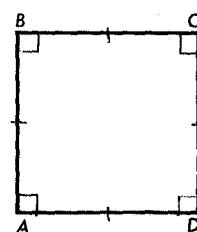
Sean  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  cuatro puntos coplanarios. Si tres cualesquiera de ellos no están alineados, y los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$  se intersecan solamente en sus extremos, entonces la reunión de los cuatro segmentos se llama *cuadrilátero*. Los cuatro segmentos se llaman *lados*, y los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se llaman *vértices*. Los ángulos  $\angle DAB$ ,  $\angle ABC$ ,  $\angle BCD$  y  $\angle CDA$  se llaman *ángulos* del cuadrilátero, y pueden indicarse brevemente por  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  y  $\angle D$ .



Si los cuatro ángulos del cuadrilátero son ángulos rectos, entonces el cuadrilátero se llama *rectángulo*.



Si los cuatro ángulos son ángulos rectos y los cuatro lados son congruentes, entonces el cuadrilátero es un *cuadrado*.

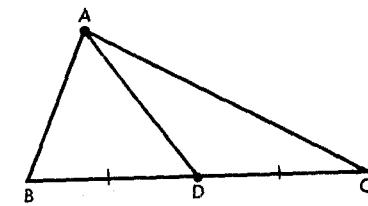


En la figura de la derecha, las marcas nos dicen que  $\overline{AD}$  es una *mediana* del  $\triangle ABC$ . Esto puede enunciarse formalmente como sigue:

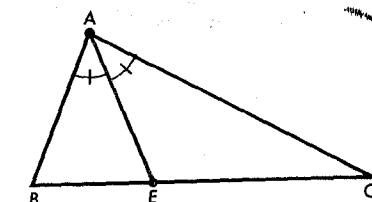
### Definición

Una *mediana* de un triángulo es un segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

Todo triángulo tiene tres medianas, una para cada vértice.



Las marcas en la figura de la derecha indican que  $\overline{AE}$  es la *bisectriz* de un ángulo del  $\triangle ABC$ .

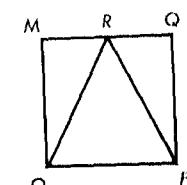
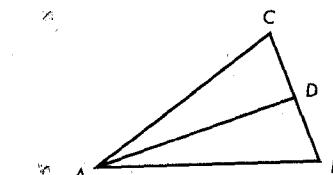


### Definición

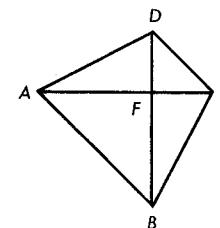
Un segmento es una *bisectriz* de un ángulo de un triángulo, si (1) está en el rayo que biseca al ángulo del triángulo, y (2) sus extremos son el vértice de ese ángulo y un punto del lado opuesto.

### Conjunto de problemas 5-8

1. Construir un triángulo escaleno grande. Construir sus tres medianas y las bisectrices de los tres ángulos.
2. Datos:  $\triangle ABC$ , con la mediana  $\overline{AD}$  perpendicular al lado  $\overline{BC}$ .  
Demostrar:  $\overline{AD}$  biseca al  $\angle BAC$  y el  $\triangle ABC$  es isósceles.
3. Demostrar que la mediana correspondiente a la base de un triángulo isósceles es perpendicular a la base y biseca al ángulo opuesto a la base.
4. Se sabe que  $\square MOPQ$  es un cuadrado con  $R$  punto medio de  $\overline{MQ}$ . Demostrar que el  $\triangleROP$  es isósceles.



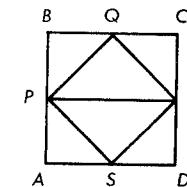
5. En el  $\square GKHM$ ,  $\angle G$  y  $\angle H$  son ángulos rectos,  $GK = MH$  y  $\overleftarrow{GH} \perp \overleftarrow{MK}$ . Los puntos  $G$  y  $H$  están en lados opuestos de  $\overleftarrow{MK}$ . Demostrar que  $\square GKHM$  es un rectángulo.



6. En el  $\square ABCD$ ,  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$  en  $F$ ,  $AC = BD$  y  $FD = FC$ . Demostrar que  $\triangle ACD \cong \triangle BDC$ .

7. Demostrar que las medianas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

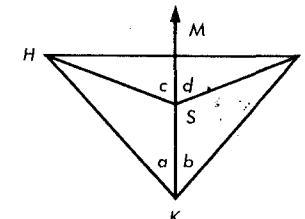
8. Demostrar que en un triángulo isósceles, las bisectrices de los ángulos en la base son congruentes.



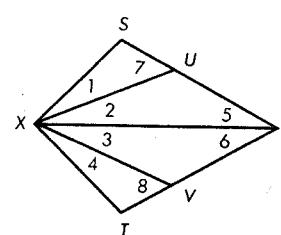
9. El  $\square ABCD$  es un cuadrado y  $P, Q, R$  y  $S$  son los puntos medios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$ , respectivamente. Demostrar que  $\angle PQR \cong \angle PSR$ .

10. El  $\square ABFH$  es un cuadrado,  $X$  es un punto en  $\overrightarrow{AH}$ , y  $Y$  es un punto en  $\overrightarrow{BF}$  tal que  $AX = BY$ . Demostrar que  $AY = BX$ .

11.  $\overrightarrow{AP}$  biseca al  $\angle BAC$ .  $D$  es un punto en  $\overrightarrow{AB}$ , y  $E$  es un punto en  $\overrightarrow{AC}$  tal que  $AD = AE$ . Demostrar que  $PD = PE$ .



- \* 12. Se da la figura de la derecha, con  $\overrightarrow{KM}$  bisecando a ambos  $\angle HKG$  y  $\angle HSG$ . Demostrar que  $\overrightarrow{KM} \perp \overrightarrow{HG}$ .



- \* 13. En la figura de la derecha, si  $XU = XV$  y

$$\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4,$$

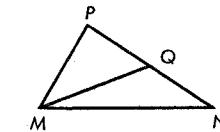
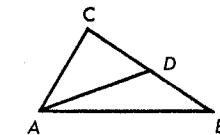
demostrar que

$$\angle 5 \cong \angle 6 \text{ y } \angle 7 \cong \angle 8.$$

## PROBLEMA OPTATIVO

- (a) Sobre la base de los teoremas demostrados hasta ahora, ¿se podrá demostrar que si  $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{NP}$  y la mediana  $\overline{AD} \cong$  la mediana  $\overline{MQ}$ , entonces  $\triangle ABC \cong \triangle MNP$ ? Si se puede, hacerlo. Si no se puede, explicar por qué.

- (b) Sobre la base de los teoremas demostrados hasta ahora, ¿se podrá demostrar que si  $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ ,  $\overline{AB} \cong \overline{MN}$  y la mediana  $\overline{AD} \cong$  la mediana  $\overline{MQ}$ , entonces  $\triangle ABC \cong \triangle MNP$ ? Si se puede, hacerlo.

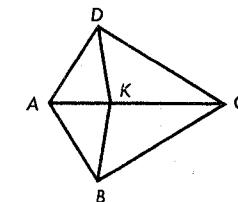


## Problemas supplementarios

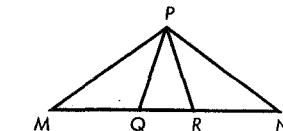
1. Datos:  $DC = BC$  y

$$DK = BK.$$

Demostrar:  $AD \cong AB$ .

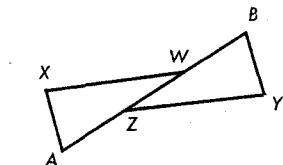


2. Dados dos triángulos congruentes, la mediana de un lado de uno de los triángulos es congruente con la mediana del lado correspondiente del otro.



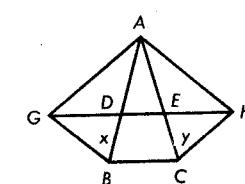
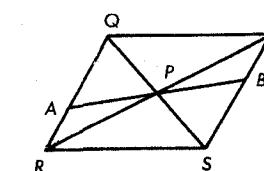
3. En la figura de la derecha, si  $MQ = PQ = PR = NR$ , demostrar que el  $\triangle MNP$  es isósceles.

4. Se da el  $\triangle RST$ , con  $S-X-T$  de modo que  $SX = SR$ .  $Q$  es un punto tal que  $R-Q-T$  y  $\overrightarrow{SQ}$  biseca al  $\angle RST$ . Dibujar  $\overrightarrow{QX}$ . ¿Qué ángulo es congruente con el  $\angle R$ ? Demostrar la congruencia.



5. En la figura de la derecha,  $XW = ZY$ ,  $AX = BY$  y  $AZ = BW$ . ¿Qué ángulo es congruente con el  $\angle A$ ? Demostrar la congruencia.

6. Se da la siguiente figura de la izquierda, en la cual  $\overrightarrow{QS}$  y  $\overrightarrow{RT}$  se bisecan en  $P$ . Demostrar que  $AP = BP$ .

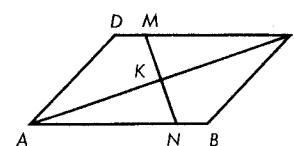


7. En la figura anterior de la derecha, si  $AB = AC$ ,  $AD = AE$  y  $\angle x \cong \angle y$ , entonces  $AG = AH$ .

8. Demostrar que la bisectriz de cada ángulo de un triángulo equilátero es una mediana del triángulo.

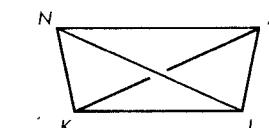
9. (a) En la figura de la derecha,  $AD = BC$ ,  $AB = DC$  y  $MN$  biseca a  $\overline{AC}$  en  $K$ . ¿Biseca  $\overline{AC}$  a  $\overline{MN}$ ? Justificar la respuesta.

- (b) ¿Tienen que ser todos los puntos de la figura coplanares?



10. (a) En la figura de la derecha,  $NK = ML$  y  $MK = NL$ . Demostrar que  $\angle MNK \cong \angle NML$ .

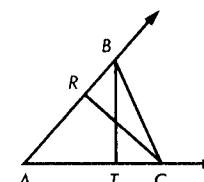
- (b) ¿Tienen que intersecarse  $\overline{KM}$  y  $\overline{NL}$ ?



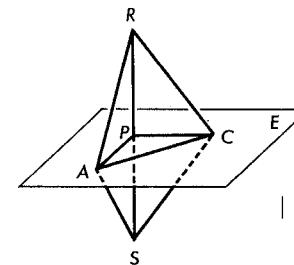
11. Datos: La figura de la derecha, con  $AB = AC$  y

$$\angle RCB \cong \angle TBC.$$

Demostrar:  $RC = BT$ .



12. Se dan dos triángulos congruentes. Demostrar que la bisectriz de un ángulo de uno de los triángulos es congruente con la bisectriz del ángulo correspondiente del otro.



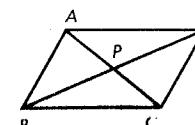
- \* 13. En la figura de la derecha,  $A$ ,  $P$  y  $C$  están en el plano  $E$ , y  $R$  y  $S$  están en lados opuestos de  $E$ . Si  $\overline{AP} \perp \overline{RS}$ ,  $RP = SP$  y  $RC = SC$ , demostrar que

- (a)  $\overline{CP} \perp \overline{RS}$ ,  
(b)  $\angle ACR \cong \angle ACS$ .

- \* 14. En  $\overleftrightarrow{AB}$ , se tiene  $A-C-B$  y  $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ . El punto  $P$  está en el interior del  $\angle ACD$  y el punto  $Q$  está en el interior del  $\angle BCD$  tal que  $\angle PCA \cong \angle QCB$ . Si  $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{PQ}$ , entonces  $PC = QC$ .

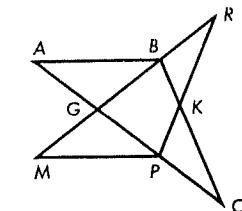
- \* 15. Si  $\overline{AP}$  y  $\overline{BC}$  se bisecan en  $N$ , y  $\overline{AC}$  y  $\overline{BQ}$  se bisecan en  $K$ , demostrar que  $PC = QC$ .

- \* 16. Se da el  $\triangle ABC$ , con  $AB = BC$ . Sea  $D$  un punto en el lado de  $\overleftrightarrow{AB}$  opuesto a  $C$  tal que el  $\triangle ABD$  es equilátero. Sea  $E$  un punto en el lado de  $\overleftrightarrow{BC}$  opuesto a  $A$  tal que el  $\triangle BCE$  es equilátero. Demostrar que  $AE = CD$ .



- \* 17. Se da el  $\square ABCD$  como en la figura, con  $AB = DC$  y  $AD = BC$ . Demostrar que  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  se bisecan.

18. En la figura de la derecha, los puntos  $G$  y  $B$  trisecan a  $\overline{MR}$ , y los puntos  $G$  y  $P$  trisecan a  $\overline{AC}$ . Si  $AG = BG$ , demostrar que  $\angle R \cong \angle C$ . [Nota: Trisecar significa dividir en tres partes congruentes.]

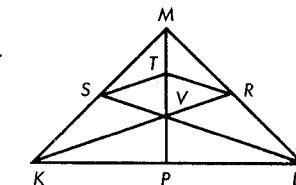


19. Redactar una definición cuidadosa de lo que significa " $C$  y  $D$  trisecan a  $\overline{AB}$ ".

20. Si  $\overleftrightarrow{XY}$  es perpendicular a cada uno de tres rayos diferentes  $\overrightarrow{XA}$ ,  $\overrightarrow{XB}$ ,  $\overrightarrow{XC}$ , y  $XA = XB = XC$ , demostrar que  $AY = BY = CY$ .

21. Datos: El  $\triangle KVL$  es isósceles, con  $KV = LV$ , y  $\overline{MP}$  contiene la mediana  $\overline{VP}$  del  $\triangle KVL$ .

Demostrar:  $ST = RT$ .



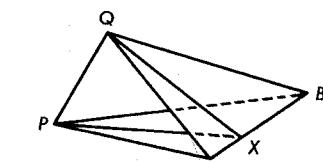
22. (a) Si  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  se bisecan en  $K$ , demostrar que  $AC = BD$  y que  $AD = BC$ .

- (b) Si también  $\overleftrightarrow{EF}$  es bisecado en  $K$ , ¿se podrán hallar seis pares de segmentos congruentes, ninguno de los cuales contiene a  $K$ ?

- (c) Si  $\overleftrightarrow{EF}$  no está en el mismo plano con  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ , ¿cómo afectaría esto a las conclusiones en la parte (b)? Trátese de imaginar la figura, o hágase un croquis o un modelo de ella.

23. Se da el  $\angle BAC$  tal que  $AB = AC$ ;  $R$  está en  $\overrightarrow{AB}$  y  $T$  está en  $\overrightarrow{AC}$  de tal modo que  $RC = TB$ . Con esta información, ¿se podrá demostrar que  $AR = AT$ ? Si se puede, hacerlo. Si no se puede, explicar por qué.

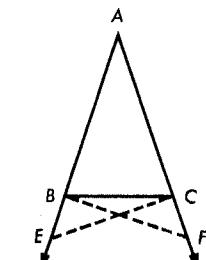
24. Los triángulos  $\triangle PAB$  y  $\triangle QAB$  están en planos diferentes, pero tienen el lado común  $\overline{AB}$ . Si  $\triangle PAB \cong \triangle QAB$  y  $X$  es cualquier punto en  $\overline{AB}$ , entonces  $\angle XQP \cong \angle XQP$ .



25. Completar la demostración de Euclides para el teorema: Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes. Datos:  $\triangle BAC$ , con  $AB = AC$ .

Demostrar:  $\angle ACB \cong \angle ABC$ .

[Sugerencia: Primeramente, tómese un punto  $E$  tal que  $A-B-E$  y un punto  $F$  tal que  $A-C-F$  y  $AE = AF$ . Dibújense  $\overline{BF}$  y  $\overline{CE}$ .]



## Repaso del capítulo

1. Indicar si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso:

- (a) Si en la correspondencia  $ABC \leftrightarrow KLM$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{KM}$ ,  $\overline{AB} \cong \overline{KL}$  y  $\angle A \cong \angle K$ , entonces la correspondencia es una congruencia.
- (b) Si  $\overline{AC} = \overline{BD}$ , podemos concluir que o bien  $A = B$  y  $C = D$ , o  $A = D$  y  $B = C$ .
- (c) Dos triángulos son congruentes, si los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos del otro.
- (d) Si en el  $\triangle DEF$ ,  $m\angle D = m\angle E = m\angle F$ , entonces el  $\triangle DEF$  es equilátero.
- (e) Una mediana de un triángulo biseca a un ángulo del triángulo.
- (f) Si  $\triangle XYZ \cong \triangle BAC$ , entonces  $\angle X \cong \angle A$ .
- (g) En el  $\triangle ABC$ , si  $\angle A \cong \angle C$ , entonces  $AB = AC$ .
- (h) Si  $\triangle XYZ \cong \triangle ZXY$ , entonces el  $\triangle XYZ$  es equilátero.
- (i) Dos triángulos son congruentes, si dos lados y un ángulo de uno son congruentes con dos lados y un ángulo del otro.
- (j) No hay un triángulo  $\triangle ABC$  en el cual  $\angle A = \angle B$ .

2. Definir "segmentos congruentes".

3. Definir "bisectriz de un ángulo".

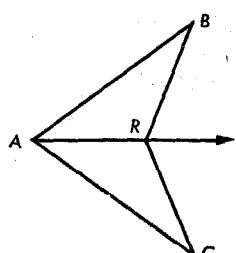
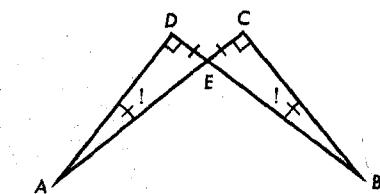
4. Definir "bisectriz de un ángulo de un triángulo".

5. Completar: Si la bisectriz de un ángulo de un triángulo es también una mediana, entonces el triángulo es \_\_\_\_\_.

6. Completar: Un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos se llama \_\_\_\_\_.

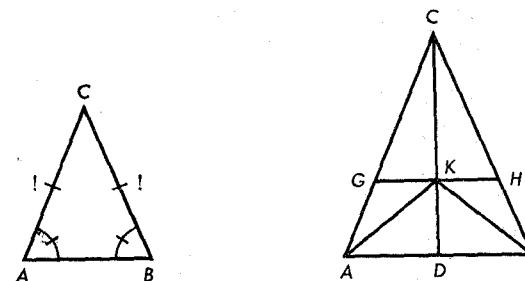
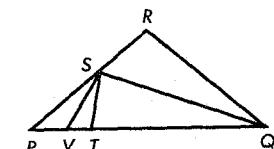
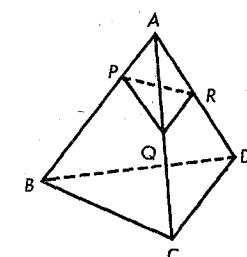
7. Completar: En el  $\triangle PRQ$ , el  $\angle Q$  está comprendido por \_\_\_\_\_ y por \_\_\_\_\_, y  $\angle P$  y  $\angle R$  comprenden \_\_\_\_\_.8. Se dan los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle PQR$ , cada uno de los cuales tiene dos lados de longitud 7 y un ángulo cuya medida es 40. ¿Son congruentes los triángulos? Explíquese.9. Si, en la figura,  $AB = AC$  y  $\overrightarrow{AR}$  biseca al  $\angle BAC$ , demostrar que

- (a)  $RB = RC$ ,
- (b)  $\overrightarrow{AR}$  contiene la bisectriz del  $\angle BRC$ .

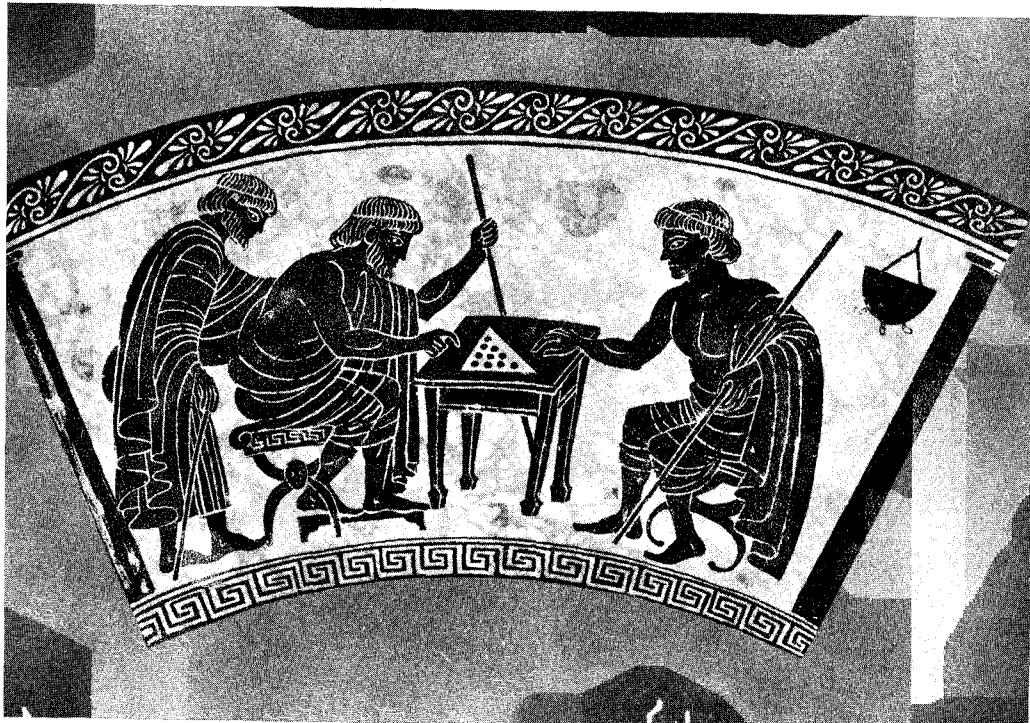
10. Demostrar que si el  $\triangle ABC$  es equilátero, entonces  $\triangle ABC \cong \triangle CAB \cong \triangle ACB$ .

11. Escribir una hipótesis y una conclusión para la figura de la derecha, tal como está marcada.

12. Escribir el teorema que nos sugiere la siguiente figura de la izquierda:

13. En la figura plana anterior de la derecha,  $AC = BC$  y  $AK = BK$ . Hacer una lista de todas las conclusiones que se deducen. (Se deberá demostrar cada una.)14. En el triángulo isósceles  $\triangle PQR$ , la bisectriz de un ángulo en la base,  $\angle Q$ , interseca al lado opuesto en  $S$ .  $T$  es un punto en la base  $\overline{PQ}$  tal que  $ST = PT$ .  $\overline{SV}$  biseca al  $\angle PST$ . Demostrar que  $\angle TSV \cong \angle RQS$ .15. En la figura de la derecha,  $A, B, C$  y  $D$  son no coplanarios y  $AB = AC = AD = BC = BD = CD$ .  $Q$  y  $R$  son los puntos medios de  $\overline{AC}$  y  $\overline{AD}$ , respectivamente, y  $P$  es cualquier punto en  $\overline{AB}$ . Demostrar que el  $\triangle PQR$  es isósceles.16. Sea  $L$  la arista de dos semiplanos,  $H_1$  y  $H_2$ .  $A$  y  $B$  son dos puntos de  $L$ ,  $M$  es un punto en  $H_1$ , y  $R$  es un punto en  $H_2$  tal que  $\angle MAB \cong \angle RAB$  y  $AM = AR$ .(a) Demostrar que el  $\triangle MRB$  es isósceles.(b) ¿Será necesario que  $\overline{MR}$  corte a  $L$ ?(c) ¿Requiere la respuesta a la parte (a) que  $H_1$  y  $H_2$  sean coplanarios?

# 6 | Un examen más preciso de la demostración



## 6-1. CÓMO FUNCIONA UN SISTEMA DEDUCTIVO

En el Capítulo 1, tratamos de explicar en términos generales cómo se desarrollaría nuestro estudio de la geometría. Después de la experiencia adquirida desde entonces, deberá ser más fácil entender la explicación.

La idea de conjunto, los métodos del álgebra y el proceso de razonamiento lógico son cosas *con* las cuales hemos estado trabajando. Sin embargo, *sobre* lo que hemos tratado es justamente la geometría misma. Empezamos con *punto*, *recta* y *plano* como términos no definidos y, hasta ahora, hemos utilizado diecisiete postulados. En algunos casos, los nuevos términos se definieron a base de los postulados. (Por ejemplo, se definió la distancia  $PQ$  como el número positivo dado por el postulado de la distancia.) En otros casos, las definiciones se han fundado solamente en los términos no definidos. (Por ejemplo, un conjunto de puntos es de puntos *alineados*, si todos sus puntos están en una misma línea *recta*.) Pero en todo momento, construimos las definiciones mediante términos que eran, de alguna manera, conocidos con anterioridad. A estas alturas, hemos amontonado definiciones sobre definiciones con tanta frecuencia que nuestra lista es muy larga; y, de hecho, ésta es una de las razones principales por las cuales, desde el principio, tenemos que mantener claros los procedimientos.

Análogamente, todas las afirmaciones que hacemos acerca de la geometría se basan, en último término, en los postulados. Hasta ahora, a veces hemos demostrado teoremas deducidos directamente de los postulados, y otras veces hemos basado nuestras demostraciones sobre teoremas ya demostrados. Pero en cada caso, la cadena de razonamientos se origina en los postulados.

En este momento, quizás parezca una buena idea leer nuevamente la segunda mitad del Capítulo 1. Se entenderá mejor ahora que la primera vez. Es mucho más fácil mirar hacia atrás y entender lo que se ha hecho, que entender una explicación de lo que se va a hacer.

## 6-2. DEMOSTRACIONES INDIRECTAS

En el Capítulo 1, señalamos que la mejor manera de aprender acerca del razonamiento lógico es practicándolo. En general, esto es cierto. Pero hay un tipo de demostración que requiere estudio especial. En el teorema 3-1, utilizamos lo que se llama una *demostración indirecta*. El teorema y su demostración eran los siguientes:

### Teorema 3-1

Si dos rectas diferentes se intersecan, su intersección contiene un punto solamente.

**Demostración:** Si dos rectas se intersecan en dos puntos diferentes  $P$  y  $Q$ , entonces habría dos rectas conteniendo los puntos  $P$  y  $Q$ . El postulado de la recta nos dice que esto no puede ocurrir.

Probablemente, el alumno ya habrá visto emplear este tipo de razonamiento. Quizás, conoce la demostración de que  $\sqrt{2}$  es un número irracional, que también es una demostración indirecta. De cualquier modo, seguramente habrá oido afirmaciones de este tipo en la conversación corriente. Las siguientes dos observaciones son ejemplos de demostraciones indirectas:

### Ejemplo 1

“No debe estar lloviendo afuera.

Si estuviera lloviendo, entonces esas personas que entran por la puerta estarían mojadas, pero no lo están”.

### Ejemplo 2

“Hoy no debe ser el día del juego de fútbol.

Si se estuviera celebrando el juego hoy, entonces el estadio ya estaría lleno de gente, pero los únicos que estamos aquí somos nosotros dos”

En cada caso, el que habla quiere demostrar que una cierta premisa es cierta. Comienza su demostración suponiendo que la premisa es falsa; entonces, observa que esto conduce a una conclusión que contradice un dato conocido. En el primer caso, el que habla empieza suponiendo que está lloviendo; esto conduce a la conclusión de que las personas que entran por la puerta estarían mojadas, lo cual contradice el dato conocido de que no están mojadas. De modo parecido, en el segundo caso, el que habla empieza suponiendo que el juego de fútbol va a celebrarse hoy; y esto conduce a una contradicción con el dato conocido de que en el estadio hay dos personas solamente.

En la demostración del teorema 3-1, empezamos suponiendo que algún par de rectas diferentes se intersecan en dos puntos diferentes. Esto contradice el postulado de la recta. Por tanto, el supuesto es erróneo, y esto significa que el teorema es correcto.

Con frecuencia, nuestras demostraciones indirectas en la geometría serán tan cortas y sencillas como ésta; equivaldrán sencillamente a observaciones de sentido común. Pero esas observaciones de sentido común son parte del ABC del razonamiento matemático y sería muy difícil trabajar sin ellas.

### Conjunto de problemas 6-2

1. Para fines de argumentación, acéptese cada una de las siguientes hipótesis y ofrézcase después un final lógico para cada conclusión:

(a) **Hipótesis:** A todos los niños les gusta jugar al fútbol. Mi hermano tiene catorce años.

**Conclusión:** A mi hermano \_\_\_\_\_.

(b) **Hipótesis:** Solamente las personas descuidadas cometan errores. Nunca soy descuidado.

**Conclusión:** Yo \_\_\_\_\_.

(c) **Hipótesis:** Juan siempre se ríe cuando dice un chiste. Juan está diciendo un chiste.

**Conclusión:** Juan \_\_\_\_\_.

(d) **Hipótesis:** En cualquier triángulo isósceles, los ángulos en la base son congruentes. En el  $\triangle ABC$ ,  $AC = BC$ .

**Conclusión:** \_\_\_\_\_.

2. ¿Cuáles de las siguientes argumentaciones son ejemplos de razonamiento indirecto?

(a) La temperatura afuera debe estar por debajo de  $0^{\circ}\text{C}$ . Si la temperatura no estuviera por debajo de  $0^{\circ}\text{C}$ , los cristales de la ventana no tendrían una capa de hielo. Pero tienen una capa de hielo. Por tanto, la temperatura debe estar por debajo de  $0^{\circ}\text{C}$ .

(b) Tiene que ser la hora del almuerzo. Si no fuera la hora del almuerzo, no tendría hambre. Sin embargo, tengo mucha hambre. Por tanto, tiene que ser la hora del almuerzo.

(c) El concierto debe haber terminado. El público abandona la sala de conciertos solamente cuando el concierto ya ha terminado. El público está abandonando la sala de conciertos. Por tanto, el concierto ha terminado.

3. Debe ser más tarde de las 4 P.M. Si no fuera más tarde de las 4 P.M., estaría oyendo el ruido de los obreros trabajando en la construcción. No oigo ruido alguno.

En este ejemplo de demostración indirecta, señálese:

(a) la afirmación que se va a demostrar,

(b) el supuesto que se hace,

(c) la conclusión que resulta del supuesto, y

(d) el dato conocido que contradice a (c).

4. La Sra. Atiles compró un juego de utensilios de cocina anunciado como hecho de acero inoxidable. Después de utilizarlo durante unas cuantas semanas, notó que algunos de los utensilios empezaban a oxidarse. Decidió, pues, que el juego no era de acero inoxidable y lo devolvió para reembolso.

Síganse las instrucciones para el problema 3.

5. Demostrar que la bisectriz de un ángulo cualquiera de un triángulo escaleno no puede ser perpendicular al lado opuesto.
6. Demostrar que un triángulo escaleno no tiene ningún par de ángulos congruentes.
- + 7. ¿Qué conclusiones pueden deducirse de las siguientes hipótesis, en las cuales  $p$ ,  $q$  y  $r$  representan diferentes enunciados?
- Si  $p$  es cierto, entonces  $q$  es cierto.
  - Si  $q$  es cierto, entonces  $r$  es cierto.
  - El enunciado  $p$  es cierto.
- + 8. ¿Qué conclusiones pueden deducirse de las siguientes hipótesis, en las cuales  $p$ ,  $q$  y  $r$  representan diferentes enunciados?
- Si  $p$  es cierto, entonces  $q$  es cierto.
  - Si  $r$  es cierto, entonces  $s$  no es cierto.
  - Si  $q$  es cierto, entonces  $s$  es cierto.
  - El enunciado  $p$  es cierto.
- ¿Se utiliza razonamiento indirecto en algún momento? Explíquese.
- + 9. Si  $K$  es azul, entonces  $M$  es rojo.
- Si  $K$  es verde, entonces  $M$  es amarillo.
  - Si  $M$  es rojo, entonces  $J$  es azul.
- (a)  $K$  es azul; por tanto,  $M$  es \_\_\_\_\_ y  $J$  es \_\_\_\_\_.
- (b)  $M$  es amarillo. ¿Será posible deducir una conclusión referente a  $K$ ? Si lo es, ¿qué conclusión se puede deducir?
- (c)  $J$  no es azul. ¿Será posible deducir una conclusión referente a  $K$ ? Si lo es, ¿qué conclusión se puede deducir?
- + 10. ¿Qué conclusión se deduce de la siguiente información?
- (a) A nadie se le permite ingresar en el club de natación, a menos que sepa tocar el flautín.
  - (b) Ninguna tortuga puede tocar el flautín.
  - (c) A nadie se le permite usar pantalones cortos rayados en la piscina del club, a menos que sea miembro del club de natación.
  - (d) Yo siempre uso pantalones cortos rayados en la piscina del club.
- [Sugerencia: Convírtase cada enunciado a la forma "si . . . entonces" y preséntese el razonamiento como en los problemas 7 y 8. Por ejemplo, sea  $p$  "alguien es un miembro del club de natación", etc.]
- + 11. ¿Qué conclusión se deduce de las siguientes hipótesis?
- Los leones domesticados tienen dientes afilados.
  - Los leones que comen gente nunca se enferman.
  - Los leones que nunca comen gente tienen dientes mellados.
  - Mi león domesticado tiene pulmonía.
- ¿Se utiliza razonamiento indirecto? Explíquese.

### 6-3. TEOREMAS SOBRE RECTAS Y PLANOS

Ahora, resulta fácil demostrar los otros teoremas del Capítulo 3. Por conveniencia, presentamos nuevamente los postulados que sirven de base a las demostraciones.

#### POSTULADO 4. Postulado de la recta

*Dados dos puntos diferentes cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene.*

#### POSTULADO 5

*(a) Todo plano contiene al menos tres puntos que no están alineados.*

*(b) El espacio contiene al menos cuatro puntos que no están en un plano.*

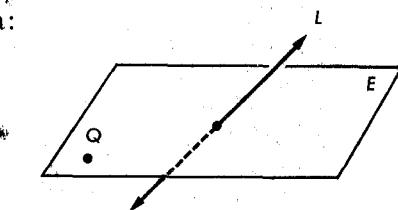
#### POSTULADO 6

*Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces la recta está en el mismo plano.*

#### POSTULADO 7. Postulado del plano

*Tres puntos cualesquiera están al menos en un plano, y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un plano.*

Ahora, demostraremos el siguiente teorema:



#### Teorema 3-2

Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección contiene un solo punto.

**Demostración:** Se nos dan una recta  $L$  y un plano  $E$ . Por hipótesis, tenemos:

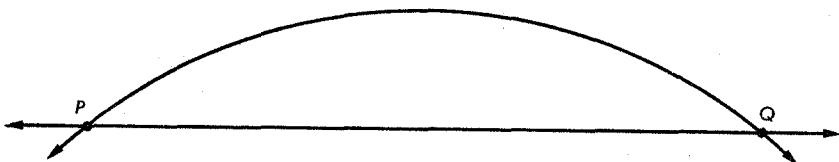
- (1)  $L$  interseca a  $E$  en un punto  $P$ , por lo menos, y
- (2)  $E$  no contiene a  $L$ .

Presentaremos una demostración indirecta y, por tanto, comenzamos suponiendo que

- (3)  $L$  interseca a  $E$  en algún otro punto  $Q$ .

Debemos mostrar que (3) conduce a una contradicción con un dato conocido, y así es: Si  $P$  y  $Q$  están en  $E$ , entonces se deduce, por el postulado 6, que  $L$  está en  $E$ . Esto contradice a (2). Por tanto, (3) es falso. En consecuencia, el teorema 3-2 es cierto.

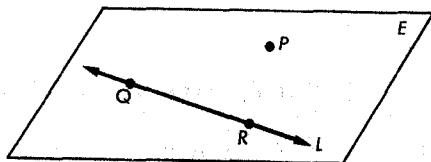
Desde luego, la figura para esta demostración es algo rara. Indicamos un punto  $Q$ , sencillamente para recordar la notación de la demostración. La demostración misma muestra que tal punto no puede existir. En efecto, las figuras para las demostraciones indirectas siempre tienen un aspecto extraño, por la excelente razón que describen situaciones imposibles. Si hubiéramos hecho una figura para el teorema 3-1, se hubiera visto peor aún:



Ésta es una figura de una situación imposible, en la cual dos rectas se intersecan en dos puntos diferentes.

### Teorema 3-3

Dada una recta y un punto fuera de ella, hay exactamente un plano que contiene a ambos.



Sean  $L$  la recta dada y  $P$  el punto dado. Para demostrar el teorema, tenemos que verificar dos cosas:

- (1) Hay un plano  $E$  que contiene a  $P$  y a  $L$ .
- (2) Hay solamente un plano  $E$  que contiene a  $P$  y a  $L$ .

Los enunciados (1) y (2), considerados juntos, nos dicen que hay *exactamente* un plano que contiene a  $P$  y a  $L$ .

**Demostración de (1):** Sean  $Q$  y  $R$  dos puntos cualesquiera de  $L$ . Por el postulado 7, hay un plano  $E$  que contiene a  $P$ , a  $Q$  y a  $R$ . Por el postulado 6,  $E$  contiene a  $L$ . Así,  $E$  contiene a  $P$  y a  $L$ .

**Demostración de (2):** Esta demostración será indirecta. *Supongamos* que hay otro plano  $E'$  que contiene a  $P$  y a  $L$ . Entonces,  $E'$  contiene a  $P$ , a  $Q$  y a  $R$ .

Pero  $P$ ,  $Q$  y  $R$  no son puntos alineados, pues  $L$  es la única recta que contiene a  $Q$  y a  $R$  (¿por qué?), y  $L$  no contiene a  $P$ .

Así, tenemos dos planos diferentes  $E$  y  $E'$  por los puntos no alineados  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . Esto contradice el postulado 7.

Obsérvese que este teorema y su demostración se dividen de manera natural en dos partes. Esto ilustra la distinción entre *existencia* y *unicidad*. La primera mitad de la demostración nos da la *existencia* de un plano  $E$  que contiene a  $P$  y a  $L$ . La segunda mitad nos asegura la *unicidad* del plano que contiene a  $P$  y a  $L$ . Cuando demostramos la existencia, demostramos que hay *al menos un* objeto de una cierta clase. Cuando demostramos la unicidad, demostramos que hay *a lo sumo uno*. Si ocurre que podemos demostrar ambas, entonces sabemos que hay *exactamente uno*.

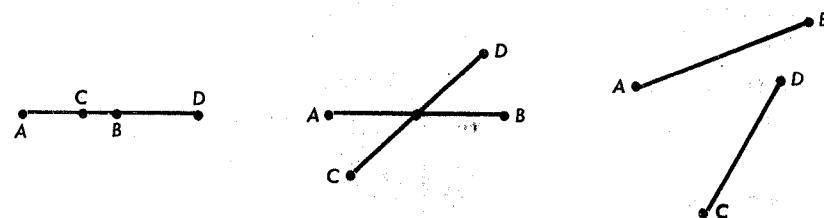
Sin embargo, la existencia y la unicidad no siempre van juntas, de ningún modo; en muchos casos, podemos tener una sin tener la otra y, a menudo, no tenemos ninguna de las dos. Por ejemplo, para las pulgas de un perro vagabundo, generalmente podemos demostrar la existencia pero no la unicidad. (Es muy afortunado el perro que realmente tiene una sola pulga.) Análogamente, si  $x$  es un número racional, entonces *existen* dos enteros  $p$  y  $q$  tales que

$$x = \frac{p}{q}.$$

Pero estos enteros no son únicos, porque también tenemos

$$x = \frac{2p}{2q} = \frac{3p}{3q},$$

y así sucesivamente. Para la hija mayor de una cierta familia, es evidente que tenemos unicidad, pero no necesariamente existencia; en algunas familias, todos los niños son varones. Para los puntos comunes a dos segmentos diferentes, no tenemos necesariamente existencia o unicidad; la intersección puede contener un segmento completo, o exactamente un punto, o ninguno:

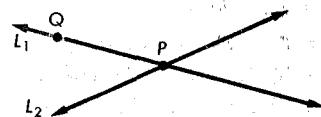


La frase "uno y sólo uno" se utiliza con frecuencia en vez de "exactamente uno" para recalcar el doble valor de la afirmación.

El siguiente teorema se divide en dos partes, de la misma manera que el anterior:

**Teorema 3-4**

Dadas dos rectas que se intersecan, hay exactamente un plano que las contiene.



Se nos dan las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , que se intersecan en el punto  $P$ . Debemos demostrar dos cosas:

- (1) *Existencia.* Hay un plano  $E$  que contiene a  $L_1$  y a  $L_2$ .
- (2) *Unicidad.* Hay un solo plano  $E$  que contiene a  $L_1$  y a  $L_2$ .

Presentamos las demostraciones en forma de doble columna.

**Demostración de (1)**

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $L_1$ contiene un punto $Q$ diferente de $P$ .	Por el postulado de la regla, toda recta contiene una infinidad de puntos.
2. $Q$ no está en $L_2$ .	Por el teorema 3-1, $L_1$ interseca a $L_2$ sólo en $P$ .
3. Hay un plano $E$ que contiene a $Q$ y a $L_2$ .	Teorema 3-3.
4. $E$ contiene a $L_1$ .	Por el postulado 6, puesto que $E$ contiene a $P$ y a $Q$ .

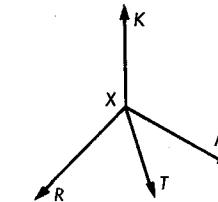
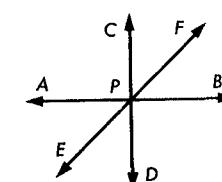
**Demostración de (2)**

AFIRMACIONES	RAZONES
5. Supongamos que otro plano $E'$ contiene a $L_1$ y a $L_2$ .	Comienzo de la demostración indirecta.
6. $E'$ contiene a $Q$ .	$Q$ está en $L_1$ .
7. Cada uno de los planos $E$ y $E'$ contiene a $Q$ y a $L_2$ .	Pasos 3, 4, 5 y 6.
8. $E$ es el único plano que contiene a $L_1$ y a $L_2$ .	El paso 7 contradice el teorema 3-3.

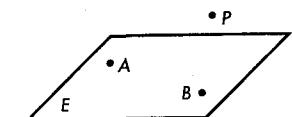
Obsérvese que la demostración de (2) nos da un ejemplo a seguir para presentar demostraciones indirectas en la forma de doble columna. Estrictamente, la frase "Comienzo de la demostración indirecta" no es una "razón"; es, sencillamente, una explicación de lo que teníamos en la mente al escribir el paso 5.

**Conjunto de problemas 6-3**

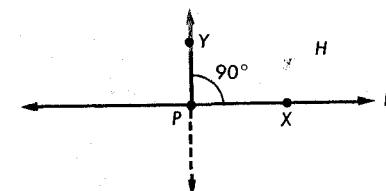
1. Indicar qué teorema puede expresarse así: "Dos rectas que se intersecan determinan un plano".
2. Si las tres rectas de la figura de la izquierda, a continuación, no están todas en el mismo plano, ¿cuántos planos determinan? Nombre cada plano, indicando las rectas que lo determinan.



3. En la figura anterior de la derecha, cada tres rayos no están en el mismo plano. ¿Cuántos planos determinan? Denotar cada plano mediante los puntos que lo determinan.
4. ¿Qué postulado o teorema presentado en la sección 6-3 asegura la unicidad de un punto del cual no se puede asegurar existencia?
5. Como se indica en la figura de la derecha, los puntos  $A$  y  $B$  están en el plano  $E$ , y el punto  $P$  está por encima del plano  $E$ . ¿Qué postulado o teorema asegura que  $\overleftrightarrow{AB}$  está contenida en  $E$ ? En la figura, hay implícito un segundo plano. Nombrarlo. ¿Cuál es su intersección con  $E$ ? Si un cuarto punto,  $Q$ , está por debajo del plano  $E$ , pero no está en la misma recta que  $P$  y  $A$  o que  $P$  y  $B$ , nombrar los planos que quedan determinados. Dibújese la figura.
6. Explicar el empleo de la frase "uno y solamente uno".
7. Supongamos que se quiere demostrar que en un plano, y por un punto dado de una recta dada, pasa a lo sumo una recta perpendicular a la recta dada. ¿Se demostraría existencia o unicidad? Si la demostración es indirecta, ¿qué supuesto se haría para comenzar el razonamiento?

**6-4. PERPENDICULARES**

Utilizando una regla y un transportador, es fácil dibujar la perpendicular a una recta dada en un punto dado de ella. Simplemente, marcamos un ángulo de  $90^\circ$ , como en la figura, con el vértice en el punto dado  $P$ , uno de los lados,  $\overrightarrow{PX}$ , sobre la recta dada  $L$  y el otro lado en uno de los semiplanos determinados por  $L$ . La perpendicular tiene que ser única, porque en el transportador hay una sola marca para indicar  $90^\circ$ .



Ahora, describiremos esta situación mediante un teorema, y lo demostraremos a base de nuestros postulados.

### Teorema 6-1

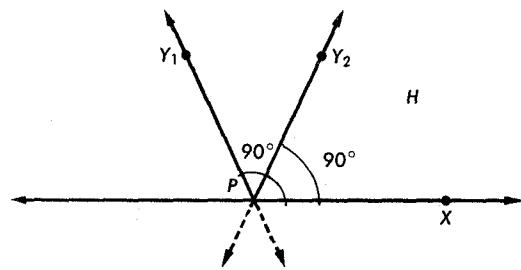
En un plano dado, y por un punto dado de una recta dada, pasa una y solamente una recta perpendicular a la recta dada.

**De otro modo:** Sea  $E$  un plano, sea  $L$  una recta en  $E$ , y sea  $P$  un punto de  $L$ . Entonces,

- (1) hay una recta  $M$  en  $E$  tal que  $M$  contiene a  $P$  y  $M \perp L$ ; y
- (2) hay una sola recta  $M$  de esa clase.

**Demostración de (1):** Sea  $H$  uno de los dos semiplanos de  $E$  determinados por  $L$ , y sea  $X$  un punto cualquiera de  $L$ , diferente de  $P$ . (V. la figura anterior.) Por el postulado de la construcción del ángulo, hay un rayo  $\overrightarrow{PY}$ , con  $Y$  en  $H$ , tal que  $m\angle YPX = 90^\circ$ . Sea  $M = \overleftrightarrow{PY}$ . Entonces,  $M \perp L$  en  $P$ .

**Demostración de (2):** Ahora, supongamos que ambas  $M_1$  y  $M_2$  son perpendiculares a  $L$  en  $P$ . Demostraremos que  $M_1 = M_2$ .



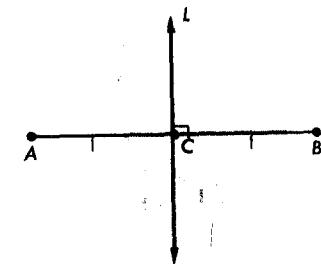
$M_1$  y  $M_2$  contienen los rayos  $\overrightarrow{PY}_1$  y  $\overrightarrow{PY}_2$ , con  $Y_1$  y  $Y_2$  en  $H$ . Por la definición de "perpendicular" y el teorema 4-8, los dos ángulos  $\angle Y_1PX$  y  $\angle Y_2PX$  son ángulos rectos, como se indica en la figura. Por el postulado de la construcción del ángulo, esto significa que  $\overrightarrow{PY}_1$  y  $\overrightarrow{PY}_2$  son el mismo rayo. Como  $M_1$  y  $M_2$  tienen más de un punto común, no pueden ser rectas diferentes. Por tanto,  $M_1 = M_2$ .

Obsérvese que para demostrar la unicidad de las perpendiculares a  $L$  en  $P$ , tenemos que restringirnos a un plano dado. En el espacio, toda recta tiene una infinidad de perpendiculares en cada uno de sus puntos. Así, en una carreta, cada rayo de la rueda es perpendicular al eje.

Las marcas en la siguiente figura indican que  $L$  es la mediatrix de  $AB$ :

### Definición

En un plano dado, la *mediatrix* de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.



Todo segmento  $\overline{AB}$  tiene un punto medio  $C$ , y solamente uno; y por  $C$ , pasa una recta, y solamente una, perpendicular a  $\overleftrightarrow{AB}$ . Por tanto, la mediatrix existe y es única.

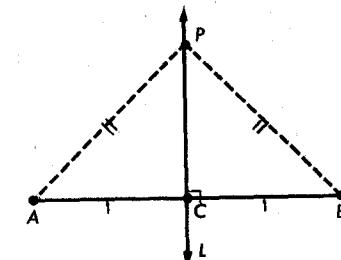
El siguiente teorema da otra descripción de la mediatrix:

### Teorema 6-2. El teorema de la mediatrix

La mediatrix de un segmento en un plano, es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

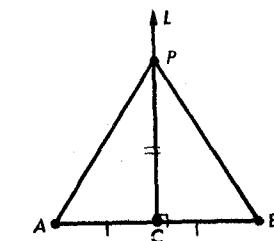
**De otro modo:** Sea  $L$  la mediatrix de  $\overline{AB}$  en el plano  $E$ . Entonces,

- (1) si  $P$  está en  $L$ ,  $PA = PB$ , y
- (2) si  $PA = PB$ , entonces  $P$  está en  $L$ .



Este es un ejemplo de lo que se llama un teorema de *caracterización*. Para caracterizar un conjunto de puntos, enunciamos una condición tal que (1) la satisfacen los puntos del conjunto dado, y (2) no la satisfacen otros puntos. En este caso, el conjunto de puntos es la mediatrix de  $\overline{AB}$ , y la condición es  $PA = PB$ . Por tanto, al expresar el teorema de otro modo, éste se divide naturalmente en dos partes y lo mismo ocurre con la demostración.

**Demostración de (1):** Sea  $C$  el punto medio de  $\overline{AB}$ , y sea  $P$  un punto cualquiera de  $L$ . Si  $P = C$ , entonces es evidente que  $PA = PB$ . Supongamos, pues, que  $P$  es diferente de  $C$ , de manera que  $P$  no está en  $\overleftrightarrow{AB}$ . Tenemos  $PC = PC$ , por identidad;  $\angle PCA \cong \angle PCB$ , porque ambos son ángulos rectos; y  $CA = CB$ , porque  $C$  es el punto medio. Por LAL, tenemos que  $\triangle PCA \cong \triangle PCB$ . Así,  $PA = PB$ .



**Demostración de (2):** Se nos dice que  $P$  está en el plano  $E$ , y que  $PA = PB$ . Si  $P$  está en  $\overleftrightarrow{AB}$ , entonces  $P = C$ , porque  $\overleftrightarrow{AB}$  tiene un punto medio solamente. Si  $P$  no está en  $\overleftrightarrow{AB}$ , sea  $L'$  la recta  $\overleftrightarrow{PC}$ . Entonces,  $PC = PC$ ,  $CA = CB$  y  $PA = PB$ . (¿Por qué?) Por LLL, tenemos

$$\triangle PCA \cong \triangle PCB,$$

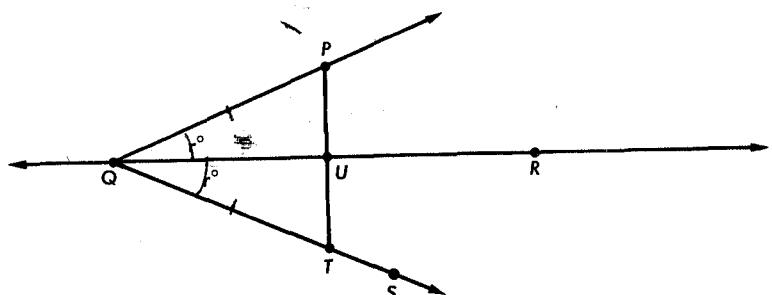
como anteriormente. En consecuencia, por definición,  $\angle PCB$  es un ángulo recto y, en virtud de esto,  $L' \perp \overleftrightarrow{AB}$  en  $C$ . Por el teorema 6-1, las perpendiculares son únicas. Luego,  $L' = L$ . De modo que  $P$  está en  $L$ , como queríamos demostrar.

### Corolario 6-2.1

Se dan un segmento  $\overline{AB}$  y una recta  $L$  en el mismo plano. Si dos puntos de  $L$  equidistan de  $A$  y de  $B$ , entonces  $L$  es la mediatrix de  $\overline{AB}$ .

**Demostración:** Por el teorema 6-2,  $L$  contiene dos puntos de la mediatrix de  $\overline{AB}$ . Como dos puntos determinan una recta, esto significa que  $L$  es la mediatrix de  $\overline{AB}$ .

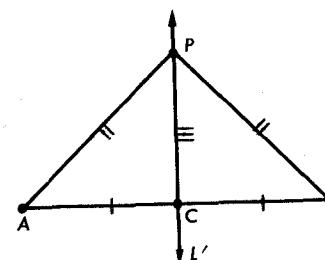
Hemos encontrado que, en realidad, no hubo dificultad al construir la perpendicular a una recta que pasa por un punto de la recta: simplemente, marcamos un ángulo de  $90^\circ$ . Si el punto *no* está en la recta, la construcción requiere otra idea.



Se nos dan una recta  $L$ , y un punto  $P$ , fuera de  $L$ . Queremos construir una recta por  $P$ , perpendicular a  $L$ . (Desde luego, estamos trabajando en un plano  $E$  que contiene a  $L$  y a  $P$ .)

Sean  $Q$  y  $R$  dos puntos cualesquiera de  $L$ . Para obtener la perpendicular, primero trazamos el rayo  $\overrightarrow{QP}$  y medimos el  $\angle PQR$ . Entonces, dibujamos un rayo  $\overrightarrow{QS}$ , con  $S$  del lado de  $L$  opuesto a  $P$ , como se indica en la figura, de manera que

$$\angle SQR \cong \angle PQR.$$



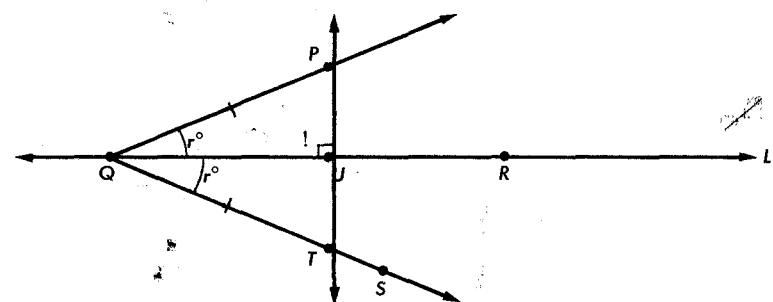
(¿Qué postulado permite esto?) Luego, marcamos un punto  $T$  en  $\overrightarrow{QS}$  tal que  $TQ = PQ$ . Entonces,  $\overleftrightarrow{TP}$  interseca a  $L$  en un punto  $U$ . (¿Por qué?) Ahora,  $QU = QU$ ,  $\angle PQU \cong \angle TQU$ , y  $TQ = PQ$ . En consecuencia, por LAL,  $\triangle PQU \cong \triangle TQU$ , y los ángulos  $\angle PUQ$  y  $\angle TUQ$  son rectos. Por tanto,  $\overleftrightarrow{TP} \perp L$ , y hemos trazado la perpendicular a  $L$  que pasa por  $P$ .

Con este análisis como base, se debe estar capacitado para completar la demostración del siguiente teorema mediante la forma de doble columna:

### Teorema 6-3

Desde un punto externo dado, hay al menos una recta perpendicular a una recta dada.

**De otro modo:** Sea  $L$  una recta, y sea  $P$  un punto fuera de  $L$ . Entonces, hay una recta que es perpendicular a  $L$  y contiene a  $P$ .



### Demostración

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $L$ contiene dos puntos, $Q$ y $R$ .	El postulado de la regla.
2. Hay un rayo $\overrightarrow{QS}$ , con $S$ del lado de $L$ opuesto a $P$ , tal que $\angle SQR \cong \angle PQR$ .	?
3. Hay un punto $T$ de $\overrightarrow{QS}$ tal que $TQ = PQ$ .	?
4. $T$ y $P$ están a lados opuestos de $L$ .	$P$ y $S$ están a lados opuestos de $L$ , y $S$ y $T$ están al mismo lado de $L$
5. $\overleftrightarrow{TP}$ interseca a $L$ en un punto $U$ .	?
6. $\triangle PQU \cong \triangle TQU$ .	?
7. $\angle PUQ$ es un ángulo recto.	?
8. $\overleftrightarrow{PU} \perp L$ .	?

Esta demostración, en la forma que la presentamos, no admite la posibilidad de que  $Q = U$ . Cuando elegimos el punto  $Q$  al azar en la recta  $L$ , es posible que ocurra que  $\overleftrightarrow{PQ} \perp L$ . Pero, desde luego, si esto ocurre, nada habrá que demostrar, porque ya tenemos nuestra perpendicular, a saber, la recta  $\overleftrightarrow{PQ}$ .

Así, *existe* la perpendicular a una recta desde un punto externo. Ahora, demostraremos que la perpendicular es *única*.

#### Teorema 6-4

Desde un punto externo dado, hay a lo sumo una recta perpendicular a una recta dada.

**Demostración:** La demostración es indirecta, como la mayoría de las demostraciones de unicidad. Supongamos que  $L_1$  y  $L_2$  son dos rectas distintas que pasan por  $P$ , cada una de ellas perpendicular a  $L$ . Sean  $A$  y  $B$  los puntos donde  $L_1$  y  $L_2$  intersecan a  $L$ . Sea  $Q$  el punto del rayo opuesto a  $\overrightarrow{AP}$ , para el cual  $AQ = AP$ . (Esto es posible, en virtud del teorema de localización de puntos.) Por LAL, tenemos

$$\triangle PAB \cong \triangle QAB.$$

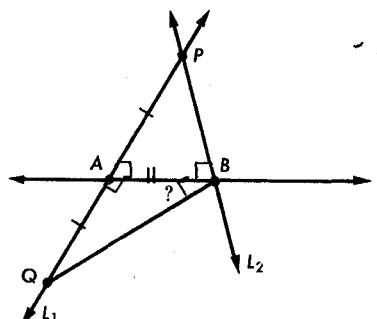
(No parece así en la figura, pero recordemos que la figura es una representación de una situación imposible; nuestra tarea, en la demostración, es mostrar que la situación representada es imposible.)

Por tanto,  $\angle PBA \cong \angle QBA$ , porque son ángulos correspondientes. Luego,  $\overleftrightarrow{BQ} \perp L$  en  $B$ . Por consiguiente, hay dos rectas  $L_2$  y  $\overleftrightarrow{BQ}$  que son perpendiculares a  $L$  en  $B$ . Esto contradice el teorema 6-1, el cual afirma que en un plano dado, y por un punto dado de una recta dada en el plano, pasa una y solamente una recta perpendicular a la recta dada. Por tanto, nuestro supuesto de que había dos perpendiculares a  $L$  por  $P$ , es falso.

#### Corolario 6-4.1

Ningún triángulo tiene dos ángulos rectos.

**Demostración:** En el  $\triangle ABC$ , si ambos  $\angle A$  y  $\angle B$  fueran ángulos rectos, entonces habría dos perpendiculares desde  $C$  a  $\overleftrightarrow{AB}$ . Por el teorema 6-4, esto es imposible.



#### Definiciones

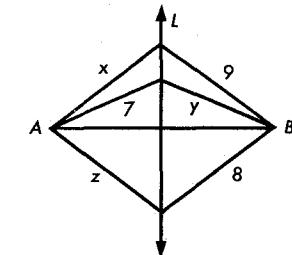
Un *triángulo rectángulo* es un triángulo uno de cuyos ángulos es recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*, y los otros dos lados son los *catetos*.

Desde luego, el corolario anterior es el que nos permite referirnos al ángulo recto de un triángulo rectángulo.

#### Conjunto de problemas 6-4

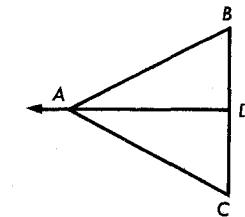
1. Si, en un plano  $M$ , el punto  $A$  está en la recta  $L$ ,  $\overrightarrow{AT} \perp L$  y  $\overrightarrow{AQ} \perp L$ , ¿a qué conclusión se puede llegar en relación con  $\overleftrightarrow{AQ}$  y  $\overleftrightarrow{AT}$ ? ¿Por qué?

2. ¿Qué teorema nos dice que el vértice opuesto a la base de un triángulo isósceles está en la mediatrix de la base?

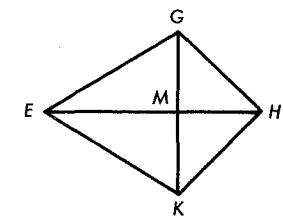


3. En la figura de la derecha,  $L$  es la mediatrix de  $\overline{AB}$ . Si los segmentos tienen las longitudes indicadas, hallar  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

4. Si  $D$  es el punto medio de  $\overline{BC}$  y  $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ , demostrar que el  $\triangle ABC$  es isósceles. *No* deben utilizarse triángulos congruentes en la demostración.



5. En la figura de la derecha,  $GE = KE$ ,  $GM = KM$ , y  $H$  está en  $\overleftrightarrow{EM}$ . Demostrar que  $GH = KH$ , sin utilizar triángulos congruentes.

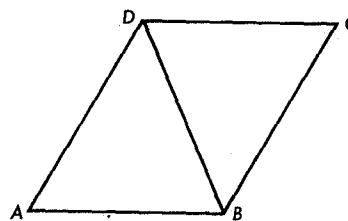


6. La recta  $L$  es la mediatrix de  $\overline{QT}$ .  $P$  es un punto que está al mismo lado de la recta  $L$  que  $Q$ .  $\overleftrightarrow{PT}$  interseca a  $L$  en  $R$ . Demostrar que  $PT = PR + RQ$ .

7. (a) En un plano, ¿cuántas perpendiculares hay a una recta dada en un punto dado de la recta?

- (b) En el espacio, ¿cuántas perpendiculares hay a una recta dada en un punto dado de la recta?

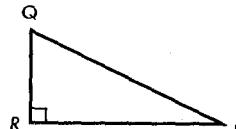
8. Cópíese la figura de la derecha. Utilizando una regla y un transportador, constrúyanse perpendiculares a  $\overleftrightarrow{DB}$  desde  $A$  y  $C$ . Constrúyanse la perpendicular desde  $B$  a  $\overleftrightarrow{DC}$  y la perpendicular desde  $A$  a  $\overleftrightarrow{BC}$ .



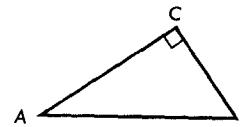
- 9. Indicar qué teorema nos permite decir:**

“la perpendicular a una recta desde un punto externo dado”

10. (a) En el  $\triangle PQR$ , si el  $\angle R$  es un ángulo recto, entonces  $\overline{PQ}$  se llama \_\_\_\_\_, y  $\overline{RQ}$  y  $\overline{RP}$  se llaman \_\_\_\_\_.



- (b) En el  $\triangle ABC$ , si el  $\angle C$  es un ángulo recto, la hipotenusa es \_\_\_\_\_, y los catetos son \_\_\_\_\_.

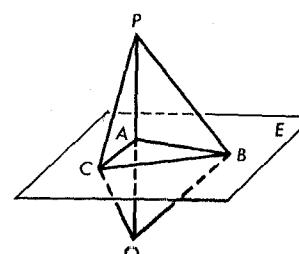


11. Demostrar que si la mediana correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es perpendicular a la hipotenusa, entonces el triángulo es isósceles.

- \* 12. Se nos da el  $\triangle ABC$ , con  $AC = BC$ . Las bisectrices de los ángulos en la base,  $\angle A$  y  $\angle B$  se cortan en el punto  $F$ . Demostrar que  $\overleftrightarrow{CF}$  es perpendicular a  $\overline{AB}$ . (No es necesario utilizar triángulos congruentes en la demostración.)

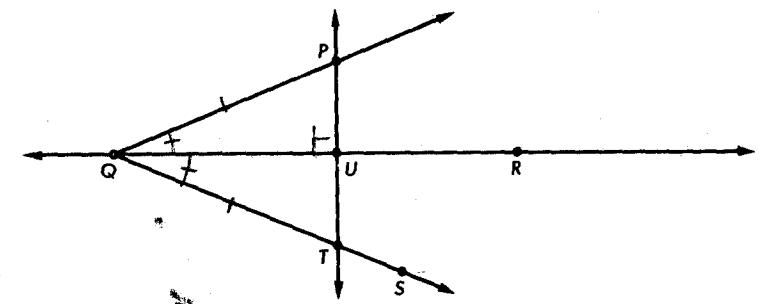
- \* 13. Una de las diagonales de un cuadrilátero biseca a dos ángulos del cuadrilátero. Demostrar que biseca a la otra diagonal.

- \* 14. Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están en el plano  $E$ .  $P$  y  $Q$  están a lados opuestos de  $E$ . Dado que  $PB = QB$ ,  $A$  es el punto medio de  $\overline{PQ}$  y  $\angle PBC \cong \angle QBC$ , demostrar que  $\overline{PO} \perp \overline{AC}$ .



## 6-5. INTRODUCCIÓN DEL EMPLEO DE CONJUNTOS AUXILIARES EN LAS DEMOSTRACIONES. EL EMPLEO DE LA PALABRA "SEA"

Probablemente, se habrá notado que en algunas de las demostraciones, hemos introducido puntos y rectas que no se daban en el enunciado del teorema. Recordemos, por ejemplo, el caso de la sección 6-4 donde queríamos demostrar que siempre hay una perpendicular a una recta dada, desde un punto externo dado.



Se daban solamente la recta  $L$  y el punto  $P$ , pero, para obtener la perpendicular  $\overleftrightarrow{TP}$ , tuvimos que introducir los puntos  $Q$  y  $R$ , los rayos  $\overrightarrow{OP}$  y  $\overrightarrow{QS}$ , y el punto  $T$ .

En cada paso de la demostración en forma de doble columna de este teorema (teorema 6-3), las afirmaciones decían que realmente había puntos y rayos del tipo que necesitábamos. Y si se dieron las razones correctamente, entonces en cada paso nos referimos a un postulado (o quizás a un teorema) que justificaba la afirmación.

Sin embargo, la mayoría de las veces, las razones en tales casos son muy simples; y al presentar demostraciones mediante frases lingüísticas, frecuentemente utilizamos un lenguaje más informal. En los párrafos que preceden el teorema 6-3, hemos visto un ejemplo de esto. Decíámos:

“Sean  $Q$  y  $R$  dos puntos cualesquiera de  $L$ . Para obtener la perpendicular, primero trazamos el rayo  $\overrightarrow{QP}$ ...”.

Los matemáticos frecuentemente hablan de esta manera, y no hay razón por la cual no deban hacerlo. Pero si no se ha seguido atentamente el hilo de lo que se ha estado haciendo, este tipo de lenguaje puede fácilmente conducir a interpretaciones incorrectas. A veces, parece que los matemáticos simplemente hacen que las cosas "sean" lo que ellos quieren que sean. Desde luego, esto no es lo que están haciendo. Cuando decimos, "sean  $Q$  y  $R$  dos puntos cualesquiera de  $L$ ", estamos afirmando que  $L$  contiene dos puntos y que sabemos por qué. Una vez hayamos demostrado los teoremas 6-3 y 6-4, sabemos que las perpendiculares existen y son únicas. Por tanto, tenemos derecho a decir: "Sea  $L'$  la perpendicular a  $L$  desde  $P$ ". Ésta es una manera abreviada de referirnos a los dos teoremas a la vez. [Pregunta: Si conocierámos el teorema 6-3, pero no el teorema 6-4, ¿qué enunciado abreviado podríamos emplear?]

En las demostraciones en forma de doble columna, al introducir conjuntos auxiliares, tenemos que utilizar postulados y teoremas como razones. A continuación, presentamos una lista de postulados y teoremas a los cuales nos referiremos para este propósito. Éstos son los enunciados que nos dicen que algún punto, recta o plano existe, o es único, o ambas cosas.

#### POSTULADO 4. El postulado de la recta

*Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene.*

#### POSTULADO 5

- (a) *Todo plano contiene al menos tres puntos que no están alineados.*
- (b) *El espacio contiene al menos cuatro puntos que no están en un plano.*

#### Teorema 2-1. El teorema de localización de puntos

Sea  $\overrightarrow{AB}$  un rayo y sea  $x$  un número positivo. Entonces, existe exactamente un punto  $P$  de  $\overrightarrow{AB}$  tal que  $AP = x$ .

#### Teorema 2-2

Todo segmento tiene exactamente un punto medio.

#### Teorema 3-1

Si dos rectas diferentes se intersecan, su intersección contiene un punto solamente.

#### Teorema 3-2

Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección contiene un solo punto.

#### POSTULADO 7. El postulado del plano

*Tres puntos cualesquiera están al menos en un plano, y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un plano.*

#### Teorema 3-3

Dada una recta y un punto fuera de ella, hay exactamente un plano que contiene a ambos.

#### Teorema 3-4

Dadas dos rectas que se intersecan, hay exactamente un plano que las contiene.

#### POSTULADO 12. El postulado de la construcción del ángulo

*Sea  $\overrightarrow{AB}$  un rayo de la arista del semiplano  $H$ . Para cada número  $r$  entre 0 y 180, hay exactamente un rayo  $\overrightarrow{AP}$ , con  $P$  en  $H$ , tal que  $m\angle PAB = r$ .*

#### Teorema 5-2

Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.

#### Teorema 6-1

En un plano dado, y por un punto dado de una recta dada, pasa una, y solamente una, recta perpendicular a la recta dada.

#### Teorema 6-3

Desde un punto externo dado, hay al menos una recta perpendicular a una recta dada.

#### Teorema 6-4

Desde un punto externo dado, hay a lo sumo una recta perpendicular a una recta dada.

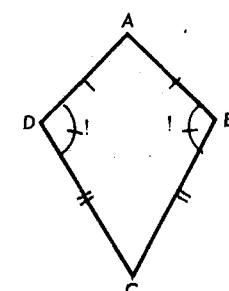
Entre los teoremas y postulados que hemos presentado hasta ahora, éstos son los que se utilizarán cuando se introduzcan conjuntos auxiliares. Pero los teoremas ciertamente de nada nos servirán para demostrar otros teoremas, a menos que pensemos en un conjunto que *convenga* introducir. De hecho, pensar en conjuntos que *convenga* introducir es la parte más difícil e interesante de nuestro trabajo; citar teoremas es simplemente una manera de asegurarnos que nuestro trabajo está en orden.

No hay reglas fijas para elaborar demostraciones; aprendemos mediante la práctica. Veamos algunos ejemplos.

#### Ejemplo 1

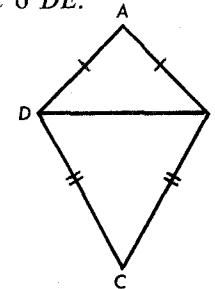
*Dato:* La figura plana, con  $AD = AE$  y  $CD = CE$ .

*Demostrar:*  $\angle D \cong \angle E$ .



Puesto que todos nuestros postulados y teoremas relativos a la congruencia han versado sobre triángulos, parece razonable que nuestra figura debe contener algunos triángulos. Podemos lograr esto fácilmente, introduciendo  $AC$  o  $DE$ .

Supongamos que introducimos  $DE$ , de modo que resulte la figura de la derecha. Esto nos permite completar la demostración, ya que  $m\angle ADE = m\angle AED$  y  $m\angle CDE = m\angle CED$  nos da  $m\angle ADC = m\angle AEC$ , por el postulado de la adición de ángulos.

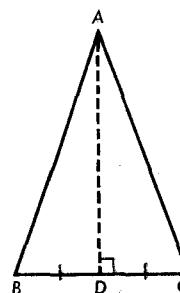


**Advertencia:** Antes de “introducir” algo, asegúrenos de que existe. Nada es más fácil que describir objetos imaginarios mezclando palabras a la ligera. Consideremos, por ejemplo, el siguiente “teorema” y su “demostración”:

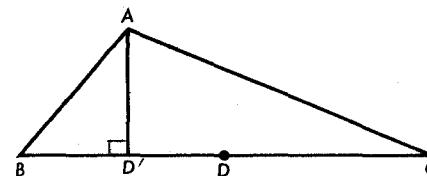
### “Teorema”

En un triángulo  $\triangle ABC$  cualquiera, tenemos que  $\angle B \cong \angle C$ .

**“Demostración”:** Sea  $D$  un punto entre  $B$  y  $C$ , tal que  $BD = DC$  y  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ . Entonces,  $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ , porque ambos son ángulos rectos. Por tanto,  $ADB \leftrightarrow ADC$  es una correspondencia LAL. En consecuencia,  $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ , y  $\angle B \cong \angle C$ .



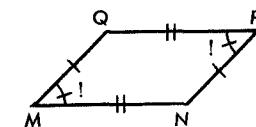
Este “teorema” es ridículo, de modo que su demostración tiene que ser falsa. No es difícil darse cuenta de que la demostración está equivocada desde el principio, con el mal empleo de la palabra “sea”. A menos que ocurra que  $\angle B \cong \angle C$ , el punto medio de  $\overline{BC}$  y el pie de la perpendicular desde  $A$  son dos puntos diferentes. Así, en muchos casos, el punto  $D$  que pretendemos exista, no existe en realidad. Obsérvese que esto hubiera sido evidente, si el autor de la demostración errónea hubiera utilizado un triángulo escaleno y su representación. Figuras bien construidas no garantizan la ausencia de errores, pero son de gran ayuda.



### Conjunto de problemas 6-5

1. Demostrar el teorema enunciado en el ejemplo 1 de la página 171, trazando  $\overline{AC}$ .

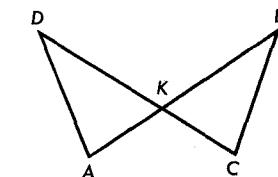
2. Dada la figura de la derecha, demostrar que  $\angle M \cong \angle P$ .



3. Dada la figura, con

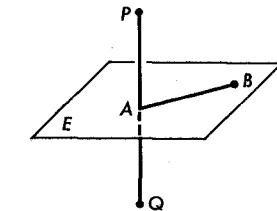
$$AD = CB \text{ y } AB = CD,$$

demostrar que  $AK = CK$ .



4. En una hoja de papel, hacer una lista de los postulados y teoremas dados en las páginas 170 y 171, utilizando 4 para el postulado 4, 2-1 para el teorema 2-1, y así sucesivamente. Si un postulado o teorema asegura existencia, escríbese una E después del número correspondiente en la lista; si asegura unicidad, escríbese una U. Si asegura ambas, existencia y unicidad, escríbese EU. Por ejemplo, el postulado 4 debe aparecer en la lista como “4EU”.

5. Se dan los puntos  $A$  y  $B$  en el plano  $E$  y los puntos  $P$  y  $Q$  a lados opuestos del plano  $E$  de manera que  $PA = QA$  y  $AB \perp PQ$ . Demostrar que  $B$  equidista de  $P$  y  $Q$ . ¿Cómo se utiliza el teorema 3-4 en la demostración?

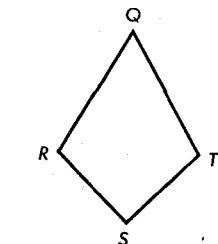


6. Datos:  $Q, R, S$  y  $T$  son coplanarios,  $QR = QT$  y

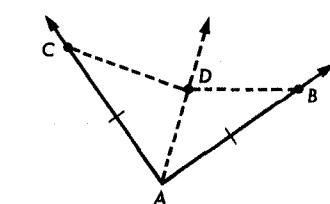
$$m\angle R = m\angle T.$$

Demostrar que  $SR = ST$ .

¿Será válida la demostración si  $Q, R, S$  y  $T$  no están en el mismo plano?



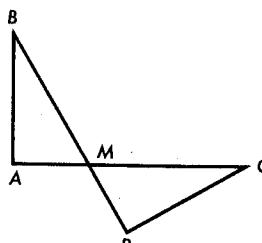
7. Hallar el error en la siguiente “demostración”: En los lados del  $\angle A$ , se toman los puntos  $B$  y  $C$  de manera que  $AB = AC$ .  $D$  es un punto cualquiera en el interior del  $\angle A$ . Trácese el rayo que biseca al  $\angle A$  y contiene a  $D$ . Trácese  $\overline{DC}$  y  $\overline{DB}$ . Por la definición de bisectriz de un ángulo,  $\angle DAC \cong \angle DAB$ .  $AD = AD$ , por identidad. Por tanto,  $\triangle ADC \cong \triangle ADB$ , por LAL, y  $DB = DC$ . Así,  $D$  equidista de  $B$  y  $C$ .



8. Datos:  $AB = PQ$  y

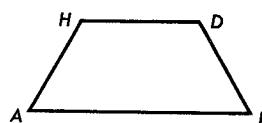
$BP = AQ$ .

Demostrar que (a)  $\angle A \cong \angle P$ ,  
(b)  $\triangle ABM \cong \triangle PQM$ .



\* 9. Datos:  $AH = RD$ ,  $\angle A \cong \angle R$ , y  $H, A, R$  y  $D$  son coplanarios.

Demostrar que  $\angle H \cong \angle D$ .

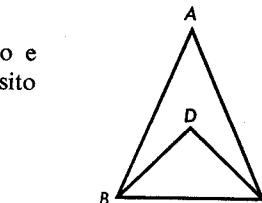


\* 10. Bosquejar una segunda solución al problema 9, introduciendo segmentos auxiliares distintos de los que se utilizaron anteriormente.

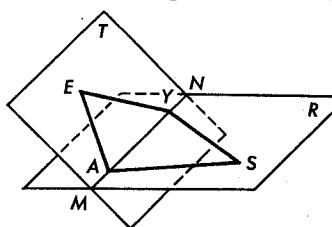
\* 11. Redactar dos demostraciones para el siguiente ejemplo e indicar cuál de las demostraciones no depende del requisito que los puntos  $A, B, C$  y  $D$  sean coplanarios:

Datos:  $AB = AC$  y  $BD = CD$  en la figura.

Demostrar que  $\angle ABD \cong \angle ACD$ .

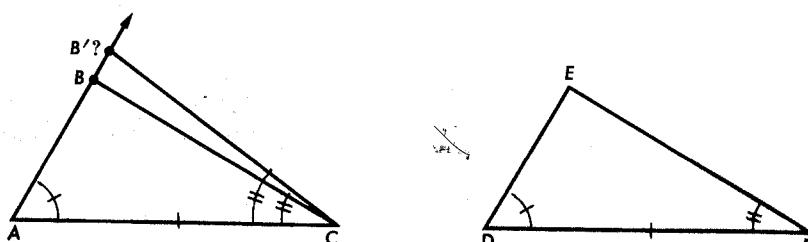


\* 12. En la figura de la derecha, los planos  $R$  y  $T$  se intersecan en  $MN$ .  $E$  está en  $T$ ,  $S$  está en  $R$  y  $MN$  contiene a  $A$  y a  $Y$ . Si  $EY = EA$  y  $SY = SA$ , demostrar que  $\angle EAS \cong \angle EYS$ .



## 6-6. CÓMO PRESCINDIR DEL POSTULADO ALA

En el capítulo anterior, basamos nuestro estudio de la congruencia de triángulos en los tres postulados LAL, ALA y LLL. De hecho, el único de éstos que realmente necesitamos aceptar como un postulado es LAL; si suponemos solamente LAL, pueden demostrarse los otros dos. Consideraremos primero el caso de ALA.



Sea dada una correspondencia ALA de la forma

$$ABC \leftrightarrow DEF,$$

como se indica en la figura anterior, de manera que

$$\angle A \cong \angle D,$$

$$(1) \quad AC = DF,$$

$$\angle C \cong \angle F.$$

Debemos demostrar que  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

### Demostración

#### AFIRMACIONES

2.  $\overrightarrow{AB}$  contiene un punto  $B'$  tal que  $AB' = DE$ .
3.  $AB'C \leftrightarrow DEF$  es una correspondencia LAL.
4.  $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$ .
5.  $\angle ACB' \cong \angle DFE$ .
6.  $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{FB}$ .
7.  $B' = B$ .
8.  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

#### RAZONES

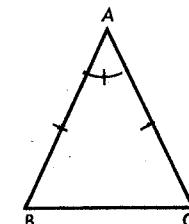
- |   |  |
|---|--|
| El teorema de localización de puntos.       | Pasos 1 y 2.   |
| LAL.  | Ángulos correspondientes.                                  |
| El postulado de la construcción del ángulo. | Dos rectas diferentes se intersecan a lo sumo en un punto. |
| Pasos 4 y 7.                                |  |

## 6-7. CÓMO PRESCINDIR DEL POSTULADO LLL

Ahora, mostraremos que LLL también puede demostrarse como un teorema.

Primero, recordamos que al demostrar el teorema del triángulo isósceles, todo lo que utilizamos fue LAL. Puesto que  $ABC \leftrightarrow ACB$  es una correspondencia LAL, sabemos que  $\triangle ABC \cong \triangle ACB$  y, por tanto,

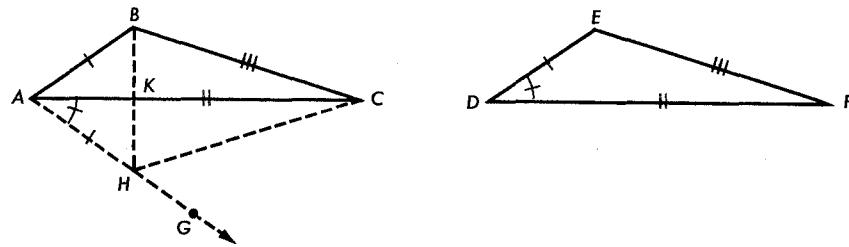
$$\angle B \cong \angle C.$$



De modo que podemos utilizar el teorema del triángulo isósceles al demostrar LLL, sin cometer el error de razonar en círculo.

Ahora, supongamos que se da una correspondencia LLL de la forma

$$ABC \leftrightarrow DEF.$$



### Demostración

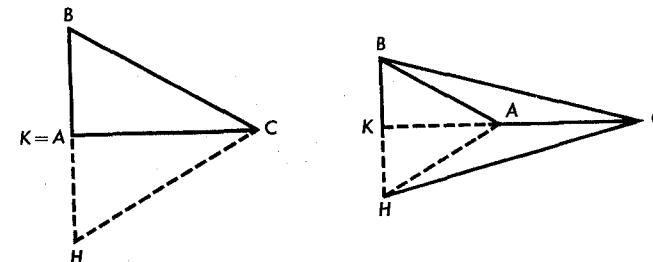
AFIRMACIONES	RAZONES
1. $AB = DE, AC = DF, BC = EF.$	Datos.
2. Hay un punto $G$ del lado opuesto de $\overleftrightarrow{AC}$ que $B$ , tal que $\angle CAG \cong \angle D$ .	El postulado de la construcción del ángulo.
3. Hay un punto $H$ de $\overrightarrow{AG}$ tal que $AH = DE$ .	El teorema de localización de puntos.
4. $AHC \leftrightarrow DEF$ es una correspondencia LAL.	Pasos 1, 2 y 3.
5. $\triangle AHC \cong \triangle DEF$ .	LAL.

Así, tenemos una copia congruente del  $\triangle DEF$ , en el lado inferior del  $\triangle ABC$ . Esto completa la primera parte de la demostración. En la segunda parte, mostraremos que  $\triangle ABC \cong \triangle AHC$ . La siguiente demostración se aplica al caso indicado en la figura, en el cual  $\overrightarrow{BH}$  interseca a  $\overleftrightarrow{AC}$  en un punto entre  $A$  y  $C$ .

### Demostración (cont.)

AFIRMACIONES	RAZONES
6. $\angle ABH \cong \angle AHB$ .	Teorema del triángulo isósceles.
7. $\angle HBC \cong \angle CHB$ .	Teorema del triángulo isósceles.
8. $\angle ABC \cong \angle AHC$ .	Postulado de la adición de ángulos.
9. $ABC \leftrightarrow AHC$ es una correspondencia LAL.	Pasos 1, 5 y 8.
10. $\triangle ABC \cong \triangle AHC$ .	LAL.
11. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .	Pasos 5 y 10.

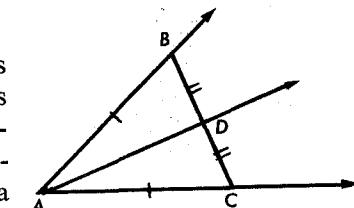
De modo luego, hay otros dos casos por considerar:



En estos casos, las demostraciones se dejan al estudiante.

### 6.8. INTERPOSICIÓN Y SEPARACIÓN

Si el alumno ha estudiado con atención, quizás habrá notado dos casos en los cuales nuestras demostraciones no estaban completas. En la demostración del teorema 5-2, en realidad, necesitábamos saber que el punto medio  $D$  de  $\overline{BC}$  estaba en el interior del  $\angle BAC$ .



Necesitábamos esta información para saber que  $\overrightarrow{AD}$  satisface a la definición de bisectriz de un ángulo.

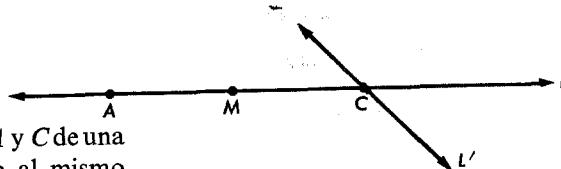
Análogamente, en la demostración de LLL, en la sección anterior, para emplear la adición de ángulos en el paso 8, era necesario saber que el punto  $K$  estaba en el interior del  $\angle AHC$ .

Estrictamente, estas afirmaciones requieren demostraciones, pero éstas se omiten en casi todos los libros, incluyendo el de Euclides y la mayoría de los libros de texto. Esto no es necesariamente perjudicial. La geometría se guía más bien por el sentido común, y es el sentido común el que nos dice que nuestros postulados eran razonables en primer lugar. La geometría se había estudiado durante más de dos mil años antes de que se enunciaran postulados que fueran realmente adecuados para las demostraciones de teoremas geométricos.

Sin embargo, una vez que tengamos los postulados y hayamos aprendido a emplearlos, debemos ordenar mejor nuestro trabajo, enunciando y demostrando los teoremas que necesitamos.

#### Teorema 6-5

Si  $M$  está entre los puntos  $A$  y  $C$  de una recta  $L$ , entonces  $M$  y  $A$  están al mismo lado de otra recta cualquiera que contenga a  $C$ .

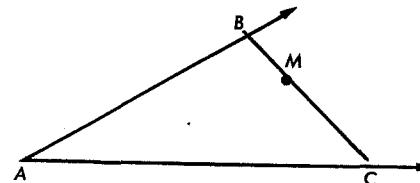


**Demostración:** Sea  $L'$  la otra recta que contiene a  $C$  y supongamos que  $A$  y  $M$  están a lados opuestos de  $L'$ . Entonces,  $\overleftrightarrow{AM}$  contiene un punto  $D$  de  $L'$ . Pero  $\overleftrightarrow{AM}$  está en  $L$ , y  $L$  corta a  $L'$  solamente en  $C$ . En consecuencia,  $C = D$ . Por tanto, en virtud de la definición de segmento,  $C$  está entre  $A$  y  $M$ , lo cual es imposible, porque  $M$  está entre  $A$  y  $C$ . [V. la afirmación (2) en la página 41.]

Esto conduce fácilmente al teorema que necesitábamos en las demostraciones del teorema 5-2 y del teorema LLL.

### Teorema 6-6

Si  $M$  está entre  $B$  y  $C$ , y  $A$  es un punto cualquiera fuera de  $\overleftrightarrow{BC}$ , entonces  $M$  está en el interior del  $\angle BAC$ .



**Demostración:** Por el teorema anterior, sabemos que (1)  $M$  y  $B$  están al mismo lado de  $\overleftrightarrow{AC}$ . Aplicando de nuevo ese teorema, sabemos que (2)  $M$  y  $C$  están al mismo lado de  $\overleftrightarrow{AB}$ . Por la definición del interior de un ángulo, esto significa que  $M$  está en el interior del  $\angle BAC$ .

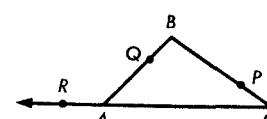
### Conjunto de problemas 6-8

[Nota: En este conjunto de problemas, no se deberá tomar información alguna de las figuras.]

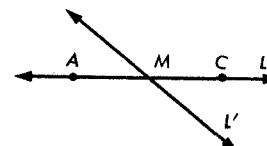
- + 1. Dibujar una figura para la siguiente afirmación y justificar su validez: En un triángulo cualquiera, cada punto de un lado del triángulo, distinto de los extremos, está en el interior del ángulo opuesto al lado.

- + 2. Se dan la recta  $\overleftrightarrow{AC}$ , con un punto  $R$  tal que  $R-A-C$ , un punto  $B$  fuera de  $\overleftrightarrow{AC}$ , y los puntos  $P$  y  $Q$  en  $\overleftrightarrow{BC}$  y  $\overleftrightarrow{BA}$  tales que  $B-P-C$  y  $B-Q-A$ . Completar cada una de las siguientes afirmaciones y estar preparado para justificar las respuestas:

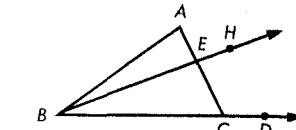
- $P$  está en el interior del  $\angle$  \_\_\_\_\_.
- $Q$  y  $B$  están en el \_\_\_\_\_ lado de  $\overleftrightarrow{AC}$ .
- $P$  y  $B$  están en \_\_\_\_\_ de  $\overleftrightarrow{AC}$ .
- $Q$  y  $P$  están en \_\_\_\_\_ de  $\overleftrightarrow{AC}$ .
- $R$  y  $P$  están en \_\_\_\_\_ de  $\overleftrightarrow{AB}$ .



- + 3. Demostrar que si  $M$  está entre los puntos  $A$  y  $C$  de una recta  $L$ , entonces  $A$  y  $C$  están a lados opuestos de otra recta cualquiera que contenga a  $M$ .

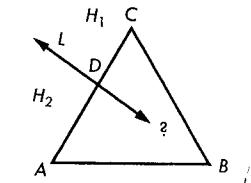


4. Dados los puntos  $A, B, C, D, E$  y  $H$  en el mismo plano, tales que  $A, B$  y  $C$  no están alineados,  $B-C-D$ ,  $A-E-C$  y  $B-E-H$ , demostrar que  $A$  y  $H$  están al mismo lado de  $\overleftrightarrow{BD}$ .

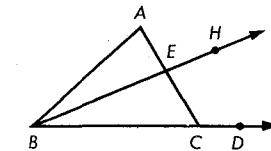


5. Demostrar que, en un plano, si una recta corta a un lado de un triángulo en un punto que no es un vértice, entonces corta, al menos, a otro lado del triángulo.

[Sugerencia: Sean  $H_1$  y  $H_2$  los dos semiplanos cuya arista común es  $L$ , con  $C$  en  $H_1$ . Hay tres casos por considerar:  $B$  está en  $L$ ,  $B$  está en  $H_1$  y  $B$  está en  $H_2$ .]



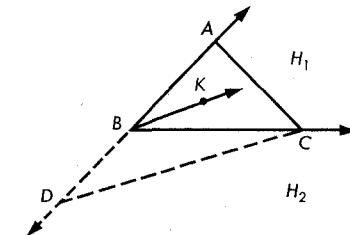
6. Se dan los puntos  $A, B, C, D, E$  y  $H$  en un mismo plano, tales que  $A, B$  y  $C$  no están alineados,  $B-C-D$ ,  $A-E-C$  y  $B-E-H$ ; demuéstrese que  $H$  está en el interior del  $\angle ACD$ . [Sugerencia: Por la definición del interior de un ángulo, debe demostrarse que  $A$  y  $H$  están al mismo lado de  $\overleftrightarrow{CD}$  (V. el problema 4) y que  $D$  y  $H$  están al mismo lado de  $\overleftrightarrow{AC}$ .]



7. El siguiente teorema, cuya veracidad parece evidente, a menudo se acepta sin demostración:

Si  $K$  es un punto en el interior del  $\angle ABC$ , entonces  $\overleftrightarrow{BK}$  interseca a  $\overleftrightarrow{AC}$ .

Después de contestar las preguntas que siguen, se debe poder presentar una demostración. Pueden utilizarse otros problemas de este conjunto de problemas para justificar el razonamiento.



- Sean  $H_1$  y  $H_2$  los dos semiplanos cuya arista común es  $\overleftrightarrow{BC}$ , con el punto  $A$  en  $H_1$ . Tómese un punto  $D$  cualquiera en el rayo opuesto a  $\overleftrightarrow{BA}$ . Trácese  $\overleftrightarrow{DC}$  formando el  $\triangle DAC$ . ¿Por qué está  $D$  en  $H_2$ ?

- ¿Por qué está  $K$  en  $H_1$ ? ¿Qué teorema justifica que cada punto de  $\overleftrightarrow{BK}$ , excepto  $B$ , está en  $H_1$ ?

- ¿Por qué está en  $H_2$  cada punto de  $\overleftrightarrow{DC}$  distinto de  $C$ ?

- ¿Por qué no interseca  $\overleftrightarrow{DC}$  a  $\overleftrightarrow{BK}$ ?

- ¿Por qué no interseca  $\overleftrightarrow{DC}$  al rayo opuesto a  $\overleftrightarrow{BK}$ ?

- ¿Por qué no interseca  $\overleftrightarrow{DC}$  a  $\overleftrightarrow{BK}$ ?

- ¿Por qué tiene que intersecar  $\overleftrightarrow{BK}$  a  $\overleftrightarrow{AC}$ ?

- ¿Por qué no interseca el rayo opuesto a  $\overleftrightarrow{BK}$ , a  $\overleftrightarrow{AC}$ ?

- ¿Por qué interseca  $\overleftrightarrow{BK}$  a  $\overleftrightarrow{AC}$ ?

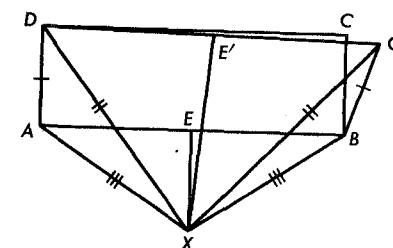
## PROBLEMA OPTATIVO

La siguiente argumentación falsa que trata de demostrar que un ángulo obtuso es congruente con un ángulo recto recalca la importancia de saber a qué lado de una recta está un punto dado. Supongamos que el  $\square ABCD$  es un rectángulo y que el lado  $\overline{BC}$  se mueve hacia afuera de manera que  $BC' = BC$  y el  $\angle ABC'$  sea obtuso. Supongamos que la mediatrix de  $\overline{AB}$  interseca a la mediatrix de  $\overline{DC'}$  en  $X$ . Si  $X$  está por debajo de  $\overleftrightarrow{AB}$ , como se indica en la primera figura, tenemos que

$$\triangle AXD \cong \triangle BXC',$$

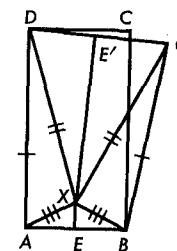
por el teorema LLL y, en consecuencia,

$$m\angle DAX = m\angle C'BX.$$



También,  $\triangle EAX \cong \triangle EBX$ , por el teorema LLL, de modo que  $m\angle EAX = m\angle EBX$ . Restando, obtenemos que  $m\angle DAE = m\angle C'BE$ . Si  $X$  está por encima de  $\overleftrightarrow{AB}$ , como se indica en la segunda figura, obtenemos, igual que antes, que  $m\angle DAX = m\angle C'BX$ ,  $m\angle EAX = m\angle EBX$ , y la igualdad requerida  $m\angle DAE = m\angle C'BE$  se obtiene mediante adición. ¿Qué es incorrecto en la argumentación anterior?

[Sugerencia: Trátese de dibujar una figura exacta para representar el caso en el cual  $m\angle ABC'$  es un poco menor que 180. ¿Qué parte de la demostración es válida en este caso?]



## Resumen del capítulo

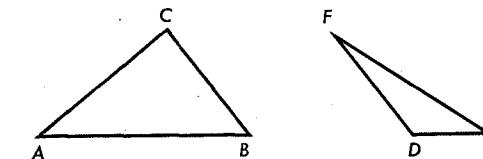
1. Supongamos que se va a tratar de demostrar las siguientes afirmaciones mediante el método indirecto. Para cada afirmación, indicar con qué supuesto se comenzaría la demostración.

- Si un triángulo no tiene dos ángulos congruentes, entonces no es isósceles.
- Dada una recta y un punto fuera de ella, hay a lo sumo una recta que pasa por el punto y es perpendicular a la recta dada.
- Si un punto equidista de los extremos de un segmento, está en la mediatrix del segmento.
- Si dos rectas de un mismo plano son perpendiculares a una misma recta, son paralelas.
- En un plano, hay a lo sumo una recta perpendicular a una recta dada en un punto dado de la misma.
- $\sqrt{2}$  no es un número racional.
- Cero no tiene recíproco.

2. Definir la "mediatrix de un segmento".

3. Enunciar el teorema de la mediatrix.

4. Copiar los siguientes triángulos escalenos. Constrúyase la mediatrix de cada lado de cada uno de los triángulos. ¿Biseca alguna de las mediatrixes a alguno de los ángulos?

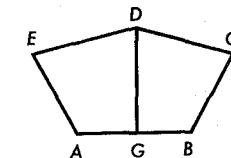


5. Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa:

- En un plano, hay a lo sumo dos perpendiculares a una recta en un punto de la misma.
- Demostrar que "hay exactamente uno" significa demostrar existencia y unicidad.
- El lado más largo de un triángulo cualquiera se llama la hipotenusa.
- En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama la hipótesis.

6. En la figura,  $AE = BC$ ,  $ED = CD$ ,  $G$  es el punto medio de  $\overline{AB}$  y  $\angle E \cong \angle C$ . Demostrar que

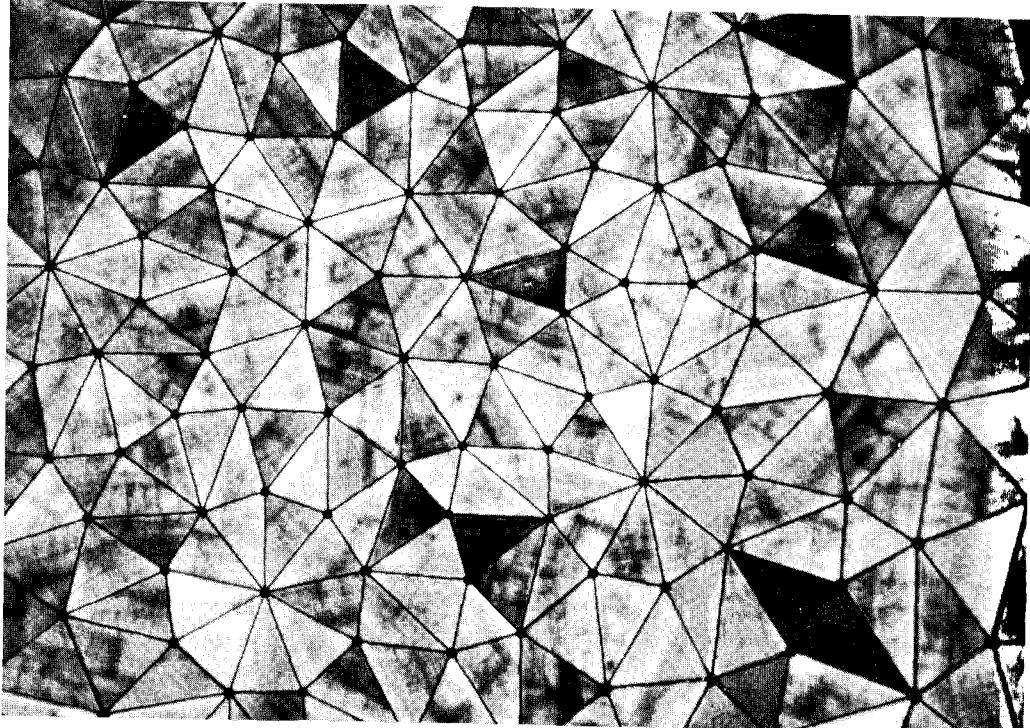
$$DG \perp AB.$$



7. La recta  $L$  es la mediatrix de  $\overline{BC}$  y  $A$  es el punto medio de  $\overline{BC}$ . Los puntos  $K$  y  $G$  están al mismo lado de  $\overline{BC}$ .  $K$  está al mismo lado de  $L$  que  $B$ , y  $G$  está al mismo lado de  $L$  que  $C$ , de modo que  $\angle BAK \cong \angle CAG$ . La perpendicular a  $\overline{BC}$  en  $B$  interseca a  $\overrightarrow{AK}$  en  $D$ , y la perpendicular a  $\overline{BC}$  en  $C$  interseca a  $\overrightarrow{AG}$  en  $E$ . Demostrar que  $\overline{BE}$  y  $\overline{CD}$  se intersecan en  $L$ .

8.  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  están en un mismo plano y son congruentes. La mediatrix de  $\overline{AD}$  y la de  $\overline{BC}$  se intersecan en  $X$ . Demostrar que  $\triangle ABX \cong \triangle DCX$ .

# 7 | Desigualdades geométricas



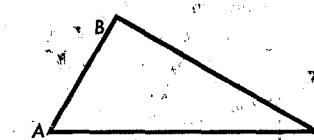
## 7-1. FORMULACIÓN DE CONJETURAS PLAUSIBLES

Hasta ahora, en nuestro estudio de la geometría del triángulo, hemos venido tratando solamente con casos en los cuales podemos decir que dos segmentos son de igual longitud, o que dos ángulos tienen igual medida. Procederemos ahora a estudiar casos en los cuales podemos decir que un segmento es más largo que otro (en decir, que tiene mayor longitud), o que un ángulo es mayor que otro (esto es, tiene mayor medida).

Sin embargo, no empezaremos demostrando teoremas. Más bien, haremos primariamente algunas conjeturas plausibles acerca del tipo de afirmaciones que deben ser ciertas. (No deberemos llamar teoremas a estas afirmaciones hasta que se demuestren.)

Examinemos el siguiente ejemplo: Dado un triángulo con dos lados de longitudes diferentes, ¿qué podemos decir acerca de los ángulos opuestos a esos lados? Obsérvese que este problema viene sugerido de modo natural por el teorema 5-3, que dice que si dos lados de un triángulo tienen la misma longitud, entonces los ángulos opuestos a esos lados tienen la misma medida.

Puede investigarse esta situación, dibujando un triángulo con dos lados de longitudes evidentemente desiguales, como el siguiente:



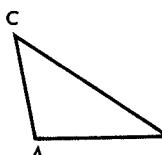
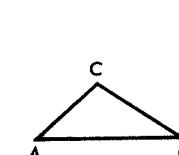
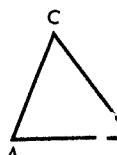
Aquí,  $BC$  es mayor que  $AB$  y  $m\angle A$  es mayor que  $m\angle C$ . Después de dibujar algunos triángulos más, probablemente nos convenceremos de que el siguiente enunciado es cierto:

*Si dos lados de un triángulo tienen longitudes desiguales, entonces los ángulos opuestos a ellos tienen medidas desiguales, y el ángulo mayor es el opuesto al lado mayor.*

Ensayemos, ahora, el mismo procedimiento con los siguientes problemas:

### Conjunto de problemas 7-1

1. En cada uno de los siguientes triángulos,  $m\angle A > m\angle B$ . ¿Qué conjetura puede hacerse acerca de los lados opuestos a los ángulos  $\angle A$  y  $\angle B$ ?



2. Considérese un triángulo cualquiera y designemos sus vértices con  $A$ ,  $B$  y  $C$ . ¿Parece ser cierto que  $AB + BC > AC$ ? ¿Qué relación hay entre  $BC + AC$  y  $AB$ ? ¿Qué podrían decirse acerca de  $BC$  y  $AC + AB$ ? ¿Qué afirmación general sugieren las respuestas?

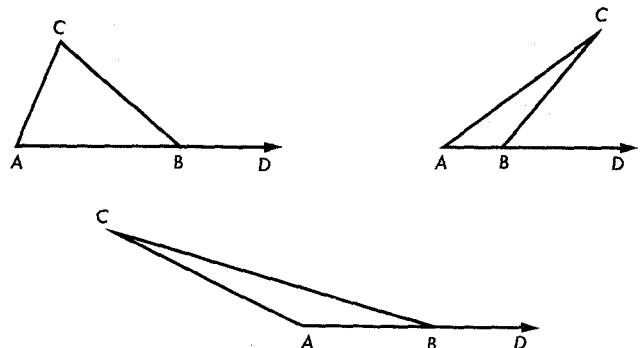
3. Consideremos varios triángulos escalenos de diversas formas. Para cada triángulo, indíquese cuál es el lado mayor y cuál es el ángulo mayor. ¿Qué conjetura parece ser cierta? ¿Demuestran los ejemplos que dicha conjetura es cierta?

4. Dibújense dos triángulos  $\triangle RST$  y  $\triangle ABC$  tales que

$$RS = AB, \quad ST = BC \quad \text{y} \quad m\angle RST > m\angle ABC.$$

Compárense  $RT$  y  $AC$ .

5.



¿Qué conjetura relativa a  $m\angle CBD$  y  $m\angle BAC$  sugieren los triángulos anteriores? En la tercera figura, si se trasladara el vértice  $C$  muy hacia la izquierda de  $A$  y  $B$ , ¿seguiría siendo válida la conjetura? ¿Puede pensarse en una manera de demostrarla?

6. Dibújese un triángulo cualquiera,  $\triangle MOP$ . Sea  $K$  un punto entre  $M$  y el punto medio de  $\overline{MP}$ , y trácese  $\overline{KO}$ . Para los triángulos  $\triangle MOP$  y  $\triangle KOP$ , tenemos que  $PO = PO$ ,  $\angle P \cong \angle P$  y  $MP > KP$ . Una persona irreflexiva podría conjeturar que  $MO > KO$ . Demuéstrese que no siempre es esto válido.

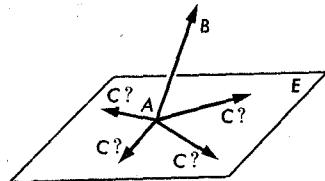
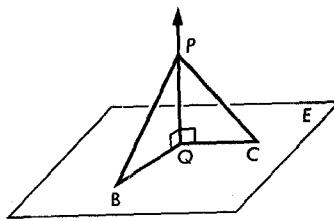
7. Se dan una recta  $L$  y un punto  $P$  fuera de  $L$ . Sea  $Q$  el pie de la perpendicular desde  $P$  a  $L$  y sea  $A$  otro punto cualquiera de  $L$ . ¿Qué conjetura relativa a  $PQ$  y  $PA$  parece ser válida?

8. ¿Es válido el siguiente procedimiento para trisecar un ángulo cualquiera? Háganse algunos dibujos como ayuda para llegar a una decisión.

En los lados de un ángulo  $\angle A$  cualquiera, tómense los puntos  $B$  y  $C$  de manera que  $AB = AC$ . Trácese  $BC$  y triséquese mediante los puntos  $D$  y  $E$  de manera que  $BD = DE = EC$ . Trácese  $\overrightarrow{AD}$  y  $\overrightarrow{AE}$ . Entonces,  $\overrightarrow{AD}$  y  $\overrightarrow{AE}$  trisecarán  $\angle A$ .

9.  $\overline{QC}$  y  $\overline{QB}$  son segmentos no colineales en el plano  $E$ ;  $P$  es un punto fuera de  $E$  tal que el  $\angle PQB$  y el  $\angle PQC$  son ángulos rectos; y  $QC < QB$ . Escribir un enunciado cuya conclusión se refiera a  $PB$  y a  $PC$  y que se considere cierto.

10.  $A$  es un punto en el plano  $E$ ,  $\overrightarrow{AB}$  es un rayo que no está en  $E$ , y  $\overrightarrow{AC}$  es un rayo en  $E$ . Considerando posiciones diferentes de  $\overrightarrow{AC}$ , describir con toda la precisión que se pueda, la posición de  $\overrightarrow{AC}$  que haga  $m\angle BAC$  lo más grande posible, y la que haga  $m\angle BAC$  tan pequeña como sea posible. No se espera una demostración, pero se pide la respuesta a base de los conocimientos del espacio.



## 7.2. DESIGUALDADES PARA NÚMEROS, SEGMENTOS Y ÁNGULOS

Las desigualdades entre segmentos y ángulos se definen mediante los números que constituyen las medidas de los segmentos y los ángulos.

### Definición

$$\overline{AB} < \overline{CD}, \text{ si } AB < CD.$$

Con palabras: Un segmento es *menor que* (o *más corto que*) otro, si su longitud es menor. Análogamente, tenemos la

### Definición

$$\angle A < \angle B, \text{ si } m\angle A < m\angle B.$$

Antes de proseguir el estudio de las desigualdades entre segmentos y ángulos, debemos recordar, de la sección 2-2, las propiedades de las desigualdades entre números.

### O-1. Tricotomía

Para todo par de números  $x$ ,  $y$ , uno y solamente uno de los siguientes casos se cumple:  $x < y$ ,  $x = y$ ,  $x > y$ .

### O-2. Transitividad

Si  $x < y$  y  $y < z$ , entonces  $x < z$ .

**O-3. Propiedad aditiva**

Si  $a < b$  y  $x \leq y$ , entonces  $a + x < b + y$ .

**O-4. Propiedad multiplicativa**

Si  $x < y$  y  $a > 0$ , entonces  $ax < ay$ .

El álgebra que utilizaremos al tratar con desigualdades geométricas será muy sencilla. Ni siquiera necesitaremos la propiedad O-4. Sin embargo, necesitaremos el siguiente teorema:

**Teorema 7-1**

Si  $a = b + c$  y  $c > 0$ , entonces  $a > b$ .

**Demostración:** Puesto que  $a - b = c$ , tenemos  $a - b > 0$ . Por tanto,

$$(a - b) + b > 0 + b \quad \text{y} \quad a > b.$$

**Conjunto de problemas 7-2**

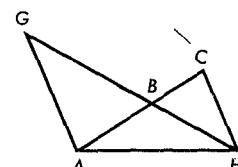
1. Para cada uno de los siguientes ejemplos, indicar la propiedad de ordenación que pone de manifiesto:

- Si  $m > 7$  y  $n < 7$ , entonces  $n < m$ .
- Si  $4 < 6$ , entonces  $14 < 21$ .
- Si  $AB < 13$ , entonces  $AB \neq 13$ .
- Si  $x - y = 7$  y  $y < 3$ , entonces  $x < 10$ .
- Si  $\angle A < \angle C$  y  $\angle B > \angle C$ , entonces  $\angle A < \angle B$ .
- Si  $RS < GH$  y  $ST < HK$ , entonces  $RS + ST < GH + HK$ .

2. En la figura de la derecha,

$$AB < GB \quad \text{y} \quad BC < BH.$$

Demostrar que  $AC \neq GH$ .

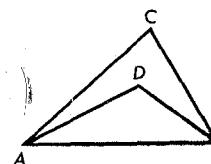


3. Se sabe que  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados y que  $G$ ,  $H$  y  $K$  también están alineados. Los puntos están distribuidos de manera que  $AB < GH$  y  $BC < HK$ . ¿Se deduce de esto que  $AC < GK$ ? ¿Por qué sí o por qué no?

4. Se da la figura, con

$$\angle DAB < \angle DBA \quad \text{y} \quad \angle DAC < \angle DBC.$$

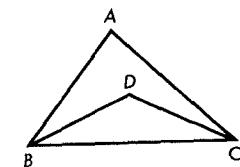
Demostrar que  $\angle CAB < \angle CBA$ .



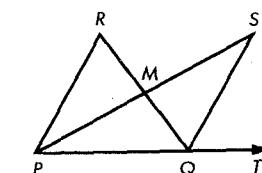
5. Explicar detalladamente por qué el teorema 7-1 tiene las siguientes consecuencias:  
Si  $D$  es un punto en el interior del  $\angle ABC$ , entonces  $\angle ABC > \angle ABD$  y  $\angle ABC > \angle CBD$ .

6. En la figura,  $BD = CD$ . Demostrar que

$$\angle ABC > \angle DCB.$$



7. Se da la figura de la derecha, donde  $M$  es el punto medio de los segmentos  $\overline{PS}$  y  $\overline{RQ}$ . Demostrar que  $\angle RQT > \angle R$ .



8. Utilizar la propiedad O-2 para demostrar que un número negativo cualquiera es menor que un número positivo cualquiera.

9. Supongamos que se hubiera expresado la propiedad O-3 simplemente así:

Para todo  $a$ ,  $b$  y  $x$ , si  $a < b$ , entonces  $a + x < b + x$ .

Demostrar que la otra parte de O-3 se deduciría como el siguiente teorema:

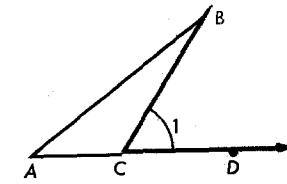
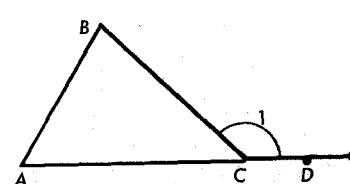
Para todo  $a$ ,  $b$ ,  $x$  y  $y$ , si  $a < b$  y  $x < y$ , entonces  $a + x < b + y$ .

[Sugerencia: Obténgase  $a + x < b + x$ , y  $x + b < y + b$ , y utilícese O-2.]

10. Refiérase a la figura del problema 7, y utilícese solamente la siguiente hipótesis:  $S$  y  $P$  están en lados opuestos de  $\overline{RQ}$ ,  $P-Q-T$ , y  $S$  y  $R$  están al mismo lado de  $\overline{PT}$ . Demuéstrese que  $S$  está en el interior del  $\angle RQT$ .

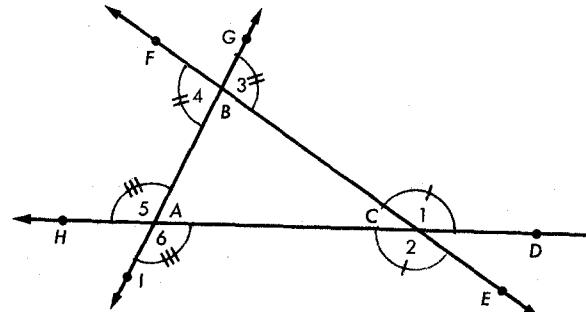
**7-3. EL TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERNO**

En las siguientes figuras, el  $\angle 1$  se llama *ángulo externo* del  $\triangle ABC$ :

**Definición**

Si  $C$  está entre  $A$  y  $D$ , entonces el  $\angle BCD$  es un *ángulo externo* del  $\triangle ABC$ .

Todo triángulo tiene seis ángulos externos, como se muestra en la siguiente figura:



Estos ángulos forman tres pares de ángulos opuestos por el vértice y los ángulos de cada par son congruentes, como se indica en la figura.

Todo ángulo externo de un triángulo forma un par lineal con uno de los ángulos del triángulo mismo. Por ejemplo, en la figura, el  $\angle 1$  y el  $\angle C$  del  $\triangle ABC$  forman un par lineal. Los otros dos ángulos del triángulo se llaman ángulos *internos no contiguos*.

### Definición

El  $\angle A$  y el  $\angle B$  del  $\triangle ABC$  se llaman ángulos internos *no contiguos* de los ángulos externos  $\angle BCD$  y  $\angle ACE$ .

Análogamente, el  $\angle A$  y el  $\angle C$  son los ángulos internos no contiguos de los ángulos externos  $\angle ABF$  y  $\angle CBG$ .

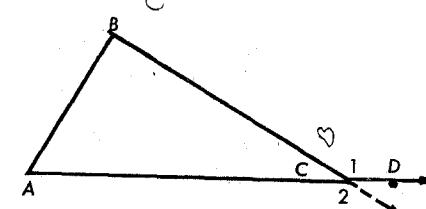
El siguiente teorema es la clave para el estudio de las desigualdades geométricas.

### Teorema 7-2. El teorema del ángulo externo

Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de sus ángulos internos no contiguos.

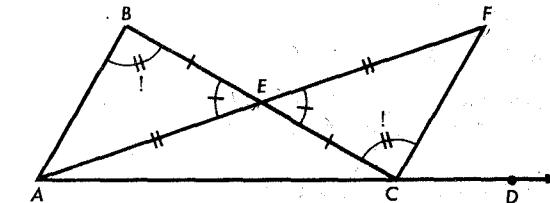
**O de otro modo:** Se da el  $\triangle ABC$ . Si  $C$  está entre  $A$  y  $D$ , entonces

$$\angle BCD > \angle B.$$



Primero, observamos que esta segunda manera de enunciar el teorema realmente expresa todo su contenido. Nos dice que  $\angle 1 > \angle B$ . Mediante un cambio de notación (intercambio de  $A$  y  $B$ ), concluimos que  $\angle 2 > \angle A$ . Puesto que  $\angle 1 \cong \angle 2$ , se deduce que  $\angle 1 > \angle A$ . Por tanto, el  $\angle 1$  es mayor que cada uno de sus ángulos internos no contiguos.

Procedemos a demostrar la segunda versión del teorema:



### Demostración

#### AFIRMACIONES

1. Sea  $E$  el punto medio de  $\overline{BC}$ .
2. Sea  $F$  un punto en el rayo opuesto a  $\overrightarrow{EA}$ , tal que  $EF = EA$ .
3.  $\angle BEA \cong \angle CEF$ .
4.  $\triangle BEA \cong \triangle CEF$ .
5.  $m\angle B = m\angle ECF$ .
6.  $m\angle BCD = m\angle ECF + m\angle FCD$ .
7.  $m\angle BCD = m\angle B + m\angle FCD$ .
8.  $m\angle BCD > m\angle B$ .
9.  $\angle BCD > \angle B$ .

#### RAZONES

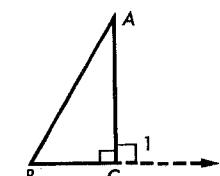
- ? ?
- ? ?
- ? ?
- ? ?
- ? ?
- El postulado de la adición de ángulos.
- Afirmaciones 5 y 6.
- Teorema 7-1.
- Definición de  $>$  para los ángulos.

El teorema del ángulo externo tiene un corolario sencillo:

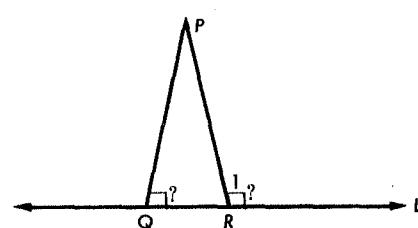
### Corolario 7-2.1

Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces los otros ángulos son agudos.

(Si el  $\angle C$  es un ángulo recto, entonces también lo es el  $\angle 1$ . El teorema del ángulo externo nos dice que  $\angle 1 > \angle B$  y  $\angle 1 > \angle A$ . Por tanto,  $m\angle B < 90$  y  $m\angle A < 90$ .)

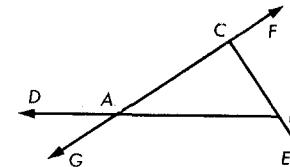


Si hubiésemos conocido el teorema del ángulo externo en el capítulo anterior, hubiéramos podido concluir más fácilmente que la perpendicular a una recta desde un punto externo es única. Si hubiera dos perpendiculares a  $L$  desde  $P$ , entonces el  $\angle 1$  sería congruente con el  $\angle PQR$ , lo cual es imposible, pues el  $\angle 1$  es un ángulo externo del  $\triangle PQR$ , y el  $\angle PQR$  es uno de sus ángulos internos no contiguos.



## Conjunto de problemas 7-3

1. (a) Nombrar los ángulos internos no contiguos del  $\angle ABE$  de la figura.



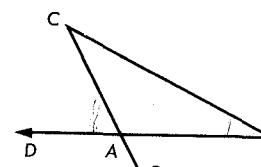
- (b) Indicar qué ángulo externo tiene a los ángulos  $\angle ABC$  y  $\angle BAC$  como internos no contiguos.

2. (a) En la figura de la derecha, ¿qué ángulos son ángulos externos del triángulo?

- (b) ¿Qué relación hay entre  $m\angle DAC$  y  $m\angle B$ ? ¿Por qué?

- (c) ¿Qué relación hay entre  $m\angle DAC$  y  $m\angle BAE$ ? ¿Por qué?

- (d) ¿Qué relación hay entre  $m\angle DAC$  y  $m\angle BAC$ ? ¿Por qué?



3. Utilizar la figura de la derecha solamente para explicar la notación, y completar cada enunciado a base de los teoremas ya demostrados:

- (a) Si  $x = 40$  y  $y = 30$ , entonces  $w > \underline{\hspace{1cm}}$ .

- (b) Si  $x = 72$  y  $y = 73$ , entonces  $w \underline{\hspace{1cm}}$ .

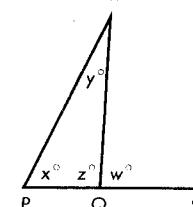
- (c) Si  $y = 54$  y  $z = 68$ , entonces  $w \underline{\hspace{1cm}}$ .

- (d) Si  $w = 112$ , entonces  $x \underline{\hspace{1cm}}$ .

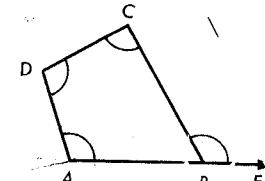
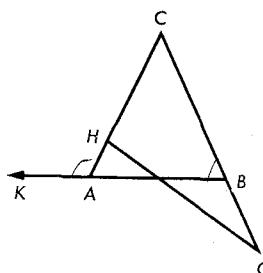
- (e) Si  $w = 150$ , entonces  $z \underline{\hspace{1cm}}$ .

- (f) Si  $x = 25$  y  $z = 90$ , entonces  $w \underline{\hspace{1cm}}$ .

- (g) Si  $z = 90$ , entonces  $x \underline{\hspace{1cm}}$  y  $y \underline{\hspace{1cm}}$ .



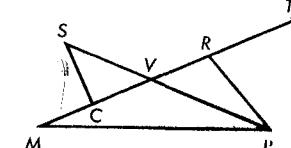
4. Dada la figura de la izquierda, a continuación, demostrar que  $\angle CAK > \angle G$ .



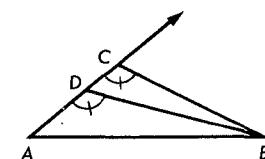
5. La figura anterior de la derecha ilustra el siguiente enunciado: Un ángulo externo de un cuadrilátero es mayor que cada uno de sus ángulos internos no contiguos. ¿Es cierto este enunciado? Explíquese.

6. (a) En la figura de la derecha,  $\overrightarrow{PS}$  biseca al  $\angle RPM$ . Demostrar que  $\angle SCM > \angle SPM$ .

- (b) Demostrar que si  $\angle SCV \cong \angle PRV$ , entonces  $\angle PRT > \angle S$ .



7. Se dan dos segmentos cualesquiera  $\overline{AB}$  y  $\overline{DE}$ . ¿Podremos hacer una afirmación que relacione  $AB$  con  $DE$  y que sea siempre cierta? ¿Cuál es la afirmación? Justifíquese la respuesta.



8. Indicar por qué las marcas de la figura de la derecha indican una situación imposible.

9. Demostrar el siguiente teorema:

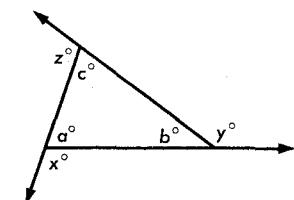
La suma de las medidas de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que 180.

O de otro modo: Si los ángulos de un triángulo tienen medidas como las que se indican en la figura de la derecha, entonces,

$$a + b < 180,$$

$$b + c < 180,$$

$$a + c < 180.$$



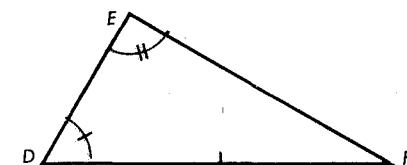
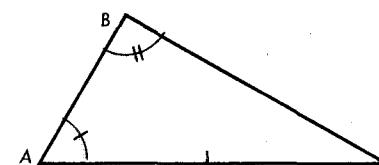
10. Demostrar el siguiente teorema:

Los ángulos en la base de un triángulo isósceles cualquiera son agudos.

[Sugerencia: Utilícese el teorema del problema 9.]

#### 7-4. TEOREMAS SOBRE CONGRUENCIA BASADOS EN EL TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERNO

##### Definición



Si un par de lados correspondientes son congruentes y dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia se llama una *correspondencia LAA*. (Desde luego, aquí LAA significa Lado Ángulo Ángulo.)

**Teorema 7-3.** El teorema LAA

Toda correspondencia LAA es una congruencia.

Si los lados congruentes están comprendidos entre los ángulos congruentes, ya sabemos, por ALA, que la correspondencia es una congruencia. Por tanto, al enunciar el teorema de otro modo, podemos suponer que tenemos el tipo de congruencia sugerido por la figura anterior.

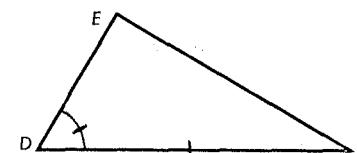
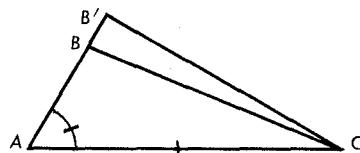
**O de otro modo:** Se dan los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ . Si  $\angle A \cong \angle D$ ,  $\angle B \cong \angle E$  y  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ , entonces

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

**Demostración:** Hay sólo tres posibilidades para  $AB$  y  $DE$ :

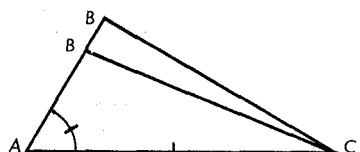
- (1)  $AB = DE$ ,
- (2)  $AB < DE$ ,
- (3)  $AB > DE$ .

Si el enunciado (1) es válido, entonces se deduce el teorema, porque, en este caso,  $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$  es una correspondencia LAL. Demostraremos que los enunciados (2) y (3) son imposibles.



Supongamos que el enunciado (2) es válido:  $AB < DE$ . Sea  $B'$  el punto de  $\overrightarrow{AB}$  tal que  $AB' = DE$ . Entonces,  $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$ , en virtud del postulado LAL. Por tanto,  $\angle AB'C \cong \angle DEF$  y, en consecuencia,  $\angle ABC \cong \angle AB'C$ . (¿Por qué?) Pero esto es imposible, porque el teorema del ángulo externo nos dice que  $\angle ABC > \angle AB'C$ .

De manera análoga, podemos demostrar que el enunciado (3)  $AB > DE$  es imposible. Los detalles se dejan al estudiante.



Como los enunciados (2) y (3) son imposibles, el enunciado (1) tiene que ser válido, y  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ , por el postulado LAL. Esto completa la demostración.

En el capítulo anterior, encontramos que no hay un teorema LIA. Es decir, una correspondencia LLA no es necesariamente una congruencia. Sin embargo, en el caso de triángulos rectángulos, podemos demostrar un teorema de esta clase.

**Teorema 7-4.** El teorema de la hipotenusa y el cateto

Se da una correspondencia entre dos triángulos rectángulos. Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia es una congruencia.

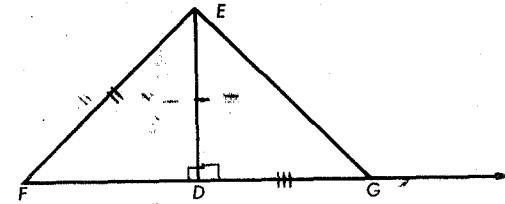
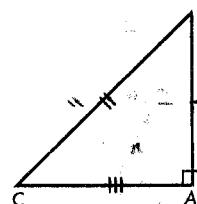
**O de otro modo:** Se dan los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ , tales que

$$m\angle A = m\angle D = 90^\circ,$$

$$AB = DE \text{ y } BC = EF.$$

Entonces,

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

**Demostración**

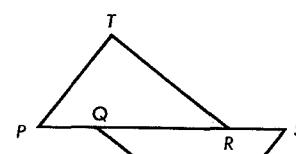
AFIRMACIONES	RAZONES
1. Hay un punto $G$ , en el rayo opuesto a $\overrightarrow{DF}$ , tal que $DG = AC$ .	?
2. $\triangle DEG \cong \triangle ABC$ .	?
3. $EG = BC$ .	?
4. $\angle G \cong \angle C$ .	?
5. $EG = EF$ .	Paso 3 y dato.
6. $\angle F \cong \angle G$ .	?
7. $\triangle DEF \cong \triangle DEG$ .	Pasos 5 y 6, y el teorema LAA.
8. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .	Pasos 2 y 7.

## Conjunto de problemas 7-4

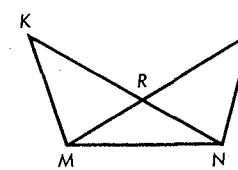
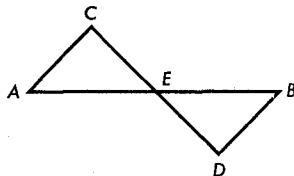
1. Resumir todos los métodos estudiados hasta ahora para demostrar que dos triángulos son congruentes.

2. Datos:  $\overline{PT} \perp \overline{RT}$ ,  $\overline{SV} \perp \overline{QV}$ ,  $RT = QV$ ,  $PQ = SR$ .

Demostrar que  $PT = SV$ .



3. En la figura de la izquierda, a continuación,  $\overline{CD}$  biseca a  $\overline{AB}$  y  $\angle C \cong \angle D$ . Demostrar que  $\overline{AB}$  biseca a  $\overline{CD}$ .

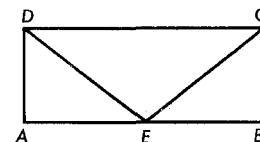


4. En la figura anterior de la derecha,  $\angle K \cong \angle J$  y  $MR = NR$ . Demostrar que  $MK = NJ$ .

5. Desde el punto medio de uno de los lados de un triángulo, se trazan segmentos perpendiculares a los otros dos lados. Demostrar que si los segmentos son congruentes, el triángulo es isósceles.

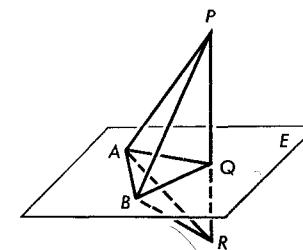
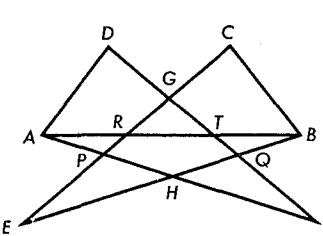
6. Datos:  $E$  es el punto medio de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{BC} \perp \overline{AB}$  y  $\angle ADE \cong \angle BCE$ .

Demostrar que  $\angle EDC \cong \angle ECD$ .



7. Los puntos  $K$  y  $M$  trisecan a  $\overleftrightarrow{GH}$ , y  $G-K-M$ . Los puntos  $J$  e  $I$ , al mismo lado de  $\overleftrightarrow{GH}$ , están en las perpendiculares a  $\overleftrightarrow{GH}$  en  $G$  y  $H$ , respectivamente, de manera que  $JM = IK$ .  $JM$  e  $IK$  se intersecan en  $P$ . Demostrar que el  $\triangle PKM$  es isósceles.

- \* 8. Se da la figura de la izquierda, a continuación, en la que los ángulos  $\angle D$  y  $\angle C$  son ángulos rectos y  $\triangle APR \cong \triangle BQT$ . Demostrar que  $\triangle ADF \cong \triangle BCE$ .



- \*\* 9. Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $Q$  están en el plano  $E$ ,  $\overline{AQ} \perp \overline{PR}$ ,  $\overline{BQ} \perp \overline{PR}$  y  $\angle PAB \cong \angle PBA$ . Demostrar que  $\angle PAR \cong \angle PBR$ .

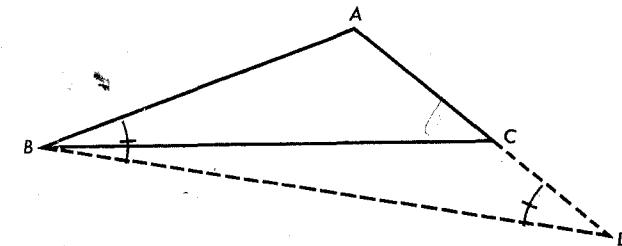
## 5. DESIGUALDADES EN UN MISMO TRIÁNGULO

Ahora, procederemos a demostrar algunos de los teoremas que conjeturamos al comienzo del capítulo.

## Teorema 7-5

Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes y el ángulo mayor es el opuesto al lado mayor.

O de otro modo: En un triángulo cualquiera  $\triangle ABC$ , si  $AB > AC$ , entonces  $\angle C > \angle B$ .



Demostración: Sea  $D$  un punto de  $\overrightarrow{AC}$ , tal que  $AD = AB$ . Entonces,  $\angle ABD \cong \angle D$ , porque los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes. Como  $AD = AB > AC$ ,  $C$  tiene que estar entre  $A$  y  $D$ . Por tanto, en virtud del postulado de la adición de ángulos,

$$m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle CBD.$$

En consecuencia,

$$m\angle ABC < m\angle ABD.$$

(Por qué?) Prescindiendo ahora de las medidas de los ángulos, podemos expresar lo anterior simplemente como

$$\angle ABC < \angle ABD.$$

Puesto que  $\angle ABD \cong \angle D$ , se deduce que

$$\angle ABC < \angle D.$$

Pero, por el teorema del ángulo externo, sabemos que

$$\angle D < \angle ACB.$$

Por tanto,

$$\angle ABC < \angle ACB.$$

En consecuencia, en el  $\triangle ABC$  tenemos que  $\angle B < \angle C$ , como queríamos demostrar.

**Teorema 7-6**

Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes y el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor.



**O de otro modo:** En un triángulo cualquiera  $\triangle ABC$ , si  $\angle C > \angle B$ , entonces  $AB > AC$ .

**Demostración:** Hay sólo tres posibilidades para los números  $AB$  y  $AC$ :

- (1)  $AB < AC$ ,
- (2)  $AB = AC$ ,
- (3)  $AB > AC$ .

Si el enunciado (1) fuera cierto, entonces se deduciría del teorema anterior que  $\angle C < \angle B$ , y esto es falso. Por consiguiente, (1) es imposible.

Si el enunciado (2) fuera cierto, entonces  $\angle B$  y  $\angle C$  resultarían los ángulos en la base de un triángulo isósceles y, en consecuencia,  $\angle B \cong \angle C$ , lo cual es falso. Por tanto, (2) es imposible.

La única posibilidad restante es el enunciado (3). Esto es lo que queríamos demostrar.

Lo anterior es simplemente una manera conveniente de escribir una demostración indirecta. Pudimos haber dicho lo mismo, más formalmente, así:

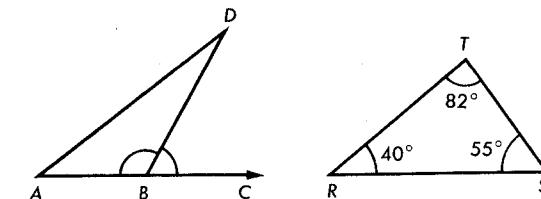
“Supongamos que el teorema es falso. Entonces o bien  $AB = AC$  o  $AB < AC$ .  $AB = AC$  es imposible, porque . . . ;  $AB < AC$  es imposible, porque . . . . Por tanto, el teorema no es falso. En consecuencia, el teorema es cierto”.

Pero el esquema que utilizamos la primera vez probablemente es más fácil de seguir, y lo utilizaremos de nuevo más adelante. La idea es hacer una lista de *todas* las “posibilidades” relacionadas con una situación dada y, luego, demostrar que solamente una de ellas es realmente posible.

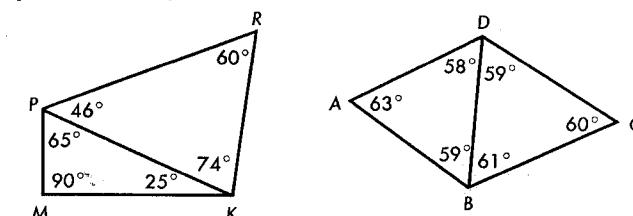
**Conjunto de problemas 7-5**

1. En el  $\triangle ABC$ ,  $AB = 12$ ,  $BC = 7$  y  $AC = 9$ . Nombrar el ángulo mayor y el ángulo menor.
2. En el  $\triangle PQR$ ,  $m\angle P = 72$ ,  $m\angle Q = 37$  y  $m\angle R = 71$ . Nombrar el lado mayor y el lado menor.

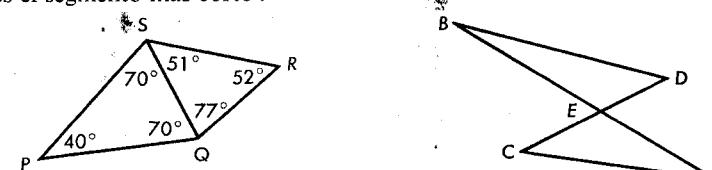
3. En la figura de la izquierda, a continuación,  $\angle ABD > \angle DBC$ . Demostrar que  $AD > BD$ .



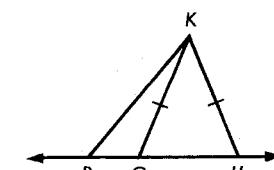
4. Nombrar los lados de la figura anterior de la derecha en orden de menor a mayor.
5. Se da la figura de la izquierda, a continuación, las medidas de cuyos ángulos se indican. Demostrar que  $\overline{PR}$  es el segmento mayor.



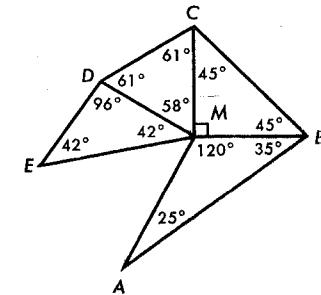
6. En la figura anterior de la derecha, si los ángulos tienen las medidas indicadas, ¿cuál es el segmento más largo?
7. En la figura de la izquierda, a continuación, si los ángulos tienen las medidas indicadas, ¿cuál es el segmento más corto?



8. En la figura anterior de la derecha,  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  se intersecan en  $E$ ,  $\angle C > \angle A$  y  $\angle D > \angle B$ . Demostrar que  $AB > CD$ .
9. En el triángulo isósceles  $\triangle KGH$ ,  $KG = KH$ ;  $P$  es un punto cualquiera de  $\overleftrightarrow{GH}$  que no está en  $\overleftrightarrow{GH}$ . Demostrar que  $PK$  es siempre mayor que  $KG$  o  $KH$ .



10. Si los ángulos de la figura de la derecha tienen las medidas indicadas, ¿cuál es el segmento más corto?



## 7-6. RECÍPROCOS

Los teoremas 7-5 y 7-6 están relacionados de una manera particular; son *recíprocos* uno de otro. La relación entre ellos se verá más fácilmente, si los redactamos así:

### Teorema 7-5'

Se da el  $\triangle ABC$ . Si  $AB > AC$ , entonces  $\angle C > \angle B$ .

### Teorema 7-6'

Se da el  $\triangle ABC$ . Si  $\angle C > \angle B$ , entonces  $AB > AC$ .

Hemos tenido anteriormente varios casos de teoremas recíprocos. Por ejemplo:

### Teorema 5-3

Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

### Teorema 5-4

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

También, aquí, la relación se ve más clara, si redactamos los teoremas de otro modo.

### Teorema 5-3'

Se da el  $\triangle ABC$ . Si  $AB = AC$ , entonces  $\angle C \cong \angle B$ .

### Teorema 5-4'

Se da el  $\triangle ABC$ . Si  $\angle C \cong \angle B$ , entonces  $AB = AC$ .

Después de demostrar un teorema que tiene la forma simple “si . . ., entonces . . .”, generalmente es una buena idea investigar el enunciado recíproco. *Tenemos* que considerar cada caso separadamente, porque puede fácilmente suceder que el recíproco de un teorema cierto no sea cierto. Por ejemplo, sabemos que si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes. El recíproco diría que si dos ángulos son congruentes, entonces son opuestos por el vértice; y no solamente es esto falso, sino ridículo. Análogamente, si  $x = y$ , entonces  $x^2 = y^2$ . El recíproco diría que si  $x^2 = y^2$ , entonces  $x = y$ . El recíproco es falso, pues no considera la posibilidad  $x = -y$ .

Si ocurre que un teorema y su recíproco son ambos ciertos, entonces podemos combinarlos en un sólo teorema, utilizando la frase, “*si, y solamente si*”. Por ejemplo, podemos combinar los teoremas 7-5 y 7-6 de la siguiente manera:

### Teorema

Se da el  $\triangle ABC$ .  $AB > AC$  si, y solamente si,  $\angle C > \angle B$ .

También, podemos combinar los teoremas 5-3 y 5-4 de la manera siguiente:

### Teorema

Dos ángulos de un triángulo son congruentes si, y solamente si, los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

### Conjunto de problemas 7-6

1. Escribir el recíproco de cada uno de los siguientes enunciados y decidir si cada enunciado y cada recíproco es cierto o falso:
  - (a) Si una persona tiene más de 20 años de edad, entonces tiene derecho a votar.
  - (b) Vemos leones y elefantes, si estamos en África.
  - (c) Todo el que tiene fiebre escarlatina está enfermo de cuidado.
2. Para los ejercicios a continuación, síganse las instrucciones del problema 1:
  - (a) Si dos ángulos son congruentes, son ángulos rectos.
  - (b) Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.
  - (c) Un punto en la mediatrix de un segmento equidista de los extremos del segmento.
  - (d) Dos ángulos son ambos agudos, si son complementarios.
3. Cuando se le pidió el recíproco del enunciado, “Si sostengo en mi mano un fósforo encendido por mucho tiempo, me quemaré”, Juan contestó: “Me quemaré si sostengo en mi mano un fósforo encendido por mucho tiempo”. ¿Dio, realmente, el enunciado recíproco? Coméntese esto.
4. (a) ¿Será cierto el recíproco de todo enunciado cierto? Justifíquese la respuesta.  
 (b) ¿Podrá ser cierto el recíproco de un enunciado falso? Justifíquese la respuesta.
5. Combinar las dos afirmaciones siguientes en un solo teorema, utilizando la frase “*si, y solamente si*”:
 

Todo triángulo equilátero es equiángulo.  
Todo triángulo equiángulo es equilátero.
6. Separar el siguiente teorema en dos teoremas de la forma “*si . . ., entonces . . .*”:
 

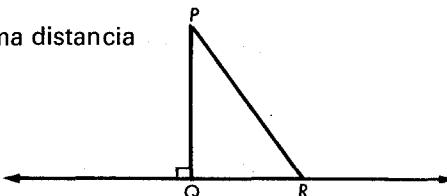
Un triángulo es equilátero si, y solamente si, la bisectriz de cada ángulo del triángulo es la mediatrix del lado opuesto.

¿Cuál de los dos teoremas corresponde a la parte “solamente si” del teorema que acabamos de enunciar?

## 7-7. LA DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PUNTO. LA DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO

**Teorema 7-7.** El primer teorema de mínima distancia

El segmento más corto que une un punto a una recta es el segmento perpendicular a la recta.



**O de otro modo:** Se dan una recta  $L$  y un punto  $P$  fuera de ella. Si  $\overline{PQ} \perp L$  en  $Q$ , y  $R$  es otro punto cualquiera de  $L$ , entonces  $PQ < PR$ .

**Demostración:** Por hipótesis,  $m\angle Q = 90$ . En virtud del corolario 7-2.1, el  $\angle R$  es agudo. Así,  $m\angle R < m\angle Q$ . Por el teorema 7-6,  $PR > PQ$ .

La distancia entre un punto  $P$  y una recta  $L$  debe ser la *mínima* distancia entre  $P$  y los puntos de  $L$ . En virtud del teorema anterior, sabemos que existe una tal mínima distancia y sabemos dónde ocurre. Por tanto, enunciamos nuestra definición así:

### Definición

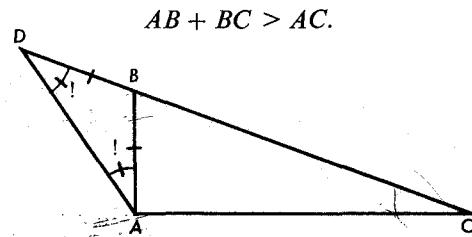
La *distancia* entre una recta y un punto fuera de ella es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta. La distancia entre una recta y un punto de la misma se define como cero.

El siguiente teorema nos dice que, como es de esperar, ningún desvío resulta ser un atajo:

## Teorema 7-8. La desigualdad del triángulo

La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

**O de otro modo:** En un triángulo  $\triangle ABC$  cualquiera, tenemos



$$AB + BC > AC.$$

**Demostración:** Sea  $D$  un punto del rayo opuesto a  $\overrightarrow{BC}$ , tal que  $BD = BA$ , como se indica en la figura. Entonces,

$$DC = DB + BC,$$

porque  $B$  está entre  $D$  y  $C$ . Por tanto,

$$(1) \quad DC = AB + BC.$$

Ahora,

$$m\angle DAC = m\angle DAB + m\angle BAC,$$

porque  $B$  está en el interior del  $\angle DAC$ . En consecuencia,

$$m\angle DAC > m\angle DAB.$$

Pero

$$m\angle D = m\angle DAB,$$

puesto que  $BD = BA$ . Por consiguiente,

$$(2) \quad m\angle DAC > m\angle D.$$

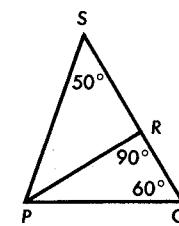
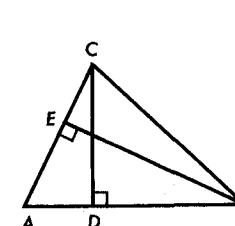
Aplicando el teorema 7-6 al  $\triangle ADC$ , obtenemos

$$(3) \quad DC > AC.$$

Combinando (1) y (3), tenemos  $AB + BC > AC$ , como queríamos demostrar.

### Conjunto de problemas 7-7

1. Para la figura de la izquierda, a continuación, podemos afirmar que  $CD < \underline{\hspace{2cm}}$  y  $CD < \underline{\hspace{2cm}}$ , y que  $BE < \underline{\hspace{2cm}}$  y  $BE < \underline{\hspace{2cm}}$ . Enunciar el teorema implicado.

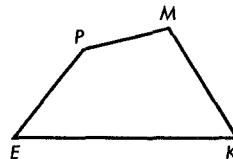


2. Utilizando las medidas de ángulos indicadas en la figura anterior de la derecha, colóquense  $PS$ ,  $PR$  y  $PQ$  en orden de menor a mayor:  $\underline{\hspace{2cm}} < \underline{\hspace{2cm}} < \underline{\hspace{2cm}}$ . Enunciar los teoremas que justifican la conclusión.

3. Demostrar que la suma de las longitudes de las diagonales de un cuadrilátero es menor que el perímetro del cuadrilátero.

4. Dada la figura de la derecha, demostrar que

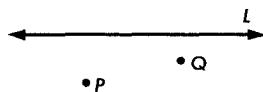
$$EP + PM + MK > EK.$$



5. El siguiente problema puede resolverse mediante experimentación o, quizás, mediante razonamiento: Supongamos que se va a dibujar un triángulo con un lado de longitud 3 cm. y un lado de longitud 7 cm. El tercer lado deberá tener longitud menor que \_\_\_\_\_, y mayor que \_\_\_\_\_.

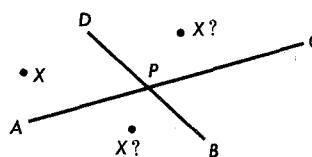
6. Dos lados de un triángulo tienen longitudes  $j$  y  $k$ , respectivamente. Si  $j < k$ , ¿qué restricciones se imponen entonces a la longitud  $x$  del tercer lado?

7. Se dan una recta  $L$  y dos puntos  $P$  y  $Q$  al mismo lado de  $L$ . Determinar el punto  $R$  de  $L$ , para el cual la distancia  $PR + RQ$  sea la más pequeña posible. [Indicación: Esto resultará fácil, si se ha resuelto el problema 6 del Conjunto de problemas 6-4.]



8. Se dan dos segmentos,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ , que se intersecan en  $P$ . Demostrar que si  $X$  es un punto cualquiera del plano de  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ , distinto de  $P$ , entonces

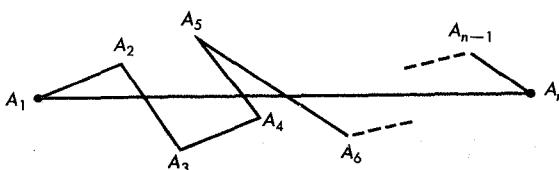
$$XA + XB + XC + XD > PA + PB + PC + PD.$$



¿Será válido este resultado si  $X$  no está en el plano de  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ ?

- \*\* 9. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  puntos, no necesariamente distintos. Demostrar que  $AB + BC \geq AC$ . (Hay que considerar varios casos.)

- \*\* 10. Demostrar que el camino poligonal más corto de un punto a otro es el segmento que los une.

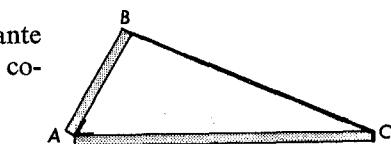


O de otro modo: Dados  $n$  puntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , demostrar que

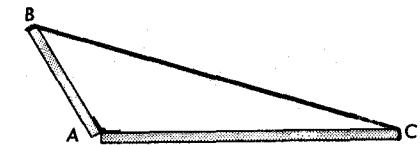
$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n.$$

## 7-8. EL TEOREMA DE LA CHARNELA Y SU RECÍPROCO

Consideremos dos varillas, articuladas mediante una charnela en  $A$  y con los extremos  $B$  y  $C$  conectados por una cinta de goma.



A medida que aumenta la abertura en la charnela, la cinta de goma deberá estirarse más.

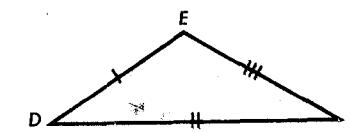
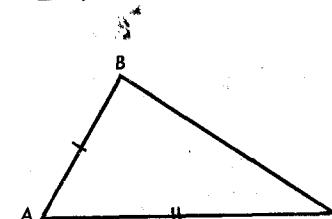


Si expresamos esto mediante el lenguaje de la geometría, obtenemos el siguiente teorema: (Quizás, el estudiante crea que la segunda manera de enunciar el teorema es de más fácil lectura que la redacción original.)

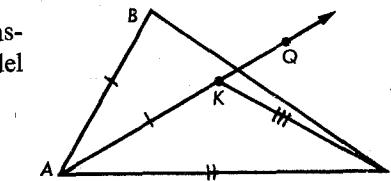
### Teorema 7-9. El teorema de la charnela (TEOREMA DE LA BISAGRA)

Si dos lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo, entonces el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo.

O de otro modo: Sean  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$  dos triángulos, con  $AB = DE$  y  $AC = DF$ . Si  $\angle A > \angle D$ , entonces  $BC > EF$ .



Demostración: Paso 1. Primeramente, construimos el  $\triangle AKC$ , con  $K$  en el interior del  $\angle BAC$ , de manera que  $\triangle AKC \cong \triangle DEF$ :

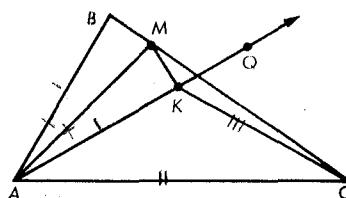


Para ello, primero tomamos el rayo  $\overrightarrow{AQ}$ , con  $Q$  del mismo lado de  $\overrightarrow{AC}$  que  $B$ , tal que  $\angle QAC \cong \angle D$  (por el postulado de la construcción del ángulo). Entonces, tomamos un punto  $K$  de  $\overrightarrow{AQ}$ , tal que  $AK = DE$  (por el teorema de localización de puntos). En virtud del postulado LAL, tenemos que  $\triangle AKC \cong \triangle DEF$  como queríamos.

Paso 2. Ahora, bisecamos al  $\angle BAK$ . Sea  $M$  el punto donde la bisectriz corta a  $\overline{BC}$ .

Ya casi hemos terminado. Por el postulado LAL, tenemos que

$$\triangle AMB \cong \triangle AMK.$$



Por consiguiente,  $MB = MK$ . Aplicando la desigualdad del triángulo (teorema 7-8) al  $\triangle CKM$ , obtenemos

$$CK < CM + MK.$$

Por tanto,

$$CK < CM + MB,$$

pues  $MB = MK$ . Como

$$CK = EF \quad y \quad CM + MB = BC,$$

se deduce que

$$EF < BC,$$

como deseábamos.

El recíproco del teorema de la charnela es también cierto.

#### Teorema 7-10. El recíproco del teorema de la charnela

Si dos lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados de un segundo triángulo, y el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo, entonces el ángulo comprendido del primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido del segundo.

**O de otro modo:** Sean  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$  dos triángulos, con  $AB = DE$  y  $AC = DF$ . Si  $BC > EF$ , entonces  $\angle A > \angle D$ .

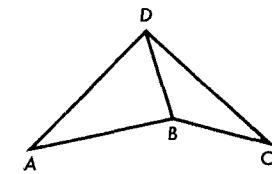
Para deducir este teorema del teorema de la charnela, utilizamos el mismo método que se empleó para deducir el teorema 7-6 del teorema 7-5. Es decir, mostramos que  $\angle A < \angle D$  y  $\angle A \cong \angle D$  son imposibles, de manera que la única posibilidad restante es  $\angle A > \angle D$ . Para la primera parte de esta demostración, necesitamos el teorema de la charnela; y para la segunda parte, necesitamos el postulado LAL. Los detalles se dejan al estudiante.

#### Conjunto de problemas 7-8

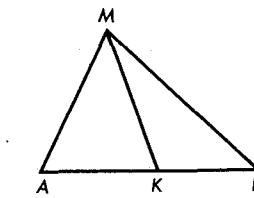
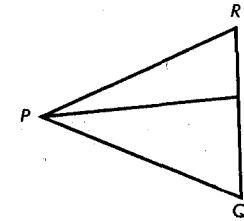
1. En la figura de la derecha,

$$AD = CD \quad y \quad \angle ADB > \angle CDB.$$

Demostrar que  $AB > BC$ .

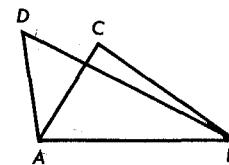


2. En un triángulo isósceles  $\triangle PQR$ ,  $S$  es un punto de la base, distinto del punto medio. Demostrar que  $\overline{PS}$  no biseca al  $\angle RPQ$ .



3. Se da el  $\triangle ABM$ , con la mediana  $\overline{MK}$  y  $\angle MKB > \angle MKA$ .

Demostrar que  $AM < MB$ .

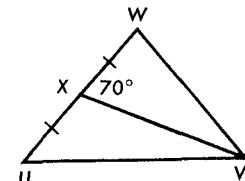


4. Los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle ABD$  tienen el lado común  $AB$ , y  $AC = AD$ . Si  $C$  está en el interior del  $\angle DAB$ , demostrar que  $BD > BC$ .

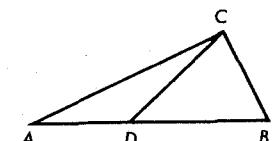
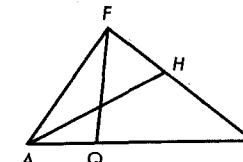
5. En el  $\triangle RST$ ,  $RT > ST$  y  $M$  es el punto medio de  $\overline{RS}$ . ¿Será el  $\angle TMR$ , agudo u obtuso? Explíquese.

6. Se da la figura de la derecha, según está marcada. Demostrar que

$$\angle W > \angle U.$$



7. En la figura de la izquierda, a continuación,  $FH = AQ$  y  $AH > FQ$ . Demostrar que  $AB > FB$ .

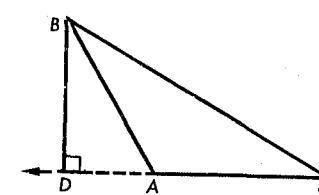
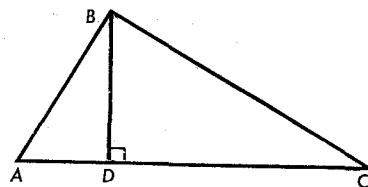


8. Se da la figura anterior de la derecha, con  $AD = BC$ . Demostrar que  $AC > DB$ .

9. En el  $\triangle ABC$ ,  $A-F-C$  y  $A-D-B$ , de manera que  $FC = DB$ . Si  $AB > AC$ , demostrar que  $FB > CD$ .

## 7-9. ALTURAS DE TRIÁNGULOS

En cada una de las siguientes figuras, el segmento  $\overline{BD}$  es una *altura* del  $\triangle ABC$ :



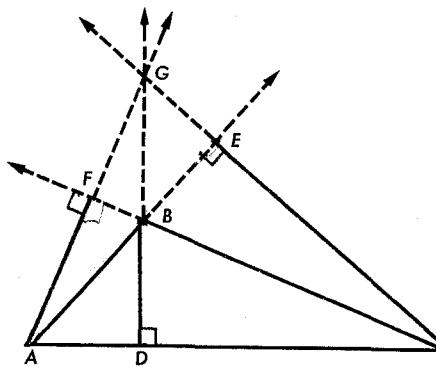
En cada caso,  $\overline{BD}$  es la perpendicular desde  $B$  a  $\overleftrightarrow{AC}$ , y se llama la *altura* desde  $B$  a  $\overleftrightarrow{AC}$ . Obsérvese que el pie de esta perpendicular no cae necesariamente en el segmento  $\overline{AC}$ . Pero, la siguiente definición toma en consideración todos los casos posibles:

## Definición

Una *altura* de un triángulo es un segmento perpendicular desde un vértice del triángulo a la recta que contiene al lado opuesto.

[Pregunta: ¿Será posible que una altura de un triángulo coincida con uno de los lados del triángulo? Si es posible, ¿cuándo sucede esto?]

Desde luego, todo triángulo tiene tres alturas, una desde cada vértice, así:



En la figura,  $\overline{BD}$  es la altura desde  $B$ ,  $\overline{AF}$  es la altura desde  $A$ , y  $\overline{CG}$  es la altura desde  $C$ . Obsérvese que en este caso particular, aunque dos cualesquiera de los segmentos  $\overline{BD}$ ,  $\overline{AF}$  y  $\overline{CG}$  no tienen punto alguno común, las rectas que los contienen parecen intersecarse en un punto  $G$ .

Desafortunadamente, la misma palabra "altura" se utiliza de otras dos maneras

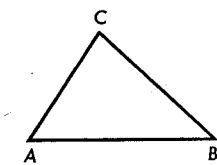
(1) Algunas veces, a la *longitud* de una altura también se le llama altura. Por ejemplo, si la distancia  $BD$  es 6, podemos decir que la altura desde  $B$  es 6.

(2) A una recta que contiene a una altura, se le llama también altura. Así, en la figura anterior, podemos llamar alturas a las rectas  $\overleftrightarrow{BD}$ ,  $\overleftrightarrow{AF}$  y  $\overleftrightarrow{CG}$ . Utilizaremos la palabra de esta manera en el Capítulo 15, cuando demostremos que las tres "alturas" de un triángulo siempre se intersecan en un punto. Si una altura tuviese que consistir en un segmento, este teorema sería falso, como muestra la figura anterior.

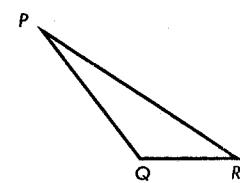
Este triple uso de la misma palabra pudiera causar confusión, pero generalmente no la causa, ya que en la mayoría de los casos el contexto nos aclarará el significado.

## Conjunto de problemas 7-9

1. Cójase el  $\triangle ABC$ . Obsérvese que es escaleno. Dibújese la bisectriz del  $\angle C$ . Ahora, trácese la mediana desde  $C$  a  $\overline{AB}$ . Finalmente, dibújese la altura desde  $C$  a  $\overline{AB}$ . Si se ha trabajado cuidadosamente, se podrá observar que estos segmentos son distintos. ¿En qué tipo de triángulo coincidirán los tres segmentos indicados?



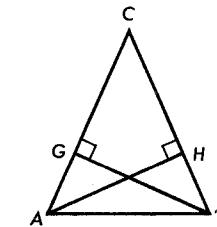
2. Copiar el triángulo obtusángulo,  $\triangle PQR$ , y dibujar sus tres alturas.



3. Demostrar que la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles es también una mediana.

4. Demostrar el siguiente teorema:

Las alturas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.



(La figura anterior muestra el caso para  $m\angle C < 90$ . Considérense, también, los casos en que  $m\angle C = 90$  y  $m\angle C > 90$ .)

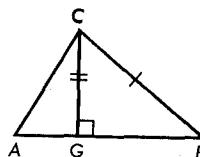
5. Demostrar que las alturas de un triángulo equilátero son congruentes.

6. Demostrar el recíproco del teorema del problema 4:

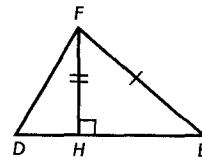
Si dos alturas de un triángulo son congruentes, el triángulo es isósceles.

7. Demostrar el siguiente teorema:

Se da una correspondencia  $ABC \leftrightarrow DEF$ . Si  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ , y la altura desde  $C$  es congruente con la altura desde  $F$ , entonces la correspondencia es una congruencia.



Datos:  $AB = DE$  y  $BC = EF$ , las alturas  $\overline{CG}$  y  $\overline{FH}$ , y  $CG = FH$ .



Demostrar que  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

8. Demostrar que el perímetro de un triángulo es mayor que la suma de las tres alturas.

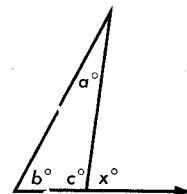
### Resumen del capítulo

1. Para cada uno de los siguientes ejemplos, identificar la propiedad de ordenación que expresa:

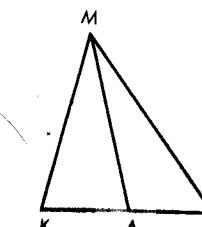
- (a) Si  $r > 6$  y  $6 > t$ , entonces  $t < r$ .  
 (b) Si  $MP = 3$  y  $RS = 7$ , entonces  $MP + RS = 10$ .  
 (c) Si  $DK \geq 11$  y  $DK \leq 11$ , entonces  $DK = 11$ .

2. Si  $D$  es un punto en el interior del  $\angle ABC$ , explicar por qué  $\angle ABC > \angle DBC$ .

3. Si  $a = 20$ , entonces  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .  
 Si  $b = 65$ , entonces  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .  
 Si  $c = 100$ , entonces  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .



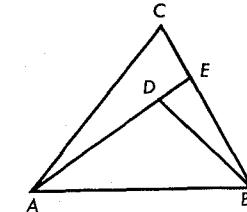
4. Definir la distancia entre un punto y una recta. Definir altura de un triángulo.



5. Demostrar que si una mediana de un triángulo no es perpendicular al lado que corta, entonces al menos dos lados del triángulo no son congruentes.

6. Tres cables atirantados se utilizan para sostener un árbol recién plantado en un terreno llano. Si se atan los tres al árbol a la misma altura, ¿quedarán fijos al terreno a distancias iguales del pie del árbol? ¿Por qué?

7. En un triángulo equilátero, se dibujaron una mediana, una bisectriz de un ángulo y una altura, desde vértices diferentes. ¿Qué relación hay entre sus longitudes?



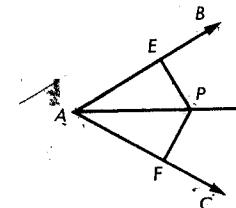
8. Dada la figura de la derecha, demostrar que  $\angle ADB > \angle C$ .

9. En el  $\triangle ABC$ ,  $AC > AB$ . Demostrar que si  $D$  es un punto cualquiera entre  $B$  y  $C$ , entonces  $AD < AC$ .

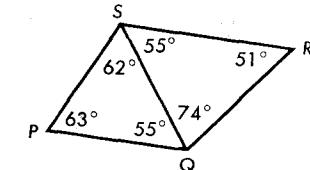
10. Demostrar el siguiente teorema:  
 Un punto cualquiera de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

Datos:  $\overrightarrow{AP}$  biseca al  $\angle BAC$ ,  
 $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{AB}$ ,  
 $\overrightarrow{PF} \perp \overrightarrow{AC}$ .

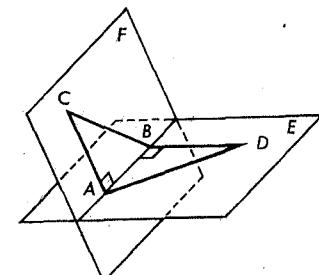
Demostrar que  $PE = PF$ .



11. Si las medidas de los ángulos en la figura de la derecha son las indicadas, ¿cuál es el segmento más corto? Explíquese.



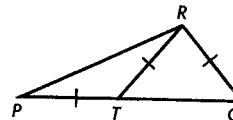
12. Los planos  $E$  y  $F$  se intersecan en  $\overleftrightarrow{AB}$ .  $C$  está en  $F$ ,  $D$  está en  $E$ ,  $CB = AD$ ,  $\overline{CA} \perp \overline{AB}$  y  $\overline{DB} \perp \overline{AB}$ .  
 Demostrar que  $CA = DB$ .



13. Los segmentos trazados desde un punto del interior de un triángulo a sus tres vértices tienen longitudes  $r, s, t$ . Demostrar que  $r + s + t$  es mayor que la mitad del perímetro del triángulo.

14. Demostrar que si  $\overleftrightarrow{AM}$  es una mediana del  $\triangle ABC$ , entonces los segmentos desde  $B$  y  $C$ , perpendiculares a  $\overleftrightarrow{AM}$ , son congruentes.

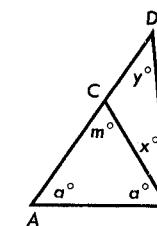
15. En la figura de la derecha,  $PT = TR = RQ$ . Demostrar que  $PR > RQ$ .



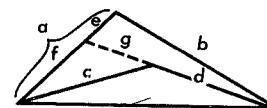
\* 16. Demostrar el siguiente teorema:

Si desde un punto en una perpendicular a una recta se dibujan dos segmentos oblicuos (no perpendiculares) a la recta, el segmento cuyo extremo en la recta esté más alejado del pie de la perpendicular será el segmento mayor.

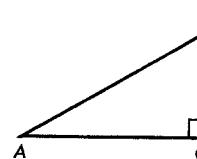
\* 17. Dado que  $AC = BC$ ,  $AB < AC$  y  $A-C-D$ , demostrar que el  $\triangle ABD$  es escaleno.



\* 18. Demostrar que la suma de las distancias desde un punto en el interior de un triángulo a los extremos de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados; es decir, demostrar que, en la figura,  $a + b > c + d$ .



\* 19. En el  $\triangle ABC$ , el  $\angle C$  es un ángulo recto. Si  $m\angle B = 2m\angle A$ , entonces  $AB = 2BC$ . [Sugerencia: Utilícese la bisectriz del  $\angle B$ .]



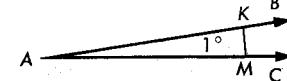
\* 20. (a) Se da el  $\triangle ABC$ , con  $BC = a$ ,  $AC = b$  y  $AB = c$ . Demostrar que

$$|a - b| < c.$$

(b) Enunciar con palabras el teorema que consiste en la generalización de la parte (a).

\*+ 21. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es menor que 270.

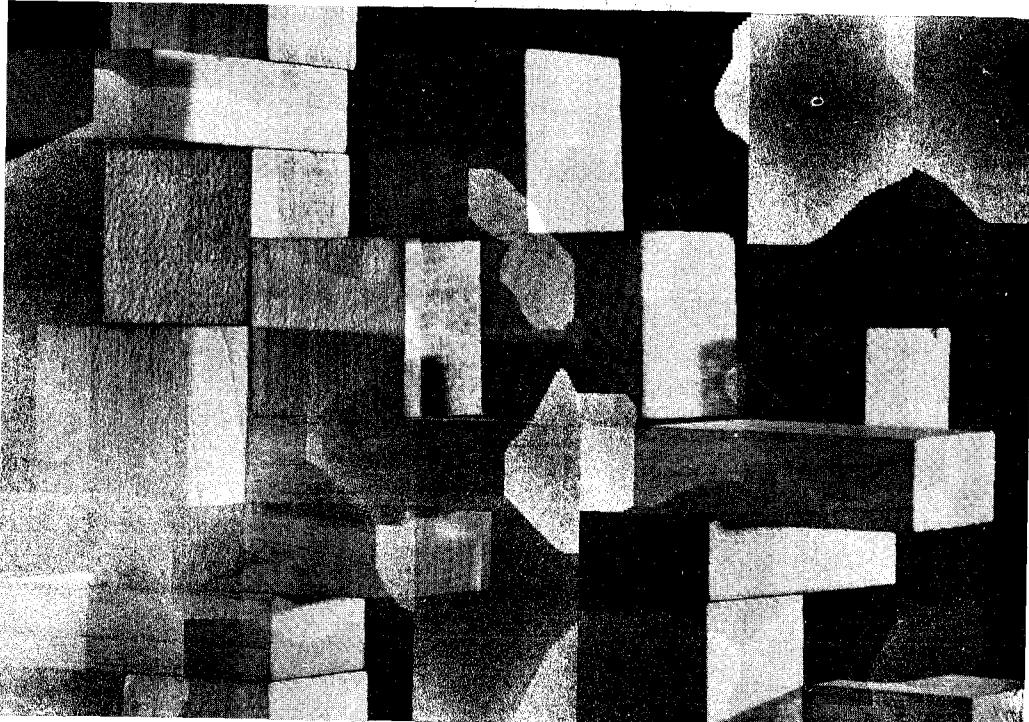
22. Basándonos en los postulados que hemos enunciado y los teoremas que hemos estudiado hasta ahora en este curso, es imposible demostrar que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180 (algo que el estudiante sabe bien desde hace algún tiempo). Sin embargo, podemos fácilmente construir un triángulo especial y demostrar que la suma de las medidas de sus ángulos es menor que 180. Sea el  $\angle BAC$  un ángulo con medida 1 (postulado de la construcción del ángulo). Sobre  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ , tómense puntos  $K$  y  $M$  tales que  $AK = AM$ . La suma de las medidas de los ángulos del  $\triangle AKM$  es menor que 180. ¿Por qué? Si construimos el  $\angle A$  de manera que  $m\angle A = \frac{1}{2}$ , ¿qué podríamos decir acerca de la suma de las medidas de los ángulos?



### PROBLEMA OPTATIVO

Sean  $\overleftrightarrow{BD}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$  dos rectas que se intersecan en  $B$ , un punto entre  $A$  y  $C$ . Las perpendiculares a  $\overleftrightarrow{BD}$  desde  $A$  y  $C$  intersecan a  $\overleftrightarrow{BD}$  en  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Demostrar que  $P$  y  $Q$  no están al mismo lado de  $\overleftrightarrow{AC}$ .

# 8 | Rectas y planos perpendiculares en el espacio



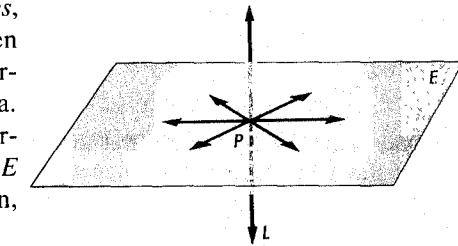
## 8.1. LA DEFINICIÓN DE PERPENDICULARIDAD PARA RECTAS Y PLANOS

En este capítulo, nos ocuparemos de figuras que no están en un mismo plano. Por tanto, antes de empezar la lectura del mismo, sería conveniente repasar el Capítulo 3, donde se introdujeron las ideas fundamentales acerca de la geometría del espacio.

La perpendicularidad entre rectas y planos se define así:

### Definición

Una recta y un plano son *perpendiculares*, si se intersecan y si, además, toda recta en el plano que pase por el punto de intersección es perpendicular a la recta dada. Cuando la recta  $L$  y el plano  $E$  son perpendiculares, entonces escribimos  $L \perp E$  o  $E \perp L$ . Si  $P$  es el punto de intersección, entonces decimos que  $L \perp E$  en  $P$ .



En la figura anterior, hemos presentado tres rectas de  $E$  que pasan por  $P$ . De acuerdo con nuestra definición, las tres deben ser perpendiculares a  $L$  en  $P$ , aunque quizás no se vean así. (En un dibujo en perspectiva, las rectas perpendiculares no tienen necesariamente que verse formando ángulo recto.) Obsérvese que si solamente exigimos que *una* recta de  $E$  sea perpendicular a  $L$ , esto poco significaría: el alumno puede convencerse fácilmente de que *todo* plano que pase por  $P$  contiene una tal recta. Por otra parte, resultará que si  $E$  contiene *dos* rectas que sean perpendiculares a  $L$  en  $P$ , entonces  $L \perp E$  en  $P$ . En la próxima sección, estudiaremos esta idea.

### Conjunto de problemas 8-1

1. La figura a la derecha representa el plano  $E$ :

- ¿Pertenecerán al plano  $E$  algunos puntos fuera de la figura?
- ¿Debemos suponer que  $E$  contiene todo punto fuera de la figura?



2. (a) Dibujar un plano perpendicular a una recta vertical.

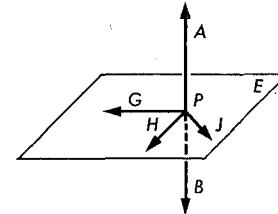
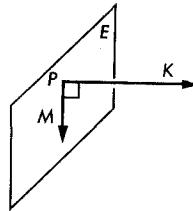
(b) Dibujar un plano perpendicular a una recta horizontal.

(c) En cada uno de los planos de las partes (a) y (b), dibujar tres rectas que pasen por el punto de intersección con la recta original. Enúnciese en cada caso, la relación entre cada una de las tres rectas y la recta original.

3. Léase nuevamente la definición de perpendicularidad entre una recta y un plano y decidáse si, en virtud de esa definición, es cierto el siguiente enunciado:

Si una recta es perpendicular a un plano, entonces es perpendicular a toda recta que esté en el plano y que pase por el punto de intersección.

4. Si el  $\angle KPM$  es recto y  $\overleftrightarrow{PM}$  está en  $E$ , ¿se podrá concluir que  $E$  es perpendicular a  $\overleftrightarrow{PK}$ ? ¿Por qué sí o por qué no?

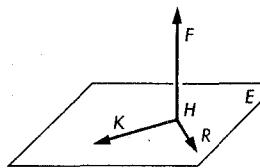


5. Dado que  $G, H, J$  y  $P$  están en el plano  $E$ , y que  $\overleftrightarrow{AB} \perp E$  en  $P$ , indicar cuáles de los siguientes ángulos deberán ser rectos:

$$\angle APJ, \quad \angle HPJ, \quad \angle GPH, \quad \angle GPB, \quad \angle HPA.$$

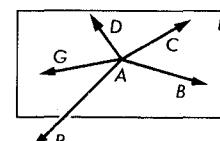
6. En la figura de la derecha,  $H, K$  y  $R$  están en el plano  $E$  y  $F$  no está en  $E$ .

(a) Nómbrense los planos determinados por los puntos de la figura.

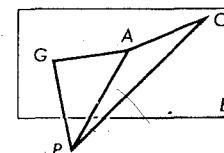
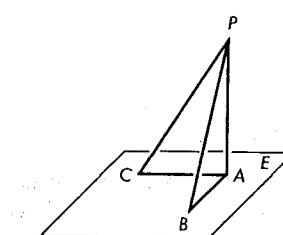


(b) Si  $\overrightarrow{HR}$  es perpendicular al plano  $HKF$ , ¿qué ángulos de la figura deberán ser rectos?

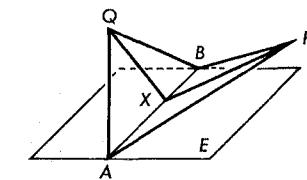
7. En la figura de la derecha, los puntos  $A, B, C, D$  y  $G$  están en el plano vertical  $E$ , y  $\overleftrightarrow{AP} \perp E$ . Nómbrense todos los ángulos que tienen que ser rectos.



8. Se da la figura, con  $A, B$  y  $C$  en el plano  $E$ ,  $\overleftrightarrow{PA} \perp E$  y  $PC = PB$ . Demuéstrese que  $AC = AB$ .



9. Los puntos  $A, G$  y  $C$  están en el plano vertical  $E$ , y  $P$  es un punto “delante” de  $E$ . Si  $\overleftrightarrow{PA} \perp E$  y  $AG = AC$ , demuéstrese que  $PG = PC$ .



10. Los puntos  $A, B$  y  $X$  están en el plano  $E$ , y los puntos  $P$  y  $Q$  están al mismo lado de  $E$ . Si  $PB = QB$  y  $PA = QA$ , demuéstrese que  $PX = QX$ . ¿Sería válida la demostración si  $P$  y  $Q$  estuvieran a lados opuestos de  $E$ ? ¿Y si  $P$  y  $Q$  estuvieran en  $E$ ?

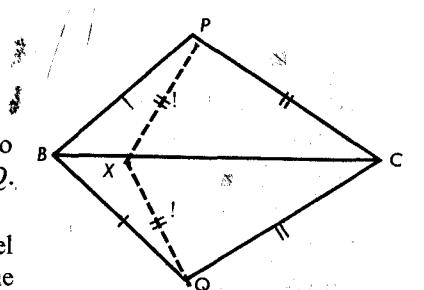
## II. 2. UN LEMA

Al final de la sección anterior, dijimos que si  $E$  contiene dos rectas que son perpendiculares a  $L$  en  $P$ , entonces  $E \perp L$  en  $P$ . La demostración de este teorema es bastante larga. Para facilitar su desarrollo, demostraremos primero un teorema preliminar que nos sirva de ayuda en la demostración principal. Tales “teoremas auxiliares” se llaman *lemas*. Este término proviene de una palabra griega que significa *rama*. Así, un lema es una rama de una demostración larga.

Nuestro lema es fácil de demostrar.

### Teorema 8-1

Si  $B$  y  $C$  equidistan de  $P$  y  $Q$ , entonces todo punto entre  $B$  y  $C$  también equidista de  $P$  y  $Q$ .



La figura ilustra otra manera de expresar el teorema. Obsérvese que  $P, B, X$  y  $C$  tienen que estar en un mismo plano, pues  $X$  está en  $\overleftrightarrow{BC}$  y hay un plano que contiene a  $\overleftrightarrow{BC}$  y a  $P$ . Pero puede muy bien suceder que el  $\triangle BPC$  y el  $\triangle BQC$  estén en planos distintos y, en efecto, éste es precisamente el caso para el cual vamos a necesitar el teorema.

**Demostración:** (1) Se da que  $BP = BQ$  y que  $CP = CQ$ , como está indicado en la figura. Por el teorema LLL, se deduce que  $\triangle BPC \cong \triangle BQC$ .

(2) Por tanto,  $\angle PBC \cong \angle QBC$ .

(3) Del postulado LAL, se deduce que  $\triangle PBX \cong \triangle QBX$ .

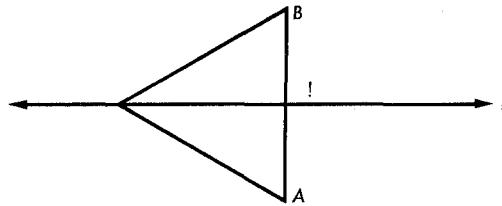
(4) En consecuencia,  $PX = QX$ , y  $X$  equidista de  $P$  y  $Q$ , como queríamos demostrar.

También, necesitaremos el Corolario 6-2.1 del Capítulo 6.

**Corolario 6-2.1**

Se dan un segmento  $\overline{AB}$  y una recta  $L$  en el mismo plano. Si dos puntos de  $L$  equidistan de  $A$  y  $B$ , entonces  $L$  es la mediatrix de  $\overline{AB}$ .

Se necesitará este corolario solamente en el caso especial que sugiere la figura siguiente:

**8-3. EL TEOREMA FUNDAMENTAL SOBRE PERPENDICULARES****Teorema 8-2**

Si una recta es perpendicular a dos rectas que se intersecan en su punto de intersección, entonces es perpendicular al plano que contiene las dos rectas.

**De otro modo:** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas en el plano  $E$ , que se intersecan en  $A$ . Sea  $L$  una recta perpendicular a  $L_1$  y  $L_2$  en  $A$ . Entonces,  $L$  es perpendicular a toda recta  $L_3$  que esté en  $E$  y contenga a  $A$ .

**Demuestra:** (1) Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos de  $L$  que equidistan de  $A$ . Entonces,  $L_1$  y  $L_2$  son mediatrix de  $\overline{PQ}$  (en dos planos distintos, desde luego).

(2) Cada una de las rectas  $L_1$  y  $L_2$  contiene puntos a cada lado de  $L_3$  en  $E$ . Sean  $B$  y  $C$  dos puntos de  $L_1$  y  $L_2$ , que están a lados opuestos de  $L_3$  en  $E$ . Entonces,  $L_3$  contiene a un punto  $X$ , que está entre  $B$  y  $C$ .

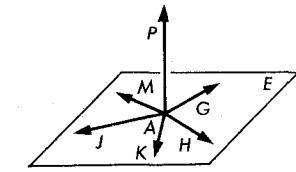
(3) Por la parte (1) y el teorema 6-2, cada uno de los puntos  $B$  y  $C$  equidista de  $P$  y  $Q$ .

(4) En virtud del teorema 8-1,  $X$  equidista de  $P$  y  $Q$ .

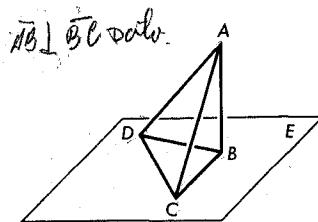
(5) Así,  $L_3$  contiene al punto medio de  $\overline{PQ}$  y contiene, además, a otro punto  $X'$  que equidista de  $P$  y  $Q$ . Del corolario 6-2.1, se deduce que  $L_3 \perp L$ , como queríamos demostrar.

**Conjunto de problemas 8-3**

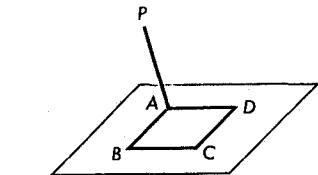
1. Se dan los puntos  $A, G, H, K, J$  y  $M$  en el plano  $E$ .  $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{AG}$ ,  $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{AJ}$ , y  $A, G$  y  $J$  no están alineados. Demuéstrese que  $\overleftrightarrow{AP}$  es perpendicular a  $\overleftrightarrow{AK}$  y a  $\overleftrightarrow{AM}$ .



2. ¿Cuál es la relación entre  $L$ , la recta de intersección de dos paredes del salón de clases, y  $F$ , el plano del piso? Explíquese. ¿Es  $L$  perpendicular a toda recta de  $F$ ? ¿Cuántas rectas de  $F$  son perpendiculares a  $L$ ?

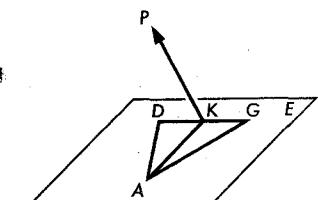


3. En la figura,  $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ,  $\overline{DB} \perp \overline{BC}$ , y  $AB = DB$ . Demuéstrese que  $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ . ¿Es  $\overline{AB} \perp E$ ? ¿Por qué sí o por qué no?



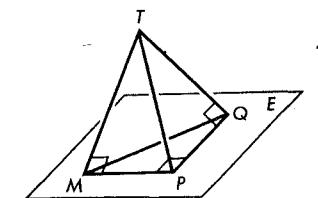
4. El cuadrado  $\square ABCD$  está en el plano  $E$ .  $P$  es un punto fuera de  $E$  tal que  $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{AB}$ .

- (a) Nómbrense todos los planos determinados por pares de segmentos.  
(b) Al menos uno de los segmentos es perpendicular a uno de los planos mencionados en la parte (a). ¿Cuál es el segmento? ¿Cuál es el plano? ¿Cómo nos ayuda el teorema 8-2 a dar una respuesta correcta?

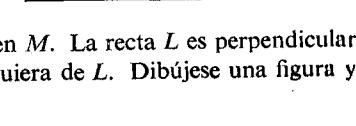


5. En el problema 3, ¿qué segmento y qué plano son perpendiculares?

6. Se sabe que  $K$  es el punto medio de  $\overline{DG}$ ,  $AD = AG$  y  $\overrightarrow{KP} \perp \overrightarrow{AK}$ , siendo  $P$  un punto que no está en el plano  $ADG$ . Si hay un segmento perpendicular a un plano, nómbrense el segmento y el plano.

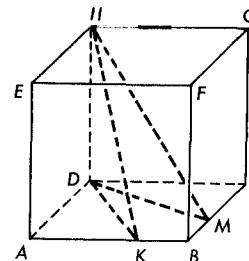


7. En la figura,  $\overline{PQ} \perp \overline{MP}$ ,  $\overline{PQ} \perp \overline{TQ}$ , y  $\overline{MP} \perp \overline{MT}$ . ¿Será perpendicular a algún plano de la figura, algún segmento de la misma? Nómbrense todos los pares, si hay alguno.



8.  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  son segmentos congruentes que se bisecan en  $M$ . La recta  $L$  es perpendicular a cada uno de  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  en  $M$ .  $P$  es un punto cualquiera de  $L$ . Dibújese una figura y demuéstrese que  $P$  equidista de  $A, B, C$  y  $D$ .

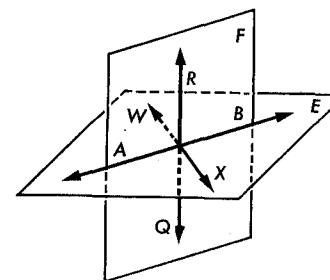
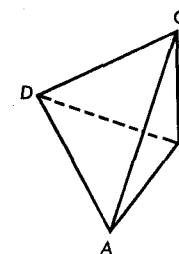
- \* 9. Se da el cubo de la derecha, con  $BK = BM$ . Demuéstrese que  $H$  equidista de  $K$  y  $M$ . [En la demostración, pueden utilizarse las siguientes propiedades de un cubo:  
 (a) Las doce aristas de un cubo son congruentes.  
 (b) Dos aristas cualesquiera que se intersecan son perpendiculares.]



- \* 10. Si  $A, B, C$  y  $D$  no están en un mismo plano,

$$AD = DC, \quad BC = BA,$$

y el  $\angle DBA$  es un ángulo recto, entonces, al menos uno de los segmentos de la figura es perpendicular a uno de los planos. ¿Cuál es el segmento y cuál es el plano? Demuéstrese la respuesta.



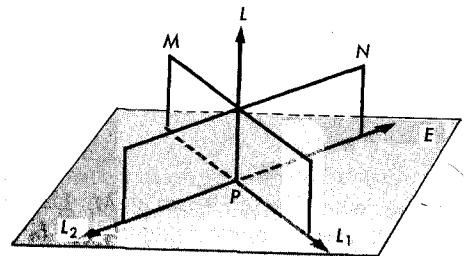
- \* 11. En la figura, los planos  $E$  y  $F$  se intersecan en  $\overleftrightarrow{AB}$ .  $\overleftrightarrow{RQ}$  está en  $F$  y  $\overleftrightarrow{WX}$  está en  $E$ .  $RQ \perp AB$  y  $WX \perp F$ . Demuéstrese que  $RQ \perp E$ .

#### 8-4. EXISTENCIA Y UNICIDAD

La parte difícil de este capítulo se completó cuando demostramos el teorema 8-2. Los otros resultados que necesitamos saber se deducen fácilmente.

##### Teorema 8-3

Por un punto dado de una recta dada, pasa un plano perpendicular a la recta dada.



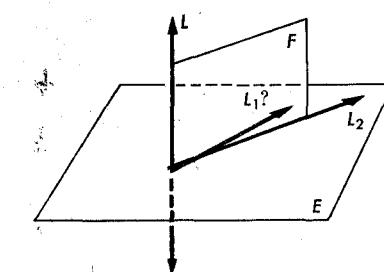
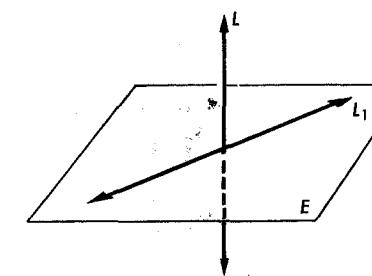
**Demostración:** Sean  $L$  y  $P$  la recta y el punto dados.

- (1) Sean  $M$  y  $N$  dos planos distintos cualesquiera que contengan a la recta  $L$ .  
 [Pregunta: ¿Cómo sabemos que *hay* dos planos diferentes que contienen a  $L$ ? Refiérase al postulado 5 y al teorema 3-3.]
- (2) Hay una recta  $L_1$  en  $M$ , perpendicular a  $L$  en  $P$  (Teorema 6-1).
- (3) Hay una recta  $L_2$  en  $N$ , perpendicular a  $L$  en  $P$  (Teorema 6-1).
- (4) Hay un plano  $E$  que contiene a las rectas  $L_1$  y  $L_2$  (Teorema 3-4).
- (5)  $E \perp L$  en  $P$  [en virtud de los enunciados (2), (3) y el teorema 8-2].

##### Teorema 8-4

Si una recta y un plano son perpendiculares, entonces el plano contiene toda recta perpendicular a la recta dada en su punto de intersección con el plano dado.

**O de otro modo:** Si la recta  $L$  es perpendicular al plano  $E$  en el punto  $P$ , y  $L_1$  es una recta perpendicular a  $L$  en  $P$ , entonces  $L_1$  está en  $E$ .



##### Demostración

###### AFIRMACIONES

- | AFIRMACIONES   | RAZONES   |
|--|---|
| 1. $L$ y $L_1$ están en un plano $F$ .               | ?   |
| 2. La intersección de $F$ y $E$ es una recta $L_2$ . | ?   |
| 3. $L_2 \perp L$ en $P$ .                            | Definición de $E \perp L$ .   |
| 4. $L_1 \perp L$ en $P$ .                            | Dato.   |
| 5. $L_1$ y $L_2$ son la misma recta.                 | Por el teorema 6-1, hay una sola recta de $F$ que es perpendicular a $L$ en $P$ . |
| 6. $L_1$ está en $E$ .                               | Por el paso 2, $L_2$ está en $E$ ; por el paso 5, $L_1 = L_2$ .                   |

El teorema 8-4 nos permite demostrar que el plano perpendicular dado por el teorema 8-3 es único.

### Teorema 8-5

Por un punto dado de una recta dada pasa solamente un plano perpendicular a la recta.

**Demostración:** Si existieran dos planos perpendiculares distintos, entonces su intersección sería una sola recta. Esto es imposible, porque cada uno de ellos contiene *todas* las rectas que son perpendiculares a la recta dada en el punto dado.

Sabemos que la mediatrix de un segmento, en un plano dado, se caracterizó como el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. Para el plano bisecante perpendicular o plano mediador de un segmento en el espacio, tenemos un teorema de caracterización exactamente del mismo tipo.

### Teorema 8-6. El teorema del plano bisecante perpendicular

El plano bisecante perpendicular de un segmento es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los extremos del segmento.

**O de otro modo:** Sea  $E$  el plano bisecante perpendicular de  $\overline{AB}$ . Entonces,

- (1) si  $P$  está en  $E$ , tendremos  $PA = PB$ ;
- (2) si  $PA = PB$ , será cierto que  $P$  está en  $E$ .

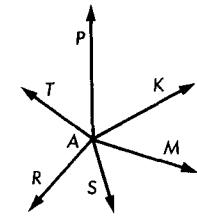
En la figura,  $C$  es el punto medio de  $\overline{AB}$ . Obsérvese que esta manera de expresar el teorema contiene dos partes, como era de esperar, tratándose de un teorema de caracterización.

Para demostrar la parte (1), se necesita saber la definición de perpendicularidad entre una recta y un plano y la caracterización de las mediatrix en un plano. Para demostrar la parte (2), se necesita también el teorema 8-5. Los detalles de estas dos demostraciones se dejan al alumno.

### Conjunto de problemas 8-4

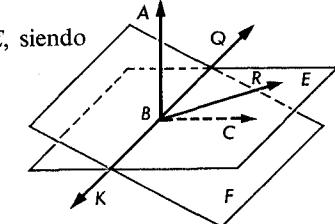
1. (a) ¿Cuántas rectas son perpendiculares a una recta en un punto dado de la misma?
- (b) ¿Cuántos planos son perpendiculares a una recta en un punto dado de la misma?

2. Se sabe que  $\overrightarrow{AP}$  es perpendicular a cada uno de los rayos  $\overrightarrow{AK}$ ,  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AS}$ ,  $\overrightarrow{AR}$  y  $\overrightarrow{AT}$ . ¿Cuántos planos están determinados por los rayos que se intersecan? ¿Habrá más de tres puntos de la figura que sean coplanares? Si es así, explíquese por qué. (Supóngase que cada tres de los puntos dados no están alineados.)

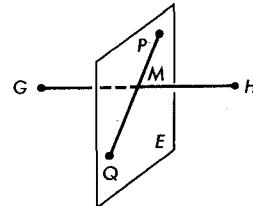


3. Los planos  $E$  y  $F$  se intersecan en  $\overleftrightarrow{KQ}$ .  $\overleftrightarrow{AB} \perp E$ , siendo  $B$  un punto de  $\overleftrightarrow{KQ}$ .  $R$  está en  $E$  y  $C$  está en  $F$ .

¿Es  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BR}$ ? ¿Por qué?  
 ¿Es  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{KQ}$ ? ¿Por qué?  
 ¿Es  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ? ¿Por qué?



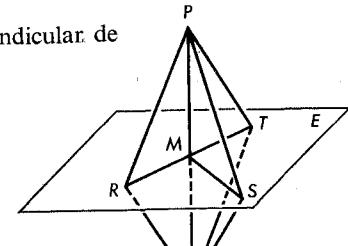
4. En la figura,  $\overline{GH} \perp E$ ,  $MG = MH$ , y  $\overline{PQ} \perp \overline{GH}$  en  $M$ . ¿Contiene el plano  $E$  al segmento  $\overline{PQ}$ ? ¿Por qué? Con respecto a  $\overline{GH}$ , ¿qué término se aplica al plano  $E$ ?



5. Dos segmentos,  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ , son perpendiculares y se bisecan en  $K$ . Un plano  $Z$  contiene a  $\overline{AB}$ , pero no contiene a  $\overline{CD}$ . ¿Será  $Z$  el plano bisecante perpendicular de  $\overline{CD}$ ? Dibújese una figura para ilustrar la conclusión.

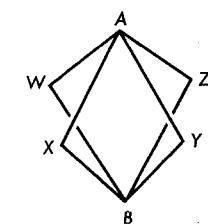
6. El plano  $E$  es el plano bisecante perpendicular de  $\overline{PQ}$ , como muestra la figura.

- (a)  $PR = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $TQ = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $PS = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $\angle PTM \cong \underline{\hspace{2cm}}$   
 $\triangle PTM \cong \underline{\hspace{2cm}}$



- (b) ¿Es  $MR = MS = MT$ ? Explíquese.

7. Se da la figura de la derecha, en la que no todos los puntos son coplanares. Si  $AW = BW$ ,  $AX = BX$ ,  $AY = BY$ , y  $AZ = BZ$ , demuéstrese que  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son coplanares.



8. Demuéstrese el teorema 8-6.

- \* 9. Escribir los teoremas 8-3 y 8-5 como un solo teorema, utilizando la expresión "exactamente uno".
- \* 10. Escribir el teorema 8-6, utilizando la expresión "si, y solamente si".
- \* 11. ¿Podría haberse demostrado el teorema 8-5 antes que el teorema 8-3? Explíquese.
- \*\* 12. Demostrar el siguiente teorema:

Si  $L$  es una recta que interseca al plano  $E$  en el punto  $M$ , hay al menos una recta  $L'$  de  $E$  tal que  $L' \perp L$ .

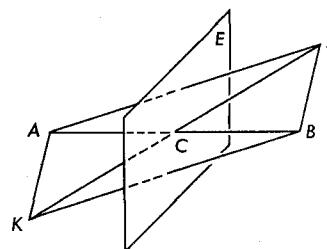
- \*\* 13. ¿Será cierto el siguiente enunciado? Demuéstrese la respuesta.

Cuatro puntos, cada uno equidistante de dos puntos fijos, son coplanarios con los dos puntos fijos si, y solamente si, los cuatro puntos están alineados.

- \*\* 14. En la figura,  $E$  es el plano bisecante perpendicular de  $\overline{AB}$  en  $C$ .  $H$  está al mismo lado de  $E$  que  $B$ , y  $K$  está al mismo lado de  $E$  que  $A$ , de modo que  $K-C-H$ ,  $\overline{HB} \perp \overline{AB}$  y  $\overline{KA} \perp \overline{AB}$ .

Demuéstrese que

- (a)  $\overline{AK}$  y  $\overline{BH}$  son coplanarios, y que
- (b)  $AH = BK$ .



## 8-5. RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES: RESUMEN

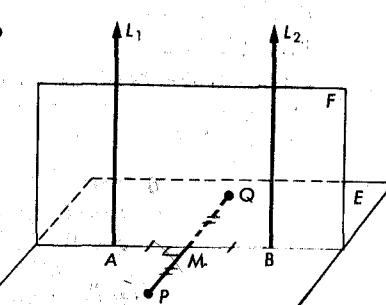
Los siguientes teoremas constituyen un resumen de algunas de las propiedades fundamentales de rectas y planos perpendiculares. Algunas de las demostraciones son fáciles, pero otras son largas y no nos detendremos a hacerlas todas. No obstante, presentaremos un ejemplo del tipo de razonamiento que se requiere, dando algunas indicaciones detalladas de la demostración del siguiente teorema:

### Teorema 8-7

Dos rectas perpendiculares al mismo plano son coplanarias.

Para lograr una idea de cómo debe ser la demostración, consideremos primero cuál es la situación *si* el teorema es cierto; es decir, suponiendo que las dos rectas realmente están en un plano, ¿cuál será ese plano?

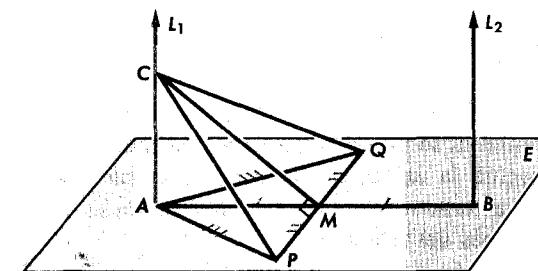
Se sabe que  $L_1 \perp E$  en  $A$  y que  $L_2 \perp E$  en  $B$ ; y suponemos que  $L_1$  y  $L_2$  están en un plano  $F$ .



En la figura, indicamos el punto medio  $M$  de  $\overline{AB}$  y, también, indicamos un segmento  $\overline{PQ}$  de  $E$  tal que  $\overline{AB}$  y  $\overline{PQ}$  se bisecan formando ángulo recto.

Ciertamente, parece que  $\overline{PQ} \perp F$  en  $M$ . Si esto es cierto, entonces  $F$  es el *plano bisecante perpendicular de  $\overline{PQ}$* .

Desde luego, hasta ahora nada hemos demostrado, pues hemos estado suponiendo que el teorema es cierto. Pero ya tenemos la clave de cómo debe ser la demostración: Primero tenemos que situar a  $\overline{PQ}$  en  $E$  de manera que  $\overline{PQ}$  y  $\overline{AB}$  se bisecuen formando ángulo recto; y, entonces, debemos mostrar que  $L_1$  y  $L_2$  están en el *plano bisecante perpendicular de  $\overline{PQ}$* .



Esta idea funciona. Los pasos más importantes de la demostración son los siguientes:

- (1)  $AP = AQ$  (como se indica en la figura).
- (2)  $\triangle CAP \cong \triangle CAQ$ .
- (3)  $CP = CQ$ .
- (4)  $C$  está en el *plano bisecante perpendicular de  $\overline{PQ}$* . Sea  $F$  el plano en cuestión.
- (5)  $L_1$  está en  $F$ .

De la misma manera, concluimos que

- (6)  $L_2$  está en  $F$ .

Por tanto, el plano que buscábamos es, en efecto, el *plano bisecante perpendicular de  $\overline{PQ}$* . Este plano contiene a las rectas  $L_1$  y  $L_2$  y, en consecuencia,  $L_1$  y  $L_2$  son coplanarias.

Quizás, el alumno considere que el análisis que condujo a esta demostración será más valioso para él que la demostración. Una demostración, después de lograda, es lógica, pero el proceso mediante el cual se obtiene, raras veces es lógico. Cada cual debe hallar un método como mejor pueda. Una de las mejores maneras de lograr esto es utilizando el "método de la feliz idea" que ilustramos al comienzo de esta sección.

Hasta ahora, los teoremas de este capítulo dan información incompleta acerca de las rectas y los planos perpendiculares. Los siguientes teoremas amplían dicha información:

**Teorema 8-8**

Por un punto dado, pasa un *plano* y solamente uno, perpendicular a una *recta* dada.

**Teorema 8-9**

Por un punto dado, pasa una *recta* y solamente una, perpendicular a un *plano* dado.

Estos teoremas contienen mucha información en muy pocas palabras. Cada uno de ellos tiene dos casos, que dependen de si el punto dado está o no en la recta dada o en el plano dado. En cada uno de los cuatro casos, los teoremas nos dicen que tenemos existencia y unicidad. Esto significa que necesitamos un total de ocho demostraciones. Dos de ellas ya se presentaron en los teoremas 8-3 y 8-5.

El teorema 8-9 nos asegura la existencia de una recta única perpendicular a un plano dado desde un punto externo. Por tanto, está justificada la siguiente definición, análoga a la que dimos después del teorema 7-7:

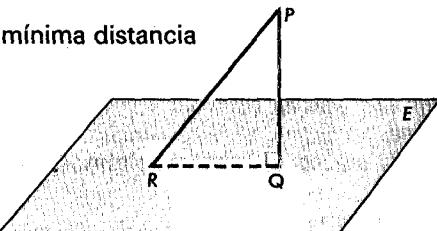
**Definición**

La *distancia* a un *plano* desde un punto que no está situado en él es la longitud del segmento perpendicular desde el punto al *plano*.

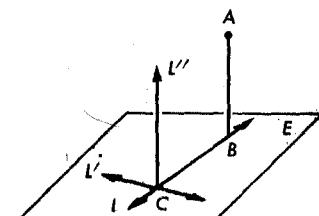
**Teorema 8-10. El segundo teorema de mínima distancia**

El segmento más corto desde un punto a un *plano* que no lo contiene, es el segmento perpendicular.

La demostración es muy parecida a la del teorema 7-7. Dados el segmento perpendicular  $\overline{PQ}$  y otro segmento  $\overline{PR}$  cualquiera desde  $P$  hasta  $E$ , empezamos la demostración, considerando un *plano* que contenga las rectas  $\overleftrightarrow{PR}$  y  $\overleftrightarrow{PQ}$ . El resto de la demostración se deja al alumno.

**Conjunto de problemas 8-5**

1. Desde un punto  $A$  fuera del *plano*  $E$ , se traza el segmento más corto a  $E$ , que interseque a  $E$  en  $B$ .  $L$  y  $L'$  son rectas en  $E$  tales que  $L$  contiene a  $B$  y  $L' \perp L$ . Si se traza  $L''$  de manera que  $L'' \perp L$  y  $L'' \perp L'$ , demuéstrese que  $L''$  y  $\overleftrightarrow{AB}$  son coplanares.

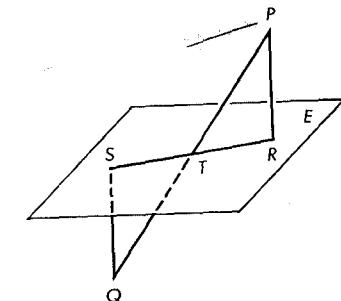


2. Demostrar el siguiente caso especial del teorema 8-9:

Por un punto que no está en un *plano* dado, pasa a lo más una recta perpendicular al *plano*.

3.  $P$  y  $Q$  están a lados opuestos del *plano*  $E$ , pero equidistan de  $E$ . Las perpendiculares desde  $P$  y  $Q$  al *plano*  $E$  intersecan a dicho *plano* en los puntos  $R$  y  $S$ , respectivamente. Demuéstrese que

- (a)  $\overline{PQ}$  interseca a  $\overline{SR}$  en un punto  $T$ , y que  
(b)  $T$  es el punto medio de  $\overline{SR}$ .

**Resumen del capítulo**

1. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso, utilizando una figura, si fuese necesario:

- (a) Si dos *planos* se intersecan, su intersección es una *recta*.  
(b) Tres *rectas* pueden intersecarse en un punto común de manera que cada *recta* sea perpendicular a las otras dos.  
(c) Si una *recta* es perpendicular a cada una de dos *rectas*, es perpendicular al *plano* que contiene estas dos *rectas*.  
(d) La intersección de dos *planos* puede ser un *segmento*.  
(e) En un punto de un *plano*, hay exactamente una *recta* perpendicular al *plano*.  
(f) Dados cuatro puntos cualesquiera, hay un *plano* que los contiene.  
(g) Si una *recta* interseca a un *plano* en un solo punto, hay al menos dos *rectas* en el *plano* que son perpendiculares a la *recta* dada.  
(h) Por un punto dado, podemos trazar solamente una *recta* perpendicular a una *recta* dada.  
(i) Si tres *rectas* se intersecan dos a dos, pero no hay ningún punto que pertenezca a las tres, entonces las tres *rectas* son coplanares.  
(j) Tres *planos* pueden dividir al espacio en ocho regiones.

2. Completar el siguiente enunciado: El conjunto de todos los puntos equidistantes de los extremos de un *segmento* es el \_\_\_\_\_ del *segmento*.  
3. Completar el siguiente enunciado: La distancia a un *plano* desde un punto que no está en el *plano* es \_\_\_\_\_.



# 9 | Rectas paralelas en un plano



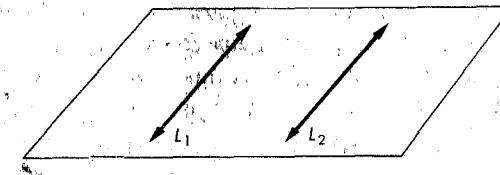
## 9.1. CONDICIONES QUE GARANTIZAN EL PARALELISMO

Dos rectas en el espacio pueden estar situadas de tres distintas maneras:

(1) Pueden intersecarse en un punto. En este caso, el teorema 3-4 nos dice que tienen que ser copланarias.

(2) Pueden *no* intersecarse y *no* ser copланarias. En este caso, se llaman *rectas alabeadas*. Por ejemplo, consideremos la recta  $L_1$  trazada desde la parte de atrás hasta el frente en el piso del salón de clases y la recta  $L_2$  trazada de lado a lado en el techo. Esas son dos rectas alabeadas.

(3) Finalmente, las dos rectas pueden estar en un mismo plano sin intersecarse. En este caso, decimos que las dos rectas son *paralelas*.



### Definición

Dos rectas que no están en un mismo plano se llaman *rectas alabeadas*.

### Definición

Dos rectas son *paralelas*, si (1) están en un mismo plano y (2) no se intersecan.

El siguiente teorema nos permite hablar *del* plano que contiene dos rectas paralelas:

### Teorema 9-1

Dos rectas paralelas están exactamente en un plano.

**Demostración:** Si  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas, sabemos por la definición que están en un plano  $E$ . Necesitamos demostrar que están solamente en un plano.

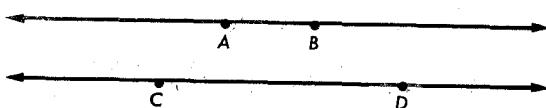
Sea  $P$  cualquier punto de  $L_2$ . Por el teorema 3-3, sabemos que hay solamente un plano que contiene a  $L_1$  y a  $P$ . Luego, hay solamente un plano que contiene a  $L_1$  y a  $L_2$ , porque todo plano que contiene a  $L_2$  contiene a  $P$ .

Escribiremos

$$L_1 \parallel L_2$$

para indicar que  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas. Si dos segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  están en rectas paralelas, entonces diremos, para abreviar, que los segmentos son paralelos, y escribiremos  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ .

Análogamente, hablaremos de dos rayos paralelos, un rayo y un segmento paralelos, y así sucesivamente.



Por ejemplo, si se da que  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ , podemos también escribir

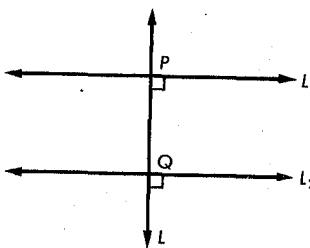
$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{CD},$$

y así sucesivamente, para doce casos adicionales análogos.

Mediante la definición, no parece fácil decidir si dos rectas son paralelas. Cada recta se extiende indefinidamente en dos sentidos y, para decidir si se intersecan o no, parece que tendríamos que examinar las dos rectas en toda su extensión. En algunos casos, sin embargo, podemos asegurar que dos rectas son paralelas mirando sólo un pequeño segmento de cada una, como indica el siguiente teorema:

### Teorema 9-2

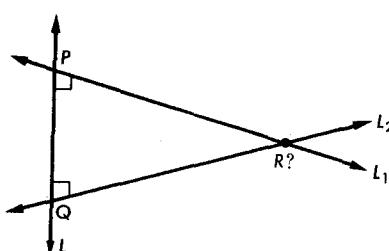
Dos rectas en un plano son paralelas, si ambas son perpendiculares a la misma recta.



**Demostración:** Se dan dos rectas coplanares,  $L_1$  y  $L_2$ , tales que  $L_1 \perp L$  en  $P$  y  $L_2 \perp L$  en  $Q$ . Necesitamos demostrar que  $L_1$  y  $L_2$  no se intersecan.

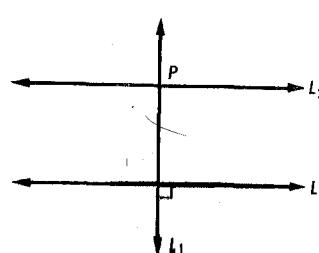
Supongamos que  $L_1$  interseca a  $L_2$  en el punto  $R$ . Entonces, hay dos perpendiculares desde  $R$  a  $L$ . Por el teorema 6-4, esto es imposible. Por tanto,  $L_1 \parallel L_2$ . [Pregunta: ¿Qué tipo de demostración se ha utilizado aquí?]

El teorema 9-2 nos permite demostrar la existencia de rectas paralelas.



### Teorema 9-3

Sea  $L$  una recta y  $P$  un punto que no está en  $L$ . Entonces, hay al menos una recta que pasa por  $P$  y es paralela a  $L$ .



**Demostración:** Sea  $L_1$  la perpendicular desde  $P$  a  $L$ . Sea  $L_2$  la perpendicular a  $L_1$  en  $P$  (en el plano que contiene a  $L$  y a  $P$ ). Por el teorema 9-2,  $L_2 \parallel L$ .

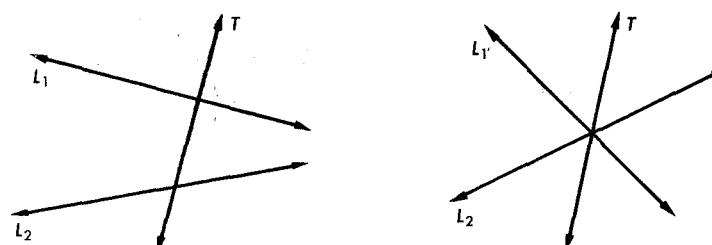
Parecería propio intentar una demostración de que la paralela del teorema 9-3 es única. Esto es, podríamos tratar de demostrar lo siguiente:

*Por un punto dado que no esté en una recta dada, pasa solamente una paralela a la recta dada.*

Se sabe, sin embargo, que este enunciado no puede demostrarse como un teorema, a base de los postulados que tenemos hasta ahora. Por tanto, hay que aceptarlo como un nuevo postulado. Este postulado tiene una larga e interesante historia. Durante unos dos mil años, el texto típico de geometría fue el de los *Elementos* de Euclides, escrito alrededor de 300 a. de J.C. En los *Elementos*, Euclides utilizaba un postulado que decía que las paralelas eran únicas. Generalmente, a los matemáticos les gusta suponer lo menos posible y demostrar lo más posible. Por esa razón, muchos de ellos trataron de convertir el postulado de las paralelas de Euclides en un teorema. Todos fracasaron. Finalmente, en el siglo XIX, se descubrió que el postulado de las paralelas no puede demostrarse a base de los otros postulados.

Volveremos a esta cuestión más adelante. Mientras tanto, investiguemos un poco más las condiciones en las cuales podemos decir que dos rectas son paralelas.

En la siguiente figura, a la izquierda, la recta  $T$  es una secante a las rectas coplanares  $L_1$  y  $L_2$ :

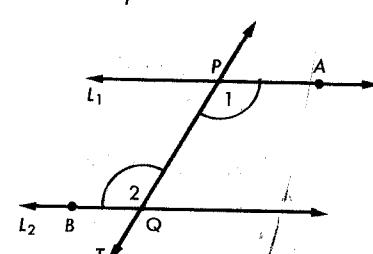
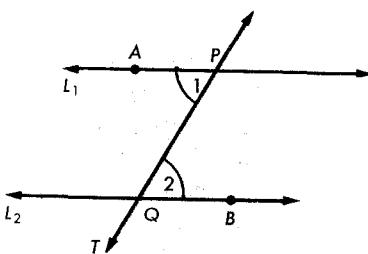
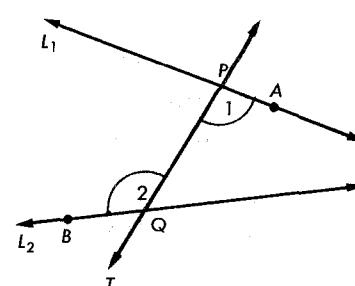
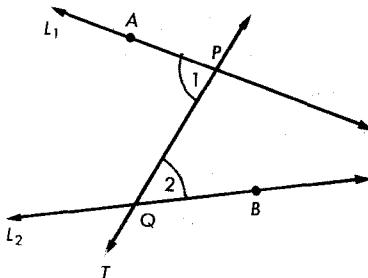


En la figura a la derecha,  $T$  no es una secante. Más precisamente:

### Definición

Una secante a dos rectas coplanares es una recta que las interseca en dos puntos diferentes.

En cada una de las siguientes figuras,  $\angle 1$  y  $\angle 2$  son *ángulos alternos internos*:



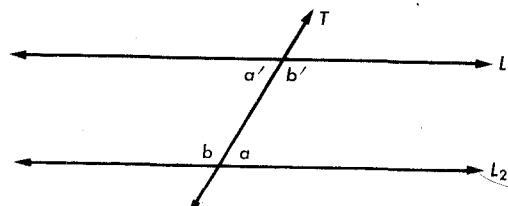
Se observará que las rectas cortadas por la secante pueden ser paralelas o no. Las marcas en las figuras sugieren cómo debemos describir los ángulos alternos internos mediante una definición.

### Definición

Se dan dos rectas  $L_1$  y  $L_2$  cortadas por una secante  $T$  en los puntos  $P$  y  $Q$ . Sea  $A$  un punto de  $L_1$  y  $B$  un punto de  $L_2$ , tal que  $A$  y  $B$  están en lados opuestos de  $T$ . Entonces, el  $\angle APQ$  y el  $\angle PQB$  son *ángulos alternos internos*.

### Teorema 9-4

Si dos rectas son cortadas por una secante, y si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces los otros dos ángulos alternos internos son también congruentes.

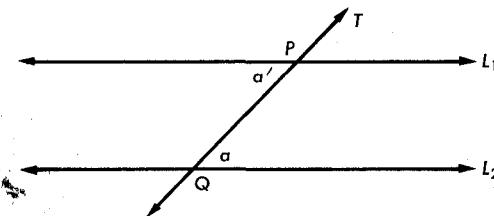


Esto es, si  $\angle a \cong \angle a'$ , entonces  $\angle b \cong \angle b'$ . Y si  $\angle b \cong \angle b'$ , entonces  $\angle a \cong \angle a'$ . La demostración se deja al alumno.

El siguiente teorema es una generalización del teorema 9-2. Esto es, incluye el teorema 9-2 como caso especial. Puesto que puede aplicarse en un mayor número de casos que el teorema 9-2, resulta más útil. Las letras AIP en el nombre del teorema significan, "alternos internos paralelas". Análogamente, el recíproco del teorema 9-5, que vendría a ser el teorema 9-8, se llamará "el teorema PAI".

### Teorema 9-5. El teorema AIP

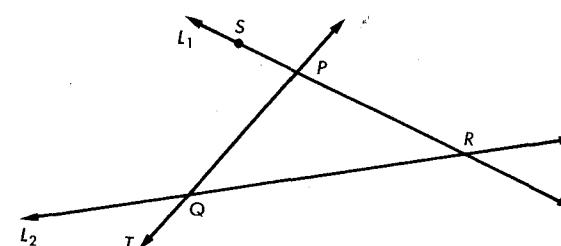
Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.



**Demostración:** Sea  $T$  una secante, que interseca a  $L_1$  y a  $L_2$  en  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Se supone que dos ángulos alternos internos son congruentes. Por el teorema anterior, tenemos que

(1) *ambos* pares de ángulos alternos internos son congruentes.

Ahora, supongamos que  $L_1$  interseca a  $L_2$  en un punto  $R$ . Demostraremos que esto nos lleva a una contradicción de (1).



Sea  $S$  un punto de  $L_1$  situado a un lado de  $T$  distinto de aquel en que está  $R$ . Entonces, el  $\angle SPQ$  es un ángulo externo del  $\triangle PQR$ , y el  $\angle PQR$  es uno de los ángulos internos no contiguos. Por el teorema del ángulo externo,

(2)  $\angle SPQ > \angle PQR$ .

Esto contradice el enunciado (1), puesto que el  $\angle SPQ$  y el  $\angle PQR$  son ángulos alternos internos. Por tanto,  $L_1$  no interseca a  $L_2$ , y  $L_1 \parallel L_2$ , como queríamos demostrar.

## Conjunto de problemas 9-1

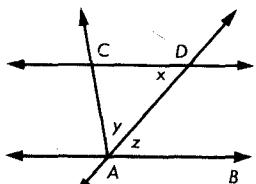
[Nota: En los conjuntos de problemas de este capítulo, cuando los problemas se enuncian mediante figuras, éstas se suponen planas, a menos que se indique otra cosa.]

1. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

- Si dos rectas no están en un mismo plano, pueden ser paralelas.
- La definición de rectas paralelas establece que las rectas deberán mantenerse a la misma distancia una de otra. ✓
- Si dos rectas son perpendiculares a la misma recta en puntos diferentes de ésta, son paralelas. ✓
- Si dos rectas en un plano son cortadas por una secante, los ángulos alternos internos son congruentes. ~~cierto~~

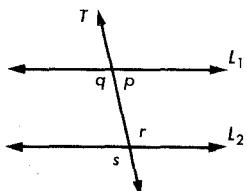
2. Datos:  $\overrightarrow{AD}$  biseca al  $\angle CAB$  y  $CA = CD$ .

Demostrar que  $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ .



3. ¿Se deduce que  $L_1 \parallel L_2$ , si se cumplen las siguientes condiciones?

- |  |   |
|--|---|
| (a) $m\angle q = 100$ y<br>$m\angle r = 100$ | (b) $m\angle p = 80$ y<br>$m\angle r = 100$ |
| (c) $m\angle s = 120$ y<br>$m\angle p = 60$  | (d) $m\angle r = 90$ y<br>$m\angle p = 90$  |



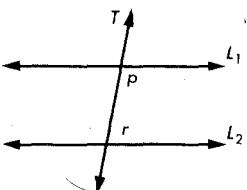
4. ¿Será posible hallar dos rectas en el espacio que no sean paralelas ni se intersequen?

5. Demostrar el siguiente teorema:

Si dos rectas son cortadas por una secante, y dos ángulos internos que contienen puntos a un mismo lado de la secante son suplementarios, las rectas son paralelas.

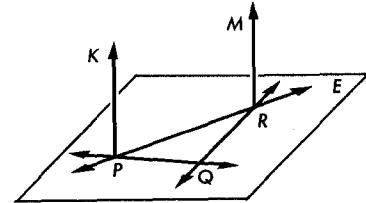
Datos:  $L_1$ ,  $L_2$  y  $T$ . El  $\angle p$  es suplementario del  $\angle$  .

Demostrar que  $L_1 \parallel L_2$ .

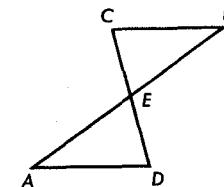


6. Se dan una recta  $L$  y un punto  $P$  que no está en  $L$ . Indíquese cómo se podrían utilizar un transportador y una regla para dibujar una recta por  $P$  paralela a  $L$ .

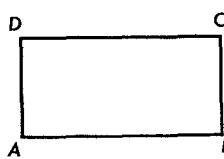
7. En la figura,  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son tres puntos no alineados en el plano  $E$ ,  $\overrightarrow{PK} \perp E$  y  $\overrightarrow{RM} \perp E$ . Demuéstrese que  $\overrightarrow{PK} \parallel \overrightarrow{RM}$ .



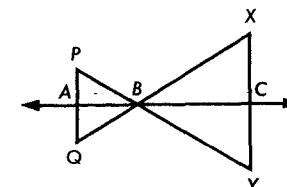
8. En la figura,  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  se bisecan en  $E$ . Demostrar que  $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$ .



9. Se da el cuadrilátero  $\square ABCD$ , con los ángulos rectos  $\angle A$  y  $\angle B$  y  $AD = BC$ . Demostrar que  $\angle D \cong \angle C$ . [Sugerencia: Tráçense  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ .] ¿Puede demostrarse también que los ángulos  $\angle D$  y  $\angle C$  son rectos?



10. En la figura,  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados,  $AP = AQ$ ,  $BP = BQ$ ,  $BX = BY$  y  $CX = CY$ . Demostrar que  $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{XY}$ .

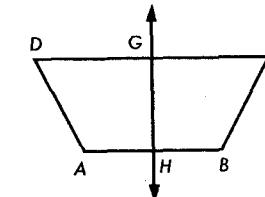


11. Datos: El  $\square ABCD$ , con  $H$  punto medio de  $\overline{AB}$ ,  $G$  punto medio de  $\overline{DC}$ ,  $AD = BC$  y  $\angle A \cong \angle B$ .

Demostrar:  $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{DC}$ ,

$\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ,

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ .

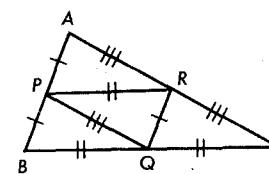


12. Se da el  $\triangle ABC$ , con

$$AP = PB = RQ,$$

$$BQ = QC = PR,$$

$$AR = RC = PQ.$$



Demostrar que  $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ .

¿Por qué no demuestra esto que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo cualquiera es 180?

**PROBLEMA OPTATIVO**

Supongamos que se aceptan las dos definiciones siguientes:

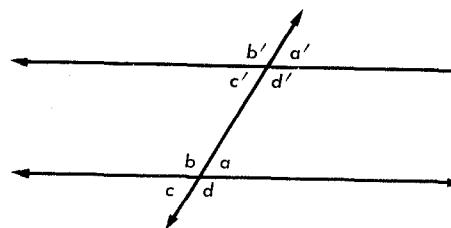
Una *recta vertical* es una recta que contiene al centro de la Tierra.

Una *recta horizontal* es una recta perpendicular a alguna recta vertical.

- ¿Podrían ser paralelas dos rectas horizontales?
- ¿Podrían ser paralelas dos rectas verticales?
- ¿Podrían ser perpendiculares dos rectas verticales?
- ¿Podrían ser perpendiculares dos rectas horizontales?
- ¿Será toda recta vertical una recta horizontal?
- ¿Será toda recta horizontal una recta vertical?
- ¿Podría ser una recta horizontal paralela a una recta vertical?
- ¿Será horizontal toda recta?

**9-2. ÁNGULOS CORRESPONDIENTES**

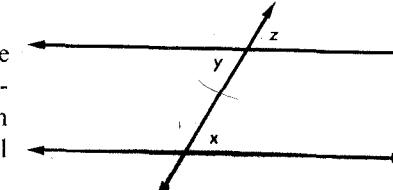
En la figura siguiente, los ángulos marcados  $a$  y  $a'$  se llaman *ángulos correspondientes*.



Análogamente,  $b$  y  $b'$  son ángulos correspondientes, lo mismo que  $c$  y  $c'$  y, también,  $d$  y  $d'$ . De manera precisa:

**Definición**

Si dos rectas son cortadas por una secante de modo que el  $\angle x$  y el  $\angle y$  son ángulos alternos internos, y los ángulos  $\angle y$  y  $\angle z$  son opuestos por el vértice, entonces el  $\angle x$  y el  $\angle z$  son *ángulos correspondientes*.



Se deberán demostrar los dos siguientes teoremas:

**Teorema 9-6**

Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces dos ángulos alternos internos son congruentes.

(Refiérase al teorema de los ángulos opuestos por el vértice.)

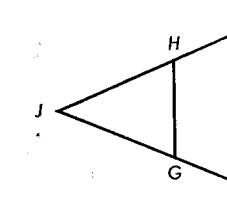
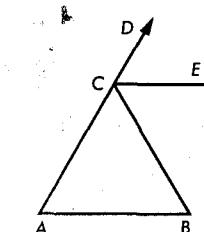
**Teorema 9-7**

Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Parece como si los recíprocos de los teoremas 9-5 y 9-7 debieran ser ciertos. Esto es, cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos debieran ser congruentes y los ángulos correspondientes también. Sin embargo, las demostraciones de estos teoremas recíprocos requieren el postulado de las paralelas. Por tanto, enunciaremos este postulado en la siguiente sección, para utilizarlo en lo sucesivo.

**Conjunto de problemas 9-2**

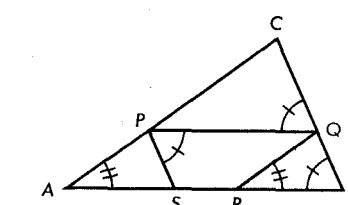
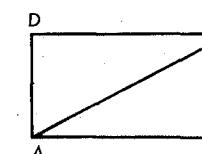
1. En la figura siguiente de la izquierda,  $AC = BC$  y  $\angle DCE \cong \angle B$ . Demostrar que  $\overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{AB}$ .



2. En la figura anterior de la derecha, se da el  $\triangle KJM$ , con  $KJ = MJ$ ,  $GJ = HJ$  y  $\angle HGJ \cong \angle HMK$ .

Demuéstrese que  $\overrightarrow{GH} \parallel \overrightarrow{KM}$ .

3. En la figura siguiente de la izquierda, el  $\angle B$  y el  $\angle D$  son ángulos rectos y  $DC = AB$ . Demostrar que  $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ .



4. En la figura anterior de la derecha, ¿por qué es  $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AB}$ ?;  $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{QR}$ ?;  $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{BC}$ ?

## 9-3. EL POSTULADO DE LAS PARALELAS

## POSTULADO 18. El postulado de las paralelas

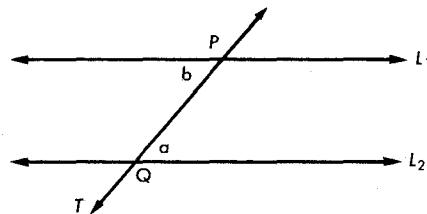
**Por un punto externo dado hay solamente una recta paralela a una recta dada.**

Se observará que el postulado necesita solamente decir que la paralela es única, ya que hemos demostrado que la paralela existe. Es la unicidad de las paralelas la que nos da los recíprocos de los teoremas de la sección anterior. Comenzaremos con el recíproco del teorema 9-5.

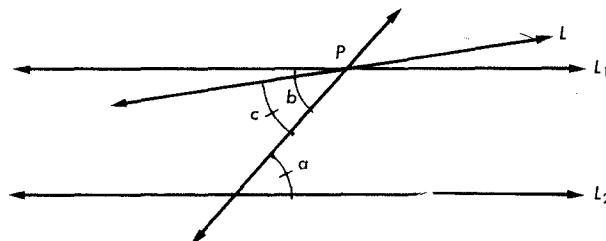
## Teorema 9-8. El teorema PAI

Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

**Demuestra:** Se dan las rectas paralelas  $L_1$  y  $L_2$  y una secante  $T$ , que las corta en  $P$  y  $Q$ , respectivamente.



Supongamos que los ángulos  $\angle a$  y  $\angle b$  no son congruentes. Sea  $L$  una recta que pasa por  $P$ , tal que los ángulos alternos internos son congruentes. Esto es, en la figura siguiente,  $\angle a \cong \angle c$ . Por el postulado de la construcción del ángulo, existe exactamente una recta tal  $L$ ; y esto quiere decir también que  $L \neq L_1$ .



Entonces,  $L \parallel L_2$ , por el teorema 9-5. Como  $L \neq L_1$ , se deduce que hay dos rectas que pasan por  $P$ , paralelas a  $L_2$ . Esto contradice el postulado de las paralelas. Por tanto,

$$\angle a \cong \angle b,$$

como queríamos demostrar.

Las demostraciones de los cuatro teoremas siguientes son cortas y bastante fáciles; por eso, se dejan para el alumno:

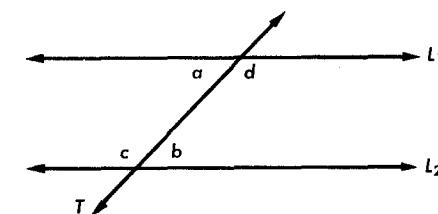
## Teorema 9-9

Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, cada dos ángulos correspondientes son congruentes.

## Teorema 9-10

Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, los ángulos internos a un mismo lado de la secante son suplementarios.

**De otro modo:** Se dan  $L_1 \parallel L_2$  y una secante  $T$ . Entonces, los ángulos  $\angle b$  y  $\angle d$  son suplementarios y los ángulos  $\angle a$  y  $\angle c$  son suplementarios.



## Teorema 9-11

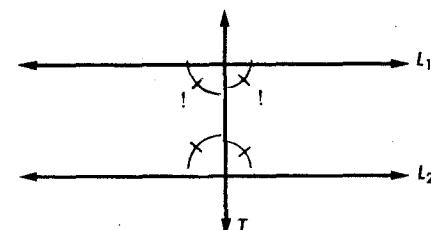
En un plano, si dos rectas son paralelas a una tercera recta, entonces son paralelas entre sí.

El mismo teorema es válido para el caso en que las tres rectas no son coplanares. (V. el corolario 10-4.2.) Pero el teorema no puede demostrarse en el caso general por los métodos de este capítulo.

## Teorema 9-12

En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, es perpendicular a la otra.

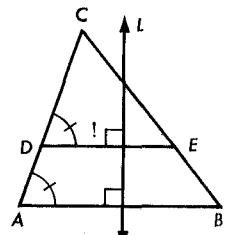
Una demostración rápida de este teorema viene sugerida por la figura de la derecha. (Un ángulo es un ángulo recto, si, y solamente si, es congruente al ángulo con el cual forma un par lineal.)



Una observación final: Si se utiliza una demostración indirecta para el teorema 9-9, la tarea no es tan fácil. Véase la definición de ángulos correspondientes y refiérase al teorema de los ángulos opuestos por el vértice.

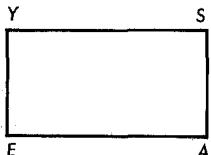
## Conjunto de problemas 9-3

1. Se da la figura de la derecha, con  $\angle CDE \cong \angle A$  y  $L \perp \overleftrightarrow{AB}$ . Demostrar que  $L \perp \overleftrightarrow{DE}$ .

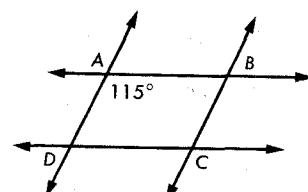


2. Se da el cuadrilátero  $\square EASY$ , con los ángulos rectos  $\angle E$ ,  $\angle A$  y  $\angle S$ .

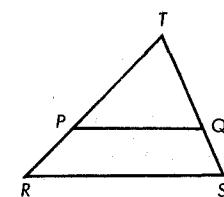
Demostrar que  $\overline{EY} \perp \overline{SY}$ .



3. Demostrar que una recta paralela a la base de un triángulo isósceles y que interseca a los otros dos lados del triángulo en puntos diferentes, determina otro triángulo isósceles.

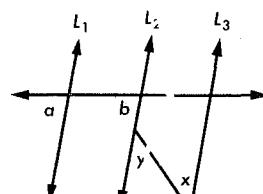


4. Si  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$  y  $m\angle BAD = 115$ , ¿cuánto es  $m\angle ADC$ ? Si, también,  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ , ¿cuánto es  $m\angle BCD$ ?

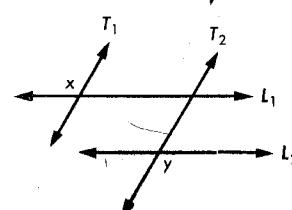


5. Datos: En la figura,  $RT = RS$  y  $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ .

Demostrar que  $PQ = PT$ .

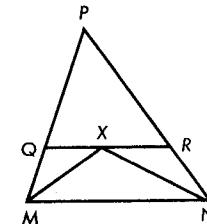


6. En la figura,  $\angle x \cong \angle y$  y  $\angle a \cong \angle b$ . Demostrar que  $L_1 \parallel L_3$ .



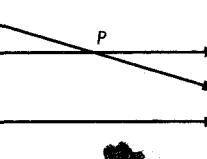
7. Se da la figura de la derecha, con  $L_1 \parallel L_2$  y  $T_1 \parallel T_2$ . Demostrar que  $\angle x \cong \angle y$ .

8. Se da que  $\overline{AC}$  y  $\overline{DB}$  se intersecan en  $E$ , con  $A-E-C$  y  $D-E-B$ , tal que  $AD = BC$  y  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ . Demostrar que  $\overline{AC}$  y  $\overline{DB}$  se bisecan en  $E$ .



9. Se da el  $\triangle PMN$ ;  $\overrightarrow{MX}$  biseca al  $\angle M$ ;  $\overrightarrow{NX}$  biseca al  $\angle N$ ; y  $\overleftrightarrow{QR}$ , que pasa por  $X$ , es paralela a  $\overleftrightarrow{MN}$ .

Demostrar que los triángulos  $\triangle QMX$  y  $\triangle RXN$  son isósceles.



10. Demostrar el siguiente teorema por el método indirecto

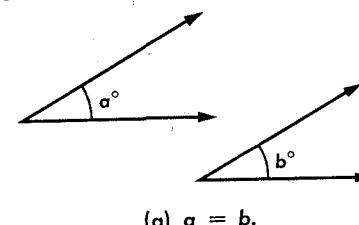
Se dan dos rectas paralelas  $L_1$  y  $L_2$ . Si, en el mismo plano, una tercera recta,  $L_3$ , interseca a una de las rectas, digamos  $L_2$ , entonces interseca a la otra.

11. Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces las bisectrices de dos ángulos correspondientes cualesquiera son paralelas.

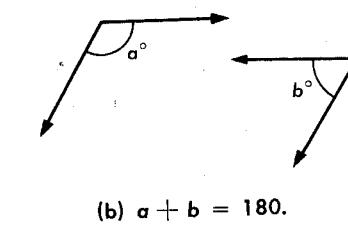
12. Demostrar el siguiente teorema:

En un plano, si los lados de un ángulo son paralelos a los de otro ángulo, los ángulos o bien son (a) congruentes o son (b) suplementarios.

[Nota: La figura indica solamente dos casos, pero se pueden dar, de manera análoga, demostraciones fáciles para los demás. Como indicación, véase el problema 7 de este conjunto de problemas.]



(a)  $a = b$ .



(b)  $a + b = 180$ .

13. En el  $\triangle ABC$ , la bisectriz del  $\angle A$  interseca a  $\overline{BC}$  en  $D$ . La mediatrix de  $\overline{AD}$  interseca a  $\overline{AC}$  en  $G$ . Demostrar que  $\overline{GD} \parallel \overline{AB}$ .

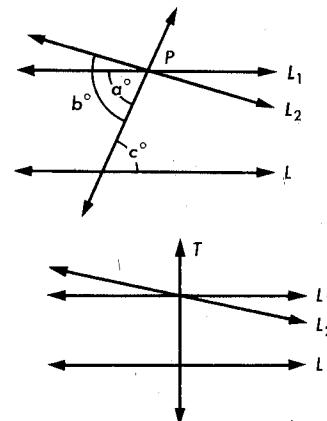
14. En el  $\triangle FGH$ , la bisectriz del  $\angle F$  y la bisectriz del  $\angle G$  se cortan en  $C$ . La recta que pasa por  $C$  y es paralela a  $\overline{FG}$  corta a  $\overline{FH}$  en  $A$  y a  $\overline{GH}$  en  $B$ . Demostrar que el perímetro del  $\triangle ABH$  es igual a la suma de  $FH$  y  $GH$ .

15. Se da el  $\triangle ABC$ . Demostrar que si  $A$  está en una recta paralela a  $\overline{BC}$ , entonces  $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ .

- + 16. Si el teorema 9-8 se acepta como postulado en lugar del postulado de las paralelas, entonces sería posible demostrar este último como un teorema.

Se dan una recta  $L$  y un punto  $P$  que no está en  $L$ . Entonces, hay a lo más una recta,  $L_1$ , que contiene a  $P$  y que es paralela a  $L$ .

[Indicación: ¿Es  $a = c = b$ ?]



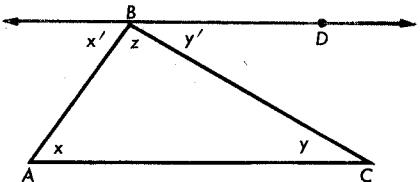
- + 17. Demostrar que si el teorema 9-12 se acepta como postulado, el postulado de las paralelas se deduce como teorema.

## 9-4. TRIÁNGULOS

### Teorema 9-13

Para todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos es 180.

**Demostración:** Seda el  $\triangle ABC$ . Sea  $L$  la recta que pasa por  $B$ , paralela a  $\overline{AC}$ . Sean los ángulos  $\angle x$ ,  $\angle x'$ ,  $\angle y$ ,  $\angle y'$  y  $\angle z$  como se indican en la figura.

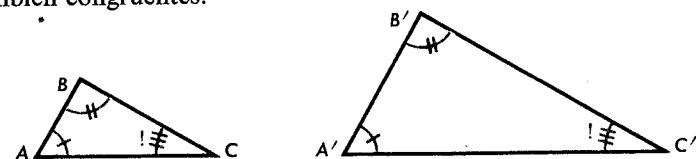


AFIRMACIONES	RAZONES
1. $m\angle x = m\angle x'$ .	Son ángulos alternos internos.
2. $m\angle y = m\angle y'$ .	Son ángulos alternos internos.
3. $m\angle ABD = m\angle z + m\angle y'$ .	Postulado de la adición de ángulos.
4. $m\angle x' + m\angle ABD = 180$ .	Postulado del suplemento.
5. $m\angle x' + m\angle z + m\angle y' = 180$ .	Pasos 3 y 4.
6. $m\angle x + m\angle z + m\angle y = 180$ .	Pasos 1, 2 y 5.

De este teorema, obtenemos algunos corolarios muy importantes.

### Corolario 9-13.1

Se da una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces los ángulos correspondientes del tercer par son también congruentes.



### Corolario 9-13.2

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

### Corolario 9-13.3

En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos.

Es evidente que utilizamos el postulado de las paralelas para demostrar el teorema 9-13. Esto no fue sólo cuestión de conveniencia; de hecho, el teorema *no puede* demostrarse sin utilizar el postulado de las paralelas. Se descubrió en el siglo XIX que hay un tipo de geometría (ahora llamada geometría *hiperbólica*) en la cual el postulado de las paralelas de Euclides no es válido. La geometría hiperbólica es no solamente una rama importante de la matemática, sino también muy útil en la física. En la geometría hiperbólica, el teorema 9-13 no puede demostrarse y, de hecho, es *falso*. Y ocurren otras cosas muy raras. Por ejemplo, en la geometría hiperbólica, los modelos a escala son imposibles, porque dos figuras no podrán tener exactamente la misma forma a menos que tengan exactamente el mismo tamaño.

La geometría euclídea es, sin embargo, una excelente aproximación del espacio real; y es, desde luego, el tipo de geometría que todo el mundo debe estudiar primero.

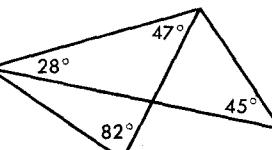
### Conjunto de problemas 9-4

- Hallar la medida del tercer ángulo, si las medidas de los otros dos ángulos de un triángulo son las siguientes:
 

(a) 64 y 59.	(b) 26 y 134.	(c) $k$ y $2k$ .
(d) $u$ y $v$ .	(e) 90 y $n$ .	(f) $60 + a$ y $60 - a$ .
- Las medidas de los ángulos de un triángulo están en la razón 1 : 2 : 3. Hallar la medida de cada ángulo.

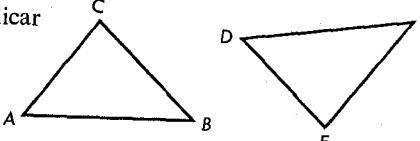
3. La medida de un ángulo de un triángulo es 25 más que la del segundo ángulo, y la medida del tercer ángulo es 9 menos que dos veces la medida del segundo ángulo. Hallar cada medida.

4. Determinar la medida de cada ángulo de la figura de la derecha.



5. Dado que  $\angle A \cong \angle D$  y  $\angle B \cong \angle E$ , explicar por qué podemos concluir o no que:

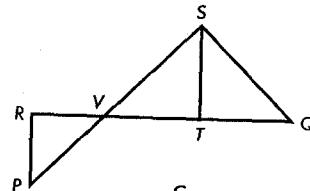
- (a)  $\angle C \cong \angle F$ .  
(b)  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ .



6. La medida de un ángulo de un triángulo es cinco veces la del segundo ángulo, y la medida de un ángulo externo en el tercer vértice es 120. Hallar la medida de cada ángulo del triángulo.

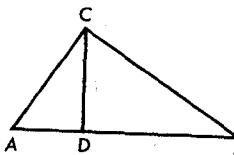
7. En la figura,  $\overline{PR} \perp \overline{RQ}$ ,  $\overline{ST} \perp \overline{RQ}$ , y  $\overline{SQ} \perp \overline{PS}$ .

Demostrar que  $\angle P \cong \angle Q$ .



8. En el  $\triangle ABC$ , el  $\angle ACB$  es un ángulo recto y  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ .

Demostrar que  $\angle A \cong \angle BCD$ .



9. Demostrar que si la bisectriz de un ángulo externo de un triángulo es paralela a un lado del triángulo, éste es isósceles.

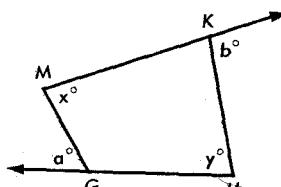
10. Demostrar que si una recta que contiene al vértice de un triángulo isósceles es paralela a la base del triángulo, entonces biseca a cada ángulo externo en el vértice.

11. ¿Por qué es indispensable el postulado de las paralelas para demostrar el teorema 9-13?

12. Se da la figura de la derecha.

Demostrar que  $a + b = x + y$ .

[Sugerencia: Trácese  $\overline{MH}$ .]

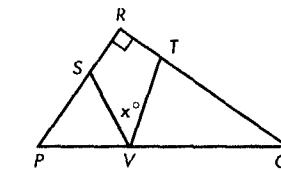


- \* 13. En el  $\triangle ABC$ , el  $\angle C$  es un ángulo recto, y  $M$  es un punto de la hipotenusa tal que  $AM = CM$ . Demostrar que  $M$  equidista de  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

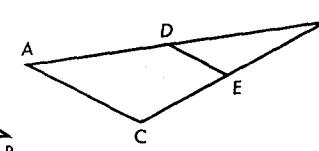
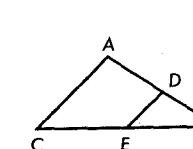
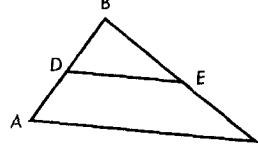
14. Datos: En el  $\triangle PQR$ , el  $\angle R$  es un ángulo recto,  $QT = QV$ , y  $PS = PV$ .

Demostrar que  $x = 45$ .

[Sugerencia: Sea  $m\angle P = a$ . Redáctense fórmulas para las medidas de los otros ángulos.]



15.

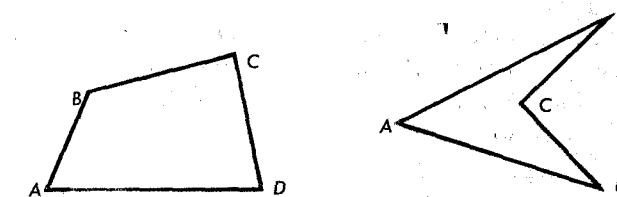


Considérense los tres triángulos aquí indicados. ¿Qué parece ser cierto para  $\overline{DE}$  y  $\overline{AC}$  en cada caso? ¿En qué relación están  $DE$  y  $AC$  en cada caso? ¿Qué son  $D$  y  $E$ ? ¿Sugieren las respuestas hasta ahora alguna propiedad importante de los triángulos? Redáctese una conjectura referente a  $DE$  y  $AC$  y a  $DE$  y  $AC$ . ¿Puede hallarse un ejemplo para demostrar que la conjectura es falsa? ¿Puede demostrarse que es cierta?

16. En el  $\triangle ABC$ ,  $AC = BC$ ;  $D$  es un punto de  $\overleftrightarrow{BC}$ , con  $C-B-D$ ; y  $E$  es un punto de  $\overleftrightarrow{AB}$ , con  $A-E-B$ , tal que  $BD = BE$ .  $\overline{DE}$  interseca a  $\overline{AC}$  en  $F$ . Demostrar que  $m\angle CFE = 3(m\angle D)$ .

## 9-5. CUADRILÁTEROS EN UN PLANO

Enunciamos nuevamente la definición de cuadrilátero que dimos en la sección 5-8:

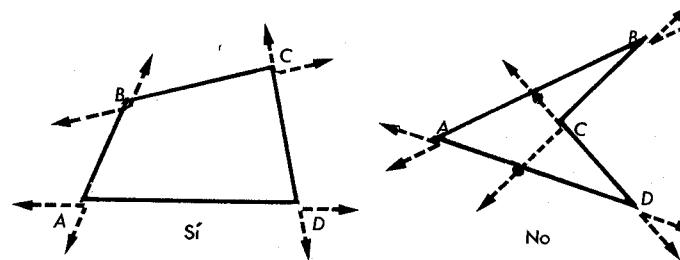


### Definición

Sean  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  cuatro puntos copланarios. Si tres cualesquiera de ellos no están alineados, y los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$  se intersecan solamente en sus extremos, entonces la reunión de los cuatro segmentos se llama *cuadrilátero*. Los cuatro segmentos se llaman *lados*, y los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se llaman *vértices*. Los ángulos  $\angle DAB$ ,  $\angle ABC$ ,  $\angle BCD$  y  $\angle CDA$  se llaman *ángulos del cuadrilátero*.

El cuadrilátero mismo se indica por  $\square ABCD$ . Los ángulos del  $\square ABCD$  se indican brevemente por  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  y  $\angle D$ .

En la figura anterior, el cuadrilátero de la izquierda se llama *convexo*, pero el de la derecha no lo es. Para ver cómo podemos describir la diferencia entre estos cuadriláteros, tracemos las rectas que contienen los lados de cada uno de ellos.



La siguiente definición describe la propiedad de convexidad:

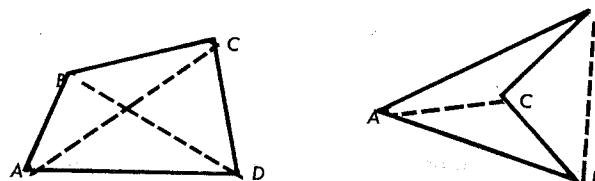
#### Definición

Un cuadrilátero es *convexo*, si dos cualesquiera de sus vértices no están en lados opuestos de una recta que contiene a un lado del cuadrilátero.

La figura anterior de la izquierda satisface estas condiciones, pero la de la derecha, no. (¿Por qué? ¿Qué se necesita señalar para demostrar que un cuadrilátero *no* es convexo?)

#### Definiciones

Dos lados de un cuadrilátero son *opuestos*, si no se intersecan. Dos ángulos son *opuestos*, si no tienen común un lado del cuadrilátero. Dos lados son *consecutivos*, si tienen un extremo común. Dos ángulos son *consecutivos*, si tienen común un lado del cuadrilátero. Una *diagonal* de un cuadrilátero es un segmento determinado por dos vértices no consecutivos.



Así, en el  $\square ABCD$ , los siguientes pares de lados y de ángulos son opuestos:  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AD}$ ,  $\angle A$  y  $\angle C$ ,  $\angle B$  y  $\angle D$ . Algunos de los pares consecutivos son:  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{CD}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$ ,  $\overline{DA}$  y  $\overline{AB}$ ,  $\angle A$  y  $\angle B$ . Las diagonales del  $\square ABCD$  son  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ .

#### Definición

Un *trapezio* es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.



Se observará que la definición permite la posibilidad de que *ambos* pares de lados opuestos sean paralelos. Si esto sucede, tenemos un *paralelogramo*.

#### Definición

Un *paralelogramo* es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.

Las demostraciones de los siguientes teoremas son directas:

#### Teorema 9-14

Cada diagonal descompone a un paralelogramo en dos triángulos congruentes.

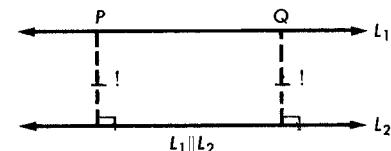
Esto es, si el  $\square ABCD$  es un paralelogramo, entonces  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ .

#### Teorema 9-15

En un paralelogramo, dos lados opuestos cualesquiera son congruentes.

#### Corolario 9-15.1

Si dos rectas son paralelas, entonces todos los puntos de cada recta equidistan de la otra recta.



Recordamos, de la sección 7-7, que la distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta. Algunas veces, nos referimos al corolario 9-15.1 diciendo que “las rectas paralelas equidistan en toda su extensión”.

#### Definición

La *distancia* entre dos rectas paralelas es la distancia de cualquier punto de una de ellas a la otra.

#### Teorema 9-16

En un paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes.

### Teorema 9-17

En un paralelogramo, dos ángulos consecutivos cualesquiera son suplementarios.

### Teorema 9-18

Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

Si sabemos que el  $\square ABCD$  es un paralelogramo, los teoremas anteriores nos permiten llegar a varias conclusiones relacionadas con sus propiedades. Consideremos ahora el problema *recíproco*. ¿Qué necesitamos saber del  $\square ABCD$  para concluir que es un paralelogramo?

### Teorema 9-19

Si ambos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

### Teorema 9-20

Si dos lados de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

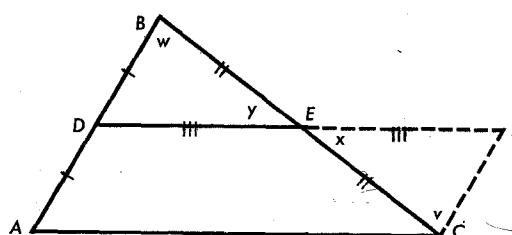
### Teorema 9-21

Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

El siguiente teorema no es muy evidente, ni tampoco su demostración. Presentaremos la demostración completa.

### Teorema 9-22

El segmento entre los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.



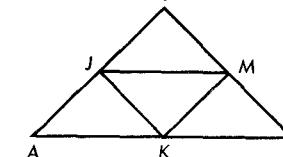
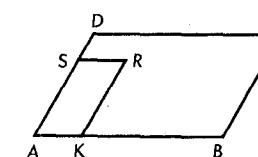
**De otro modo:** Se da el  $\triangle ABC$ . Si  $D$  y  $E$  son los puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente, entonces  $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$  y  $DE = \frac{1}{2}AC$ .

**Demostración:** Sea  $F$  el punto del rayo opuesto a  $\overrightarrow{ED}$  tal que  $EF = DE$ . Ahora, tenemos la situación descrita por las marcas en la figura. La notación en la demostración siguiente corresponde a la figura:

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $EF = DE$ .	Definición de $F$ .
2. $EB = EC$ .	Definición de punto medio.
3. $\angle x \cong \angle y$ .	Ángulos opuestos por el vértice.
4. $\triangle EFC \cong \triangle EDB$ .	LAL.
5. $\angle v \cong \angle w$ .	Ángulos correspondientes.
6. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CF}$ .	AIP (teorema 9-5).
7. $DB = FC$ .	Lados correspondientes.
8. $AD = DB$ .	Definición de punto medio.
9. $AD = FC$ .	Pasos 7 y 8.
10. El $\square ADFC$ es un paralelogramo.	Teorema 9-20.
11. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ .	Definición de paralelogramo.
12. $DE = \frac{1}{2}DF$ .	Paso 1.
13. $DE = \frac{1}{2}AC$ .	Paso 12 y teorema 9-15.

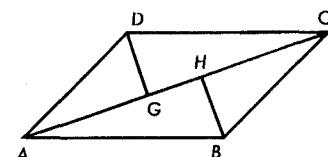
### Conjunto de problemas 9-5

1. La medida de un ángulo de un paralelogramo es 45. ¿Cuáles son las medidas de los otros ángulos?
  2. Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo tienen medidas  $(x + 30)$  y  $(2x - 60)$  respectivamente. Determinar la medida de cada ángulo del paralelogramo.
  3. En la figura siguiente de la izquierda, el  $\square ABCD$  y el  $\square AKRS$  son paralelogramos. ¿Cuál es la relación entre el  $\angle D$  y el  $\angle R$ ? ¿Y entre el  $\angle R$  y el  $\angle C$ ? Justifíquese la respuesta.



4. En la figura anterior de la derecha, el  $\square AKMJ$  y el  $\square BMJK$  son paralelogramos. Demostrar que si  $KJ \parallel KM$ , entonces el  $\triangle ABC$  es isósceles.

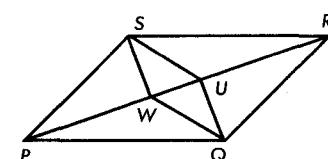
5. Se dan un paralelogramo y una de sus diagonales. Demostrar que si se trazan segmentos desde los vértices opuestos, perpendiculares a la diagonal, entonces dichos segmentos son paralelos y congruentes.



6. El  $\square PQRS$  es un paralelogramo.

$$PW = PS \quad \text{y} \quad RU = RQ.$$

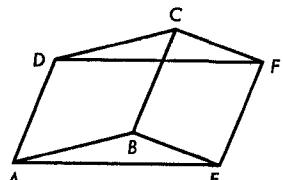
Demostrar que el  $\square SWQU$  es un paralelogramo.



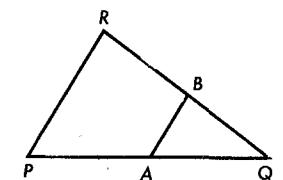
7. Se da un triángulo isósceles y un punto,  $P$ , en la base, distinto de sus extremos. Si se dibujan rectas que pasan por  $P$  paralelas a los lados congruentes, entonces (1) se forma un paralelogramo y (2) el perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las longitudes de los lados congruentes del triángulo.

8. ¿Es cierto el siguiente enunciado? Explíquese.

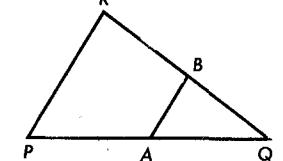
Un trapecio es un paralelogramo, si, y solamente si, sus diagonales se bisecan.



9. En la figura plana, el  $\square ABCD$  y el  $\square BEFC$  son paralelogramos. Demostrar que el  $\square AEFD$  es un paralelogramo.



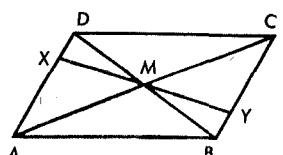
10. En el  $\triangle PQR$ ,  $A$  y  $B$  son los puntos medios de  $\overline{PQ}$  y  $\overline{RQ}$ , respectivamente. Si  $RP = 16$ ,  $m\angle P = 58^\circ$ , y  $m\angle Q = 38^\circ$ , obténganse  $AB$  y  $m\angle ABR$ .



11. Se da cualquier  $\triangle ABC$  y los puntos medios de los lados,  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . Demostrar que el perímetro del  $\triangle PQR$  es la mitad del perímetro del  $\triangle ABC$ .

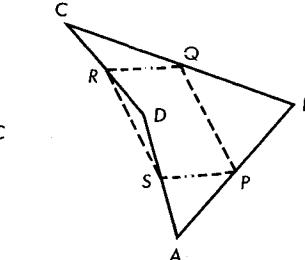
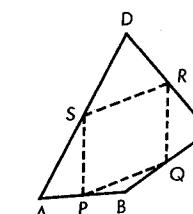
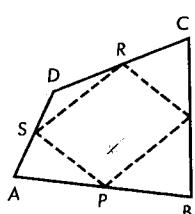
12. (a) ¿Se intersecan siempre las diagonales de un cuadrilátero?

- (b) Dibujar un cuadrilátero  $\square ABCD$  en el cual  $B$  y  $D$  están al mismo lado de la diagonal  $AC$ .



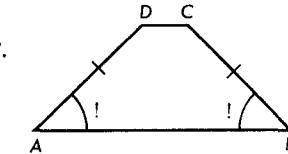
13. Las diagonales  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  del paralelogramo  $\square ABCD$  se cortan en  $M$ . Demostrar que si los puntos  $X$ ,  $Y$  están en lados opuestos del paralelogramo, y  $XY$  contiene a  $M$ , entonces  $M$  biseca a  $XY$ .

14. Enunciar y demostrar un teorema sugerido por las siguientes figuras, donde  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son puntos medios: [Sugerencia: Trácese una diagonal del  $\square ABCD$ .]



15. Demostrar que los segmentos determinados por los puntos medios de lados opuestos de un cuadrilátero cualquiera se bisecan. [Sugerencia: V. el problema 14.]

16. En la figura, el  $\square ABCD$  es un trapecio, con  $DC < AB$ . Demostrar que si  $AD = BC$ , entonces  $\angle A \cong \angle B$ . [Sugerencia: V. el corolario 9-15.1.]



17. Un trapecio que tiene al menos un par de lados opuestos congruentes se llama un *trapecio isósceles*. Demuéstrese que todo paralelogramo es un trapecio isósceles. ¿Será cierto el recíproco?

18. Demostrar que si dos ángulos consecutivos de un trapecio son congruentes, pero no suplementarios, el trapecio es isósceles.

19. Demostrar que si el  $\square ABCD$  es un paralelogramo, entonces  $D$  está en el interior del  $\angle ABC$ .

20. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se intersecan. [Sugerencia: Utilíicense los resultados del problema 19 anterior y del problema 7 del Conjunto de problemas 6-8.]

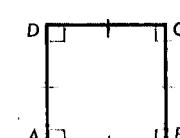
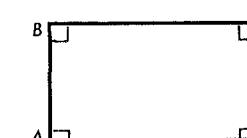
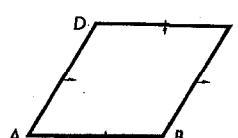
## 9-6. ROMBO, RECTÁNGULO Y CUADRADO

### Definiciones

Un *rombo* es un paralelogramo cuyos lados son todos congruentes entre sí.

Un *rectángulo* es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos.

Un *cuadrado* es un rectángulo cuyos lados son todos congruentes entre sí.



Como anteriormente, dejamos al alumno las demostraciones de los siguientes teoremas:

### Teorema 9-23

Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces tiene cuatro ángulos rectos, y el paralelogramo es un rectángulo.

### Teorema 9-24

En un rombo, las diagonales son perpendiculares entre sí.

[Sugerencia: V. el corolario 6-2.1.]

### Teorema 9-25

Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un rombo.

### Conjunto de problemas 9-6

1. Indicar si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso:

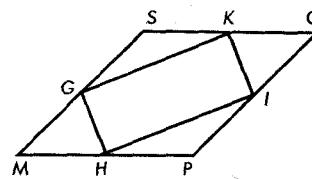
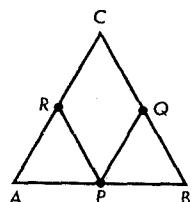
- (a) Un rectángulo es un trapecio.
- (b) Un cuadrado es un paralelogramo.
- (c) Un rombo es un cuadrado.
- (d) Un rectángulo es un cuadrado.
- (e) Un cuadrado es un rectángulo.
- (f) Un cuadrado es un rombo.
- (g) Las diagonales de un rombo se bisecan.
- (h) Las diagonales de un rectángulo son perpendiculares entre sí.
- (i) Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares y se bisecan.
- (j) Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, el cuadrilátero es un rombo.

2. Demostrar: Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

3. Demostrar: Las diagonales de un rombo bisecan a los ángulos del rombo.

4. Datos: El  $\triangle ABC$ , con  $AC = BC$ ;  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son puntos medios.

Demostrar: El  $\square PQR$  es un rombo.



5. Datos: El rombo  $\square MPQS$ ;  $G$ ,  $H$ ,  $I$  y  $K$  son puntos medios.

Demostrar: El  $\square GHIK$  es un rectángulo.

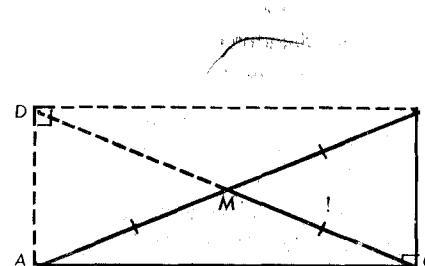
6. ¿Para qué cuadriláteros (paralelogramo, rectángulo, rombo, cuadrado) se podría demostrar cada una de las siguientes propiedades?
- (a) Las diagonales se bisecan.
  - (b) Las diagonales son congruentes.
  - (c) Los ángulos consecutivos son congruentes.
  - (d) Las diagonales bisecan a los ángulos del cuadrilátero.
  - (e) Las diagonales son perpendiculares.
  - (f) Los ángulos opuestos son congruentes.
  - (g) Las diagonales son congruentes y perpendiculares.
7. Indicar si sería suficiente imponer cada una de las siguientes condiciones a un cuadrilátero para demostrar que es un paralelogramo; un rectángulo; un rombo; un cuadrado. Considérese cada cuestión por separado.
- (a) Tiene dos pares de lados paralelos.
  - (b) Tres de sus ángulos son ángulos rectos.
  - (c) Es equilátero.
  - (d) Sus diagonales son congruentes y perpendiculares.
  - (e) Cada dos ángulos consecutivos son suplementarios.
  - (f) Dos lados son paralelos.
  - (g) Sus diagonales se bisecan.
  - (h) Sus diagonales son congruentes, son perpendiculares y se bisecan.
- \* 8. Demostrar: Si en el  $\square ABCD$ ,  $\angle A \cong \angle C$  y  $\angle B \cong \angle D$ , entonces el  $\square ABCD$  es un paralelogramo. [Sugerencia: Trácese una diagonal. Utilícese el teorema 9-13 y el problema 7 del Conjunto de problemas 9-1.]
- \* 9. Se da el paralelogramo  $\square ABCD$ , con  $AD > AB$ . La bisectriz del  $\angle A$  interseca a  $\overline{BC}$  en  $G$ , y la bisectriz del  $\angle B$  interseca a  $\overline{AD}$  en  $H$ . Demostrar que el  $\square ABGH$  es un rombo.
10. Datos: El  $\square PQRS$  es un cuadrado. Los puntos  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  dividen a los lados en segmentos, como en la figura, de longitudes  $a$  y  $b$ .
- Demostrar: El  $\square JKLM$  es un cuadrado.
- 
- \* 11. Un cuadrilátero en el cual exactamente una diagonal es la mediatrix de la otra diagonal se llama una *cometa*. Demostrar que una cometa tiene dos pares de lados congruentes, pero que sus lados opuestos no son congruentes.
- \*\* 12. En el cuadrilátero convexo  $\square ABCD$ ,  $\overline{AD}$  es el lado más corto y  $\overline{BC}$  es el lado más largo. Demostrar que  $\angle D > \angle B$ . [Sugerencia: Trácese una diagonal.] ¿Será cierto el teorema si no se requiere que el  $\square ABCD$  sea convexo?

## 9-7. ALGUNOS TEOREMAS RELACIONADOS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Nuestros conocimientos acerca de los cuadriláteros nos dan alguna información acerca de los triángulos rectángulos.

### Teorema 9-26

La longitud de la mediana correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la mitad de la longitud de la hipotenusa.

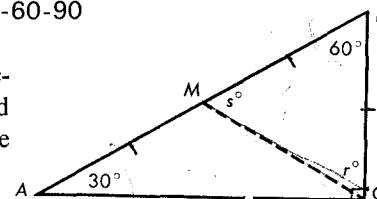


**Demuestra:** Se da el  $\triangle ABC$ , con ángulo recto en  $C$  y  $M$  el punto medio de  $\overline{AB}$ . Tómese un punto  $D$ , en  $\overline{CM}$ , tal que el  $\square ADBC$  sea un paralelogramo. (¿Cómo puede determinarse este punto?) Entonces, el  $\square ADBC$  es un rectángulo. (¿Por qué?) Luego,  $CD = AB$ . (¿Por qué?) En consecuencia,  $CM = \frac{1}{2}AB$ , como queríamos.

El teorema siguiente nos dice algo relacionado con la forma de ciertos triángulos especiales:

### Teorema 9-27. El teorema del triángulo 30-60-90

Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo tiene medida 30, entonces la longitud del lado opuesto es la mitad de la longitud de la hipotenusa.



**Demuestra:** Se da el  $\triangle ABC$ , con ángulo recto en  $C$  y con  $m\angle A = 30$ . Sea  $M$  el punto medio de la hipotenusa  $\overline{AB}$ . Por el teorema 9-26, sabemos que

$$AM = BM = MC,$$

como se indica en la figura.

Ahora,  $m\angle B = 60$ . (¿Por qué?) Por tanto,  $r = 60$ , en virtud del teorema del triángulo isósceles.

Pero,

$$r + s + 60 = 180.$$

Por consiguiente,  $s = 60$ , y el  $\triangle MBC$  es equiángulo. En consecuencia, el  $\triangle MBC$  es equilátero. Luego,

$$BC = MC = \frac{1}{2}AB,$$

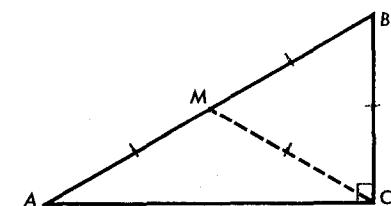
como queríamos demostrar.

Algunas veces, nos referimos a este teorema diciendo que "en un triángulo 30-60-90, la longitud de la hipotenusa es dos veces la longitud del cateto más corto".

El recíproco del teorema 9-27 es también cierto.

### Teorema 9-28

Si la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es la mitad de la longitud de la hipotenusa, entonces el ángulo opuesto tiene medida 30.



**Demuestra:** Se da el  $\triangle ABC$ , con ángulo recto en  $C$ , y  $BC = \frac{1}{2}AB$ . Sea  $M$  el punto medio de  $\overline{AB}$ . Entonces,  $AM = MB = BC$ . En virtud del teorema 9-26,  $MC = MB$ . (Ahora hemos justificado las marcas en la figura.)

Como el  $\triangle MBC$  es equilátero, es equiángulo. Por tanto,  $m\angle B = 60$ . Por el corolario 9-13.2,  $m\angle A = 30$ , como queríamos demostrar.

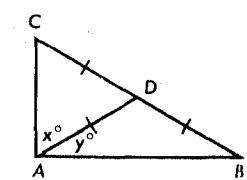
### Conjunto de problemas 9-7

- En el  $\triangle ABC$ , el  $\angle C$  es un ángulo recto,  $AC = 6$ , y la longitud de la mediana  $\overline{CD}$  es 5. ¿Cuánto es  $AB$ ?
- En la figura siguiente de la izquierda,  $RQ = 2RP$ . Entonces, ¿cuánto es  $m\angle R$ ?
- En la figura anterior de la derecha,  $\overline{AC} \perp \overline{AB}$  y  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ . Si  $BC = 12$ , hallar  $DB$ .
- En el triángulo equilátero  $\triangle GHK$ , la longitud de la altura  $\overline{GM}$  es 9. Pasando por  $M$ , se trazan segmentos perpendiculares a los otros dos lados. Demostrar que esos segmentos son congruentes y calcular sus longitudes.
- Demostrar el recíproco del teorema 9-26:  
En un triángulo, si la longitud de una mediana es la mitad de la longitud del lado que biseca, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo y el lado es su hipotenusa.

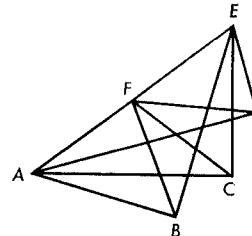
Datos: El  $\triangle ABC$ , la mediana  $\overline{AD}$ ,  $AD = \frac{1}{2}BC$ .

Demostrar: El  $\triangle ABC$  es un triángulo rectángulo y  $\overline{BC}$  es su hipotenusa.

[Sugerencia: Demuéstrese que  $x + y = 90$ .]



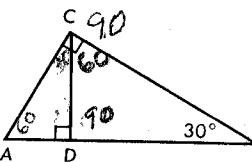
6. En la figura,  $F$  es el punto medio de  $\overline{AE}$ , y los ángulos  $\angle ABE$ ,  $\angle ACE$  y  $\angle ADE$  son rectos. Demostrar que  $F$  equidista de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ .



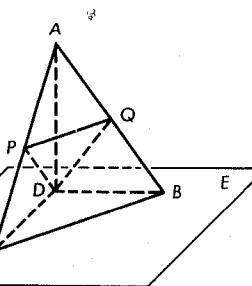
7. El  $\triangle PQR$  es isósceles, con  $PR = QR = a$ .  $L$  es cualquier recta que pasa por  $R$  pero que no contiene a  $P$  ni a  $Q$ .  $X$  y  $Y$  son dos puntos de  $L$  a una distancia  $a$  de  $R$ . Demostrar que  $\overline{XP} \perp \overline{YP}$  y que  $\overline{XQ} \perp \overline{YQ}$ .

8. En cualquier triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos. Demostrar que en un triángulo 30-60-90, las longitudes de estos segmentos están en la razón 1:3.

$$\frac{1}{3} = \frac{AD}{PR}$$



9. Se da un triángulo equilátero,  $\triangle ABC$ . En el rayo opuesto a  $\overrightarrow{BA}$ , tómese el punto  $D$  tal que  $BD = AC$ . Demostrarse que  $m\angle BCD = 30$ .

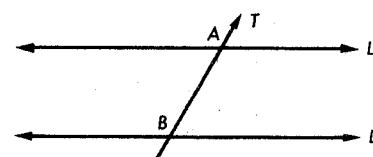


10. En la figura, el  $\triangle ABC$  es equilátero,  $\overline{AD} \perp \overline{BE}$ , y  $P$  y  $Q$  son puntos medios de  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$ , respectivamente. Demostrar que el  $\triangle PDQ$  es equilátero.

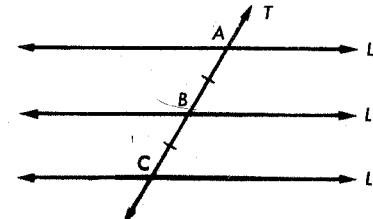
## 9-8. SECANTES A VARIAS RECTAS PARALELAS

### Definiciones

Si una secante corta a dos rectas  $L_1$ ,  $L_2$  en los puntos  $A$  y  $B$ , entonces decimos que  $L_1$  y  $L_2$  determinan o marcan el segmento  $\overline{AB}$  en la secante.



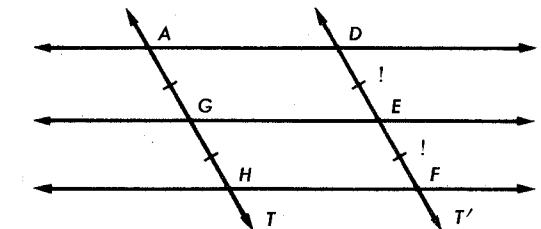
Supongamos que tenemos tres rectas dadas  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ , y una secante que las interseca en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Si  $AB = BC$ , entonces decimos que las tres rectas determinan segmentos congruentes en la secante.



Demostraremos que si tres rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante. Nuestro primer paso es demostrar el siguiente teorema:

### Teorema 9-29

Si tres rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante  $T$ , entonces determinan segmentos congruentes en cualquier secante  $T'$  paralela a  $T$ .

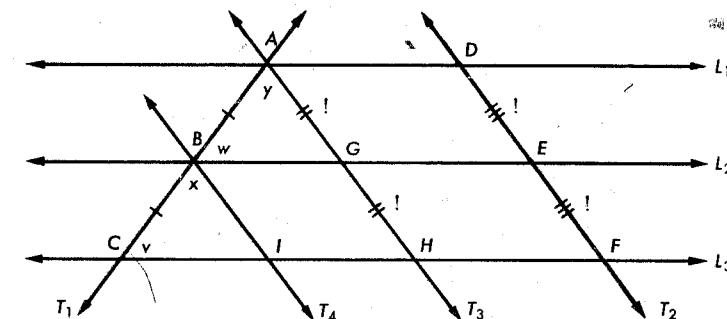


**Demostración:** Primeramente, observamos que el  $\square AGED$  y el  $\square GHFE$  son paralelogramos. (¿Por qué?) Se da que  $AG = GH$ . En virtud del teorema 9-15,  $AG = DE$  y  $GH = EF$ . Por tanto,  $DE = EF$ .

Ahora, podemos demostrar el teorema en el caso general.

### Teorema 9-30

Si tres rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante.



**Demostración:** Sean  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  tres rectas paralelas, y sean  $T_1$  y  $T_2$  dos secantes. En la notación de la figura, se da que  $AB = BC$ , y queremos demostrar que  $DE = EF$ . Ya sabemos que esto es cierto si  $T_1 \parallel T_2$ . Por consiguiente, podemos suponer que  $T_1$  y  $T_2$  no son paralelas.

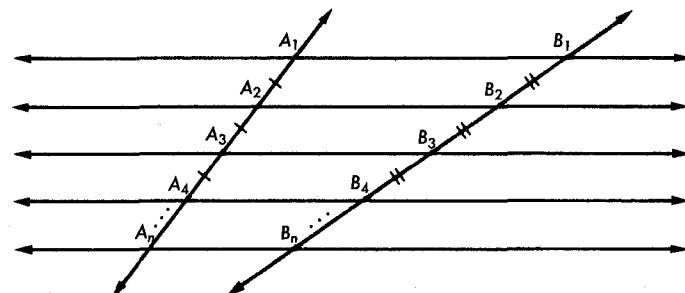
Sea  $T_3$  la recta que pasa por  $A$  paralela a  $T_2$  y sea  $T_4$  la recta que pasa por  $B$  paralela a  $T_2$ . (Refiérase al teorema 9-11.)

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $AB = BC$ .	Dato.
2. $\angle x \cong \angle y$ .	Teorema 9-9.
3. $\angle v \cong \angle w$ .	Teorema 9-9.
4. $\triangle ABG \cong \triangle BCI$ .	ALA.
5. $AG = BI$ .	Lados correspondientes.
6. $BI = GH$ .	Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
7. $AG = GH$ .	Pasos 5 y 6.
8. $DE = EF$ .	Teorema 9-29.

La misma conclusión será válida para un número cualquiera de rectas paralelas.

### Corolario 9-30.1

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante.



Es decir, dado que

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots,$$

se deduce que

$$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \dots,$$

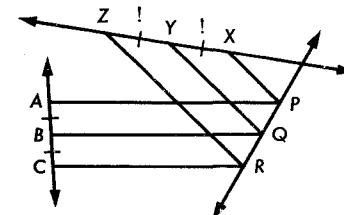
y así sucesivamente. Esto se demuestra mediante repetidas aplicaciones del teorema que acabamos de demostrar.

### Conjunto de problemas 9-8

1. Datos:  $AB = BC$ ,

$$\overline{AP} \parallel \overline{BQ} \parallel \overline{CR},$$

$$\overline{PX} \parallel \overline{QY} \parallel \overline{RZ}.$$



Demostrar:  $XY = YZ$ .

¿Tendrán que ser coplanaarias  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{XZ}$  para que la demostración sea válida?

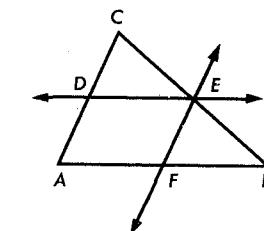
2. Demostrar el siguiente teorema:

Si una recta biseca a un lado de un triángulo y es paralela a un segundo lado, entonces biseca al tercer lado.

3. En la figura,

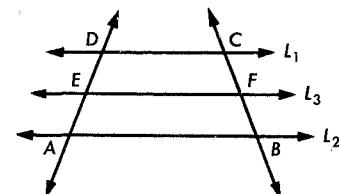
$$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB}, \quad \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AC},$$

y  $D$  es el punto medio de  $\overline{AC}$ . Demostrar que



4. Si una secante corta a las paralelas  $L_1$  y  $L_2$  en  $D$  y  $A$ , y otra secante corta a  $L_1$  y a  $L_2$  en  $C$  y  $B$ , entonces el  $\square ABCD$  es un trapezio.

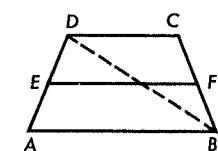
Dado que  $L_3 \parallel L_1$ , ¿por qué es  $L_3$  también paralela a  $L_2$ ? Si  $L_3$  contiene a  $E$ , el punto medio de  $\overline{AD}$ , ¿por qué contiene  $L_3$  a  $F$ , el punto medio de  $\overline{BC}$ ? ¿Contiene  $L_3$  a  $\overline{EF}$ ? ¿Por qué? El segmento  $EF$  se llama la *mediana* del trapezio  $\square ABCD$ , y los lados paralelos  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  se llaman *bases* del trapezio.



- (a) Demostrar que la mediana de un trapezio biseca a ambas diagonales.

- (b) Demostrar que la longitud de la mediana de un trapezio es la semisuma de las longitudes de las bases; esto es, demostrar que

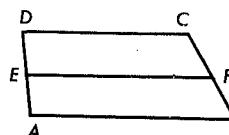
$$EF = \frac{1}{2}(AB + CD).$$



[Sugerencia: Trácese una diagonal y utilícese el teorema 9-22.]

5. El  $\square ABCD$  es un trapeño, con  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ .  $\overline{EF}$  es la mediana. (V, el problema 4.)

- (a) Si  $AB = 12$  y  $DC = 7$ , entonces  $EF = ?$   
 (b) Si  $AB = 14$  y  $DC = 14$ , entonces  $EF = ?$   
 (c) Si  $DC = 6$  y  $EF = 14$ , entonces  $AB = ?$   
 (d) Si  $AB = 27$  y  $EF = 18$ , entonces  $DC = ?$

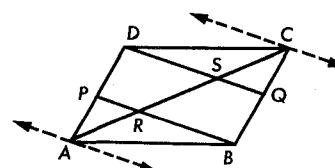


6. Demostrar que en un paralelogramo, los dos segmentos determinados por un par de vértices opuestos y los puntos medios de un par de lados opuestos trisecan a una diagonal.

Datos: El  $\square ABCD$  es un paralelogramo.  $P$  y  $Q$  son los puntos medios de  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente.

Demostrar:  $AR = RS = SC$ .

[Indicación: ¿Es  $\overline{DQ}$  paralelo a  $\overline{RB}$ ?]

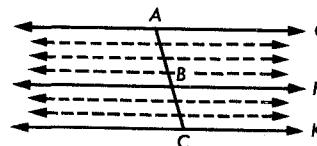


7. En el problema 6, si  $K$  es el punto medio de  $\overline{DC}$  y  $M$  es el punto medio de  $\overline{AB}$ , ¿contienen  $\overline{BK}$  y  $\overline{DM}$  a los puntos  $S$  y  $R$ ? ¿Por qué?

8. En el problema 6, si  $\overline{DB}$  y  $\overline{AC}$  se intersecan en  $E$ , demostrar que  $ES = \frac{1}{3}AC$ .

9. En la figura, las rectas paralelas son equidistantes y dividen a  $\overline{AC}$  en 7 segmentos congruentes. Si  $AB = 2$  y  $BC = 1\frac{1}{2}$ , entonces 7 es el número menor de segmentos congruentes en que un conjunto de rectas paralelas puede dividir a  $\overline{AC}$ , si las paralelas han de incluir a  $\overline{AG}$ ,  $\overline{BH}$  y  $\overline{CK}$ . En las mismas condiciones, ¿cuál será el número mínimo de segmentos congruentes, si se tienen los siguientes datos?

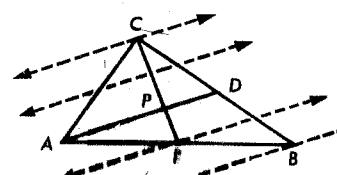
- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| (a) $AB = 4$ , $BC = 1$                | (b) $AB = 3.5$ , $BC = 1$             |
| (c) $AB = 15$ , $BC = 3$               | (d) $AB = 1.3$ , $BC = 0.8$           |
| (e) $AB = 1.414$ , $BC = 1$            | (f) $AB = \sqrt{2}$ , $BC = 1$        |
| (g) $AB = \sqrt{3}$ , $BC = 2\sqrt{3}$ | (h) $AB = \sqrt{2}$ , $BC = \sqrt{3}$ |



### PROBLEMA OPTATIVO

Utilícese la figura como ayuda en la demostración del siguiente teorema:

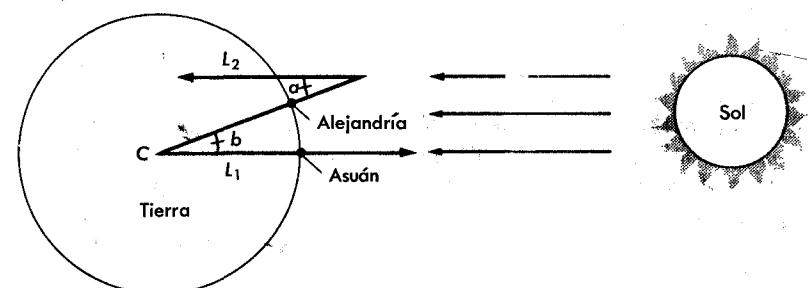
Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto cuya distancia a cualquier vértice es dos tercios de la longitud de la mediana trazada desde ese vértice.



### 9-9. CÓMO ERATÓSTENES MIDIÓ LA TIERRA

La longitud de la circunferencia de la Tierra, en el Ecuador, es alrededor de 24,900 millas o 40,000 kilómetros. En el siglo XV, se creía que era más pequeña que esto. Por consiguiente, cuando Colón salió para las Indias y desembarcó en una de las islas Bahamas, pensó que estaba ya realmente en las Indias. Así, su error fue mayor que el ancho de los Estados Unidos de Norteamérica más el del océano Pacífico.

En el tercer siglo a. de J.C., sin embargo, los griegos sabían más. En esa época, un matemático griego, Eratóstenes, midió la longitud de la circunferencia de la Tierra, y su resultado tuvo un error de solamente uno o dos por ciento. Ideó el siguiente método:



Se había observado que en Asuán, en la ribera del Nilo, al mediodía en el solsticio de verano, el Sol estaba exactamente en el cenit. Esto es, al mediodía de ese día particular, un mástil vertical no producía sombra alguna y el fondo de un pozo profundo quedaba completamente iluminado.

En la figura,  $C$  es el centro de la Tierra. Al mediodía en el solsticio de verano en Alejandría, Eratóstenes midió el ángulo marcado  $\angle a$  en la figura, es decir, el ángulo formado por un mástil vertical y el rayo que pasa por el extremo superior de éste y por el extremo de su sombra. Encontró que dicho ángulo era aproximadamente  $7^\circ 12'$ , o alrededor de  $\frac{1}{50}$  de una circunferencia completa.

Ahora bien, los rayos solares, observados en la Tierra, son casi paralelos. Suponiendo que, efectivamente, son paralelos, se deduce, entonces, que cuando las rectas  $L_1$  y  $L_2$  en la figura son cortadas por una secante, los ángulos alternos internos son congruentes. Por tanto,  $\angle a \cong \angle b$ . En consecuencia, la distancia de Asuán a Alejandría tenía que ser  $\frac{1}{50}$  de la longitud de la circunferencia de la Tierra.

Se sabía que la distancia desde Asuán a Alejandría era, aproximadamente, 5000 estadios griegos. (Un *estadio* era una unidad de longitud antigua.) Eratóstenes concluyó que la longitud de la circunferencia de la Tierra era alrededor de 250,000 estadios. Al convertir esto en kilómetros o en millas, de acuerdo con lo que nos dice la historia antigua referente a la longitud de un estadio, obtenemos 39,689 kilómetros o 24,662 millas.

Así, el error de Eratóstenes fue menor que dos por ciento. Más tarde, cambió su cálculo por uno mejor, 252,000 estadios, pero nadie parece saber por qué hizo ese cambio. De acuerdo con los datos conocidos, algunos historiadores creen que no sólo era inteligente y cuidadoso, sino también que tuvo mucha suerte.

Desde los primeros tiempos, la geometría ha jugado un papel importante en las matemáticas aplicadas. Los egipcios la necesitaban con urgencia, porque el Nilo se desbordaba todos los años, borrando las lindes de las tierras cultivadas y creando problemas difíciles de agrimensura. Así, la palabra *geometría* se deriva de dos palabras griegas que significan *tierra* y *medida*. Más tarde, resultó que la “geometría” podía emplearse no sólo para medir cosas en la Tierra, sino literalmente para medir la *Tierra* misma. Esto ilustra una regla general: Cuando se ha desarrollado buena matemática por una cierta razón, generalmente resulta también buena, por otras razones inesperadas.

### ERATÓSTENES (276-194 A. de J.C.)

Muy poco se conoce sobre la obra de Eratóstenes (276-194 a. de J.C.). Tenemos algunos fragmentos de sus libros, en forma de citas por otros autores antiguos, pero ninguno de sus propios libros ha sobrevivido. Los informes que se tienen indican, sin embargo, que escribió sobre casi todo: geometría, astronomía, teoría de los números, historia y literatura. También fue poeta. Los griegos le llamaban *Beta* (la segunda letra de su alfabeto), dado que era el segundo en todo, aunque nunca el mejor en cosa alguna.

Su logro de medir la Tierra, no obstante, resultó ser tan espectacular, que fue propagado detalladamente por otros y acreditado con toda justicia a él.

## Resumen del capítulo

### Conjunto A

#### 1. Indicar si cada enunciado es cierto o falso:

- En un plano, si una recta es paralela a una de dos paralelas, es paralela a la otra.
- Las diagonales de un rombo bisecan a los ángulos del rombo.
- Si la mediana correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene longitud de 7 cm., entonces la hipotenusa tiene 14 cm. de largo.
- Un paralelogramo es un trapecio.
- Si dos rectas son cortadas por una secante, los ángulos correspondientes son congruentes.
- Cualquier diagonal de un paralelogramo forma, con los lados, dos triángulos congruentes.
- Las diagonales de un rombo son congruentes.

- Si la longitud de un lado de un triángulo 30-60-90 es de 8 cm., entonces la hipotenusa tiene 16 cm. de largo.
- Dos rectas o son paralelas o se intersecan.
- En un plano, si una recta interseca a una de dos rectas paralelas, interseca a la otra.
- Completar cada enunciado:
  - Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, los ángulos internos a un mismo lado de la secante son \_\_\_\_\_.
  - Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces \_\_\_\_\_.
  - Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son \_\_\_\_\_.
  - El largo de la hipotenusa de un triángulo 30-60-90 es 13. El lado opuesto al ángulo de \_\_\_\_\_ es congruente con la \_\_\_\_\_ correspondiente a la hipotenusa, y el largo de cada uno es \_\_\_\_\_.
  - Si tres o más paralelas determinan segmentos \_\_\_\_\_ en una secante, entonces \_\_\_\_\_.
  - El postulado de las paralelas establece la \_\_\_\_\_ de una recta que pasa por un punto y que es \_\_\_\_\_ a una recta que no contiene al punto.
- Para cada ejemplo, elegir la alternativa que hace cierto el enunciado:
  - Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, el cuadrilátero es:
    - un rombo,
    - un cuadrado,
    - un paralelogramo,
    - un rectángulo.
  - La figura formada al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera es:
    - un rectángulo,
    - un paralelogramo,
    - un rombo,
    - ninguno de éstos.
  - Las bisectrices de los ángulos opuestos de un paralelogramo que no es un rombo son:
    - paralelas,
    - colineales,
    - perpendiculares,
    - alabeadas.
  - Las bisectrices de los ángulos internos a un mismo lado de la secante a dos rectas paralelas
    - son paralelas,
    - son perpendiculares,
    - se intersecan, pero no son perpendiculares,
    - son alabeadas.
- Indicar si serían suficientes las siguientes condiciones impuestas a un cuadrilátero para demostrar que es un trapecio; un paralelogramo; un rombo; un cuadrado. Considerese cada cuestión por separado.
  - Los cuatro lados son congruentes.
  - Dos lados son paralelos.

- (c) Dos lados son congruentes.
- (d) Sus diagonales se bisecan.
- (e) Sus diagonales son congruentes y se bisecan.
- (f) Es equiángulo.
- (g) Sus diagonales son congruentes y perpendiculares.
- (h) Es equilátero y equiángulo.
- (i) Cada dos ángulos opuestos son congruentes.
- (j) Cada diagonal biseca a dós de sus ángulos.

5. Indicar, mediante las letras T, A o N, si cada enunciado es cierto en TODOS los casos, si es cierto en ALGUNOS casos y falso en otros, o si NO es cierto en ningún caso:

- (a) En un plano, dos segmentos de recta que no se intersecan son paralelos.
- (b) Si dos rectas son cortadas por una secante, los rayos que bisecan a un par de ángulos alternos internos son paralelos.
- (c) Las diagonales de un rombo se bisecan.
- (d) Las diagonales de un cuadrilátero son paralelas.
- (e) Los ángulos opuestos de un paralelogramo son suplementarios.
- (f) Un cuadrado es un rectángulo.
- (g) Si una diagonal de un cuadrilátero forma con los lados dos triángulos congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.
- (h) Si una mediana de un triángulo tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del lado que biseca, el triángulo es un triángulo rectángulo.
- (i) Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos y los otros dos lados son congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.
- (j) Si dos ángulos opuestos de un cuadrilátero son ángulos rectos, el cuadrilátero es un rectángulo.

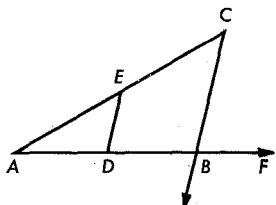
## Conjunto B

1. Se da la figura, con  $D$  y  $E$  puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente.

- (a) Si  $m\angle a = 33$  y  $m\angle c = 45$ , determinar  $m\angle CBF$  y  $m\angle CED$ .

- (b) Si  $BC = 6$ , entonces  $DE = ?$

- (c) El  $\square DBCE$  es un \_\_\_\_\_.

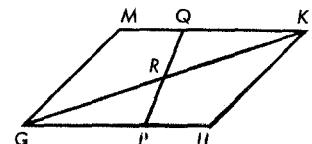


2. Si en el  $\triangle ABC$ ,  $AB = 12$ ,  $BC = 9$ ,  $AC = 13$ , y  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son los puntos medios de los lados, calcular el perímetro del  $\triangle PQR$ .

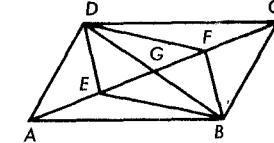
3. Datos: El  $\square GHKM$  es un paralelogramo y

$$MQ = HP.$$

Demostrar que  $\overline{GK}$  y  $\overline{PQ}$  se bisecan.



4. En la figura, el  $\square DEBF$  es un paralelogramo y  $AE \perp CF$ . Demostrar que el  $\square ABCD$  es un paralelogramo.

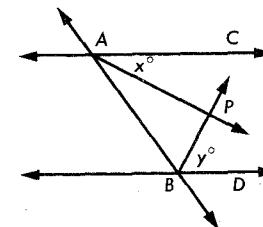


5. Demostrar: Si las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo se intersecan, son perpendiculares.

6. Se da que  $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{ED}$ . Las bisectrices de los ángulos  $\angle CAB$  y  $\angle DBA$  se intersecan en  $P$  y

$$AB = 2PB.$$

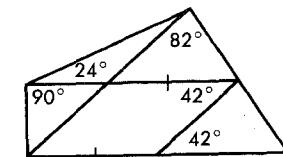
Hallar  $x$  y  $y$ .



7. ¿Por qué no es válido el siguiente razonamiento?

Por el teorema 9-11, sabemos que en un plano, dos rectas paralelas a la misma recta son paralelas entre sí. Por tanto, si  $\overleftrightarrow{AP} \parallel L$ ,  $\overleftrightarrow{BP} \parallel L$ , y  $\overleftrightarrow{AP}$ ,  $\overleftrightarrow{BP}$  y  $L$  son coplanares, entonces  $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{BP}$ . Esto demuestra que dos rectas que se intersecan, en efecto, pueden ser paralelas.

8. En la figura de la derecha, determinar la medida de cada ángulo.

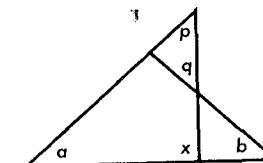


9. Demostrar: En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas que se intersecan, no es perpendicular a la otra.

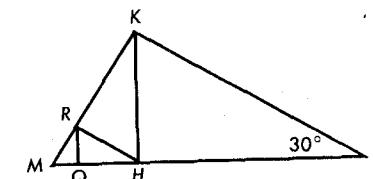
10. Datos:  $\angle a \cong \angle b$ ,

$\angle p \cong \angle q$ .

Demostrar: El  $\angle x$  es un ángulo recto.



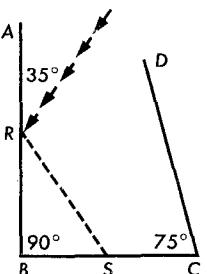
11. En el  $\triangle MPK$ , el  $\angle K$  es un ángulo recto y  $m\angle P = 30$ . Si  $\overline{KH} \perp \overline{MP}$ ,  $\overline{HR} \perp \overline{MK}$ ,  $\overline{RQ} \perp \overline{MP}$  y  $MP = 80$ , determinar  $MQ$ .



12. Demostrar: Si un trapecio tiene dos lados no paralelos cada uno congruente con uno de los lados paralelos, entonces las diagonales bisecan a los ángulos en el otro lado paralelo.

13. Cuando un rayo de luz es reflejado por una superficie lisa, el ángulo formado por el rayo incidente y la superficie es congruente con el ángulo formado por el rayo reflejado y la superficie.

En la figura,  $m\angle ABC = 90^\circ$ ,  $m\angle BCD = 75^\circ$ , y el rayo de luz forma un ángulo de  $35^\circ$  con  $\overrightarrow{RA}$ . Copiar la figura y completar el trayecto del rayo de luz a medida que se refleja por  $\overline{AB}$ , por  $\overline{BC}$ , por  $\overline{DC}$ , y otra vez por  $\overline{AB}$ . ¿Con qué ángulo se refleja el rayo por  $\overline{AB}$  la segunda vez?

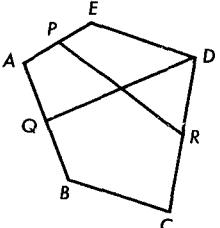


14. Demostrar la verdad o falsedad del siguiente enunciado:

Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos y un par de lados congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.

15. En la figura,  $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ ,  $ED = BC$ , y  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son puntos medios. Demostrar que  $\overline{QD}$  biseca a  $\overline{PR}$ .

[Sugerencia: Trácense  $\overline{PQ}$  y  $\overline{EB}$ .]

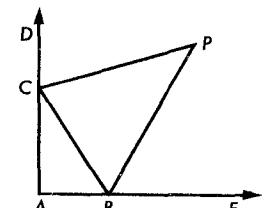


- \* 16. Demostrar la verdad o falsedad del siguiente enunciado:

Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y perpendiculares, el cuadrilátero es un cuadrado.

- \* 17. Demostrar la verdad o falsedad del siguiente enunciado:

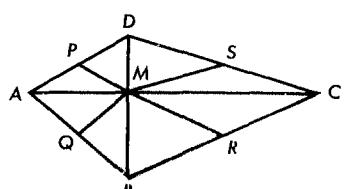
Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan, el cuadrilátero es un rectángulo.



- \* 18. En la figura,  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AE}$ , y las bisectrices de los ángulos  $\angle DCB$  y  $\angle EBC$  se intersecan en  $P$ . Hallar  $m\angle P$ , justificando cada paso.

- \* 19. Demostrar: Si cada diagonal de un cuadrilátero biseca a dos ángulos del cuadrilátero, el cuadrilátero es un rombo.

- \* 20. Las diagonales del  $\square ABCD$  son perpendiculares en  $M$ , y  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son puntos medios de los lados. Demostrar que el doble de la suma  $MP + MQ + MR + MS$  es igual al perímetro del  $\square ABCD$ .

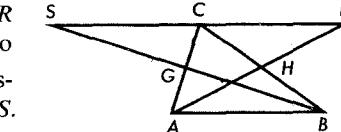


- \* 21. Demostrar que la suma de las longitudes de las perpendiculares desde cualquier punto de la base de un triángulo isósceles a los lados congruentes, es igual a la longitud de la altura correspondiente a cualquiera de los lados congruentes. [Sugerencia: Trácese una paralela a  $\overline{AC}$  que pase por  $P$  e interseque a  $\overline{BT}$  en  $Q$ . Demuéstrese que  $RP + PS = BT$ .]

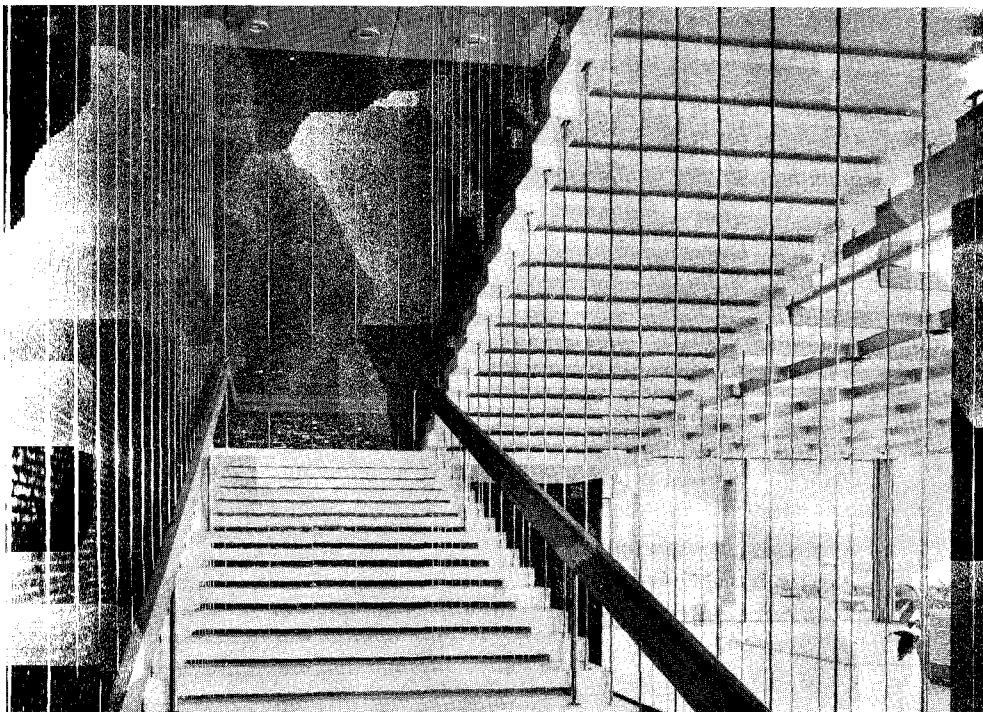
- \* 22. Se da el triángulo isósceles  $\triangle MPQ$ , con  $MP = MQ$ . Por cualquier punto  $A$  entre  $M$  y  $Q$ , trácese una perpendicular a  $\overleftrightarrow{PQ}$ , cortando a  $\overleftrightarrow{PQ}$  en  $B$  y a  $\overleftrightarrow{PM}$  en  $C$ . Demuéstrese que el  $\triangle MCA$  es isósceles.

- \* 23. En un triángulo cualquiera  $\triangle ABC$ , una recta por  $A$  es perpendicular a la bisectriz del  $\angle B$  en  $K$ . Otra recta por  $K$  es paralela a  $\overline{BC}$  y corta a  $\overline{AB}$  en  $M$ . Demostrar que  $M$  es el punto medio de  $\overline{AB}$ . ¿Puede también demostrarse que  $MK$  biseca a  $\overline{AC}$ ?

- \* 24. El  $\triangle ABC$  es un triángulo cualquiera, con  $G$  y  $H$  los puntos medios de  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente. En el rayo opuesto a  $\overrightarrow{HA}$ , tómese  $R$  tal que  $HR = HA$ . Análogamente, en el rayo opuesto a  $\overrightarrow{GB}$ , tómese  $S$  tal que  $GS = GB$ . Demuéstrese que  $R$ ,  $C$  y  $S$  están alineados y que  $CR = CS$ .



# 10 | Rectas y planos paralelos



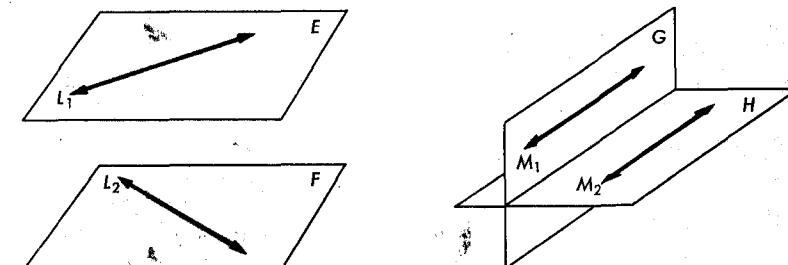
## 10-1. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS PLANOS PARALELOS

### Definición

Dos planos, o un plano y una recta, son *paralelos*, si no se intersecan.

Si los planos  $E_1$  y  $E_2$  son paralelos, escribimos  $E_1 \parallel E_2$ . Si la recta  $L$  y el plano  $E$  son paralelos, escribimos  $L \parallel E$  o  $E \parallel L$ .

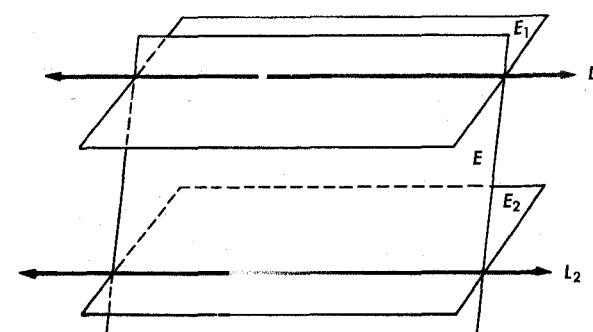
Como veremos, el paralelismo en el espacio se comporta de manera parecida al paralelismo en el plano. No obstante, hay varias diferencias importantes. Una de ellas es que no hay planos alabeados: cada dos planos en el espacio o se intersecan o son paralelos. Más aún, si dos rectas están en planos paralelos, no se puede deducir que las rectas sean paralelas. (V. la figura de la izquierda, a continuación.) También, si dos rectas son paralelas, siempre podemos encontrar dos planos que las contienen y que no son paralelos. (V. la figura de la derecha, a continuación.)



En el siguiente teorema, se describe una situación corriente en la cual planos paralelos y rectas paralelas aparecen en la misma figura:

### Teorema 10-1

Si un plano interseca a dos planos paralelos, entonces la intersección consiste en dos rectas paralelas.



**Demostración:** Se da un plano  $E$ , que interseca a dos planos paralelos  $E_1$  y  $E_2$ . Por el postulado 8 (pág. 60), tenemos que

- (1)  $E$  interseca a  $E_1$  en una recta  $L_1$ , y
- (2)  $E$  interseca a  $E_2$  en una recta  $L_2$ .

Evidentemente,

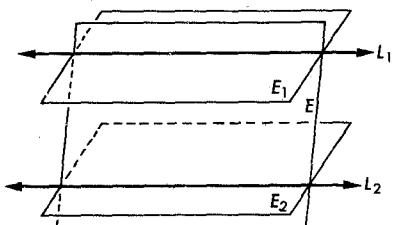
- (3)  $L_1$  y  $L_2$  son coplanarias

(pues ambas están en  $E$ ) y

- (4)  $L_1$  y  $L_2$  no tienen punto común alguno

(porque  $E_1$  y  $E_2$  no tienen puntos comunes). Las afirmaciones (3) y (4) nos dicen que

- (5)  $L_1 \parallel L_2$ .

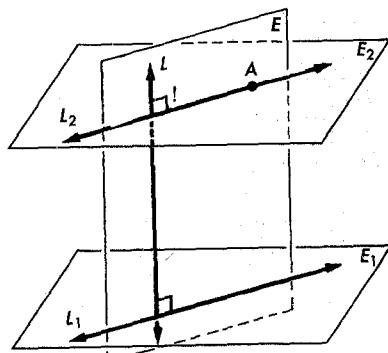


### Teorema 10-2

Si una recta es perpendicular a uno de dos planos paralelos, es perpendicular al otro.

**Demostración:** Se dan  $E_2 \parallel E_1$  y  $L \perp E_1$ . Sea  $A$  un punto cualquiera que está en  $E_2$  pero no en  $L$ . Entonces,

- (1)  $L$  y  $A$  están en un plano  $E$  (¿por qué?),
- (2)  $E$  interseca a  $E_1$  y a  $E_2$  en las rectas  $L_1$  y  $L_2$  (¿por qué?),
- (3)  $L_1 \parallel L_2$  (en virtud del teorema 10-1),
- (4)  $L \perp L_1$  (porque  $L \perp E_1$ ),
- (5)  $L \perp L_2$  (por el teorema 9-12).

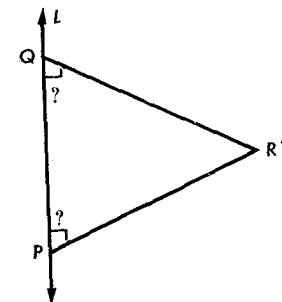
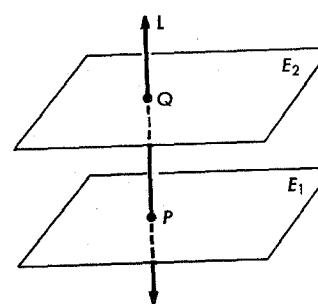


Así, tenemos una recta en  $E_2$  que es perpendicular a  $L$ . Si repetimos todo el razonamiento, empezando con otro punto  $B$ , obtenemos otra recta en  $E_2$ , perpendicular a  $L$ . Se deduce ahora que  $L \perp E_2$ , en virtud del teorema 8-2.

El siguiente teorema es análogo al teorema 9-2:

### Teorema 10-3

Dos planos perpendiculares a la misma recta son paralelos.



**Demostración:** Se da que  $E_1 \perp L$  en  $P$  y que  $E_2 \perp L$  en  $Q$ . Queremos demostrar que  $E_1 \parallel E_2$ . Si esto no fuera cierto, entonces  $E_1$  intersearía a  $E_2$  en un punto  $R$ , al menos.

Ahora bien,  $\overleftrightarrow{RP} \perp L$  y  $\overleftrightarrow{RQ} \perp L$ , porque  $L$  es perpendicular a toda recta en  $E_1$  que pasa por  $P$  y también a toda recta en  $E_2$  que pasa por  $Q$ . Esto nos da dos perpendiculares desde  $R$  a  $L$ , lo cual es imposible. (V. el teorema 6-4.) Por tanto,  $E_1$  y  $E_2$  son paralelos.

### Corolario 10-3.1

Si cada uno de dos planos es paralelo a un tercer plano, los planos son paralelos entre sí.

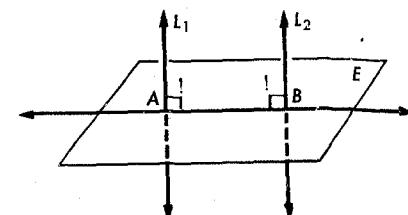
(El alumno deberá seguir la demostración sin necesidad de una figura.)

**Demostración:** Se dan  $E_1 \parallel E_3$  y  $E_2 \parallel E_3$ . Sea  $L$  una recta perpendicular a  $E_3$ . Entonces,

- (1)  $L \perp E_1$  (por el teorema 10-2),
- (2)  $L \perp E_2$  (por el teorema 10-2),
- (3)  $E_1 \parallel E_2$  (por el teorema 10-3).

### Teorema 10-4

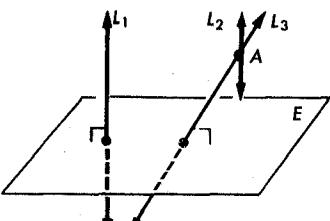
Dos rectas perpendiculares al mismo plano son paralelas.



**Demostración:** Sean  $L_1 \perp E$  en  $A$  y  $L_2 \perp E$  en  $B$ . Por el teorema 8-7,  $L_1$  y  $L_2$  son coplanarias. Como  $L_1 \perp E$ ,  $L_1 \perp \overleftrightarrow{AB}$ . Puesto que  $L_2 \perp E$ ,  $L_2 \perp \overleftrightarrow{AB}$ . En virtud del teorema 9-2,  $L_1 \parallel L_2$ .

**Corolario 10-4.1**

Un plano perpendicular a una de dos rectas paralelas es perpendicular a la otra.



**Demostración:** Sean  $L_1 \parallel L_2$  y  $L_1 \perp E$ . Sea  $L_3$  una recta perpendicular a  $E$  y que pasa por un punto  $A$  cualquiera de  $L_2$ .  $L_3$  existe, en virtud del teorema 8-9. Entonces, por el teorema 10-4,  $L_1 \parallel L_3$ . Del postulado de las paralelas, se deduce que  $L_3 = L_2$ , es decir,  $L_3$  y  $L_2$  tienen que ser la misma recta. Como  $L_3 \perp E$ , tenemos que  $L_2 \perp E$ .

**Corolario 10-4.2**

Si cada una de dos rectas es paralela a una tercera, entonces las rectas son paralelas entre sí.

**Demostración:** Se dan  $L_1 \parallel L_3$  y  $L_2 \parallel L_3$ . Queremos demostrar que  $L_1 \parallel L_2$ .

Sea  $E$  un plano perpendicular a  $L_3$ . Por el corolario anterior,  $L_1 \perp E$  y  $L_2 \perp E$ . En virtud del teorema 10-4,  $L_1 \parallel L_2$ .

**Teorema 10-5**

Dos planos paralelos equidistan en toda su extensión.

**O de otro modo:** Si  $E_1 \parallel E_2$ , entonces todos los puntos de  $E_1$  equidistan de  $E_2$ .

Recordemos que la distancia entre un punto  $P$  y un plano  $E$  es la longitud del segmento perpendicular desde  $P$  a  $E$ .

**Demostración:** Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos cualesquiera de  $E_1$ , y sean  $\overleftrightarrow{PR}$  y  $\overleftrightarrow{QS}$  los segmentos perpendiculares desde  $P$  y  $Q$  a  $E_2$ . Entonces,

- (1)  $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{QS}$  (por el teorema 10-4),
- (2)  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son coplanoarios, porque estos puntos están en dos rectas paralelas,
- (3)  $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$  (en virtud del teorema 10-1),
- (4) el  $\square PQSR$  es un paralelogramo, por los enunciados (1), (2) y (3),
- (5)  $PR = QS$ , porque los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

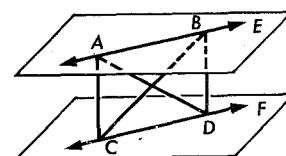
Por el teorema 10-2, sabemos que los segmentos desde  $E_1$ , perpendiculares a  $E_2$ , son precisamente los segmentos desde  $E_2$ , perpendiculares a  $E_1$ . En consecuencia, sabemos más de lo que nos dice el segundo enunciado del teorema; es decir, sabemos lo siguiente: *Si dos planos son paralelos, entonces todos los segmentos perpendiculares desde uno de los planos al otro tienen la misma longitud*. De ahora en adelante, interpretaremos el teorema 10-5 con este significado.

Obsérvese que el  $\square PQSR$  es, en efecto, un rectángulo, pero este dato no se necesita en la demostración.

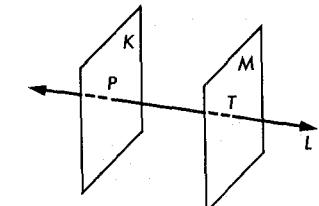
**Conjunto de problemas 10-1**

1. Datos: Los planos  $E$  y  $F$  son paralelos,  $E$  contiene a  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $F$  contiene a  $\overleftrightarrow{CD}$ ,  $\overline{AC} \perp F$  y  $\overline{BD} \perp F$ .

Demostrar que  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$  se bisecan.



2. Si el plano  $K \perp L$  en  $P$  y el plano  $M \perp L$  en  $T$ , ¿qué se podrá concluir acerca de  $K$  y  $M$ ? ¿Por qué?

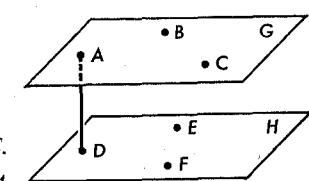


3. Demostrar que el siguiente enunciado es cierto o que es falso:

Si  $E$  y  $F$  son planos paralelos y  $E$  contiene a la recta  $L_1$  y  $F$  contiene a la recta  $L_2$ , entonces  $L_1 \parallel L_2$ .

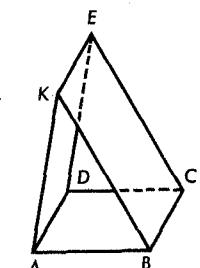
4. El plano  $G$  contiene a los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y el plano  $H$  contiene a los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$ , de manera que  $\overline{AD} \perp G$ ,  $\overline{AD} \perp H$  y  $AB = DF$ . ¿Cuáles de los siguientes enunciados deben ser ciertos?

- (a)  $AF = BD$ .
- (b)  $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ .
- (c)  $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ .
- (d)  $G \parallel H$ .
- (e)  $\overline{AC} \perp \overline{AD}$ .
- (f)  $\angle AFD \cong \angle DBA$ .
- (g)  $\overline{AF}$  y  $\overline{BD}$  se bisecan.
- (h)  $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ .



5. En la figura, el  $\square ABCD$ , el  $\square ADEK$  y el  $\square BCEK$  son paralelogramos. Demostrar que

- (a)  $\overline{EK} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ , y
- (b)  $\angle KAB \cong \angle EDC$ .

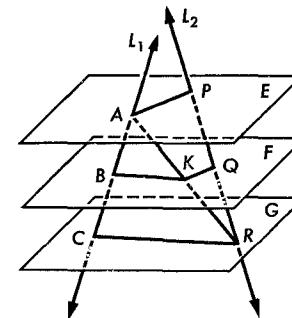


6. Se da el plano  $M$  paralelo al plano  $K$ .  $A$  y  $C$  son puntos de  $M$ , y  $B$  y  $D$  son puntos de  $K$ , tales que  $\overline{AD} \perp K$  y  $\overline{BC} \perp M$ . Demuéstrese que  $AB = CD$ .

7. Demostrar lo siguiente:

Si dos rectas paralelas son cortadas por dos planos paralelos, entonces éstos determinan segmentos congruentes en las dos rectas.

8. En la figura, las rectas alabeadas  $L_1$  y  $L_2$  intersecan a los planos paralelos  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , y  $\overline{AR}$  interseca a  $F$  en  $K$ . Si  $AB = BC$ , demuéstrese que  $PQ = QR$ .

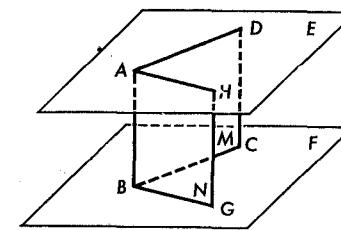


9. En el problema 8, demuéstrese también que

$$BQ < \frac{1}{2}(AP + CR).$$

10. En la figura, los planos  $M$  y  $N$  se intersecan en  $\overleftrightarrow{AB}$ , y  $M$  y  $N$  intersecan a los planos paralelos  $E$  y  $F$  en  $\overleftrightarrow{AD}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AH}$  y  $\overleftrightarrow{BG}$ . Si  $AD = BC$  y  $AH = BG$ , demuéstrese que

$$\angle DAH \cong \angle CBG.$$



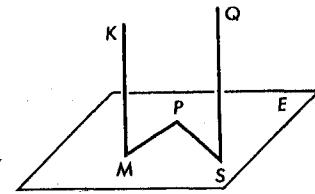
11. Indicar si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso. Dibújese un diagrama pequeño para ilustrar cada enunciado cierto, o presentese un contraejemplo, si el enunciado es falso.

- (a) Si una recta está en un plano, una recta paralela a ella es paralela al plano.
  - (b) Si una recta y un plano son paralelos, toda recta en el plano es paralela a la recta dada.
  - (c) Dos rectas paralelas al mismo plano pueden ser perpendiculares entre sí.
  - (d) Si dos rectas son paralelas, todo plano que contenga a una sola de las rectas es paralelo a la otra recta.
  - (e) Si un plano interseca a dos planos paralelos, las rectas de intersección son paralelas.
  - (f) Si un plano interseca a dos planos que se cortan, las rectas de intersección pueden ser paralelas.
12. Indicar la manera de determinar un plano que contenga una de dos rectas alabeadas y que sea paralelo a la otra. Justifíquese la construcción.

13. Datos:  $\overline{PM}$  y  $\overline{PS}$  están en el plano  $E$ .  $P$ ,  $M$  y  $S$  no están alineados.  $\overline{KM} \perp \overline{PM}$ ,  $\overline{QS} \perp \overline{PS}$ , y  $\overline{KM} \parallel \overline{QS}$ .

Demostrar que  $\overline{KM} \perp E$  y que  $\overline{QS} \perp E$ .

[Sugerencia: Trácese otro segmento paralelo a  $\overline{KM}$  y a  $\overline{QS}$ .]

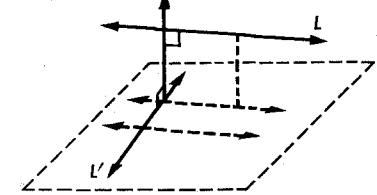


14.  $F$  y  $E$  son planos paralelos.  $A$ ,  $B$  y  $C$  están en  $E$ ,  $P$  está en  $F$  y  $\overline{PA} \perp F$ .  $R$ ,  $T$  y  $V$  son los puntos medios de  $\overline{PB}$ ,  $\overline{PA}$  y  $\overline{PC}$ , respectivamente. Demuéstrese que el plano  $RTV$  es paralelo a  $F$ .

15. Demostrar el siguiente teorema:

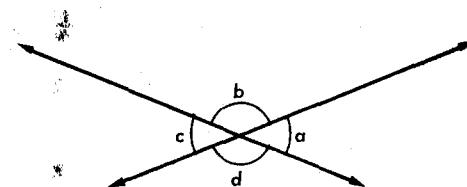
Hay una recta, y sólo una, que es perpendicular a cada una de dos rectas alabeadas dadas.

[Sugerencia: La figura de la derecha indica la manera de obtener una perpendicular común. Las rectas y segmentos de trazos representan conjuntos auxiliares.]

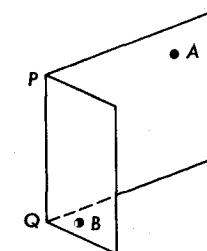
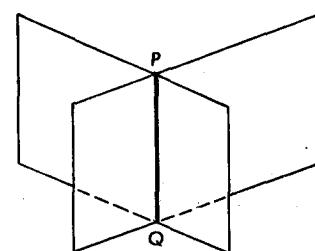


## 10-2. ÁNGULOS DIEDROS, PLANOS PERPENDICULARES

Sabemos que cuando dos rectas en un plano se intersecan, forman cuatro ángulos, así:



Considérense, ahora, dos planos en el espacio, que se intersecan en una recta, como en la figura de la izquierda, a continuación:



Los planos y la recta forman cuatro figuras, cada una de las cuales se ve como la figura anterior de la derecha. Una figura como ésta se llama un *ángulo diedro*, y la recta  $\overleftrightarrow{PQ}$  que se muestra en la figura se llama su *arista*.

## Definiciones

Si dos semiplanos tienen la misma arista, pero no están en el mismo plano, entonces la reunión de los dos semiplanos y su arista común es un *ángulo diedro*. La recta que es la arista común de los dos semiplanos se llama la *arista* del ángulo diedro. La reunión de la arista y cualquiera de los dos semiplanos se llama una *cara* del ángulo diedro.

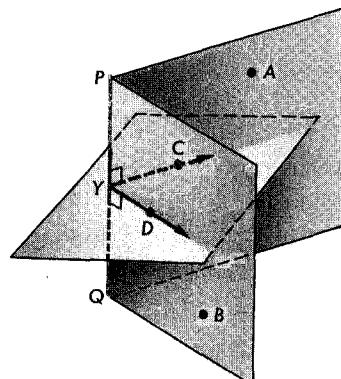
Para describir un ángulo diedro, necesitamos decir qué recta constituye la arista y cuáles son sus caras. Generalmente, hacemos esto nombrando dos puntos  $P$  y  $Q$  de la arista y dos puntos  $A$  y  $B$  que estén en las dos caras. (V. la figura de la derecha al final de la página anterior.) Entonces, denotamos el ángulo diedro por  $\angle A-PQ-B$ .

Podemos hablar del *interior* y el *exterior* de un ángulo diedro; y, también, podemos hablar de ángulos diedros *opuestos por el vértice*. Aquí, las ideas son muy parecidas a las ya familiares acerca de ángulos en un plano; el alumno deberá elaborar por sí mismo las definiciones de esas ideas.

Sería muy conveniente decir que los ángulos diedros opuestos por el vértice son congruentes. Pero primero debemos explicar lo que se entiende por la *medida* de un ángulo diedro. Hacemos esto de la siguiente manera:

## Definición

Sean dados un ángulo diedro y un plano perpendicular a su arista. La intersección del plano perpendicular con el ángulo diedro se llama *ángulo rectilíneo* del ángulo diedro.

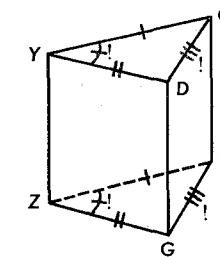
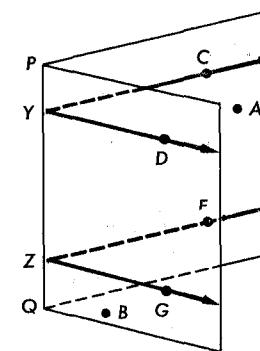


En la figura, las marcas indican que el  $\angle PYC$  y el  $\angle PYD$  son ángulos rectos. Esto significa que el plano que contiene al  $\angle CYD$  es perpendicular a  $\overrightarrow{PQ}$  en  $Y$ . Basándonos en la definición que acabamos de dar, esto significa que el  $\angle CYD$  realmente es un ángulo rectilíneo del  $\angle A-PQ-B$ .

Parece natural definir la medida del  $\angle A-PQ-B$  como la medida del  $\angle CYD$ . Pero esto no tendría sentido, si ángulos rectilíneos diferentes, del mismo ángulo diedro, tuvieran medidas diferentes. Por tanto, necesitamos demostrar el siguiente teorema:

## Teorema 10-6

Todos los ángulos rectilíneos de un mismo ángulo diedro son congruentes.



**Demostración:** Sean  $Y$  y  $Z$  los vértices de dos ángulos rectilíneos del  $\angle A-PQ-B$ . Tomamos los puntos  $C$ ,  $D$ ,  $F$  y  $G$ , en los lados de los ángulos, de manera que  $YC = ZF$  y  $YD = ZG$ , como se indica en la figura de la derecha. Ahora, tenemos:

(1) El  $\square YCFZ$  es un paralelogramo. ( $\overline{YC}$  y  $\overline{FZ}$  son congruentes y, además, son paralelos, porque están en el mismo plano y son perpendiculares a la misma recta. Véase el teorema 9-20.)

De igual manera, obtenemos que

(2) el  $\square YDGZ$  es un paralelogramo.

Por consiguiente,

(3)  $\overline{DG} \parallel \overline{CF}$  (ambos son paralelos a  $\overline{YZ}$ ),

(4)  $DG = CF$  (porque  $DG = YZ = CF$ ),

(5) el  $\square DGFC$  es un paralelogramo (porque  $\overline{DG}$  y  $\overline{CF}$  son congruentes y paralelos),

(6)  $DC = GF$  (¿por qué?),

(7)  $\triangle CYD \cong \triangle FZG$  (por el teorema LLL),

(8)  $\angle CYD \cong \angle FZG$ .

Desde luego, el enunciado (8) es lo que deseábamos.

Ahora, podemos enunciar las siguientes definiciones:

## Definiciones

La *medida* de un ángulo diedro es un número real que es la medida de cada uno de sus ángulos rectilíneos. Un ángulo diedro *recto* es aquel cuyos ángulos rectilíneos son ángulos rectos. Dos planos son *perpendiculares*, si contienen un ángulo diedro recto.

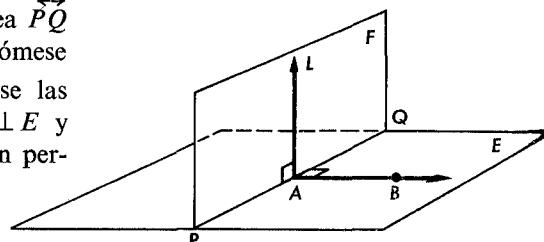
Los siguientes teoremas son fáciles de demostrar, basándose en las definiciones:

### Teorema 10-7

Si una recta es perpendicular a un plano dado, entonces todo plano que contenga a la recta es perpendicular al plano dado.

**O de otro modo:** Sea  $L$  una recta, perpendicular al plano  $E$  en el punto  $A$ , y sea  $F$  un plano cualquiera que contiene a la recta  $L$ . Entonces,  $F \perp E$ .

[*Indicación de la demostración:* Sea  $\overleftrightarrow{PQ}$  la recta en que  $F$  interseca a  $E$ . Tómese  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ}$  en  $E$ . Ahora, recuérdense las definiciones de los enunciados  $L \perp E$  y  $F \perp E$ , y demuéstrese que  $F$  y  $E$  son perpendiculares.]



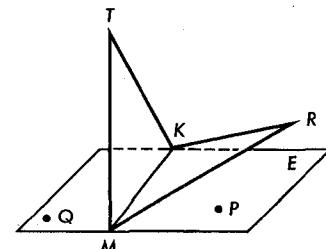
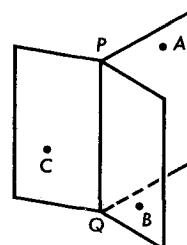
### Teorema 10-8

Si dos planos son perpendiculares, entonces una recta cualquiera de uno de ellos, perpendicular a su recta de intersección, es perpendicular al otro plano.

Puede utilizarse la misma figura que para el teorema anterior. Sea  $L$  la recta dada, perpendicular a  $\overleftrightarrow{PQ}$  en  $A$ , y tómese  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ}$ , como anteriormente. Esta vez se da que  $E \perp F$ , y queremos demostrar que  $L \perp E$ .

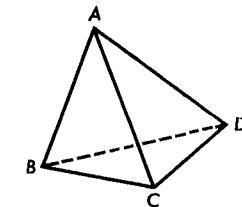
### Conjunto de problemas 10-2

1. Nombrar todos los ángulos diedros en la figura de la izquierda, a continuación:



2. Nombrar todos los ángulos diedros en la figura anterior de la derecha. (Hay más de tres. Obsérvese que  $E$  es el nombre de un plano y no de un punto.)

3. Nombrar los seis ángulos diedros en el tetraedro de la derecha.



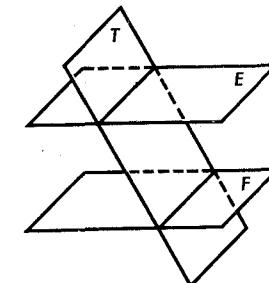
4. Demostrar el siguiente teorema:

Los ángulos diedros opuestos por el vértice son congruentes.

5. Demostrar el siguiente teorema:

Si dos planos son cortados por un tercer plano, los ángulos diedros alternos internos son congruentes.

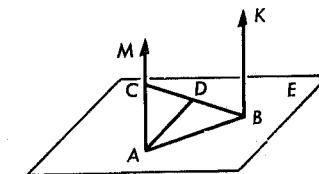
[*Sugerencia:* Trácese otro plano.]



6. En la figura de la derecha,  $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{BK}$  y  $\overrightarrow{BK} \perp E$ .  $D$  es el punto medio de  $\overline{BC}$  y

$$AC = AD.$$

Determine la medida de cada uno de los ángulos de la figura.

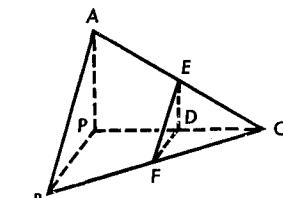


7. En la figura para el problema 2, si  $T$  y  $R$  están en el plano bisecante perpendicular de  $\overline{MK}$ ,  $S$  es el punto medio de  $\overline{MK}$  y  $m\angle RST = 110$ , determine  $m\angle T-MK-R$ . Determine, también,  $m\angle T-MK-Q + m\angle R-MK-P$ .

8. En la figura,  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BP}$  y  $\overline{CP}$  son perpendiculares entre sí.  $AC = BC$  y  $D$ ,  $E$  y  $F$  son puntos medios. Demuéstrese que

$$\angle DEF \cong \angle PAB$$

y determine su medida común.



9. Definir el interior de un ángulo diedro.

10. Indicar si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso. Se debe hacer un pequeño dibujo para ilustrar cada enunciado cierto, o presentar un contraejemplo, si el enunciado es falso.

(a) Cada uno de los lados de un ángulo diedro contiene la arista común.

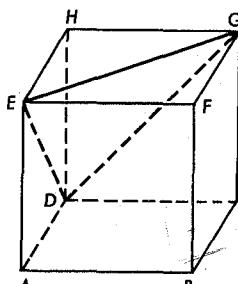
(b) Dos ángulos diedros son congruentes, si un ángulo rectilíneo de uno es congruente con un ángulo rectilíneo del otro.

- (c) Si un plano y una recta son perpendiculares, todo plano que contiene a la recta es perpendicular al plano.
- (d) Dos planos perpendiculares al mismo plano son paralelos entre sí.

11. Se da el cubo que se muestra a la derecha. Determinense:

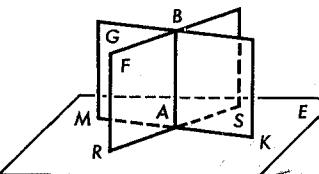
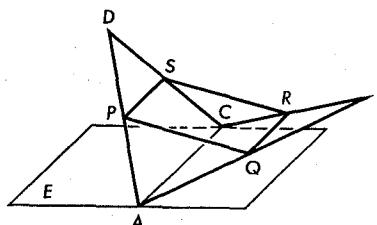
$$m\angle DHE, \quad m\angle DEH,$$

$$m\angle HGD, \quad m\angle EGD.$$



[Pueden utilizarse las siguientes propiedades de un cubo: (1) Las doce aristas son congruentes; (2) Dos aristas cualesquiera que se intersecan son perpendiculares.]

12. Si  $A, B, C$  y  $D$  son cuatro puntos no coplanarios, y tres cualesquiera de ellos no están alineados, la reunión de  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$  y  $\overline{DA}$  se llama un *cuadrilátero alabeado*. Demuéstrese que la figura que se forma al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero alabeado es un paralelogramo.



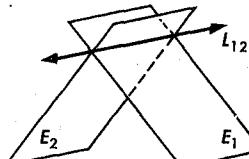
- \* 13. Demostrar lo siguiente:

Si dos planos que se intersecan son perpendiculares a un tercer plano, su intersección es perpendicular al tercer plano.

[Sugerencia: En el plano  $E$ , trácese  $\overleftrightarrow{PA} \perp \overleftrightarrow{MK}$  y  $\overleftrightarrow{QA} \perp \overleftrightarrow{RS}$ . Utilízense los teoremas 10-8 y 8-2.]

- \*\* 14. Demostrar lo siguiente:

Si tres planos  $E_1, E_2$  y  $E_3$  se intersecan en las tres rectas  $L_{12}, L_{23}$  y  $L_{13}$ , entonces o bien las tres rectas se intersecan en un punto o cada recta es paralela a las otras dos.

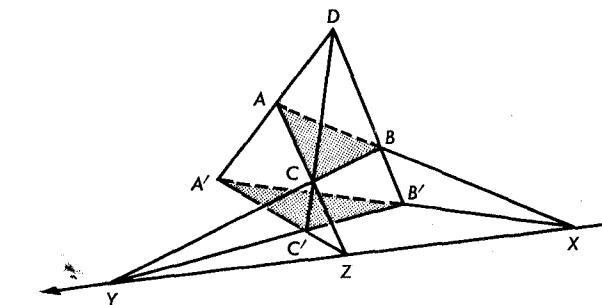


[Sugerencia: La figura muestra a  $E_1$  y  $E_2$  intersecándose en  $L_{12}$ . Considerense dos posibilidades para  $E_3$ : (1)  $E_3 \parallel L_{12}$ ; (2)  $E_3$  interseca a  $L_{12}$ .]

## PROBLEMA OPTATIVO

### Teorema de Desargues

Se dan dos triángulos en planos no paralelos, de manera que las rectas que unen sus vértices correspondientes se intersecan en un mismo punto. Si las rectas que contienen lados correspondientes de los triángulos se intersecan, los puntos de intersección están alineados.

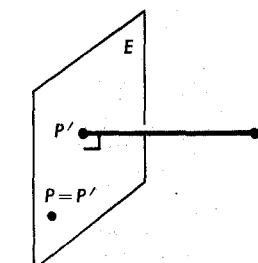
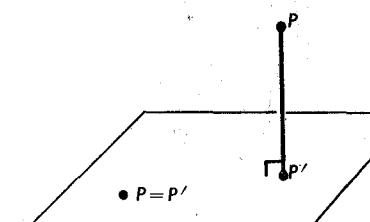


O de otro modo: Se dan los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  en planos no paralelos, de manera que  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  y  $\overleftrightarrow{CC'}$  se intersequen en  $D$ . Si  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{A'B'}$  se intersecan en  $X$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  y  $\overleftrightarrow{B'C'}$  se intersecan en  $Y$  y  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{A'C'}$  se intersecan en  $Z$ , entonces  $X, Y$  y  $Z$  son collineales.

## 10-3. PROYECCIONES

### Definición

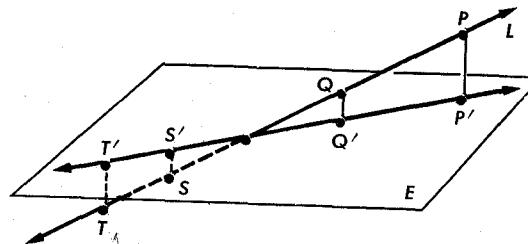
La proyección de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular que va del punto al plano.



Por el teorema 8-9, hay una perpendicular y sólo una. En cada una de las figuras anteriores,  $P'$  es la proyección del punto  $P$  sobre el plano  $E$ . Admitimos la posibilidad de que  $P$  esté en  $E$ . En dicho caso, la proyección de  $P$  es  $P$  mismo.

## Definición

La *proyección* de una recta sobre un plano es el conjunto de todos los puntos de ese plano que son proyecciones de los puntos de la recta.

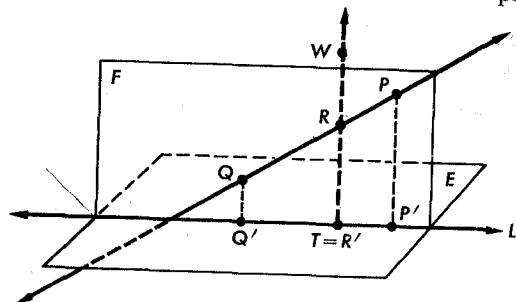


En la figura anterior,  $P'$  es la proyección de  $P$ ,  $Q'$  es la proyección de  $Q$ ,  $S'$  es la proyección de  $S$ , y así sucesivamente. La figura sugiere que la proyección de una recta es siempre una recta; y, en efecto, esto es siempre cierto, excepto cuando la recta y el plano son perpendiculares, como en la figura de la derecha. Aquí,  $A$  es la proyección de *todo* punto  $P$  de la recta y, por tanto,  $A$  es la proyección de toda la recta. Para obtener un teorema cierto, necesitamos eliminar esta posibilidad.

### Teorema 10-9

Si una recta y un plano no son perpendiculares, entonces la proyección de la recta sobre el plano es una recta.

**Demostración:** Se da una recta  $L$  que no es perpendicular al plano  $P$ .



Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos cualesquiera de  $L$ , y sean  $P'$  y  $Q'$  sus proyecciones. Entonces,  $P' \neq Q'$ . (¿Por qué?) Además,  $\overleftrightarrow{PP'}$  y  $\overleftrightarrow{QQ'}$  son copланarias, pues ambas son perpendiculares al mismo plano (teorema 8-7). Sea  $F$  el plano que contiene a las rectas  $\overleftrightarrow{PP'}$  y  $\overleftrightarrow{QQ'}$ ; y sea  $L'$  la recta en que  $F$  interseca a  $E$ . Ahora bien,  $L$  está en  $F$ .

porque  $F$  contiene dos puntos de  $L$ . Demostraremos que  $L'$  es la proyección de  $L$  sobre  $E$ . Puesto que  $L'$  es una recta, se completará así la demostración del teorema.

Ahora tenemos que  $F \perp E$ . Esto es cierto por dos razones: todo plano que contenga a la recta  $\overleftrightarrow{PP'}$  es perpendicular a  $E$ , y también lo es todo plano que contiene a la recta  $\overleftrightarrow{QQ'}$  (teorema 10-7).

Demostraremos lo siguiente

- (1) Si  $R$  es un punto de  $L$ , entonces su proyección,  $R'$ , está en  $L'$ ;  
 (2) si  $T$  es un punto de  $L'$ , entonces  $T$  es la proyección de algún punto de  $L$ .

**Demostración de (1):** Sea  $T$  el pie de la perpendicular desde  $R$  a  $L'$  en el plano  $F$ . En virtud del teorema 10-8,  $\overline{RT} \perp E$ . Luego,  $T = R'$ , porque las perpendiculares son únicas. En consecuencia,  $R'$  está en  $L'$ .

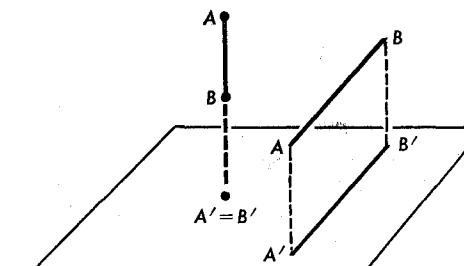
**Demostración de (2):** Si  $T$  es un punto de  $L'$ , sea  $\overleftrightarrow{TW}$  la perpendicular a  $L'$  en  $T$ , en el plano  $F$ . En virtud del teorema 10-8,  $\overleftrightarrow{TW} \perp E$ . Por tanto,  $\overleftrightarrow{TW}$  y  $L$  no son paralelas. (¿Por qué?) Sea  $R$  el punto en que  $\overleftrightarrow{TW}$  interseca a  $L$ . Entonces,  $T = R'$ .

Hemos demostrado que todo punto de la proyección está en  $L'$ , y que todo punto de  $L'$  está en la proyección. Por tanto,  $L'$  y la proyección son exactamente el mismo conjunto de puntos. En consecuencia, la proyección es una recta, como se quería demostrar.

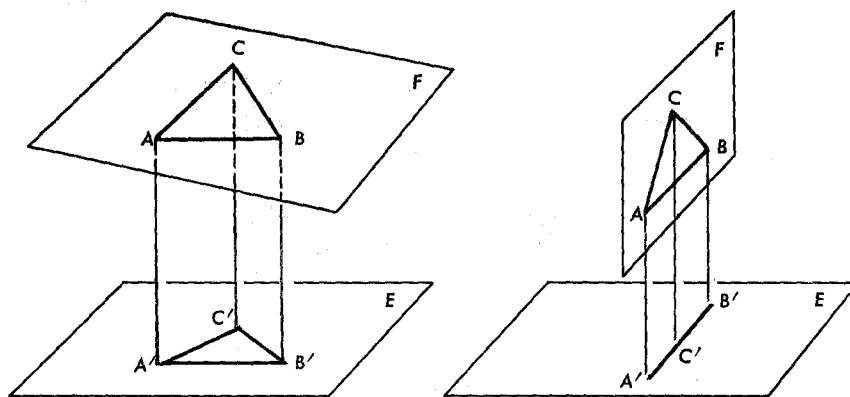
La idea de una proyección puede definirse más generalmente, para un conjunto *cualquier* de puntos.

## Definición:

- Si  $A$  es un conjunto de puntos cualquiera en el espacio, y  $E$  es un plano, entonces la *proyección de  $A$  sobre  $E$*  es el conjunto de todos los puntos que son proyecciones de los puntos de  $A$  sobre  $E$ .



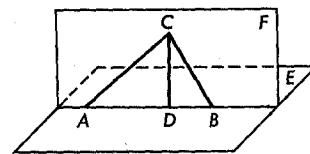
Por ejemplo, la proyección de un segmento es generalmente un segmento, aunque en algunos casos puede ser un punto. Análogamente, la proyección de un triángulo es generalmente un triángulo, aunque puede ocurrir que sea un segmento.



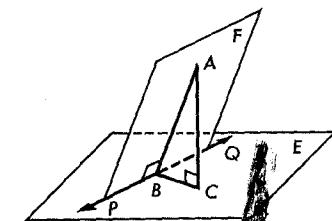
La segunda posibilidad surge cuando el plano del triángulo es perpendicular a  $E$ , como en la figura de la derecha.

### Conjunto de problemas 10-3

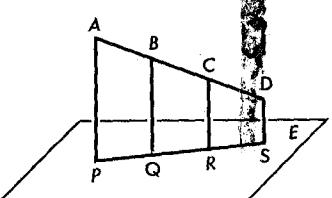
1. En la figura, el plano  $F$  es perpendicular al plano  $E$  en  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $C$  está en  $F$  y  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ . ¿Cuál es la proyección de  $\overline{AC}$ ?; ¿de  $\overline{BC}$ ?; ¿y del  $\triangle ABC$ ?



2. Si una diagonal de un rombo es perpendicular a un plano en uno de sus extremos, ¿qué clase de figura es la proyección del rombo sobre el plano?



3. En la figura, los planos  $E$  y  $F$  se intersecan en  $\overleftrightarrow{PQ}$ ;  $\overline{AB}$  está en  $F$  y su longitud es el doble de la longitud de su proyección,  $\overline{BC}$ ; y  $\overleftrightarrow{PQ} \perp$  plano  $ABC$ . Determinar  $m\angle A-PQ-C$ .



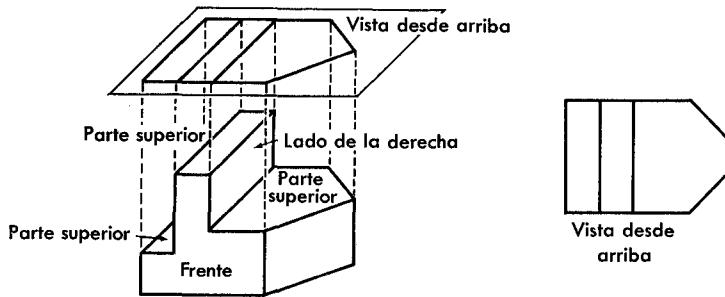
4.  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son las proyecciones de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  sobre el plano  $E$ . Si  $B$  y  $C$  trisecan a  $\overline{AD}$ , ¿por qué trisecan  $Q$  y  $R$  a  $\overline{PS}$ ?



5. El alumno debe estar preparado para justificar sus respuestas a las siguientes preguntas:
- ¿Será siempre un punto la proyección de un punto?
  - ¿Será siempre un segmento la proyección de un segmento?

- (c) ¿Podrá ser un rayo la proyección de un ángulo? ¿Podrá ser una recta?; ¿un segmento?; ¿y un ángulo?
- (d) ¿Podrá ser un ángulo obtuso la proyección de un ángulo agudo?
- (e) ¿Podrá ser un ángulo recto la proyección de un ángulo recto?
- (f) ¿Podrá ser la longitud de la proyección de un segmento mayor que la longitud del segmento? ¿Y menor que la longitud del segmento?
6. Contestar como en el problema 5:
- ¿Podrá consistir en dos rectas paralelas la proyección de dos rectas que se cortan?
  - ¿Podrá consistir en dos rectas paralelas la proyección de dos rectas alabeadas?
  - ¿Podrá consistir en dos rectas que se cortan la proyección de dos rectas alabeadas?
  - ¿Consistirá siempre en dos rectas paralelas la proyección de dos rectas paralelas?
7. Una de las caras de un ángulo diedro agudo contiene un cuadrado. ¿Qué clase de figura es la proyección del cuadrado sobre la otra cara?
8. Se dan dos planos paralelos,  $E$  y  $F$ . El  $\triangle ABC$  está en  $F$ . Demuéstrese que la proyección del  $\triangle ABC$  sobre  $E$  es un triángulo congruente con el  $\triangle ABC$ .
- 
9. La figura siguiente de la izquierda es un tetraedro. La figura de la derecha es la proyección del tetraedro sobre el plano  $BCD$ . Hágase un esquema de las proyecciones sobre los planos  $ABC$  y  $ACD$ .
- 
- 
- \* 10. Si una diagonal de un cubo es perpendicular a un plano, hágase un diagrama de la proyección sobre el plano de todas las aristas del cubo.
- 
- \* 11. En el plano  $E$ ,  $M$  es el punto medio de  $\overline{AB}$ .  $C$  es un punto que no está en  $E$ , pero su proyección,  $D$ , está en la mediatrix de  $\overline{AB}$ . Demuéstrese que el  $\triangle ABC$  es isósceles.

- 12.** En un dibujo de ingeniería, la vista desde arriba o “planta” de un cuerpo geométrico puede considerarse como la proyección de los varios segmentos del cuerpo sobre un plano horizontal situado por encima del cuerpo, como se ilustra en la figura siguiente de la izquierda. La vista desde arriba, tal como se dibujaría en la práctica, aparece a la derecha. (No se ha tratado aquí de obtener una escala apropiada.)



- (a) Dibújese una vista frontal del cuerpo, es decir, hágase un esquema de la proyección de los segmentos del cuerpo sobre un plano paralelo a la cara del frente.

(b) Dibújese una vista de perfil de la derecha del cuerpo.

- \* 13. Datos:  $\overrightarrow{RS}$  está en el plano  $E$ , el  $\angle PRS$  es un ángulo recto, y  $Q$  es la proyección de  $P$ .

Demostrar que el  $\angle ORS$  es un ángulo recto.

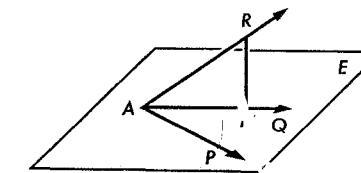
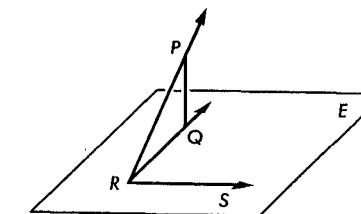
[Sugerencia: Trácese  $\overrightarrow{RT}$ , la perpendicular a  $E$  en  $R$ .]

- + 14. Datos:  $\overrightarrow{AQ}$  es la proyección de  $\overrightarrow{AR}$  sobre el

$\overrightarrow{AP}$  es otro rayo cualquiera desde  $A$  en  $E$ .

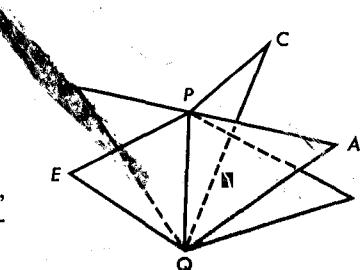
Demostrar que  $m\angle QAR < m\angle PAR$ .

[Sugerencia: En  $\overrightarrow{AP}$ , tómese un punto  $K$  tal que  $AK = AR'$ . Trácese  $\overline{KR'}$  y  $\overline{KR}$



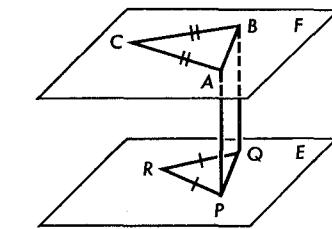
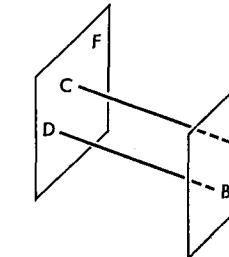
## Repaso del capítulo

1. Nombrar los ángulos diedros en la figura suponiendo que dos cualesquiera de los triángulos indicados no son coplanarios.



2. Datos:  $E \perp \overline{AC}$ ,  $F \perp \overline{AC}$ ,  $F \perp \overline{BD}$

Demostrar que  $E \perp \overline{BD}$  y que  $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$



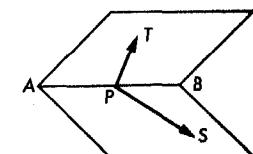
3. Se da la figura anterior de la derecha. El  $\triangle ABC$  está en el plano  $F$ ; el  $\triangle PQR$  está en el plano  $E$ ; el  $\square ABQP$  es un rectángulo y  $\overline{AP} \perp E$ . Determinar cuáles de los siguientes enunciados son ciertos:

- (a)  $\overline{BQ} \perp E$ .      (b)  $AQ = BP$ .      (c)  $F \parallel E$ .  
 (d)  $\overline{PQ}$  es la proyección de  $\overline{AB}$  sobre  $E$ .      (e)  $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ .  
 (f)  $PC = QC$ .      (g)  $\overline{BC} \parallel \overline{RQ}$ .      (h)  $\triangle PAC \cong \triangle RBC$ .

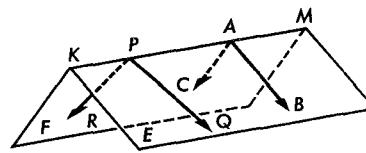
4. Indicar mediante las letras *T*, *A* o *N* si cada enunciado es cierto en **TODOS** los casos, **N** si es cierto en **ALGUNOS** casos y falso en otros, o si **NO** es cierto en **ningún** caso:

- (a) Dos rectas paralelas al mismo plano son perpendiculares entre sí.
  - (b) Si un plano interseca a cada uno de dos planos paralelos, las rectas de intersección son alabeadas.
  - (c) Si dos planos son paralelos a la misma recta, son paralelos entre sí.
  - (d) La intersección de un plano con las caras de un ángulo diedro es un ángulo rectilíneo del ángulo diedro.
  - (e) Si dos rectas son perpendiculares al mismo plano, las rectas son paralelas.
  - (f) Si dos rectas son paralelas al mismo plano, las rectas son paralelas.
  - (g) Si una recta es perpendicular a un plano dado, todo plano que contiene a la recta es perpendicular al plano dado.
  - (h) La proyección de un ángulo puede ser un punto.
  - (i) Dos rectas son paralelas, si ambas son perpendiculares a la misma recta.
  - (j) Si cada uno de dos planos que se intersecan es perpendicular a un tercer plano, su recta de intersección es perpendicular al tercer plano.

5.  $\overleftrightarrow{AB}$  es la arista del  $\angle S-AB-T$  y  $P$  está en  $\overline{AB}$ . Si  $m \angle SPT = 90^\circ$ , ¿será el  $\angle S-AB-T$  un ángulo diedro recto? Explíquese.

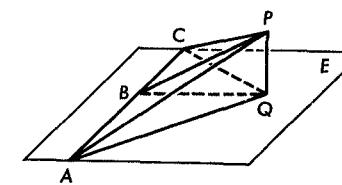


6. Los planos  $E$  y  $F$  se intersecan en  $\overleftrightarrow{KM}$ ;  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{PQ}$  están en  $E$ ;  $\overrightarrow{AC}$  y  $\overrightarrow{PR}$  están en  $F$ . Si  $m\angle MAB = 90$  y  $m\angle KAC = 90$ , ¿es el  $\angle BAC$  un ángulo rectilíneo del  $\angle B-KM-C$ ? Si  $m\angle RPQ = 90$ , ¿es  $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AB}$ ?



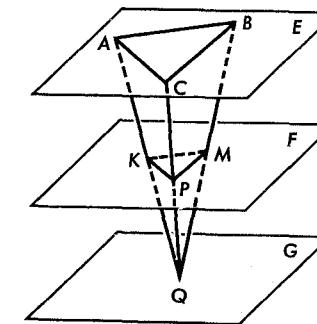
7. En la figura,  $PQ = \frac{1}{2}PC = \frac{1}{2}PA$ ,  $AB = BC$ , y  $\overline{PQ} \perp E$ . ¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto?

- $m\angle P-AC-Q < 30$ ,  
 $m\angle P-AC-Q = 30$ ,  
 $m\angle P-AC-Q > 30$ .



8. Datos: Los planos paralelos  $E$ ,  $F$  y  $G$ , con  $Q$  en  $G$ , el  $\triangle KMP$  en  $F$  y el  $\triangle ABC$  en  $E$ ;  $AK = KQ$ .

Demostrar que el perímetro del  $\triangle ABC$  es el doble del perímetro del  $\triangle KMP$ .

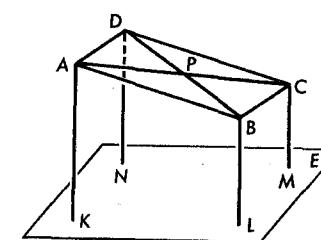


9. En la figura, el paralelogramo  $\square ABCD$  no es paralelo al plano  $E$ .  $K$ ,  $L$ ,  $M$  y  $N$  son las proyecciones sobre  $E$  de los vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , respectivamente.

Demostrar que

$$AK + CM = BL + DN.$$

[Sugerencia: Sea  $Q$  la proyección de  $P$  sobre  $E$  y trácese  $\overline{PQ}$ .]



10. Dibujar una figura que muestre la intersección de un plano con las seis caras de un cubo. Entonces, imagínese la intersección, proyectada sobre un plano paralelo al primer plano, pero que no interseque al cubo, y dibújese un esquema del resultado.



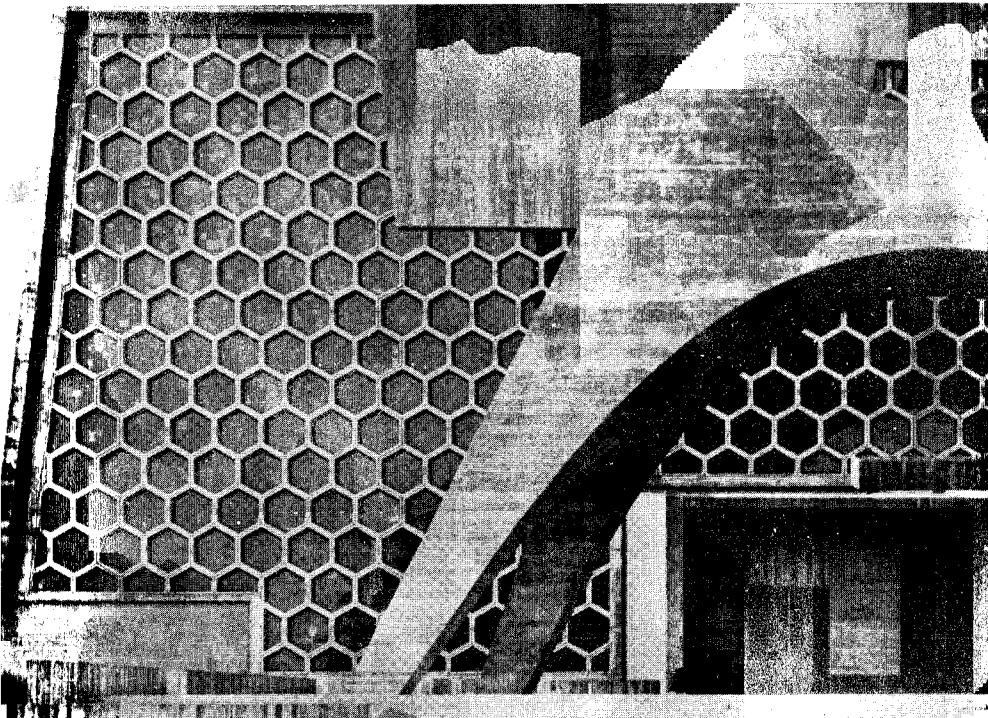
NIKOLAI IVANOVITCH LOBACHEVSKY (1793-1856)

Durante la primera mitad del siglo XIX, tres hombres, trabajando independientemente en tres países diferentes, descubrieron la geometría no euclídea. Éstos fueron C. F. Gauss, en Alemania; János Bolyai, en Hungría; y Nikolai Ivanovich Lobachevsky, en Rusia.

Hasta esa época, todos creían en la unicidad de la paralela como un simple hecho, lo mismo en la geometría que en la física. Los tres hombres mencionados trataron de suponer lo contrario: supusieron que por un punto externo pasa más de una recta paralela a una recta dada. Esto condujo a una nueva clase de geometría que, desde el punto de vista matemático, tenía la misma validez que la geometría familiar de Euclides. Y esta nueva geometría resultó de gran valor en la física, después de presentar Einstein su teoría de la relatividad.

Generalmente, se atribuye a Lobachevsky la prioridad del descubrimiento de la geometría no euclídea. Desarrolló su teoría más que Bolyai y, al contrario de Gauss, tuvo el valor de publicar su trabajo. Parece que Gauss tuvo miedo de aparecer ridículo. A él se le consideraba el más grande de los matemáticos de su época y, por tanto, su prestigio hubiera sufrido mucho.

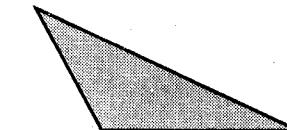
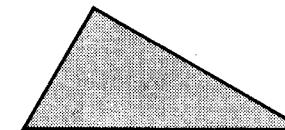
# 11 | Regiones poligonales y sus áreas



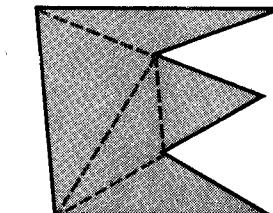
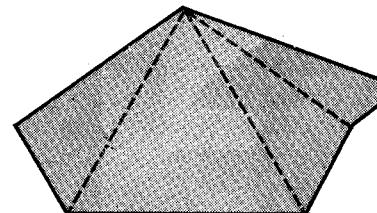
## 11-1. REGIONES POLIGONALES

### Definición

Una *región triangular* es la reunión de un triángulo y su interior.



Una *región poligonal* es una figura plana que se forma al reunir un número finito de regiones triangulares:

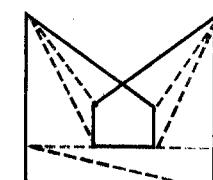
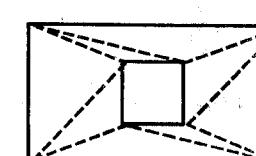
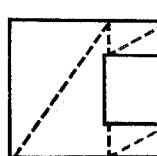
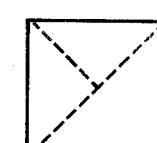
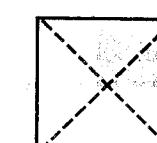
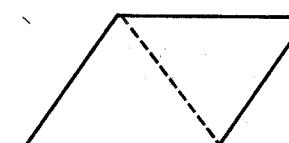
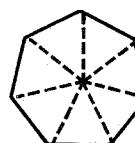


De aquí en adelante, no se sombrearán las representaciones de regiones en los casos en que esté claro a qué región nos referimos.

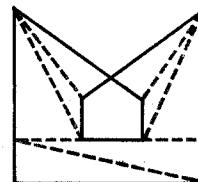
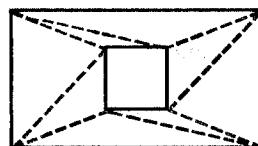
### Definición

Una *región poligonal* es la reunión de un número finito de regiones triangulares en un plano, tales que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, su intersección es o bien un punto o un segmento.

Las rectas de trazos en las figuras anteriores indican cómo se podría representar cada una de las dos regiones poligonales mediante una tal reunión. A continuación, se presentan otros ejemplos:

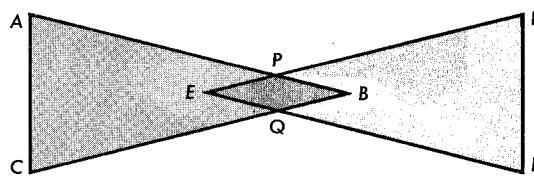


En los últimos dos ejemplos,



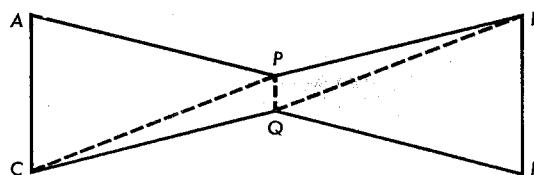
las figuras tienen "agujeros". La definición admite esta posibilidad y, por tanto, estas dos figuras son regiones poligonales legítimas.

La región sombreada, mostrada a continuación es, en efecto, una región poligonal:

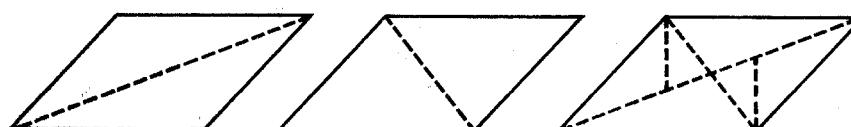


Obsérvese, sin embargo, que esto no se puede demostrar con sólo mencionar las regiones triangulares determinadas por los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ . La dificultad consiste en que la intersección de estas dos regiones triangulares no es un punto o un segmento, como estipula la definición. La intersección es la pequeña región en forma de diamante de la parte central de la figura.

Por otra parte, es fácil dividir esta región de manera diferente, a fin de mostrar que es una región poligonal.



Si una figura puede dividirse en regiones triangulares, ello es posible de muchas maneras. Por ejemplo, un paralelogramo más su interior puede dividirse de las tres maneras indicadas a continuación, por lo menos:



Es fácil ver que hay una infinidad de maneras distintas de dividir una figura como esa.

En este capítulo, estudiaremos las áreas de regiones poligonales y aprenderemos a calcularlas. Para este propósito, utilizaremos cuatro postulados nuevos.

### POSTULADO 19. El postulado del área

*A toda región poligonal le corresponde un número positivo único.*

### Definición

El *área* de una región poligonal es el número que se le asigna según el postulado 19. El área de la región  $R$  se denota por  $aR$ . Esto se lee *área de  $R$* .

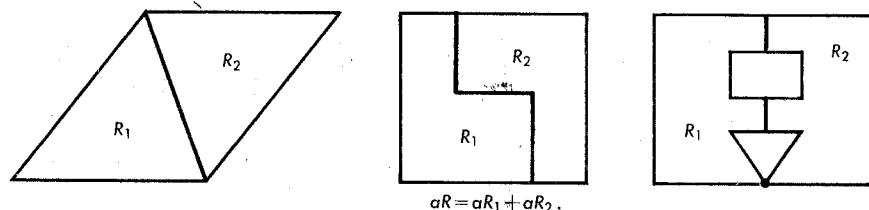
De aquí en adelante, en este capítulo, cuando hablamos de una *región*, se entenderá siempre que nos referimos a una región poligonal.

Claro está, el área de una región debe depender del tamaño y la forma de la región solamente y no de la posición de la región en el espacio. Enunciamos esta idea como un postulado, para el caso de regiones triangulares.

### POSTULADO 20. El postulado de la congruencia

*Si dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares determinadas por ellos tienen la misma área.*

Si dividimos una región en dos partes, entonces el área de la región debe ser la suma de las áreas de las dos partes.

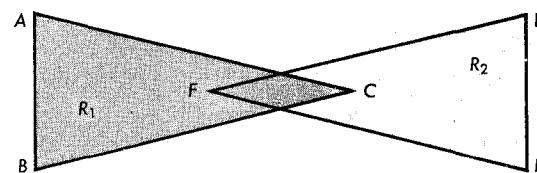


En cada una de las figuras anteriores, la región total  $R$  es la reunión de dos regiones  $R_1$  y  $R_2$ . En cada caso,  $R_1$  y  $R_2$  se intersecan, a lo más, en un número finito de segmentos y puntos. Con estas condiciones, podemos calcular  $aR$  mediante adición.

**POSTULADO 21.** El postulado de adición de áreas

*Supongamos que la región  $R$  es la reunión de dos regiones  $R_1$  y  $R_2$ . Supongamos que  $R_1$  y  $R_2$  se intersecan a lo sumo en un número finito de segmentos y puntos. Entonces,  $aR = aR_1 + aR_2$ .*

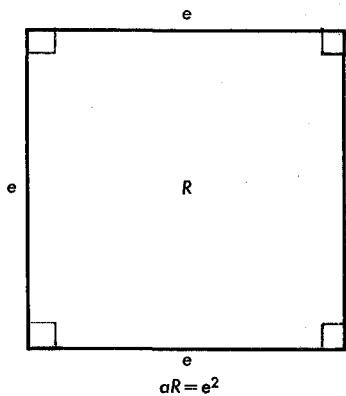
Hay casos simples en los cuales una región es la reunión de otras dos regiones, pero para ellos no es válida la fórmula anterior. Si  $R_1$  y  $R_2$  son regiones triangulares como en la figura y  $R$  es su reunión, entonces  $aR$  es menor que  $aR_1 + aR_2$ . (Al sumar, contamos dos veces el área de la región en forma de diamante de la parte central de la figura.) Por tanto, necesitamos la segunda cláusula “Supongamos . . .” en la hipótesis del postulado de adición de áreas.



Del Capítulo 2, recordamos que la unidad de distancia puede elegirse arbitrariamente. Lo mismo es cierto con relación a la unidad de área. Sin embargo, debemos ser consistentes al elegir nuestras unidades: si medimos distancias en metros, entonces debemos medir áreas en metros cuadrados; si utilizamos pies para medir distancias, entonces debemos utilizar pies cuadrados para medir áreas; y así sucesivamente. Ésta es la idea que sirve de base al siguiente postulado:

**POSTULADO 22.** El postulado de la unidad

*El área de una región cuadrada es el cuadrado de la longitud de su lado*



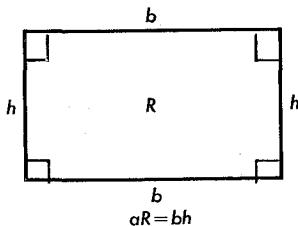
De ahora en adelante, para abreviar, nos referiremos al área de un cuadrado, al área de un triángulo, y así sucesivamente. En cada caso, entendemos, desde luego, que se

trata del área de la región correspondiente. También, hablaremos de la base y la altura de un rectángulo, por lo cual entenderemos la longitud de la base y la longitud de la altura. Esto es muy conveniente y, en cada caso, el alumno deberá decidir, a base del contexto, si nos referimos a un segmento o al número que constituye su medida.

Ahora, podremos, mediante un simple artificio, determinar el área de un rectángulo.

**Teorema 11-1**

El área de un rectángulo es el producto de su base y su altura.



**Demostración:** Considérese la figura de la derecha.

Aquí,  $A$  denota el área desconocida del rectángulo. Las áreas de los dos cuadrados son  $b^2$  y  $h^2$ , por el postulado 22; y el área de toda la figura es  $(b + h)^2$ . Por tanto, mediante aplicación repetida del postulado de adición de áreas,

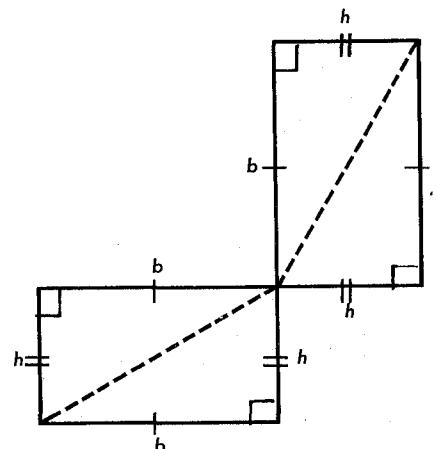
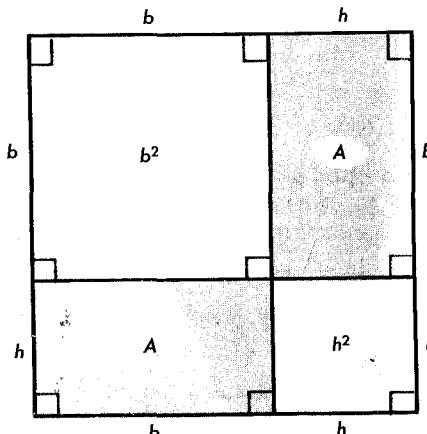
$$\begin{aligned} b^2 + 2A + h^2 &= (b + h)^2 \\ &= b^2 + 2bh + h^2 \end{aligned}$$

y

$$A = bh,$$

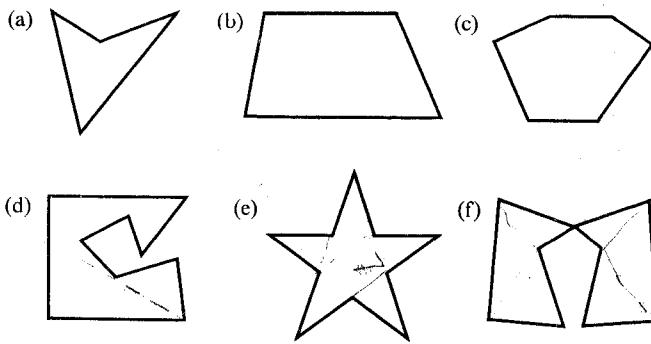
como queríamos demostrar.

Si el alumno se pregunta cómo sabemos, a base de los postulados, que los dos rectángulos de la figura tienen la misma área, debe examinar la figura de la derecha. Los cuatro triángulos son congruentes y, por tanto, tienen la misma área; y el área de cada rectángulo es dos veces el área de cada triángulo.



## Conjunto de problemas 11-1

1. Mostrar que cada una de las siguientes regiones es poligonal, dividiéndola en regiones triangulares, según la definición de región poligonal; trátese de obtener, en cada caso, el menor número posible de regiones triangulares:



2. En la figura de la izquierda, a continuación, si  $aR_1 = 50$ ,  $aR_2 = 25$  y  $R$  es la reunión de  $R_1$  y  $R_2$ , ¿cuál será  $aR$ ? Cítese un postulado o teorema que justifique la conclusión.



3. En la figura anterior de la derecha, si  $aR_1 = 30$ ,  $aR_2 = 30$  y  $R$  es la reunión de  $R_1$  y  $R_2$ , ¿será  $aR = 60$ ? Cítese un postulado o teorema que justifique la conclusión.

4. Calcular el área de un rectángulo de 16 metros de largo y  $10\frac{1}{4}$  metros de ancho.

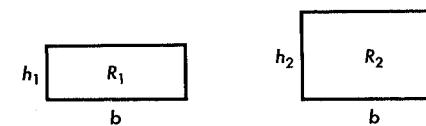
5. Un cuadrado y un rectángulo tienen áreas iguales. Si el rectángulo mide 25 cm. por 16 cm., ¿cuál es la longitud de un lado del cuadrado?

6. ¿Cómo varía el área de un cuadrado si se duplica la longitud de un lado? ¿Si se triplica? ¿Y si se reduce a la mitad?

7. (a) Si se duplica la altura de un rectángulo y no se altera la base, ¿cómo varía el área?  
 (b) Si se duplica la base de un rectángulo y no se altera la altura, ¿cómo varía el área?  
 (c) Si se duplican ambas, la altura y la base de un rectángulo, ¿cómo varía el área?

8. ¿Cuántas losetas cuadradas de 4 pulgadas de lado se necesitarán para cubrir una pared rectangular de dimensiones 7 pies y 15 pies con 8 pulgadas?

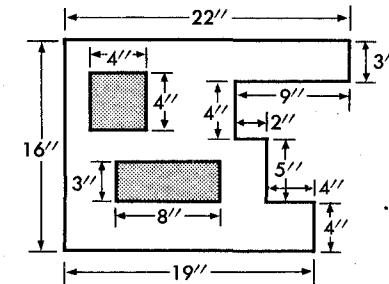
9. Demostrar lo siguiente: Si dos rectángulos tienen la misma base,  $b$ , entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus alturas.



Demostrar que  $aR_1/aR_2 = h_1/h_2$ .

10. En un terreno rectangular, se van a sembrar semillas de césped. Las dimensiones del terreno son 22 yardas y 28 yardas. Si se necesita un saco de 2 libras de semillas para cada 750 pies cuadrados de terreno, ¿cuántos sacos se necesitarán para todo el terreno?

11. La figura de la derecha representa la cara de una parte de una máquina. Para calcular el costo de pintar un cierto número de estas partes, es necesario saber el área de cada cara. Las regiones sombreadas no se van a pintar. Determinese el área de la región que debe pintarse. ¿Qué postulados y teoremas se emplean al calcular el área?



12. Calcular el área de un rectángulo de base  $b$  y altura  $h$ , dadas las siguientes medidas:

- (a)  $b = 17$  y  $h = 12$  (b)  $b = 1\frac{1}{3}$  y  $h = 5\frac{3}{4}$   
 (c)  $b = 3$  y  $h = \sqrt{5}$  (d)  $b = \sqrt{10}$  y  $h = \sqrt{15}$

13. Calcular el área de un cuadrado de lado  $s$ , dadas las siguientes medidas:

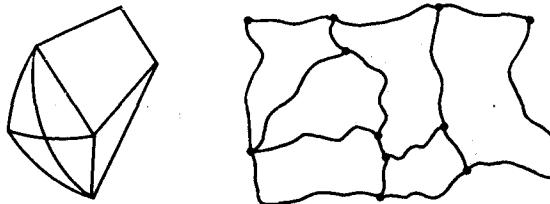
- (a)  $s = 24$  (b)  $s = 3\frac{3}{5}$  (c)  $s = \sqrt{7}$  (d)  $s = 4\sqrt{6}$

14. Indicar si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso, justificando las respuestas:

- (a) Un cuadrado es una región poligonal.  
 (b) A todo número positivo le corresponde una región poligonal única.  
 (c) Si dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares correspondientes tienen la misma área.  
 (d) Una región triangular no incluye el triángulo que la determina.  
 (e) El área de la reunión de dos regiones poligonales es la suma de sus áreas.  
 (f) Una región triangular es una región poligonal.  
 (g) Existe un cuadrado cuya área es  $\sqrt{17}$ .  
 (h) Existe un rectángulo con área  $4\sqrt{5}$  y tal que la medida de su base es un número racional.

15. En la figura de la derecha,  $A, B, C, D, E, F$  y  $G$  se llaman *vértices*;  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EG}, \overline{GA}$ ,  $\overline{EF}$ ,  $\overline{FD}$  y  $\overline{FB}$  se llaman *lados*; y las regiones poligonales  $ABE, FED$  y  $BCDF$  se llaman *caras*. El exterior de la figura también se considera una cara. Sea  $c$  el número de caras,  $v$  el número de vértices y  $l$  el número de lados. Un teorema descubierto por Euler, un famoso matemático suizo, relaciona  $c$ ,  $v$  y  $l$  mediante la expresión  $c = l + v - 2$ . Esta expresión se refiere a una clase amplia de figuras de las que la anterior es una posibilidad. Calculemos  $c - l + v$  para esa figura. Tenemos  $c = 4$ ,  $l = 9$  y  $v = 7$ ; por tanto,  $4 - 9 + 7 = 2$ .

- (a) Para cada una de las figuras que siguen, calcúlese  $c - l + v$ . Obsérvese que los lados no tienen necesariamente que ser segmentos. La figura de la derecha podría ser una parte de un mapa en que se muestran distritos.



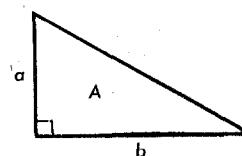
- (b) ¿Qué regla se observa en los resultados de los tres cálculos?
- (c) En la figura anterior de la izquierda, márquese un punto en el interior del cuadrilátero y trácese segmentos desde el punto a cada uno de los vértices. ¿Cómo influye esto en el cálculo de  $c - l + v$ ? ¿Puede el alumno explicar por qué?
- (d) Tómese un punto en el exterior de cualquiera de las figuras y únase a los dos vértices más cercanos. ¿Cómo influye esto en el cálculo de  $c - l + v$ ?

## 11-2. ÁREAS DE TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS

Calculemos ahora algunas áreas, basándonos en nuestros postulados.

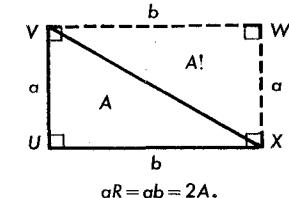
### Teorema 11-2

El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de sus catetos.



**Demostración:** Se da un triángulo rectángulo con catetos  $a$  y  $b$ . Sea  $A$  su área. Formamos un rectángulo  $\square UVWX$  (como el que se muestra en la figura de la derecha), dos de cuyos lados son los catetos del triángulo rectángulo. Entonces,

- (1)  $\triangle VUX \cong \triangle XWV$ ,
- (2)  $a \triangle XWV = A$ ,
- (3)  $A + A = ab$ ,
- (4)  $A = \frac{1}{2}ab$ .



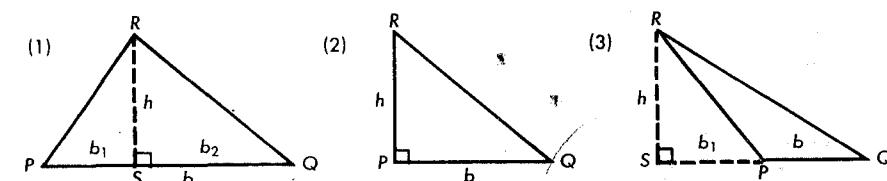
¿Cuál es la justificación de todo esto? (Quizás, se necesite hacer más de una cita para algunos de los pasos.)

De este teorema, podemos obtener una fórmula para el área de un triángulo cualquiera. Una vez hagamos esto, no necesitaremos el teorema 11-2, porque nuestro teorema general lo incluirá como caso especial.

### Teorema 11-3

El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases y la altura correspondiente.

**Demostración:** Sean  $b$  y  $h$  la base y la altura dadas, y sea  $A$  el área del triángulo. Hay que considerar tres casos:



(1) Si el pie de la altura está entre los extremos de la base, entonces la altura divide al triángulo dado en dos triángulos con bases  $b_1$  y  $b_2$  y, además,  $b_1 + b_2 = b$ . Por el teorema anterior, las áreas de los dos triángulos son  $\frac{1}{2}b_1h$  y  $\frac{1}{2}b_2h$ . Por el postulado de adición de áreas,

$$A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h.$$

Por tanto,

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}bh,$$

como queríamos demostrar.

(2) Si el pie de la altura es un extremo de la base, entonces nuestro triángulo es un triángulo rectángulo y  $A = \frac{1}{2}bh$ , por el teorema anterior.

(3) Si el pie de la altura está fuera de la base, como en la tercera figura, tenemos

$$\frac{1}{2}b_1h + A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h,$$

y

$$A = \frac{1}{2}bh,$$

como anteriormente. (¿Cuál es la justificación de esto?)

Obsérvese que el teorema 11-3 puede aplicarse a cualquier triángulo, de tres maneras: podemos elegir cualquiera de los tres lados como base, multiplicar por la altura correspondiente, y dividir por 2. Obsérvese que, en la figura,

$$\frac{1}{2}b_1h_1, \frac{1}{2}b_2h_2 \text{ y } \frac{1}{2}b_3h_3$$

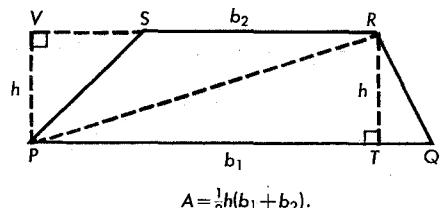
tienen que representar el mismo número, porque cada uno de ellos da la respuesta correcta al mismo problema.

Ahora que sabemos determinar el área de un triángulo, lo demás es sencillo: para determinar el área de una región poligonal, la dividimos en triángulos y sumamos sus áreas. Este procedimiento es particularmente fácil en el caso de los trapecios.

#### Teorema 11-4

El área de un trapecio es la mitad del producto de su altura y la suma de sus bases.

**Demostración:** Sea  $A$  el área del trapecio. Cualquier diagonal divide al trapecio en dos triángulos, con bases  $b_1$  y  $b_2$  y la misma altura  $h$ . (¿Por qué es  $PV = TR$ ?) Por el postulado de adición de áreas,



$$A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$$

$$= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2),$$

como queríamos demostrar.

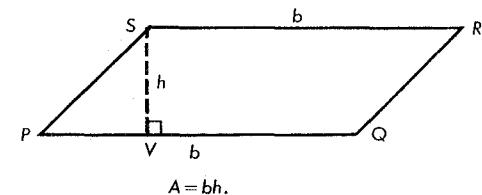
Esto nos da inmediatamente una fórmula para determinar el área de un paralelogramo.

#### Teorema 11-5

El área de un paralelogramo es el producto de una base cualquiera y la altura correspondiente.

**Demostración:** Sea  $A$  el área del paralelogramo. Todo paralelogramo es un trapecio, con  $b_1 = b_2 = b$ . Por tanto,

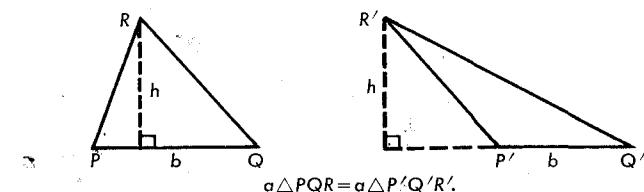
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}h(b + b) \\ &= bh. \end{aligned}$$



La fórmula para el área de un triángulo tiene dos consecuencias sencillas, pero muy útiles.

#### Teorema 11-6

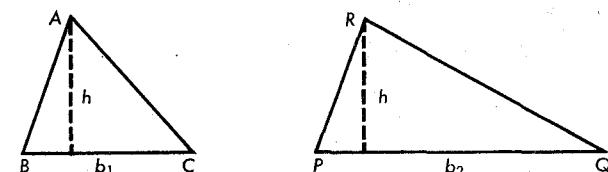
Si dos triángulos tienen la misma base  $b$  y la misma altura  $h$ , entonces tienen áreas iguales.



Esto es evidente, porque el área de cada uno de ellos es  $\frac{1}{2}bh$ .

#### Teorema 11-7

Si dos triángulos tienen la misma altura  $h$ , entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases.



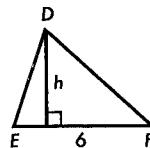
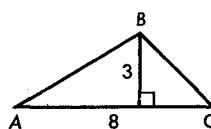
**Demostración:** Sean  $b_1$  y  $b_2$  las bases de los triángulos.

Entonces,

$$\frac{a \triangle ABC}{a \triangle PQR} = \frac{\frac{1}{2}b_1h}{\frac{1}{2}b_2h} = \frac{b_1}{b_2}.$$

## Conjunto de problemas 11-2

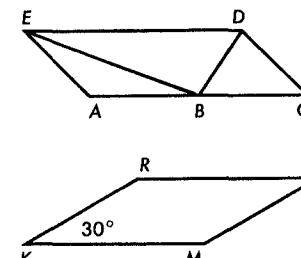
1. En el  $\triangle ABC$ ,  $AC = 8$  y la altura correspondiente a  $\overline{AC}$  es 3. En el  $\triangle DEF$ ,  $EF = 6$ . Si  $a\triangle ABC = a\triangle DEF$ , determinar la altura correspondiente a  $\overline{EF}$ .



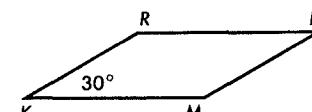
2. En el  $\triangle PQR$ , el  $\angle P$  es un ángulo recto,  $PR = 16$ ,  $PQ = 12$  y  $RQ = 20$ .

- (a) Determinar el área del  $\triangle PQR$ .  
(b) Determinar la altura correspondiente a la hipotenusa.

3. En la figura de la derecha,  $B$  es el punto medio de  $\overline{AC}$ , y  $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$ . Demuéstrese que  $a\triangle ABE = a\triangle BCD$ .



4. El  $\square KMPR$  es un paralelogramo. Dado que  $m\angle K = 30^\circ$ ,  $KM = 11$  y  $KR = 8$ , calcular  $a\square KMPR$ .



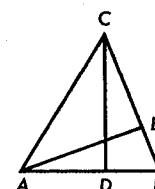
5. Un rombo tiene un lado de 12 unidades y la medida de un ángulo es  $150^\circ$ . Determinar el área del rombo.

6. Un triángulo rectángulo tiene catetos de 18 cm. y 14 cm., respectivamente. Otro triángulo rectángulo tiene catetos de 15 cm. y 24 cm., respectivamente. ¿Cuál es la razón de las áreas de los dos triángulos?

7. Dos lados de un triángulo miden 15 pulgadas y 20 pulgadas de largo, y la altura correspondiente al lado de 15 pulgadas mide 8 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de la altura correspondiente al lado de 20 pulgadas?

8. En el  $\triangle ABC$ ,  $\overline{CD}$  es la altura correspondiente a  $\overline{AB}$  y  $\overline{AE}$  es la altura correspondiente a  $\overline{BC}$ .

- (a) Si  $AB = 8$ ,  $CD = 9$ ,  $AE = 6$ , determiníese  $BC$ .  
(b) Si  $AB = 11$ ,  $AE = 5$ ,  $BC = 15$ , determiníese  $CD$ .  
(c) Si  $CD = h$ ,  $AB = c$ ,  $BC = a$ , determiníese  $AE$ .  
(d) Si  $AB = 15$ ,  $CD = 14$ ,  $BC = 21$ , determiníese  $AE$ .

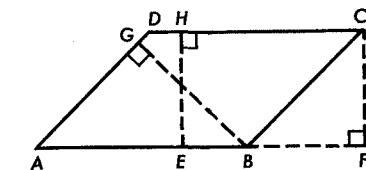


9. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 50 centímetros de largo, uno de los catetos mide 14 centímetros de largo, y el área del triángulo es 336 centímetros cuadrados. ¿Cuál es la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa? ¿Cuál es la longitud de la altura correspondiente al cateto dado?

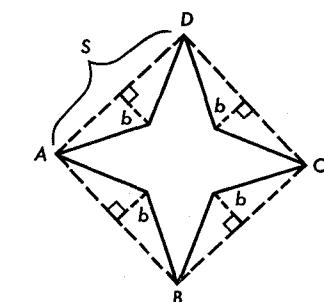
10. Un triángulo y un paralelogramo tienen áreas iguales y bases iguales. ¿Cómo comparan sus alturas?

11. El  $\square ABCD$  es un paralelogramo,  $\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{DC}$ ,  $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{DA}$ .

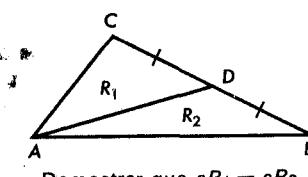
- (a) Si  $AB = 18$ ,  $EH = 10$  y  $BG = 15$ , ¿cuánto es  $AD$ ?  
(b) Si  $AD = 22$ ,  $BG = 7$  y  $EH = 14$ , ¿cuánto es  $DC$ ?  
(c) Si  $CF = 12$ ,  $BG = 16$  y  $BC = 17$ , entonces  $AB = ?$   
(d) Si  $BG = 24$ ,  $AD = 28$  y  $AB = 32$ , entonces  $EH = ?$   
(e) Si  $AB = \sqrt{50}$ ,  $CF = 6$  y  $GB = \sqrt{18}$ , entonces  $BC = ?$



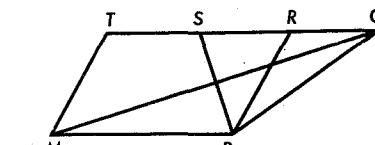
12. En la figura de la derecha, el  $\square ABCD$  es un cuadrado y los segmentos que forman el contorno de la estrella son congruentes. Determíñese el área de la estrella en términos de  $s$  y  $b$ .



13. Demostrar lo siguiente: Las dos regiones en las cuales una mediana de un triángulo divide a la región triangular tienen áreas iguales.



Demostrar que  $aR_1 = aR_2$ .

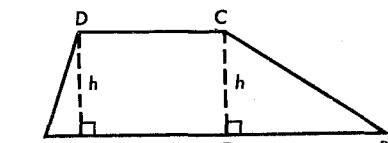


14. En la figura anterior de la derecha, el  $\square MPRT$  es un paralelogramo y  $TS = SR = RQ$ . Indicar cuál es la razón de:

- (a)  $a\triangle PRS$  a  $a\triangle PRQ$  (b)  $a\triangle PMQ$  a  $a\square MPRT$   
(c)  $a\triangle PMQ$  a  $a\triangle PQS$  (d)  $a\triangle PQR$  a  $a\square MPST$

15. El  $\square ABCD$  es un trapecio con lados paralelos  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ .

- (a) Si  $AB = 18$ ,  $DC = 12$ ,  $h = 9$ , entonces  $a\square ABCD = ?$   
(b) Si  $a\square ABCD = 84$ ,  $AB = 17$ ,  $CD = 11$ , entonces  $h = ?$   
(c) Si  $a\square ABCD = 375$ ,  $h = 15$ ,  $AB = 38$ , entonces  $CD = ?$   
(d) Si  $AB = 15$ ,  $DC = 8$ ,  $BC = 10$ , y  $m\angle B = 30^\circ$ , entonces  $a\square ABCD = ?$   
(e) Si  $AB = 13$ ,  $h = 5$ ,  $a\square ABCD = 65$ , entonces  $CD = ?$



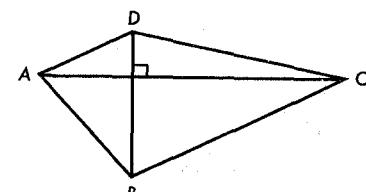
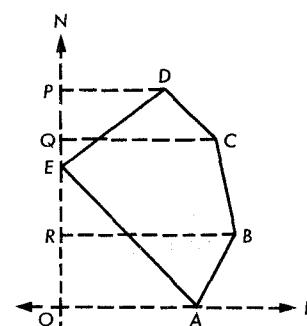
16. ¿Cuál es el área de un trapecio, si su altura es 6 y su mediana es 12?

[Sugerencia: El alumno podrá referirse al problema 4 del Conjunto de problemas 9-8.]

17. Un agrimensor iba a determinar el área de un terreno representado por la figura  $ABCDE$ . Marcó una recta en dirección norte-sur pasando por  $E$  y otras rectas en dirección este-oeste pasando por  $A, B, C$  y  $D$ , respectivamente. Encontró que  $AO = 37$  pies,  $BR = 47$  pies,  $CQ = 42$  pies,  $DP = 28$  pies,  $PQ = 13$  pies,  $QE = 7$  pies,  $ER = 19$  pies y  $RO = 18$  pies. Entonces, calculó el área requerida. Determinese el área con la aproximación de una yarda cuadrada.

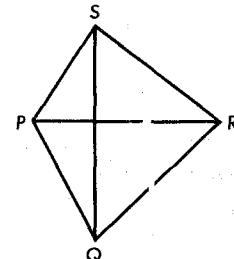
18. Demostrar el siguiente teorema:

Si las diagonales de un cuadrilátero convexo son perpendiculares, entonces el área del cuadrilátero es igual a la mitad del producto de las longitudes de las diagonales.



Demostrar que  $a\square ABCD = \frac{1}{2}(AC)(BD)$ .

¿Sería cierto este teorema si no se exigiera que el cuadrilátero fuera convexo?



19. El  $\square PQRS$  es convexo y  $\overline{PR} \perp \overline{QS}$ .

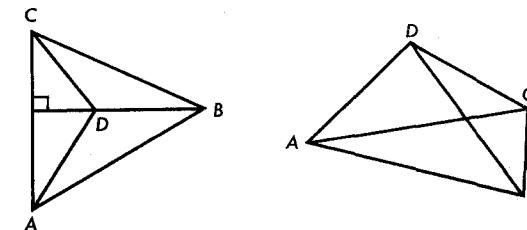
- (a) Si  $PR = 12$  y  $QS = 16$ , ¿cuánto es  $a\square PQRS$ ?  
 (b) Si  $a\square PQRS = 153$  y  $PR = 17$ , ¿cuánto es  $QS$ ?

20. Las diagonales de un rombo tienen longitudes de 15 y 20. ¿Cuál es su área? Si una altura del rombo es 12, ¿cuál es la longitud de su lado? [Indicación: ¿Es aplicable el problema 18?]

21. Demostrar lo siguiente: Si las diagonales de un rombo son  $d$  y  $d'$ , entonces el área del rombo es  $dd'/2$ .

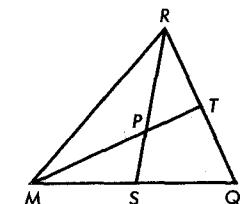
22. El área de un rombo es 348 y la longitud de una diagonal es 24. Determinar la longitud de la otra diagonal.

23. En la figura de la izquierda, a continuación,  $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ . Si  $AC = 13$  y  $BD = 8$ , ¿podría determinarse  $a\square ABCD$ ?

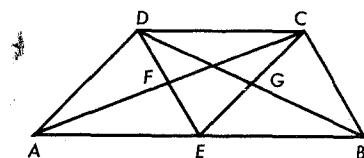


- \* 24. En el  $\square ABCD$ , de la figura anterior de la derecha,  $\overline{AC}$  biseca a  $\overline{BD}$ . Demuéstrese que  $a\triangle ABC = a\triangle ADC$ .

- \* 25. Se da que el  $\square ABCD$  es un paralelogramo y que  $P, Q, R$  y  $S$  son los puntos medios de los lados. Demostrar que  $a\square PQRS = \frac{1}{2}a\square ABCD$ .



- \* 26. Dado un triángulo cualquiera  $\triangle MQR$ , con dos medianas  $\overline{RS}$  y  $\overline{MT}$ , que se intersectan en  $P$ , demuéstrese que  $a\triangle PMS = a\triangle PRT$ .

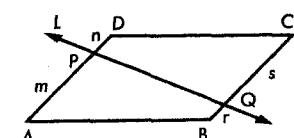


- \* 27. El  $\square ABCD$  es en trapezo,  $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ,  $E$  es el punto medio de  $\overline{AB}$ ,  $F$  es el punto medio de  $\overline{DE}$  y  $G$  es el punto medio de  $\overline{CE}$ . Demuéstrese que  $a\triangle AFD = a\triangle BGC$ .

- \* 28. Se da el segmento  $\overline{AB}$  en el plano  $E$ . Para todo número positivo  $k$ , hay al menos un punto  $P$  tal que  $a\triangle ABP = k$ . ¿Habrá más de un punto? ¿Cuántos? Describáse el conjunto de todos los puntos  $P$  en el plano  $E$  tales que  $a\triangle ABP = k$ . Describáse el conjunto de todos los puntos  $P$  en el espacio tales que  $a\triangle ABP = k$ .

- \* 29. El  $\square PQRS$  es un paralelogramo.  $J$  es un punto de  $\overline{RS}$  tal que  $RJ < \frac{1}{2}RS$ .  $K$  es un punto de  $\overline{RQ}$  tal que  $RK < \frac{1}{2}RQ$ . Una recta que pasa por  $S$  y es paralela a  $\overline{PK}$  interseca en  $M$  a una recta que pasa por  $K$  y es paralela a  $\overline{PQ}$ .  $\overleftrightarrow{PQ}$  interseca a  $\overleftrightarrow{SM}$  en  $L$ . Demuéstrese que  $a\square PQRS = a\square PKML$ . [Indicación: ¿Interseca  $\overleftrightarrow{RQ}$  a  $\overleftrightarrow{SM}$ ?]

- \* 30. Demostrar lo siguiente: Si una recta  $L$  separa a una región limitada por un paralelogramo en dos regiones de áreas iguales, entonces la recta  $L$  contiene al punto de intersección de las diagonales del paralelogramo.

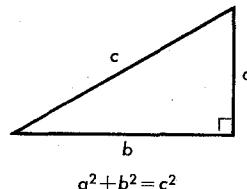


**11-3. EL TEOREMA DE PITÁGORAS**

Ahora que sabemos trabajar con áreas, es bastante fácil demostrar el teorema de Pitágoras.

**Teorema 11-8. El teorema de Pitágoras**

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



**Demostración:** Primero, tomamos un cuadrado cada uno de cuyos lados tiene longitud  $a + b$ . En este cuadrado, dibujamos cuatro triángulos rectángulos con catetos  $a$  y  $b$ .

(1) Por el postulado LAL, cada uno de los cuatro triángulos es congruente con el triángulo dado. Por tanto, todos tienen hipotenusa de longitud  $c$ , como muestra la figura de la derecha.

(2) El cuadrilátero formado por las cuatro hipotenusas es un cuadrado. En la notación de la figura, tenemos que

$$r + s = 90,$$

porque los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios. Como

$$r + s + t = 180,$$

se deduce que  $t = 90$ . Lo mismo ocurre para los otros ángulos de nuestro cuadrilátero.

(3) Por el postulado de adición de áreas, el área del cuadrado mayor es igual al área del cuadrado menor, más la suma de las áreas de los cuatro triángulos congruentes. Esto da

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab.$$

Por tanto,

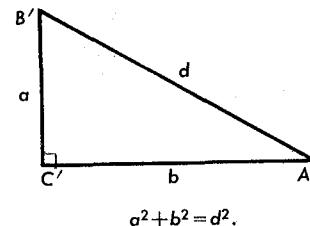
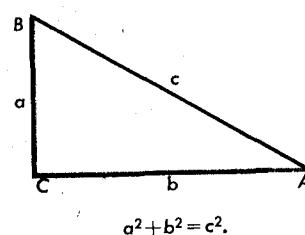
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab, \quad y \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

como queríamos demostrar.

El recíproco del teorema de Pitágoras es también cierto.

**Teorema 11-9**

Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo, con su ángulo recto opuesto al lado más largo.



**Demostración:** Se da el  $\triangle ABC$  y  $a^2 + b^2 = c^2$ , como en la figura. Sea el  $\triangle A'B'C'$  un triángulo rectángulo con catetos  $a$  y  $b$ , e hipotenusa  $d$ . Entonces,  $c = d$ , porque  $d^2 = a^2 + b^2 = c^2$ . Por el postulado LLL,  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ . Luego,  $\angle C \cong \angle C'$ . Como el  $\angle C'$  es un ángulo recto, también lo es el  $\angle C$ .

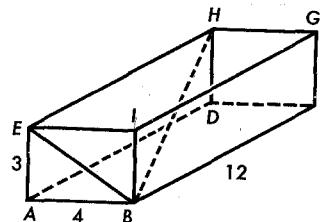
**PITÁGORAS**

Pitágoras es generalmente considerado como el primero de los grandes matemáticos griegos, pero se sabe muy poco acerca de su persona. Nació alrededor del año 582 a. de J.C. y vivió primero en la isla de Samos, en el mar Egeo, y más tarde en el sur de Italia.

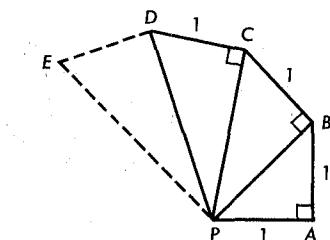
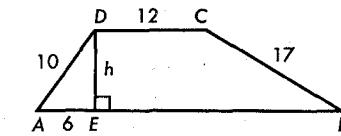
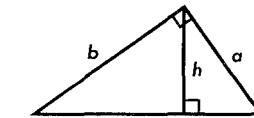
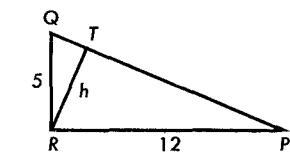
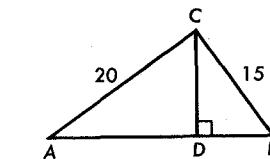
Pitágoras y sus discípulos se dedicaron al estudio de la matemática, la astronomía y la filosofía. A ellos se les atribuye el haber convertido la geometría en una ciencia. Demostraron el teorema de Pitágoras y descubrieron la existencia de los números irracionales. Sus conocimientos de la astronomía fueron muy valiosos: en el siglo VI a. de J.C., sabían que la Tierra era redonda y que giraba alrededor del Sol. No dejaron escritos de sus trabajos, y nadie sabe cómo lograron obtener estos conocimientos, ni cuáles de sus descubrimientos se debían a Pitágoras mismo.

## Conjunto de problemas 11-3

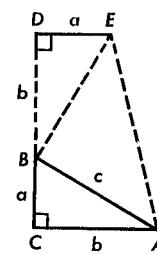
- En un triángulo rectángulo  $\triangle ABC$ ,  $c$  es la longitud de la hipotenusa y  $a$  y  $b$  son las longitudes de los catetos.
  - Si  $a = 12$  y  $b = 16$ , entonces  $c = ?$
  - Si  $a = 24$  y  $c = 25$ , entonces  $b = ?$
  - Si  $a = 1$  y  $b = 2$ , entonces  $c = ?$
  - Si  $b = 18$  y  $c = 20$ , entonces  $a = ?$
  - Si  $a = 7$  y  $b = 7$ , entonces  $c = ?$
  - Si  $a = 6$  y  $c = 12$ , entonces  $b = ?$
- Una persona camina 7 kilómetros hacia el norte, después 3 kilómetros hacia el este y, luego, 3 kilómetros hacia el sur. ¿A qué distancia está del punto de partida?
- Una persona camina 1 milla hacia el norte, 2 millas hacia el este, 3 millas hacia el norte y 4 millas hacia el este. ¿A qué distancia está del punto de partida?
- En el cuerpo rectangular mostrado a la derecha, cada dos aristas que se intersecan son perpendiculares. Si  $AE = 3$ ,  $AB = 4$  y  $BC = 12$ , determinense las longitudes de las diagonales  $\overline{BE}$  y  $\overline{BH}$ .
- La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 17 y la de uno de los catetos es 15. Calcular el área del triángulo.
- Los lados de un triángulo miden 6 cm., 9 cm. y 11 cm., respectivamente. ¿Es éste un triángulo rectángulo? Si lo es, ¿cuál de los lados es la hipotenusa?
- (a) Demostrar lo siguiente: Si  $m$  y  $n$  son números naturales y  $m > n$ , entonces  $m^2 + n^2$  será la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes  $m^2 - n^2$  y  $2mn$ . ¿Qué teorema se utiliza para demostrar esto?
   
(b) Construir una tabla con columnas que tengan los siguientes títulos:
 
$$|m|n|m^2 - n^2|2mn|m^2 + n^2|$$
- Utilícese el método de la parte (a) para anotar en la tabla las longitudes expresadas con números enteros de los lados de los triángulos rectángulos en los cuales la longitud de la hipotenusa sea igual o menor que 25. Hay seis ternas de esa clase, llamadas "ternas pitagóricas".
- Si  $p$  y  $q$  son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y  $r$  es la longitud de la hipotenusa, demostrar que para cualquier número positivo  $k$ , los números  $kp$ ,  $kq$  y  $kr$  son también las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.



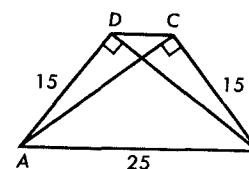
- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de números podrían ser las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo?
  - 30, 40, 60.
  - 16, 30, 34.
  - 10, 24, 26.
  - $\frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}$ .
  - 1.4, 4.8, 5.0.
  - $1\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}$ .
- En el  $\triangle ABC$ , el  $\angle C$  es un ángulo recto,  $AC = 20$  y  $BC = 15$ . Determinar:
  - $a\triangle ABC$
  - $AB$
  - la altura correspondiente a la hipotenusa.
- La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 51 y la longitud de un cateto es 24. Calcular el área del triángulo.
- En la figura de la derecha,  $QR = 5$ ,  $RP = 12$ ,  $RT = h$ , y  $\overline{QR} \perp \overline{RP}$ ,  $\overline{RT} \perp \overline{PQ}$ . Determinese el valor de  $h$ .
- Si las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son  $a$  y  $b$ , determinar la longitud,  $h$ , de la altura correspondiente a la hipotenusa, en términos de  $a$  y  $b$ .
- Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 24 y 32. Determinar la altura correspondiente a la hipotenusa.
- En un rombo, cada lado mide 10 pulgadas de largo y una diagonal mide 12 pulgadas de largo. Determinar el área del rombo. Determinese, también, la altura correspondiente a un lado cualquiera.
- Un ángulo de un rombo tiene por medida 60 y la longitud de uno de los lados es 5. Determinar la longitud de cada diagonal.
- El  $\square ABCD$  es un trapezio, con  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ . Si los segmentos tienen las longitudes indicadas en la figura, determinese el área del trapezio.
- (a) Si los ángulos rectos y las longitudes de los segmentos son los indicados en la figura, determiníense  $PB$ ,  $PC$  y  $PD$ .
   
(b) Si se continuara la construcción indicada en la figura, tomando  $m\angle PDE = 90$  y  $DE = 1$ , ¿cuánto sería  $PE$ ? ¿Cuál sería la longitud del siguiente segmento desde  $P$ ? El alumno deberá descubrir una regla interesante.



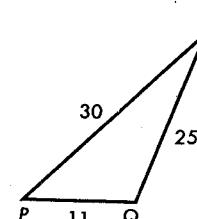
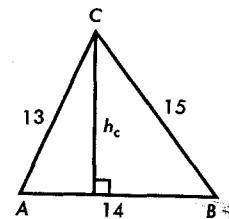
- \* 19. Una demostración del teorema de Pitágoras, a base de la figura de la derecha, fue descubierta por el General James A. Garfield varios años antes de llegar a ser Presidente de los Estados Unidos. Se publicó alrededor del año 1875 en el *New England Journal of Education*. Demuéstrese que  $a^2 + b^2 = c^2$ , expresando algebraicamente que el área del trapecio es igual a la suma de las áreas de los tres triángulos. El alumno deberá incluir una demostración de que el  $\angle EBA$  es un ángulo recto.



- \* 20. Se da el trapezio  $\square ABCD$ , con  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ,  $\overline{AC} \perp \overline{BC}$  y  $\overline{BD} \perp \overline{AD}$ . Si  $AB = 25$ ,  $AD = 15$  y  $BC = 15$ , ¿cuál será el área del trapezio?



- \* 21. En el  $\triangle ABC$  de la figura siguiente de la izquierda,  $AC = 13$ ,  $AB = 14$  y  $BC = 15$ .
- (a) Determinar la altura  $h_c$ .  
 (b) Determinar la altura  $h_b$ , correspondiente al lado  $\overline{AC}$ .

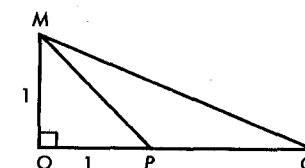


- \* 22. En el  $\triangle PQR$  de la figura anterior de la derecha, el  $\angle Q$  es obtuso,  $PQ = 11$ ,  $QR = 25$  y  $PR = 30$ . Determinar la altura correspondiente a  $\overleftrightarrow{PQ}$  y, también,  $a_{\triangle PQR}$ .

- \* 23. En el  $\triangle MOQ$ ,  $\overline{MO} \perp \overline{OQ}$ ,

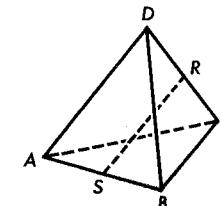
$$MO = OP = 1 \quad \text{y} \quad MP = PQ.$$

Determinar  $MQ$ ,  $m\angle Q$  y  $m\angle QMO$ .



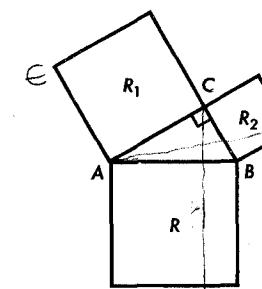
- \*\* 24. La figura de la derecha representa un tetraedro  $ABCD$  con todas sus aristas congruentes y cada una de longitud 2.  $R$  y  $S$  son los puntos medios de  $\overline{DC}$  y  $\overline{AB}$ , respectivamente.

- (a) Demostrar que  $\overline{RS}$  es perpendicular a ambos  $\overline{AB}$  y  $\overline{DC}$ .  
 (b) Determinar  $RS$ .

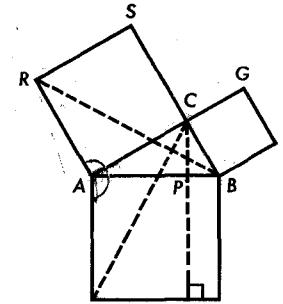


- \* 25. Los antiguos griegos conocían el teorema de Pitágoras en la siguiente forma:

El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.



$$a_{\square R} = a_{\square R_1} + a_{\square R_2}.$$



$$a_{\square S} = a_{\square R} + a_{\square Q}.$$

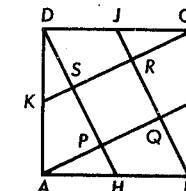
La figura de la izquierda ilustra el teorema; la figura de la derecha se utiliza en la demostración. Las siguientes preguntas, junto con las respuestas del alumno, sugieren una demostración:

- (a) ¿Por qué es  $\angle RAB \cong \angle CAM$ ?  
 (b) ¿Por qué es  $\triangle RAB \cong \triangle CAM$ ?  
 (c) ¿Por qué es  $a_{\triangle RAB} = a_{\triangle CAM}$ ?  
 (d) ¿Es una altura del  $\triangle RAB$  igual a  $AC$ ?  
 (e) ¿Por qué es  $a_{\square ACSR} = 2a_{\triangle RAB}$ ?  
 (f) ¿Es  $a_{\square AMQP} = 2a_{\triangle CAM}$ ?  
 (g) ¿Por qué es  $a_{\square ACSR} = a_{\square AMQP}$ ?  
 (h) ¿Es  $a_{\square BHGC} = a_{\square PQKB}$ ?  
 (i) ¿Es  $a_{\square AMKB} = a_{\square AMQP} + a_{\square PQKB}$ ? ¿Por qué?

### PROBLEMA OPTATIVO

El  $\square ABCD$  es un cuadrado;  $H$ ,  $I$  y  $K$  son los puntos medios de sus lados, como se indica en la figura; y el  $\square PQRS$  es un cuadrado. Determinar la razón

$$\frac{a_{\square PQRS}}{a_{\square ABCD}}.$$



**11-4. TRIÁNGULOS ESPECIALES**

El teorema de Pitágoras nos da información acerca de algunos triángulos especiales.

**Teorema 11-10.** El teorema del triángulo rectángulo isósceles

En un triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa es  $\sqrt{2}$  veces el largo de un cateto.

La demostración se deja al alumno.

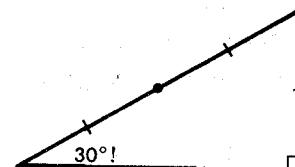
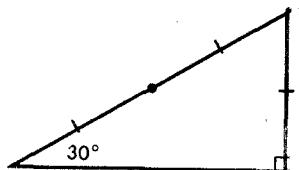
El recíproco es también cierto.

**Teorema 11-11**

Si la base de un triángulo isósceles es  $\sqrt{2}$  veces el largo de cada uno de los dos lados congruentes, entonces el ángulo opuesto a la base es un ángulo recto.

La demostración empieza con la observación de que  $a^2 + a^2 = (a\sqrt{2})^2$ .

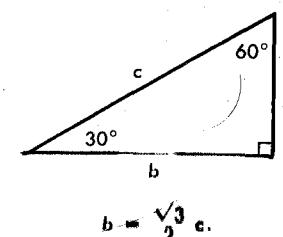
En la sección 9-7, aprendimos que en un triángulo 30-60-90, el lado opuesto al ángulo de  $30^\circ$  tiene una longitud igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa, y, también, sabemos que el recíproco es cierto:



El teorema de Pitágoras ahora nos da la relación entre la hipotenusa y el lado *más largo*, para un triángulo 30-60-90.

**Teorema 11-12**

En un triángulo 30-60-90, el lado más largo es  $\sqrt{3}/2$  veces el largo de la hipotenusa.



**Demostración:** Sea  $c$  la longitud de la hipotenusa y sea  $b$  la longitud del lado más largo. Entonces, la longitud del lado más corto es  $c/2$ . Por el teorema de Pitágoras,

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = c^2.$$

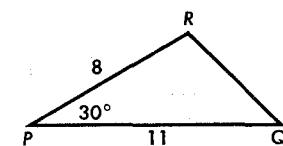
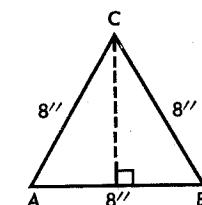
Despejando  $b$ , obtenemos

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} c.$$

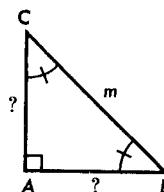
[Pregunta: ¿Será cierto que en un triángulo 30-60-90, la longitud del lado más largo es  $\sqrt{3}$  veces la longitud del lado más corto?]

**Conjunto de problemas 11-4**

1. Determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado, si la longitud de su lado es 6; 9; 78;  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{6}$ .
2. Determinar la longitud del lado más largo de un triángulo 30-60-90, si la hipotenusa es 4; 18; 98;  $2\sqrt{3}$ ; 13.
3. El  $\triangle ABC$  es equilátero. Si la longitud de cada lado es 8 cm., ¿cuál es la longitud de la altura correspondiente a  $\overline{AB}$ ? ¿Cuál es el área del  $\triangle ABC$ ?
4. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son congruentes y la longitud de uno de los lados congruentes es 15. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?
5. En el  $\triangle PQR$ ,  $m\angle P = 30$ ,  $PR = 8$  y  $PQ = 11$ . Determinar la longitud de la altura correspondiente a  $\overline{PQ}$  y el área del  $\triangle PQR$ .
6. La medida de cada uno de los ángulos en la base de un triángulo isósceles es 30, y cada uno de los dos lados congruentes tiene longitud 14. ¿Cuál es la longitud de la base? ¿Cuál es el área del triángulo?
7. Las longitudes de dos lados de un paralelogramo son 18 y 8, y la medida de un ángulo es 30. Determíñese el área del paralelogramo.
8. Determinar el área de un triángulo isósceles cuyos lados congruentes tienen cada uno longitud de 20 y cuyos ángulos en la base tienen medidas de 30; de 45; y de 60.
9. En el  $\triangle ABC$ , el  $\angle A$  es un ángulo recto y  $m\angle B = m\angle C = 45$ . Dado que  $BC = 6$ , determíñese  $AB$ .



10. Demostrar lo siguiente: Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles tiene longitud  $m$ , entonces cada uno de los dos lados congruentes tiene una longitud de  $\frac{1}{2}m\sqrt{2}$ .



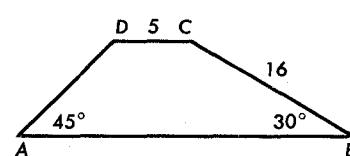
11. Determinar el área del triángulo isósceles, cada uno de cuyos lados congruentes mide 12 pulgadas de largo, si los ángulos en la base tienen medidas de:

- (a) 45 (b) 30 (c) 60

12. Determinar el área de un triángulo isósceles cuya base tiene longitud 12, si los ángulos en la base tienen medidas de:

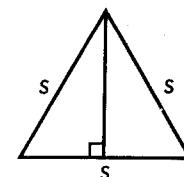
- (a) 45 (b) 30 (c) 60

13. En el trapezoide  $\square ABCD$ , las medidas de los ángulos en la base son 45° y 30°, como se indica;  $BC = 16$  y  $DC = 5$ . Determinese  $a\square ABCD$ .

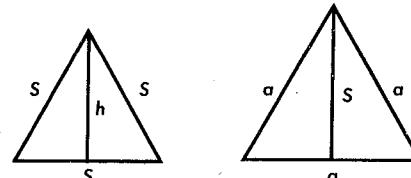


$a\square ABCD$ .

14. La altura de un triángulo equilátero es 12. Determinar la longitud de un lado y el área del triángulo.



15. Demostrar que el área de un triángulo equilátero cuyo lado tiene longitud  $s$ , viene dada por  $\frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ .



17. El área de un triángulo equilátero es  $25\sqrt{3}$ . Determinar las longitudes de los lados y las alturas.

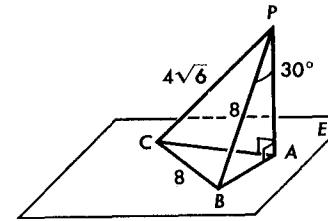
18. Un cuadrado cuya área es 81 tiene su perímetro igual al perímetro de un triángulo equilátero. ¿Cuál es el área del triángulo?

19. En la figura de la derecha, el  $\triangle ABC$  está en el plano  $E$  y  $PA \perp E$ .

$$PB = BC = 8,$$

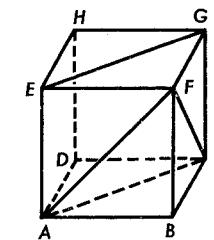
$$PC = 4\sqrt{6}$$

$$\text{y } m\angle BPA = 30.$$

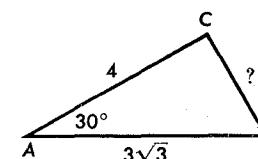


Determiníense las medidas de tantos otros ángulos y segmentos como sea posible. También, determiníense  $a\triangle PBC$ .

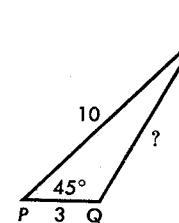
20. En el cubo que se muestra a la derecha, las aristas son congruentes y son perpendiculares, si se intersectan. Si un lado tiene longitud 6, determiníense  $a\square ACGE$  y  $a\triangle ACF$ .



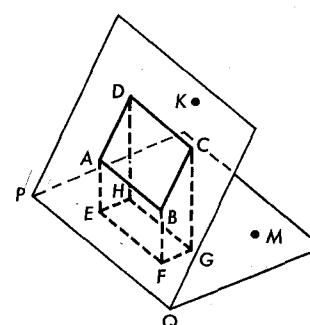
- \* 21. En el  $\triangle ABC$ ,  $m\angle A = 30$ ,  $AC = 4$  y  $AB = 3\sqrt{3}$ . Determiníese  $BC$ . ¿Es el  $\angle C$  un ángulo recto? ¿Cómo se sabe?



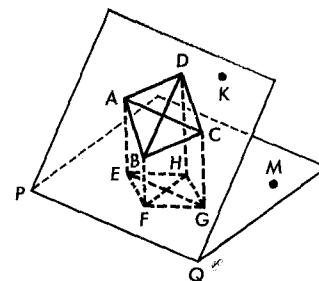
- \* 22. En el  $\triangle PQR$ , el  $\angle Q$  es obtuso,  $m\angle P = 45$ ,  $PR = 10$  y  $PQ = 3$ . Determiníense  $RQ$  y  $a\triangle PQR$ .



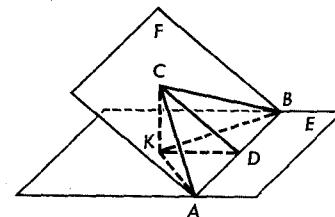
- \* 23. En la siguiente figura,  $m\angle K-PQ-M = 60$ . El cuadrado  $\square ABCD$  está en una cara, con  $\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ , y se proyectó en la otra cara, resultando el  $\square EFGH$ . Si  $AB = \sqrt{26}$ , determiníense  $a\square EFGH$ .



- \*+ 24. En la figura de la derecha,  $m\angle K-PQ-M = 45^\circ$ . El cuadrado  $\square ABCD$  está en una cara, con  $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{PQ}$ , y se proyectó en la otra cara, resultando el  $\square EFGH$ . Si  $AB = 8$ , determíñese  $a\square EFGH$ .

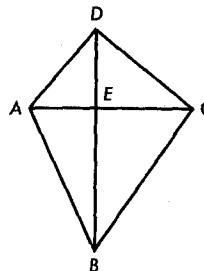


- \* + 25. Los planos  $E$  y  $F$  se intersecan en  $\overleftrightarrow{AB}$ , formando un ángulo diedro. En  $F$ ,  $\overleftrightarrow{CD}$  es la mediatrix de  $\overleftrightarrow{AB}$ . También,  $\overleftrightarrow{CK} \perp E$ . Dado que  $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ,  $m\angle CBK = 30$  y  $BC = 6$ , determiníense  $m\angle C-AB-K$  y  $a\triangle ABK$ .



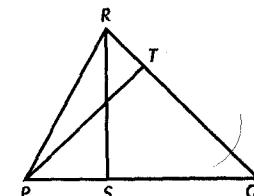
## Repaso del capítulo

1. Completar el siguiente enunciado: Una región poligonal es la \_\_\_\_\_ de un número \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ en un plano, tales que si dos cualesquiera de ellas \_\_\_\_\_, su \_\_\_\_\_ es o bien un \_\_\_\_\_ o un \_\_\_\_\_.



2. En la figura,  $\overline{AC} \perp \overline{DB}$ . Si  $DE = 8$  y  $BE = 12$ , ¿cuál es la razón de  $a\triangle ACD$  a  $a\triangle ABC$ ?

3. Si la longitud de un lado de un cuadrado es tres veces la longitud de un lado de un segundo cuadrado, ¿cuántas veces el área del segundo cuadrado será el área del primero? (Debe tratarse de resolver este problema sin utilizar fórmula alguna de área.)



4. En el  $\triangle PQR$ ,  $\overline{PT}$  y  $\overline{RS}$  son dos alturas. Dado que  $PR = 13$ ,  $PS = 5$  y  $m\angle Q = 45^\circ$ , determine  $PT$ .

5. Si la diagonal de un cuadrado mide 18 metros de largo, ¿cuál es la longitud de cada lado? ¿Cuál es el área del cuadrado?

6. Un triángulo tiene lados que miden 25, 25 y 48. Determinar su área.

7. Una mediana de un triángulo equilátero mide 15 pulgadas de largo. ¿Cuál es el área del triángulo?

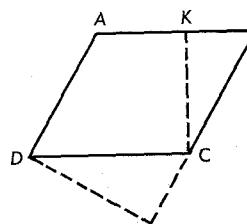
8. El  $\square ABCD$  es un paralelogramo,  $\overline{CK} \perp \overline{AB}$  y el  $\angle M$  es un ángulo recto.

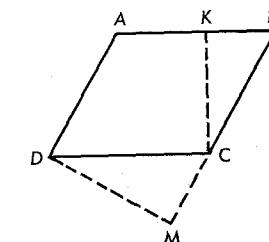
(a) Si  $BC = 12$ ,  $DM = 15$  y  $KC = 9$ , determiníense  $DC$  y  $CM$ .

(b) Si  $KC = \sqrt{24}$ ,  $AK = \sqrt{18}$  y  $KB = \sqrt{8}$ , determiníense  $AD$  y  $DM$ .

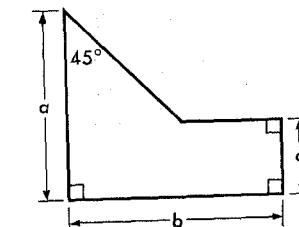
9. La longitud de un lado de un rombo es 13 y la de una de sus diagonales es 24. Determina el área del rombo.

10. En el  $\triangle ABC$ ,  $AB = 14$ , la longitud de la mediana  $\overline{CD}$  es 8 y  $m\angle ADC = 60$ . Calcula  $a\triangle ABC$ .



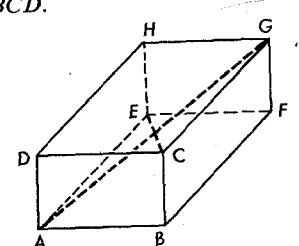


11. Deducir una fórmula para el área de la figura de la derecha, en términos de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .



12. Un trapecio tiene lados paralelos de 13 cm. y 21 cm. de longitud. El lado más largo de los lados no paralelos mide 17 cm. y el más corto es perpendicular a los lados paralelos. Calcúlese el área del trapecio.

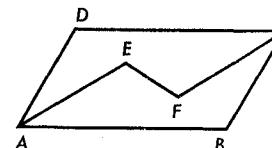
13. En el paralelogramo  $\square ABCD$ ,  $M$  es el punto medio de  $\overline{AD}$  y  $K$  es el punto medio de  $\overline{AB}$ . Demuéstrese que  $\overline{CM} \parallel \overline{BK}$ .



14. En el cuadro rectangular representado a la derecha,  $\overline{AG}$  y  $\overline{EC}$  son diagonales. Si  $AB = 9$ ,  $BF = 12$  y  $AD = 8$ , determiníense  $AG$  y  $EC$ .

15. ¿Cuál es la longitud de la diagonal de un cubo cuya arista tiene longitud 6?

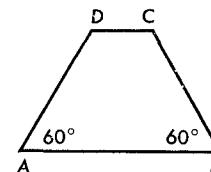
16. En el paralelogramo  $\square ABCD$ , las bisectrices de los  $\angle A$  y  $\angle C$  intersecan a la diagonal  $DB$  en  $E$  y  $F$ , respectivamente. Demostrar que las regiones  $ABCFe$  y  $AEFCD$  tienen la misma área.



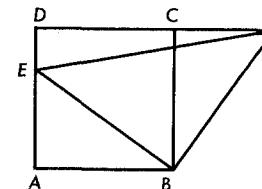
17. Un segmento dado es un lado de un cuadrado y, también, la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles. Demuéstrese que el área del cuadrado es cuatro veces el área del triángulo. (Debe tratarse de resolver este problema sin utilizar fórmula alguna de área.)

18. El área de un triángulo equilátero es  $100\sqrt{3}$ . ¿Cuáles son las longitudes de sus lados y alturas?

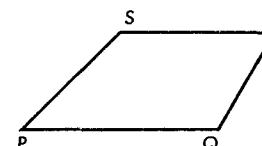
19. El  $\square ABCD$  es un trapeño, con  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ .  $m\angle A = m\angle B = 60^\circ$  y  $AB = 12$ . También,  $BC = 8$ . Determinese  $a\square ABCD$ .



- \* 20. El  $\square ABCD$  es un cuadrado.  $E$  está en  $\overline{AD}$  y  $F$  está en  $\overline{DC}$ , de modo que  $\overline{EB} \perp \overline{FB}$ . Si  $a\square ABCD = 256$  y  $a\triangle EBF = 200$ , determiníse  $CF$ .



- \* 21. El  $\square PQRS$  es un trapeño, con  $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$ .  $m\angle P = 45$  y  $m\angle Q = 120$ . Si  $PS = 12\sqrt{2}$  y  $PQ = 27$ , ¿cuál es  $a\square PQRS$ ?

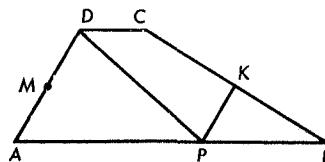


- \* 22. En un triángulo, dos lados tienen longitudes  $a$  y  $b$ . La altura correspondiente al tercer lado divide a éste en segmentos de longitudes  $c$  y  $d$ , respectivamente. Demuéstrese que

$$(a+b)(a-b) = (c+d)(c-d).$$

- \* 23. Datos: El  $\square ABCD$  es un trapeño, con  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ;  $M$  y  $K$  son los puntos medios de  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente;  $\overline{PK} \parallel \overline{AD}$ .

Demostrar que  $a\triangle APD = a\square PBCD = \frac{1}{2}a\square ABCD$ .

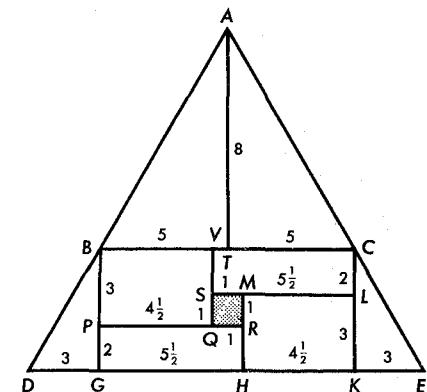


- \* 24. Se dan dos paralelogramos cualesquiera en un plano. Explicar cómo se puede dibujar una sola recta que divide a cada una de las regiones limitadas por los paralelogramos en dos regiones de igual área.

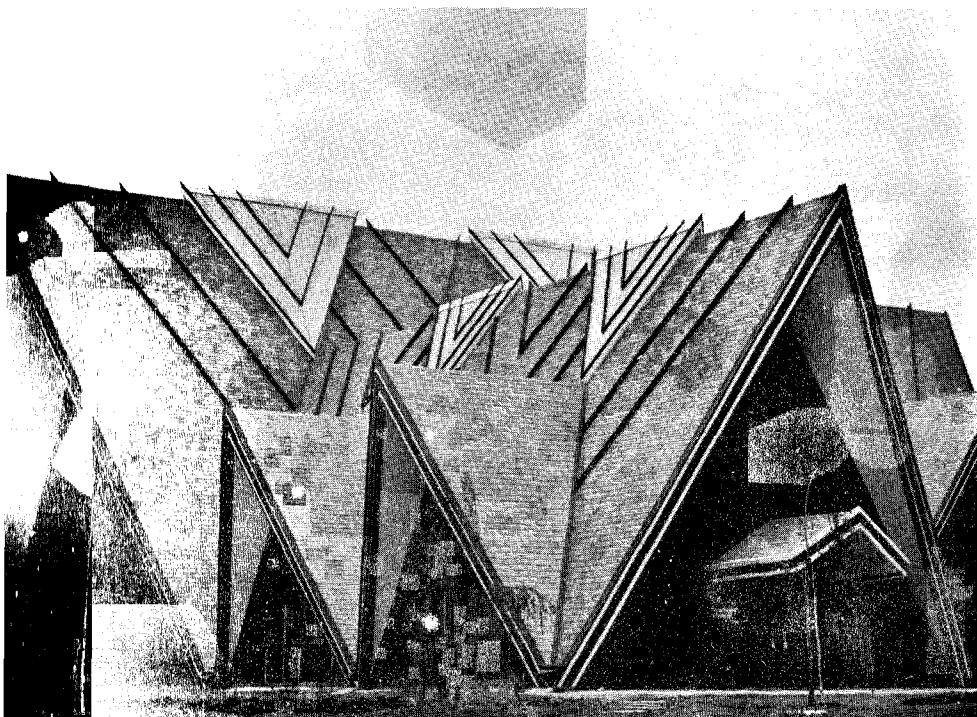
### PROBLEMA OPTATIVO

La figura de la derecha consiste en cuatro triángulos rectángulos, cuatro rectángulos y un “agujero” cuadrado de lado una unidad.

- Determinar la suma de las áreas de las ocho regiones. (No deberá contarse el agujero.)
- Determinarse la longitud de la base,  $\overline{DE}$ , y la de la altura desde  $A$  hasta  $\overline{DE}$ . Calcúlese la mitad del producto de esos dos números.
- ¿Puede el alumno explicar por qué los resultados de las partes (a) y (b) son iguales, a pesar del agujero?

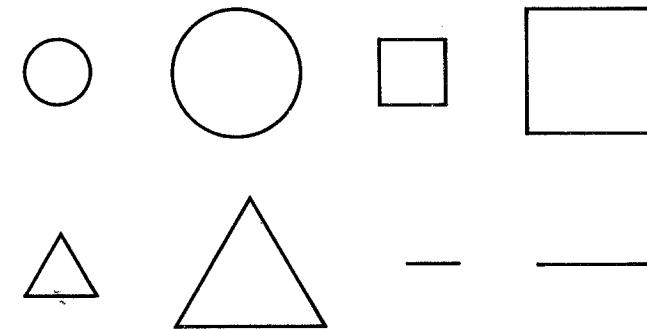


# 12 | Semejanza



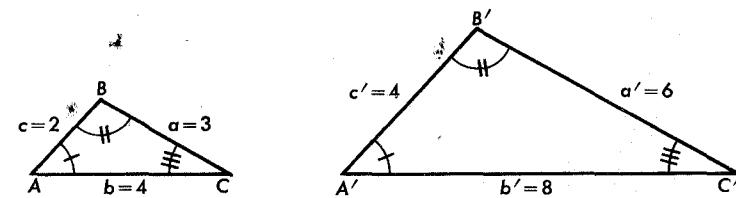
## 12-1. EL CONCEPTO DE SEMEJANZA. PROPORCIONALIDAD

En términos corrientes, dos figuras geométricas son semejantes, si tienen exactamente la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Por ejemplo, dos circunferencias cualesquiera son semejantes; dos cuadrados cualesquiera son semejantes; dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes; y dos segmentos cualesquiera son semejantes.



Otra manera de expresar esto es decir que dos figuras son semejantes, si una de ellas es un modelo a escala de la otra.

Las marcas en las figuras siguientes indican que los dos triángulos deben ser semejantes:



Debe ser posible “estirar” el primer triángulo, duplicando su tamaño sin alterar su forma, para que coincida con el segundo triángulo. El esquema del “estiramiento” puede representarse mediante la correspondencia

$$ABC \leftrightarrow A'B'C'.$$

Desde luego, esta correspondencia no es una congruencia, porque la longitud de cada lado del segundo triángulo es dos veces la del lado correspondiente del primero. Llamamos *semejanzas* a las correspondencias de este tipo. Más adelante, en este capítulo, se dará una definición precisa de una semejanza.

En vez de estirar las cosas, las semejanzas también pueden contraerlas. Por ejemplo, la correspondencia

$$A'B'C' \leftrightarrow ABC$$

contrae el segundo triángulo para hacerlo coincidir con el primero.

Observese que las longitudes de los lados de nuestros dos triángulos forman dos ternas de números positivos,  $a, b, c$  y  $a', b', c'$ . Entre estas dos ternas existe una relación especial: cada número de la segunda terna es exactamente el doble del número correspondiente de la primera terna. Así,

$$a' = 2a, \quad b' = 2b, \quad c' = 2c.$$

O, dicho a la inversa, cada número de la primera terna es exactamente la mitad del número correspondiente de la segunda terna:

$$a = \frac{1}{2}a', \quad b = \frac{1}{2}b', \quad c = \frac{1}{2}c'.$$

Luego,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

porque cada una de estas fracciones es igual a 2; y

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

porque cada una de estas fracciones es igual a  $\frac{1}{2}$ . Las ternas que están relacionadas de esta manera se dicen ser *proporcionales*.

### Definición

Sean dadas dos sucesiones de números positivos  $a, b, c, \dots$  y  $p, q, r, \dots$ . Si

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \dots,$$

entonces las sucesiones  $a, b, c, \dots$  y  $p, q, r, \dots$  son *proporcionales*.

Evidentemente, esta definición no depende del orden en que se nombren las dos sucesiones; pues, si

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \dots,$$

entonces

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c} = \dots,$$

y recíprocamente.

Trataremos la proporcionalidad con los métodos corrientes del álgebra. La proporcionalidad más fácil de manejar es la que comprende solamente cuatro números. A menudo, llamamos a una proporcionalidad de este tipo una *proporción*. A continuación, se dan algunos ejemplos de propiedades que el alumno mismo podría descubrir, sabiendo que  $a, b$  y  $p, q$  son proporcionales.

Se da:

$$(1) \quad \frac{a}{p} = \frac{b}{q},$$

por la definición de proporcionalidad. Multiplicando ambos miembros por  $pq$ , obtenemos

$$(2) \quad aq = bp.$$

Dividiendo ambos miembros por  $bq$ , obtenemos

$$(3) \quad \frac{a}{b} = \frac{p}{q}.$$

Aquí no hay peligro de división por 0, pues todos los números de una proporcionalidad tienen que ser positivos. Ahora, sumando 1 a ambos miembros y simplificando, obtenemos

$$(4) \quad \frac{a+b}{b} = \frac{p+q}{q}.$$

Restando 1 de ambos miembros de la ecuación (3), obtenemos

$$(5) \quad \frac{a-b}{b} = \frac{p-q}{q}.$$

Éstas son solamente las más útiles de las igualdades que se pueden deducir de la proporción (1); hay muchas otras. No es necesario que el alumno se aprenda de memoria estas ecuaciones. Si trata de aprender de memoria cosas como éstas, entonces a menudo se le olvidarán cuando más las necesita. Lo que debe recordar es el método algebraico empleado para obtener una ecuación de la otra.

### Definición

Si  $a, b$  y  $c$  son números positivos y

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

entonces  $b$  es la *media geométrica* de  $a$  y  $c$ .

Es fácil calcular que  $b = \sqrt{ac}$ .

## Conjunto de problemas 12-1

1. Indíquense los números que harán una proporcionalidad de cada uno de los siguientes enunciados:

(a)  $\frac{2}{3} = \frac{?}{6} = \frac{?}{15} = \frac{2x}{?} = \frac{?}{1.5}$ .

(b)  $\frac{792}{3960} = \frac{198}{?} = \frac{?}{495} = \frac{9}{?} = \frac{1}{?}$ .

(c)  $\frac{?}{3} = \frac{6x}{?} = \frac{24}{18} = \frac{?}{6\sqrt{3}}$ .

(d)  $\frac{5}{4} = \frac{10}{?} = \frac{?}{28} = \frac{5\sqrt{2}}{?} = \frac{?}{0.04}$ .

2. Completar cada enunciado:

(a) Si  $\frac{5}{9} = \frac{15}{27}$ , entonces  $9 \cdot 15 = 5 \cdot ?$ .

(b) Si  $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ , entonces  $7a = ?$ .

(c) Si  $\frac{x}{12} = \frac{5}{8}$ , entonces  $8x = ?$ .

3. En cada una de las siguientes proporciones, determinar el valor de  $x$ :

(a)  $\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$ .

(b)  $\frac{5}{x} = \frac{4}{7}$ .

(c)  $\frac{5}{4} = \frac{2x}{13}$ .

(d)  $\frac{2}{3} = \frac{11}{x+3}$ .

4. Completar cada enunciado:

(a) Si  $\frac{x}{3} = \frac{5}{7}$ , entonces  $x = ? \cdot \frac{5}{7}$ .

(b) Si  $\frac{5}{9} = \frac{10}{18}$ , entonces  $\frac{5}{10} = ? \cdot \frac{1}{18}$ .

(c) Si  $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ , entonces  $\frac{16}{4} = \frac{12}{?}$ .

(d) Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , entonces  $\frac{a}{c} = ? \cdot \frac{?}{d}$ .

5. Determinar la media geométrica de 4 y 9; de 7 y 14; de 15 y 60.

6. Completar cada enunciado:

(a) Si  $3a = 2b$ , entonces  $\frac{a}{b} = ?$  y  $\frac{a}{2} = ?$ .

(b) Si  $4m = 15$ , entonces  $\frac{m}{5} = ?$  y  $\frac{m}{3} = ?$ .

(c) Si  $6x = 5 \cdot 9$ , entonces  $\frac{x}{5} = ?$  y  $\frac{5}{x} = ?$ .

(d) Si  $\frac{2a}{3b} = \frac{7c}{5d}$ , entonces  $\frac{a}{b} = ?$  y  $\frac{b}{a} = ?$ .

7. Para dos números positivos cualesquiera  $a$  y  $c$ , la media geométrica es  $b = \sqrt{ac}$ , y la media aritmética es  $d = \frac{1}{2}(a+c)$ . Constrúyase una tabla para la media geométrica y la media aritmética de cada uno de los siguientes pares de números:

(a) 2 y 8

(b) 3 y 12

(c) 5 y 45

(d) 4 y 9

(e) 9 y 16

(f) 12 y 15

8. Completar cada enunciado:

(a) Si  $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$ , entonces  $\frac{5+12}{12} = \frac{15+?}{36}$ .

(b) Si  $\frac{7}{9} = \frac{28}{36}$ , entonces  $\frac{7}{2} = \frac{28}{36-?}$ .

(c) Si  $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$ , entonces  $\frac{a+b}{b} = ?$  y  $\frac{a-b}{b} = ?$ .

(d) Si  $\frac{a+c}{c} = \frac{11}{7}$ , entonces  $\frac{a}{c} = ?$  y  $\frac{c}{a} = ?$ .

9. Considérense las tres cuaternas siguientes. ¿Qué pares de cuaternas son proporcionales?

(a) 3, 8, 12, 17.

(b) 9, 24, 36, 51.

(c)  $\frac{7}{2}, \frac{28}{3}, 15, \frac{110}{6}$ .

Es fácil ver que las cuaternas (a) y (b) son proporcionales, puesto que cada número de (b) es tres veces el número correspondiente de (a). Pero comparar (a) y (c) o (b) y (c) no es sencillo. Una manera eficaz de hacerlo es convertir cada cuaterna en una cuaterna proporcional que empiece con 1, así:

(a)  $1, \frac{8}{3}, 4, \frac{17}{3}$ .

(b)  $1, \frac{24}{9}, 4, \frac{51}{9}$ ; ó  $1, \frac{8}{3}, ?, ?$ .

(c)  $1, \frac{8}{3}, ?, ?$ .

Contéstese ahora la pregunta.

10. ¿Cuáles de los siguientes pares de ternas son proporcionales? Quizás, el alumno desee emplear el método del problema 9 como ayuda.

(a) 5, 7, 9.

(b) 1, 2, 3.

(c)  $2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$ .

(d) 8, 15, 17.

(e) 15, 30, 45.

(f) 16, 30, 34.

(g)  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ .

(h) 1.25, 1.75, 2.25

11. Si  $x/40 = y/50 = 30/20$ , ¿cuáles son los valores de  $x$  y  $y$ ?

12. Si  $3/p = 5/q = r/26 = q/20$ , ¿cuáles son los valores de  $p$ ,  $q$  y  $r$ ?

13. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para todos los valores de las variables utilizadas, salvo, desde luego, los valores que podrían hacer cero algún término de una sucesión?

(a)  $\frac{5x}{6x} = \frac{5}{6}$ .

(b)  $\frac{a}{8b} = \frac{b}{8a}$ .

(c)  $\frac{r}{r^2} = \frac{s}{rs} = \frac{t}{tr}$ .

(d)  $\frac{a+b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a-b}$ .

(e)  $\frac{a+b}{1} = \frac{a^2+b^2}{a+b}$ .

(f)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$ .

14. (a) Considérese la proporcionalidad  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{18}{27}$ . Verifíquese que

$$\frac{2+4+6+8+18}{3+6+9+12+27} = \frac{2}{3}.$$

¿Es apropiado el mismo procedimiento para otra proporcionalidad cualquiera? Trátese con alguna.

(b) Demuéstrese que si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h},$$

entonces

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{a}{b}.$$

[Sugerencia: Sea  $a/b = k$ . Entonces,  $a = kb$ . También,  $c = kd$ ,  $e = kf$ ,  $g = kh$ . ¿Es

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = k?$$

## PROBLEMA OPTATIVO

Demostrar el siguiente teorema:

La media geométrica de dos números positivos diferentes es siempre menor que su media aritmética.

[Sugerencia: Tómese  $a > b > 0$ . Muéstrese que  $\sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a+b)$ . Supóngase primero que la desigualdad propuesta es válida y dedúzcase de la misma una desigualdad que sabemos es cierta. Esto le indicará al alumno cómo iniciar la demostración.]

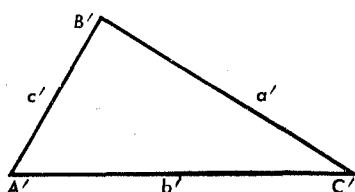
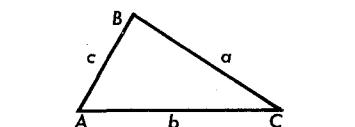
## 12-2. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Ahora, enunciamos la definición de una semejanza entre dos triángulos. Supongamos que se nos da una correspondencia  $ABC \leftrightarrow A'B'C'$  entre los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$ . Como se acostumbra,  $a$  designa la longitud del lado opuesto a  $A$ ,  $b$  designa la longitud del lado opuesto a  $B$ , y así sucesivamente. Si los ángulos correspondientes son congruentes y

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

entonces decimos que la correspondencia  $ABC \leftrightarrow A'B'C'$  es una *semejanza*, y escribimos

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$



## Definición

Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia se llama una *semejanza* y decimos que los triángulos son *semejantes*.

La situación aquí es como en el caso de la congruencia:  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  significa no solamente que los triángulos son semejantes, sino también que la correspondencia particular  $ABC \leftrightarrow A'B'C'$  es una semejanza. Así, dado que  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , podemos inmediatamente escribir la proporcionalidad

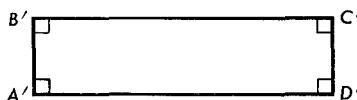
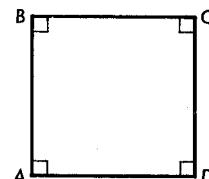
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

sin tener que referirnos a una figura. Si las longitudes de los lados no están indicadas, estas igualdades toman la forma

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

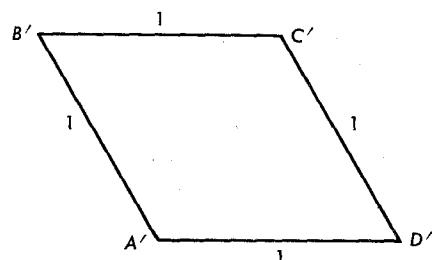
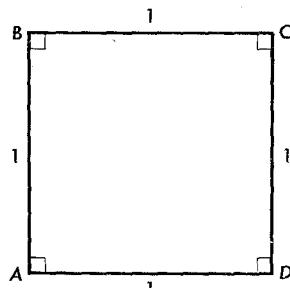
La definición de semejanza exige dos cosas: (1) los ángulos correspondientes deben ser congruentes, y (2) los lados correspondientes deben ser proporcionales. Para el caso de los triángulos, resultará que si se cumple una de las dos condiciones, también se cumple la otra. Es decir, si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces los lados correspondientes son proporcionales, y recíprocamente. Estas relaciones se presentan en el teorema de semejanza AAA y el teorema de semejanza LLL, que se demostrarán más adelante en este capítulo.

Al exigir las condiciones (1) y (2), nos aseguramos de que existe la semejanza, y esto es muy conveniente, porque los triángulos son las únicas figuras para las cuales el concepto de semejanza es muy sencillo. Consideremos, por ejemplo, un cuadrado y un rectángulo:



En la correspondencia  $ABCD \leftrightarrow A'B'C'D'$ , los ángulos correspondientes son congruentes, porque todos los ángulos son rectos. Pero los lados correspondientes no son proporcionales y, desde luego, ninguna de las dos figuras es un modelo a escala de la otra.

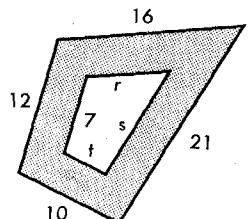
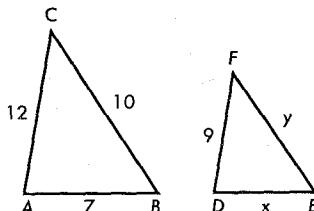
Para otros cuadriláteros, puede cumplirse la condición (2) y no la (1). Consideremos un cuadrado y un rombo:



En la correspondencia  $ABCD \leftrightarrow A'B'C'D'$ , los lados correspondientes son proporcionales, pero las figuras tienen formas bien diferentes.

### Conjunto de problemas 12-2

1. Dado que  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  y que las longitudes de los lados son las indicadas, determinense  $x$  y  $y$ .



2. Un trozo de cartulina se recortó, como muestra la figura anterior de la derecha, de manera que sus bordes interiores y exteriores formaran cuadriláteros semejantes. Si las longitudes de los lados son las que se indican, determinense los valores de  $r$ ,  $s$  y  $t$ .

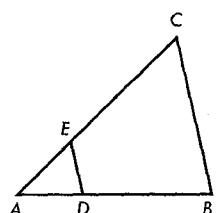
3. En la figura de la derecha,  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ . Si

$$AD = 5, \quad AE = 6, \quad BC = 12$$

y

$$AB = 15,$$

determinense  $AC$  y  $DE$ .

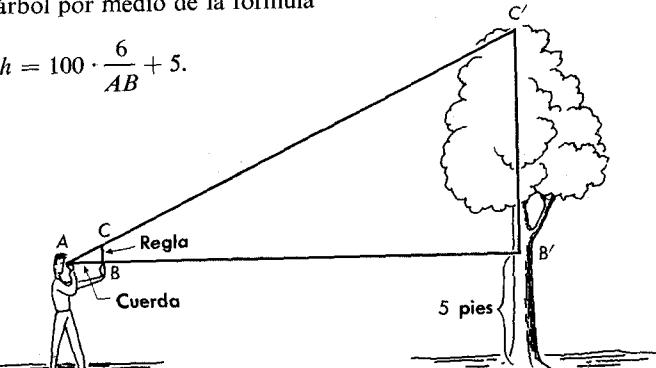


4. Si  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ , ¿podrá deducirse que  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ? ¿Por qué?

5. Se sacaron dos copias de un negativo, una natural y la otra ampliada. En la copia natural, un objeto tiene 5 centímetros de ancho y 6 centímetros de alto. En la copia ampliada, el mismo objeto tiene 19 centímetros de ancho. ¿Qué altura tiene el objeto en la copia ampliada?

6. Juan puede obtener una buena aproximación de la altura de un árbol mediante el procedimiento siguiente: Primero, se coloca junto al árbol y hace una señal en él a 5 pies del suelo. Entonces, se aleja 40 pasos (100 pies) del árbol y, volviéndose hacia él, manteniendo vertical una regla de 6 pulgadas frente a sus ojos, la mueve hasta lograr que la regla le tape exactamente la vista de la parte del árbol que queda por encima de la señal. Mediante una cuerda, pasando por un agujero en el extremo inferior de la regla, mide en pulgadas la distancia  $AB$ , desde su ojo a la regla. Despues, resulta ya fácil calcular la altura del árbol por medio de la fórmula

$$h = 100 \cdot \frac{6}{AB} + 5.$$

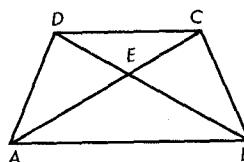
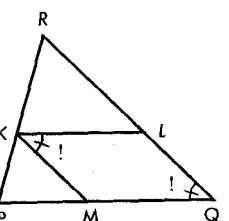


- (a) Explicar por qué la fórmula da la altura del árbol. ¿Cuál es la unidad de medida?  
 (b) Si la cuerda mide 8 pulgadas, ¿cuál es la altura del árbol?

7. Demostrar lo siguiente: Si, en el  $\triangle ABC$ ,  $D$  y  $E$  son los puntos medios de  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente, entonces  $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ .

8. Demostrar que el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un triángulo dado es semejante al triángulo dado.

9. Se da la figura de la izquierda, a continuación, con  $\triangle PMK \sim \triangle KLR$ . Demuéstrese que  $\angle Q \cong \angle MKL$ .



10. Se da el trapecio  $\square ABCD$ , con  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  y  $\triangle AED \sim \triangle BEC$ .

Demostrar que  $AD = BC$ .

[Sugerencia: ¿Qué otros triángulos son semejantes?]

### 12-3. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROPORCIONALIDAD Y SU RECÍPROCO

Considérese un triángulo  $\triangle ABC$ , y un segmento de recta transversal  $\overline{DE}$  paralelo a la base  $\overline{BC}$ . Parece que la correspondencia  $ABC \leftrightarrow ADE$  debe ser una semejanza. En efecto, es bastante fácil demostrar que los ángulos correspondientes son congruentes. (¿Cómo se deduce esto?) Demostrar que los lados correspondientes son proporcionales es un poco más difícil. Empezamos con el siguiente teorema, que dice que los lados *inclinados* de la figura de la derecha son proporcionales:

#### Teorema 12-1. El teorema fundamental de la proporcionalidad

Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca en puntos distintos a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos que son proporcionales a dichos lados.

**O de otro modo:** En el  $\triangle ABC$ , sean  $D$  y  $E$  puntos de  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  tales que  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ . Entonces,

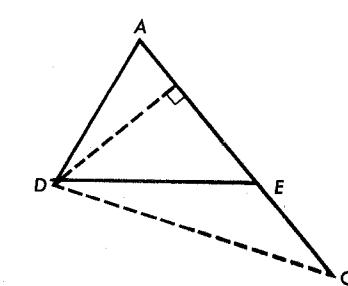
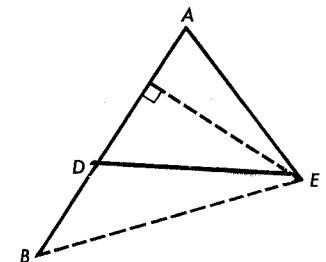
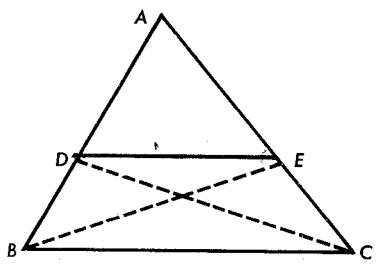
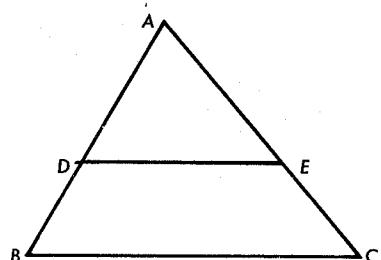
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

**Democión:** En los triángulos  $\triangle ADE$  y  $\triangle BDE$ , tomemos a  $\overline{AD}$  y  $\overline{BD}$  como bases, respectivamente. Entonces, estos triángulos tienen la misma altura. (¿Por qué?) En consecuencia, por el teorema 11-7, la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases y tenemos que

$$(1) \quad \frac{a\triangle BDE}{a\triangle ADE} = \frac{BD}{AD}.$$

Análogamente, en los triángulos  $\triangle ADE$  y  $\triangle CDE$ , consideremos a  $\overline{AE}$  y  $\overline{CE}$  como bases, respectivamente. Puesto que estos triángulos tienen la misma altura, concluimos, como antes, que

$$(2) \quad \frac{a\triangle CDE}{a\triangle ADE} = \frac{CE}{AE}.$$



Ahora bien, los triángulos  $\triangle BDE$  y  $\triangle CDE$  tienen la misma base  $\overline{DE}$ . (Véase la figura a la derecha del segundo enunciado del teorema.) También, tienen la misma altura, pues  $\overline{DE}$  y  $\overline{BC}$  son paralelas. Por tanto, en virtud del teorema 11-6,

(3)

$$a\triangle BDE = a\triangle CDE.$$

De las tres ecuaciones (1), (2) y (3), obtenemos

(4)

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}.$$

Sumando 1 a ambos miembros de la ecuación (4), obtenemos

(5)

$$\frac{BD + AD}{AD} = \frac{CE + AE}{AE}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

como queríamos demostrar.

El recíproco del teorema fundamental de la proporcionalidad es más fácil de demostrar.

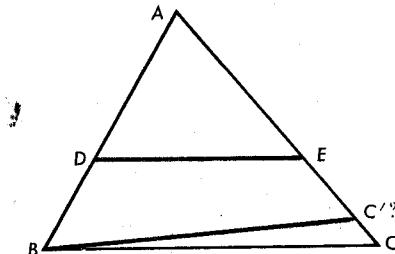
#### Teorema 12-2

Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y determina sobre dichos lados segmentos proporcionales a ellos, entonces es paralela al tercer lado.

**O de otro modo:** Se da el  $\triangle ABC$ . Sea  $D$  un punto entre  $A$  y  $B$ , y  $E$  un punto entre  $A$  y  $C$ . Si

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

entonces  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .



**Democión:** Sea  $\overline{BC}'$  la recta que pasa por  $B$ , paralela a  $\overline{DE}$ , y que interseca a  $\overline{AC}$  en  $C'$ . Por el teorema anterior,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}.$$

Puesto que, por hipótesis,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

tenemos que

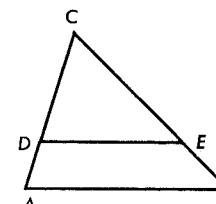
$$\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE},$$

y  $AC' = AC$ . Por tanto,  $C' = C$  y  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .

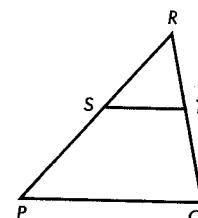
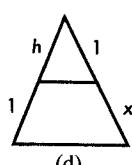
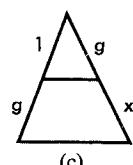
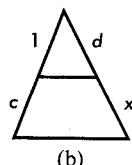
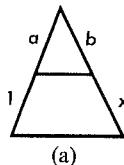
## Conjunto de problemas 12-3

1. En el  $\triangle ABC$ ,  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ .

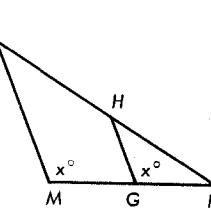
- (a) Si  $AC = 12$ ,  $CD = 4$  y  $BC = 24$ , determine  $CE$ .  
 (b) Si  $AC = 15$ ,  $AD = 3$  y  $BC = 25$ , determine  $BE$ .  
 (c) Si  $AD = 6$ ,  $CD = 4$  y  $CE = 7$ , determine  $BC$ .  
 (d) Si  $CD = 8$ ,  $AC = 18$  y  $BE = 6$ , determine  $CE$ .  
 (e) Si  $AD = CE$ ,  $CD = 4$  y  $EB = 9$ , determine  $AC$ .

2. Sabiendo que  $\overline{ST} \parallel \overline{PQ}$  en el  $\triangle PQR$ , completense los siguientes enunciados:

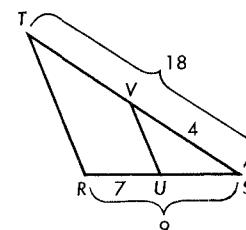
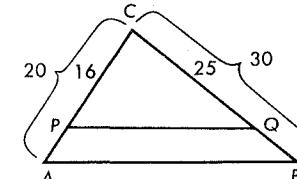
- (a)  $\frac{RP}{RS} = \frac{?}{?}$ .      (b)  $\frac{RS}{SP} = \frac{?}{?}$ .  
 (c)  $\frac{?}{?} = \frac{SP}{RP}$ .      (d)  $\frac{RT}{RQ} = \frac{?}{?}$ .  
 (e)  $\frac{RS}{RT} = \frac{?}{?}$ .      (f)  $\frac{RQ}{RP} = \frac{?}{?}$ .

3. En cada uno de los siguientes triángulos, se trazó un segmento paralelo a una base y se indicaron las longitudes de ciertos segmentos. En cada caso, determine  $x$  en términos de las otras letras.4. En el  $\triangle JMK$ ,  $m\angle M = m\angle HGK = x$ .

- (a) Si  $JH = 7$ ,  $JK = 21$  y  $GK = 10$ , determine  $MG$ .  
 (b) Si  $HK = MG$ ,  $MK = 6$  y  $JH = 8$ , determine  $GK$ .  
 (c) Si  $GK = 7$ ,  $HK = 2MG$  y  $JH = 14$ , determine  $JK$ .  
 (d) Si  $KJ = 24$ ,  $HK = MK$  y  $KG = 4$ , determine  $MK$ .



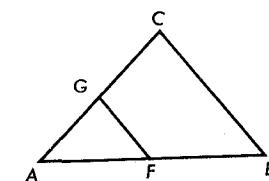
5. Si los segmentos de la figura de la izquierda, a continuación, tienen las longitudes indicadas, ¿será  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ ? Justifíquese la respuesta.



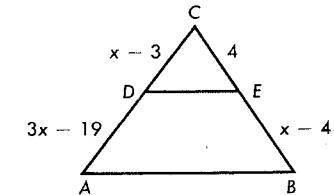
6. Si los segmentos de la figura anterior de la derecha tienen las longitudes indicadas, ¿será  $\overline{UV} \parallel \overline{RT}$ ? Justifíquese la respuesta.

7. Para cuáles de los siguientes conjuntos de longitudes será  $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$ ?

- (a)  $AB = 14$ ,  $AF = 6$ ,  $AC = 7$ ,  $AG = 3$ .  
 (b)  $AB = 12$ ,  $FB = 3$ ,  $AC = 8$ ,  $AG = 6$ .  
 (c)  $AF = 6$ ,  $FB = 5$ ,  $AG = 9$ ,  $GC = 8$ .  
 (d)  $AC = 21$ ,  $GC = 9$ ,  $AB = 14$ ,  $AF = 5$ .



8. Dada la figura de la derecha, con las propiedades indicadas, determinar todos los valores de  $x$  para los cuales será  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ .



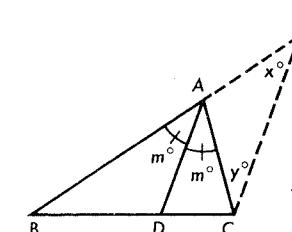
9. Demostrar el siguiente teorema:

La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos cuyas longitudes son proporcionales a los lados adyacentes a dicho ángulo.

O de otro modo: En el  $\triangle ABC$ , si  $\overrightarrow{AD}$  biseca al  $\angle A$  y  $D$  está en  $\overline{BC}$ , entonces

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}.$$

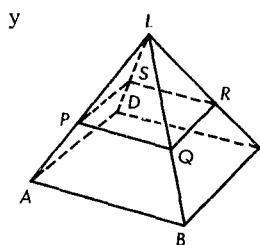
[Sugerencia: Trácese  $\overleftrightarrow{CE}$  paralela a  $\overrightarrow{AD}$  y demuéstrese que  $AC = AE$ .]



10. Utilícese el teorema del problema 9 para contestar las siguientes preguntas:

- (a) Las longitudes de los lados de un triángulo son 15, 20 y 28. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos en que la bisectriz del ángulo mayor divide al lado opuesto? Contéstese esta misma pregunta para el caso del ángulo menor.  
 (b) Las longitudes de los lados de un triángulo son 12, 18 y 24. Determine las longitudes de los segmentos en que la bisectriz de cada ángulo divide al lado opuesto.

11. En la figura de la derecha,  $\overline{PS} \parallel \overline{AD}$ ,  $\overline{SR} \parallel \overline{DC}$  y  $\overline{RQ} \parallel \overline{BC}$ . Demuéstrese que  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ .



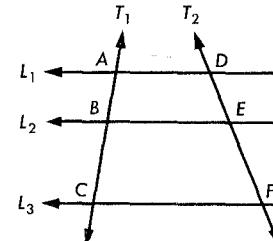
12. Demostrar el siguiente teorema:

Si tres o más rectas paralelas son cortadas cada una por dos transversales, los segmentos de las transversales determinados por las paralelas son proporcionales.

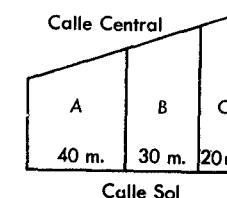
**O de otro modo:** Si las transversales  $T_1$  y  $T_2$  cortan a las rectas paralelas  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  en  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , respectivamente, entonces

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

[Sugerencia: Trácese  $\overline{DC}$  o  $\overline{AF}$ .]



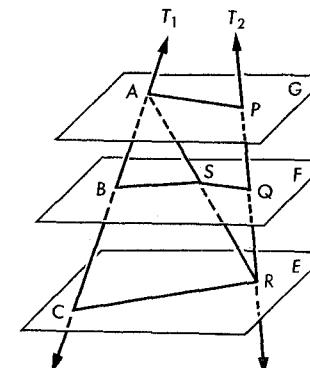
13. Tres solares se extienden desde la calle Central hasta la calle Sol, como muestra la figura a la derecha. Los linderos laterales son segmentos perpendiculares a la calle Sol. Si el frente total de los solares en la calle Central mide 120 metros, determine el frente de cada solar en dicha calle.



14. Se dan los planos paralelos  $E$ ,  $F$  y  $G$ , intersecados por las transversales  $T_1$  y  $T_2$ , como se indica en la figura.

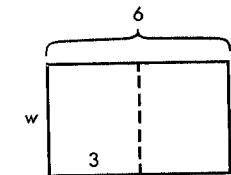
Demuéstrese que  $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$ .

[Sugerencia: Trácese  $\overline{AR}$ .]



15. Demostrar lo siguiente: Las diagonales de un trapecio se intersecan en un punto tal que las longitudes de los segmentos de una de las diagonales son proporcionales a las longitudes de los segmentos correspondientes de la otra diagonal.

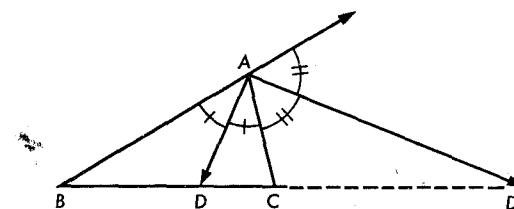
- \* 16. Un impresor quiere hacer una tarjeta de 6 pulgadas de largo y de ancho tal que al doblarla por la mitad, como se indica en la figura, tenga la misma forma que antes de hacer el doblez. ¿Cuál deberá ser el ancho de la tarjeta?



- \* 17. Demostrar el siguiente teorema:

Dado un triángulo cualquiera  $\triangle ABC$ , si las bisectrices de los ángulos interno y externo en  $A$  intersecan a  $\overleftrightarrow{BC}$  en los puntos  $D$  y  $D'$ , respectivamente, entonces

$$\frac{BD}{BD'} = \frac{CD}{CD'}.$$



[Sugerencia: Trácese  $\overleftrightarrow{CE}$  paralela a  $\overleftrightarrow{AD'}$  y utilícese el teorema 12-1 y el problema 9 de este Conjunto de problemas.]

- \* 18. (a) En el problema 17, si  $AC = 9$ ,  $AB = 15$  y  $BC = 16$ , determine  $BD$ ,  $DC$  y  $CD'$ .  
 (b) En el problema 17, si  $m\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AC = 6$  y  $AB = 8$ , determine  $BD$ ,  $DC$  y  $CD'$ .

- \* 19. ¿Será válido el teorema del problema 17, si  $AB < AC$ ? Póngase un ejemplo y explíquese. ¿Cómo cambia el teorema si  $AB = AC$ ?

- \* 20. Un triángulo tiene lados de longitudes 6, 12 y 16. Las bisectrices del ángulo interno mayor y del ángulo externo menor intersecan a la recta que contiene al lado opuesto en los puntos  $X$  y  $Y$ , respectivamente. Determine las distancias de  $X$  y de  $Y$  al vértice del ángulo menor del triángulo.

### PROBLEMA OPTATIVO

Se da el  $\triangle ABC$  con  $AB > AC$ . Las bisectrices de los ángulos interno y externo en  $A$  intersecan a  $\overleftrightarrow{BC}$  en los puntos  $D$  y  $E$ , respectivamente. Demuéstrese que

$$\frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{CD} - \frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{BD} = 2.$$

## 12-4. LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA SEMEJANZA

## Teorema 12-3. El teorema de la semejanza AAA

Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

O de otro modo: Sea dada una correspondencia  $ABC \leftrightarrow DEF$  entre dos triángulos. Si  $\angle A \cong \angle D$ ,  $\angle B \cong \angle E$  y  $\angle C \cong \angle F$ , entonces  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

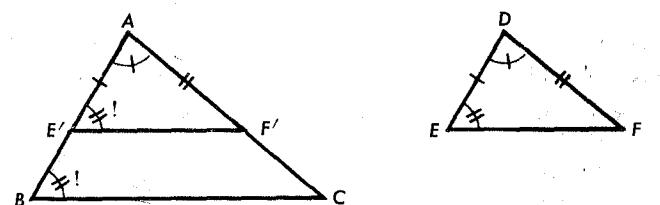
**Demostración:** Como sabemos por hipótesis que los ángulos correspondientes son congruentes, lo que hay que demostrar es que los lados correspondientes son proporcionales. Es decir, debemos mostrar que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Verificaremos que la *primera* de estas igualdades es válida. Mediante la misma demostración, con un simple cambio de notación, se deducirá que la segunda igualdad también es válida.

Pasamos a la demostración de que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$



Sean  $E'$  y  $F'$  dos puntos de  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ , tales que  $AE' = DE$  y  $AF' = DF$ . Por el postulado LAL, tenemos que

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF.$$

Por tanto,  $\angle AE'F' \cong \angle E$ . Como  $\angle E \cong \angle B$ , se deduce que

$$\angle AE'F' \cong \angle B.$$

Consideramos dos casos:

(1) Si  $E' = B$ , entonces  $\triangle AE'F'$  y  $\triangle ABC$  son el mismo triángulo. En este caso,  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  y

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF},$$

pues cada una de esas fracciones es igual a 1. (¿Por qué?)

(2) Si  $E'$  es diferente de  $B$ , entonces  $\overleftrightarrow{E'F'}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$  son paralelas. (¿Por qué?) En virtud del teorema fundamental de la proporcionalidad, tenemos que

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Como  $AE' = DE$  y  $AF' = DF$ , se deduce que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF},$$

como queríamos demostrar.

Del corolario 9-13.1, recordamos que si *dos* pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces los ángulos del tercer par también son congruentes. (La razón, desde luego, es que en un triángulo cualquiera, la suma de las medidas de los ángulos es 180.) Esto nos da el siguiente corolario:

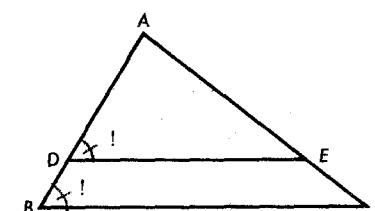
## Corolario 12-3.1. El corolario AA

Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

Ahora, podemos demostrar una versión más precisa del teorema fundamental de la proporcionalidad, justificando así los comentarios que se hicieron al comienzo de la sección anterior, en la página 330.

## Corolario 12-3.2

Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados en puntos distintos, entonces determina un triángulo semejante al triángulo dado.



**Demostración:** Cuando las rectas paralelas  $\overleftrightarrow{DE}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$  son cortadas por la transversal  $\overleftrightarrow{AB}$ , los ángulos correspondientes son congruentes. Por tanto,  $\angle ADE \cong \angle B$ . Como  $\angle A \cong \angle A$ , se deduce, del corolario AA, que

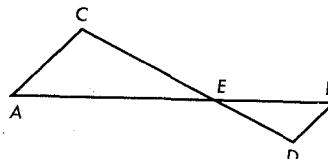
$$\triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

## Conjunto de problemas 12-4A

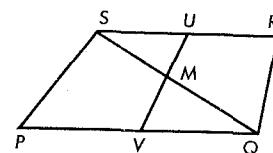
1. Se da la figura de la derecha, con  $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ .

Demostrar que: (1)  $\triangle ACE \sim \triangle BDE$

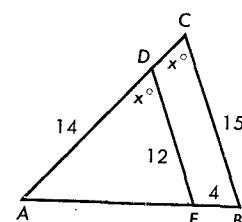
$$(2) AE \cdot ED = CE \cdot EB$$



2. Datos: El  $\square PQRS$  con  $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$  y diagonal  $\overline{SQ}$ ;  $U$  y  $V$  son los puntos medios de  $\overline{SR}$  y  $\overline{PQ}$ , respectivamente. Demuéstrese que  $US \cdot MQ = VQ \cdot MS$ .

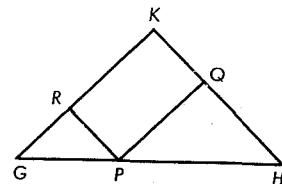


3. Sea dada la figura de la derecha, con  $AD = 14$ ,  $ED = 12$ ,  $BC = 15$  y  $EB = 4$ . Determinar  $AC$ ,  $AE$  y  $AB$ .



4. En el  $\triangle GHK$ ,  $GK = HK$ ,  $\overline{PR} \perp \overline{GK}$  y  $\overline{PQ} \perp \overline{HK}$ . Demuéstrese que

$$GR \cdot PQ = PR \cdot HQ.$$



5. Demostrar el siguiente teorema:

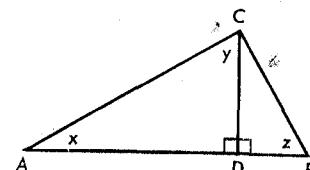
Dos alturas correspondientes cualesquiera de dos triángulos semejantes están en la misma razón que los lados correspondientes.

6. En el  $\triangle ABC$ ,  $\angle C$  es un ángulo recto y  $\overline{CD}$  es la altura correspondiente a la hipotenusa.

(a) Nombrar al menos un ángulo congruente con el  $\angle ACB$ .

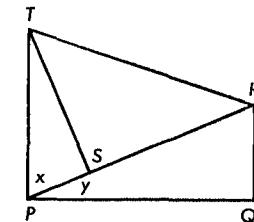
(b) Nombrar un ángulo congruente con el  $\angle z$ .

(c) Nombrar un triángulo semejante al  $\triangle ABC$ . Indíquese la semejanza entre los dos.

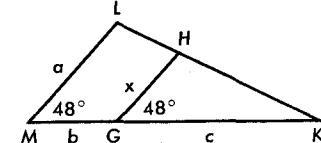


7. En la figura de la derecha,  $\overline{RQ} \parallel \overline{PQ}$ ,  $\overline{PQ} \perp \overline{PT}$  y  $\overline{ST} \perp \overline{PR}$ . Demuéstrese que

$$ST \cdot RQ = PS \cdot PQ.$$



8. Dada la figura de la derecha, expresar  $x$  en términos de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .



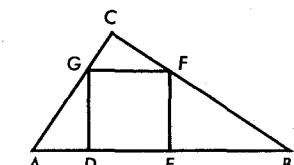
9. En la figura, el  $\square DEFG$  es un cuadrado y el  $\angle C$  es un ángulo recto.

Demuéstrese que: (1)  $\triangle ADG \sim \triangle GCF$ .

(2)  $\triangle ADG \sim \triangle FEB$ .

(3)  $AD \cdot EB = DG \cdot FE$ .

(4)  $DE = \sqrt{AD \cdot EB}$ .



10. Demostrar el siguiente teorema:

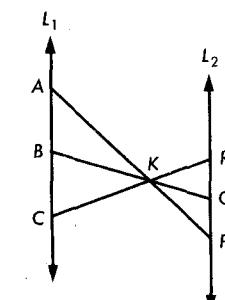
Las bisectrices de dos ángulos correspondientes cualesquiera de triángulos semejantes están en la misma razón que los lados correspondientes.

- \* 11. En la figura de la derecha, se da que  $L_1 \parallel L_2$  y que  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BQ}$  y  $\overline{CR}$  se intersecan en  $K$ .

(a) Nombrar tres pares de triángulos semejantes e indicar las tres semejanzas.

(b) Demostrar que

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{RQ}.$$



- \* 12. Se da la figura de la derecha, con las perpendiculares indicadas.

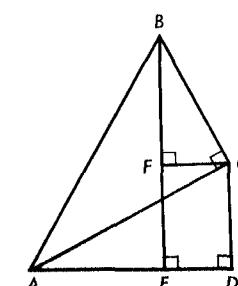
(a) Demostrar que  $\triangle BFC \sim \triangle ADC$ .

(b) Demostrar que

$$BF = \frac{AD \cdot BC}{AC}.$$

(c) Demostrar que

$$\frac{BE}{AB} = \frac{CD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} + \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{AB}.$$

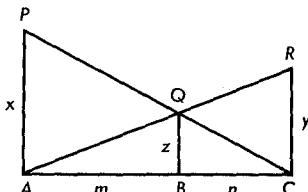


- \* 13. Se da un paralelogramo  $\square ABCD$  con sus diagonales. Una recta que pasa por  $B$  interseca a  $\overline{AC}$  en  $E$ , a  $\overline{DC}$  en  $G$  y a  $\overline{AD}$  en  $F$ . Demuéstrese que (1)  $\triangle AEF \sim \triangle CEB$  y (2)  $EB$  es la media geométrica de  $EG$  y  $EF$ .

- \* \* 14. En la figura de la derecha,  $\overline{PA}$ ,  $\overline{QB}$  y  $\overline{RC}$  son perpendiculares a  $\overline{AC}$ .

(a) Complétese el siguiente enunciado:

$$\triangle PAC \sim \triangle \underline{\quad} \text{ y } \triangle ABQ \sim \triangle \underline{\quad}.$$



(b) Indíquese cuál de los siguientes enunciados es correcto:

$$\frac{z}{x} = \frac{n}{m} \quad \text{o} \quad \frac{z}{x} = \frac{n}{m+n}.$$

(c) Indíquese cuál de los siguientes enunciados es correcto:

$$\frac{z}{y} = \frac{m}{n} \quad \text{o} \quad \frac{z}{y} = \frac{m}{m+n}.$$

(d) Demuéstrese que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

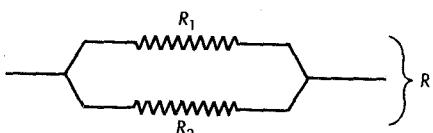
- \* \* 15. "Una persona puede completar una tarea en 6 horas y otra persona la puede completar en 3 horas. Si trabajaran juntos, ¿cuánto tardarían en completar la tarea?" Este problema puede resolverse mediante la ecuación

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{n}.$$

Resuélvase la ecuación geométricamente. [Sugerencia: Véase el problema 14.]

### PROBLEMA OPTATIVO

Un problema que ocurre frecuentemente al tratar con circuitos eléctricos es el siguiente: Tenemos un circuito que consta de dos hilos en paralelo, con resistencias  $R_1$  y  $R_2$ . ¿Cuál es la resistencia del circuito?

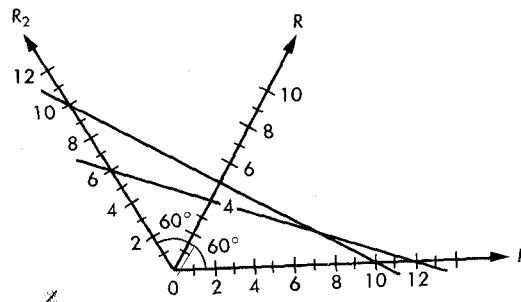


La resistencia,  $R$ , del circuito viene dada por la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Resuélvase esta ecuación respecto de  $R$  en términos de  $R_1$  y  $R_2$ .

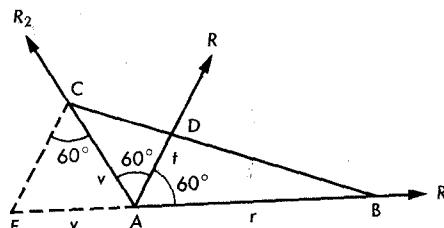
Utilizamos el siguiente esquema para hallar  $R$  cuando conocemos  $R_1$  y  $R_2$ : Se marcan escalas numéricas sobre tres rayos, como se muestra en el diagrama. Se coloca una regla pasando por  $R_1$  y  $R_2$  en las escalas externas y se lee  $R$  en la tercera escala.



Por ejemplo, si  $R_1 = 12$  y  $R_2 = 6$ , entonces  $R = 4$ ; si  $R_1 = 10$  y  $R_2 = 10$ , entonces  $R = 5$ .

(a) Determíñese el valor de  $R$ , dado que  $R_1 = 4$  y  $R_2 = 12$ ; que  $R_1 = 6$  y  $R_2 = 3$ ; y que  $R_1 = 7$  y  $R_2 = 7$ .

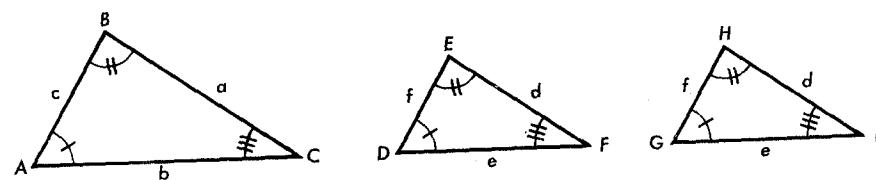
(b) Utilizando la siguiente figura, explíquese por qué el esquema descrito anteriormente da soluciones de la ecuación:



El siguiente teorema será muy útil, y es fácil de demostrar:

### Teorema 12-4

Si  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , y  $\triangle DEF \cong \triangle GHI$ , entonces  $\triangle ABC \sim \triangle GHI$ .



Esto se deduce inmediatamente de las definiciones de congruencia y semejanza.

**Teorema 12-5. El teorema de la semejanza LAL**

Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

**De otro modo:** Se dan los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ , y la correspondencia

$$ABC \leftrightarrow DEF.$$

Si

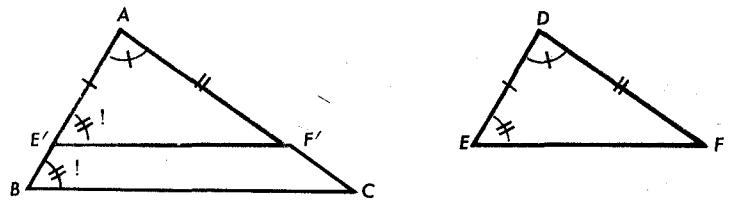
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

y

$$\angle A \cong \angle D,$$

entonces

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$



**Demostración:** (1) Sean  $E'$  y  $F'$  los puntos de  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  tales que  $AE' = DE$  y  $AF' = DF$ . Por el postulado LAL, tenemos que

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF.$$

Por tanto,

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

(2) Del teorema 12-2 (el recíproco del teorema fundamental de la proporcionalidad), tenemos que  $\overleftrightarrow{E'F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ .

(3) En consecuencia,  $\angle B \cong \angle E'F'$ . (¿Por qué?)

(4) Como  $\angle A \cong \angle A$ , del corolario AA se deduce que

$$\triangle ABC \sim \triangle AE'F'.$$

(5) Pero  $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$ . Por consiguiente, en virtud del teorema 12-4, tenemos que

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

como queríamos demostrar.

Finalmente, tenemos una especie de recíproco del teorema de la semejanza AAA.

**Teorema 12-6. Teorema de la semejanza LLL**

Se da una correspondencia entre dos triángulos. Si los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia es una semejanza.

**O de otro modo:** Se dan los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ , y la correspondencia

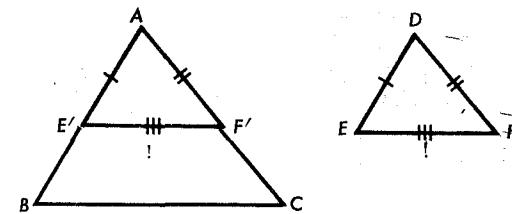
$$ABC \leftrightarrow DEF.$$

Si

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF},$$

entonces

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

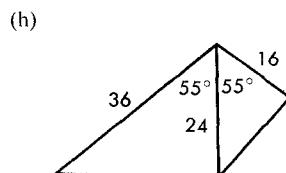
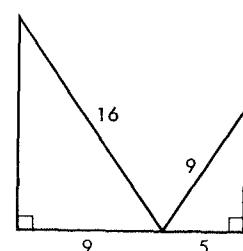
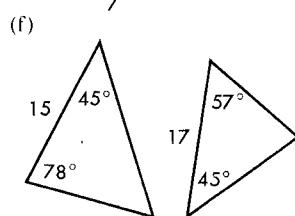
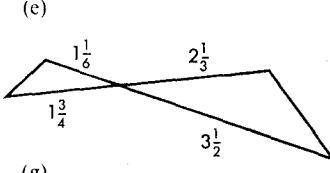
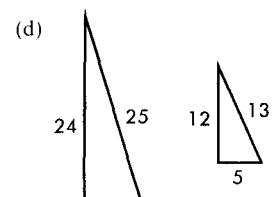
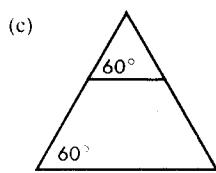
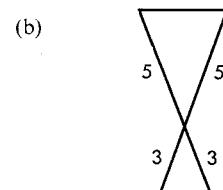
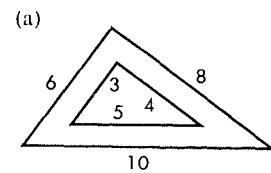


**Demostración:** Como acostumbramos en este capítulo, sean  $E'$  y  $F'$  los puntos de  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  tales que  $AE' = DE$  y  $AF' = DF$ .

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ .	1. Dato.
2. $AE' = DE$ ; $AF' = DF$ .	2. Dato.
3. $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$ .	3. Sustitución.
4. $\angle A \cong \angle A$ .	4. Identidad.
5. $\triangle ABC \sim \triangle AE'F'$ .	5. El teorema de la semejanza LAL.
6. $\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$ .	6. Definición de semejanza.
7. $E'F' = BC \frac{AE'}{AB} = BC \frac{DE}{AB}$ .	7. Afirmaciones 2 y 6.
8. $EF = BC \frac{DE}{AB}$ .	8. Afirmación 1.
9. $E'F' = EF$ .	9. Afirmaciones 7 y 8.
10. $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$ .	10. Afirmaciones 2 y 9 y teorema LLL.
11. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .	11. Afirmaciones 5 y 10 y teorema 12-4.

## Conjunto de problemas 12-4B

1. Para cada uno de los siguientes pares de triángulos, indíquese si los dos triángulos son semejantes o no y, si lo son, cítese el teorema o la definición que justifica la conclusión.



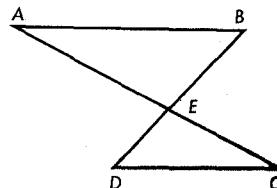
2. Indicar cuáles de los siguientes teoremas de semejanza no tienen un teorema comparable de congruencia: LAL, LLL, AAA, AA.

3. Demostrar el siguiente teorema:

Dos medianas correspondientes cualesquiera de dos triángulos semejantes están en la misma razón que los lados correspondientes.

4. Se da la figura de la derecha, con

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$$



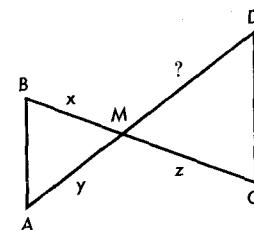
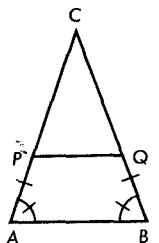
Demostrar que: (1)  $\triangle AEB \sim \triangle CED$ ,  
 (2)  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ .

5. Demostrar que si, para dos triángulos isósceles cualesquiera, los ángulos opuestos a la base son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

6. Indíquese si es posible que dos triángulos sean semejantes cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- (a) Dos ángulos de uno de los triángulos tienen medidas de 60 y 70, mientras que dos ángulos del otro tienen medidas de 50 y 80.  
 (b) Dos ángulos de uno de los triángulos tienen medidas de 45 y 75, mientras que dos ángulos del otro tienen medidas de 45 y 60.  
 (c) Un triángulo tiene un ángulo de medida 40 y dos lados cada uno de longitud 5, mientras que el otro tiene un ángulo de medida 70 y dos lados cada uno de longitud 8.  
 (d) Uno de los triángulos tiene lados con longitudes 5, 6 y 9, mientras que el otro tiene un perímetro de 8,420,000.

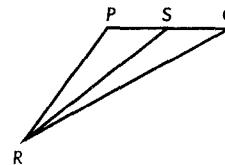
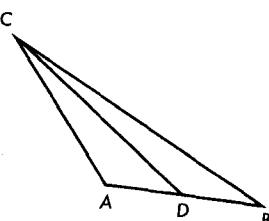
7. Dada la figura de la izquierda, a continuación, demuéstrese que  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ .



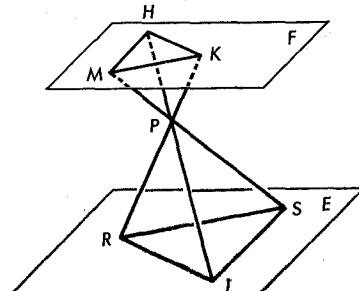
8. En la figura anterior de la derecha,  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las longitudes de  $\overline{MB}$ ,  $\overline{MA}$  y  $\overline{MC}$ .

- (a) ¿Cuál deberá ser la longitud de  $\overline{MD}$  para que los triángulos sean semejantes?  
 (b) Si  $z = 2x$ , ¿deberá ser  $m\angle D = 2m\angle A$ ?

9. En la figura siguiente,  $\triangle ADC \sim \triangle PSR$ , y  $\overline{CD}$  y  $\overline{RS}$  son medianas. Demuéstrese que  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ .



10. Tres rectas que tienen un punto de intersección común,  $P$ , intersecan a los planos paralelos  $E$  y  $F$  en  $R$  y  $K$ ,  $S$  y  $M$ , y  $H$  y  $T$ , respectivamente. Si  $KP = 4$ ,  $MP = 6$ ,  $HP = 7$ ,  $RP = 10$ ,  $SP = 15$  y  $TP = 17.5$ , demuéstrese que  $\triangle IJK \sim \triangle TSR$ .



- + 11. Si el siguiente enunciado es cierto, demuéstrese que lo es; si es falso, constrúyase un contraejemplo:

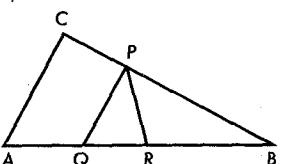
Dada una correspondencia entre dos triángulos tal que las longitudes de dos lados de un triángulo son proporcionales a las longitudes de los lados correspondientes del otro triángulo, y el ángulo opuesto a uno de los lados de un triángulo es congruente con el ángulo correspondiente del otro, entonces los triángulos son semejantes.

- + 12. En la figura,  $\overline{PQ} = \overline{PR}$  y  $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ . ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

(a)  $\frac{BP}{BC} = \frac{PQ}{AC}$ . (b)  $\frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}$ .

(c)  $\frac{BP}{BC} = \frac{PQ}{AC}$ ,  $\angle PBQ \cong \angle CBA$  y  $\triangle PBQ \sim \triangle CBA$ .

(d)  $\frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}$ ,  $\angle PBQ \cong \angle CBA$  y  $\triangle PBR \sim \triangle CBA$ .



### PROBLEMA OPTATIVO

En el  $\triangle ABC$ ,  $D$  es el punto medio de  $\overline{AB}$  y  $E$  es un punto de  $\overline{AC}$  tal que  $AE > EC$ .  $\overleftrightarrow{DE}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$  se intersecan en  $F$ . Demuéstrese que  $FB \cdot CE = FC \cdot EA$ . [Sugerencia: Trácese la recta que pasa por  $C$  paralela a  $\overline{AB}$  y que interseca a  $\overline{EF}$  en  $P$ .]

### 12-5. SEMEJANZAS EN LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

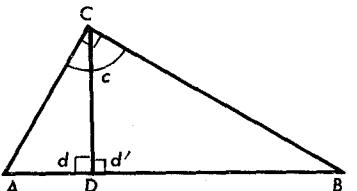
#### Teorema 12-7

En un triángulo rectángulo cualquiera, la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en otros dos que son semejantes entre sí y semejantes también al triángulo original.

**O de otro modo:** Sea el  $\triangle ABC$  un triángulo rectángulo con el ángulo recto en  $C$  y sea  $\overline{CD}$  la altura desde  $C$  a  $\overline{AB}$ . Entonces,

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD.$$

(Obsérvese que, en este caso, el nuevo enunciado nos dice más que el primero, porque indica qué correspondencias son semejanzas.)



Obsérvese también que es fácil determinar (y recordar) cuáles son estas correspondencias. En la correspondencia entre el  $\triangle ACD$  y el  $\triangle ABC$ , hay que tener  $A \leftrightarrow A$ , porque el  $\angle A$  es común a los dos triángulos. También, hay que tener  $D \leftrightarrow C$ , porque éstos son los vértices que corresponden a los ángulos rectos y, finalmente,  $C \leftrightarrow B$ , porque ya  $C$  no puede aparearse con ningún otro vértice. Esto nos da  $ACD \leftrightarrow ABC$ . Tenemos una situación análoga para el caso de la segunda correspondencia,  $ABC \leftrightarrow CBD$ .)

**Demostración:** Evidentemente,  $\angle d \cong \angle c$ , porque ambos son ángulos rectos; también,  $\angle A \cong \angle A$ . Por tanto, en la correspondencia  $ACD \leftrightarrow ABC$ , dos pares de ángulos correspondientes son congruentes. Por el corolario AA, tenemos que  $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ .

La demostración de la otra mitad del teorema es exactamente la misma: Como  $\angle d' \cong \angle c$  y  $\angle B \cong \angle B$ , el corolario AA nos dice que

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD.$$

#### Teorema 12-8

Se dan un triángulo rectángulo y la altura correspondiente a la hipotenusa.

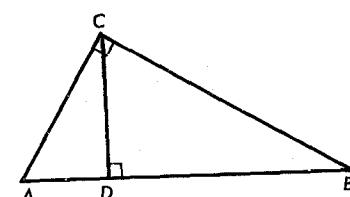
- (1) La altura es la media geométrica de los segmentos en los cuales dicha altura divide a la hipotenusa.
- (2) Cada cateto es la media geométrica de la hipotenusa y el segmento de ésta adyacente al cateto.

**O de otro modo:** Sea el  $\triangle ABC$  un triángulo rectángulo con su ángulo recto en  $C$ , y sea  $\overline{CD}$  la altura correspondiente a la hipotenusa  $\overline{AB}$ . Entonces,

$$(1) \quad \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}.$$

$$(2a) \quad \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

$$(2b) \quad \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA}.$$



**Demostración:** Por el teorema 12-7, tenemos las siguientes semejanzas:

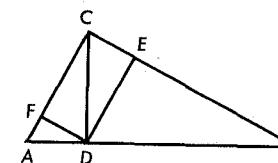
- (1)  $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ ,
- (2a)  $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ,
- (2b)  $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ .

Las igualdades que aparecen en el nuevo enunciado del teorema describen proporcionalidades para pares de lados correspondientes.

## Conjunto de problemas 12-5

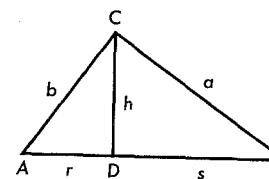
[Nota: Exprésense los números irracionales en forma radical simplificada.]

1. En la figura de la derecha,  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$  y el  $\square CFDE$  es un rectángulo. Indíquense todas las semejanzas para los triángulos semejantes al  $\triangle ABC$ . Recuérdese que deben establecerse las correspondencias correctas.



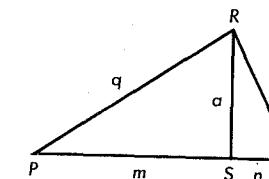
2. En la figura,  $\overline{CD}$  es la altura correspondiente a la hipotenusa del  $\triangle ABC$ .

- Dado que  $r = 4$  y  $s = 9$ , determinar  $h$ .
- Dado que  $r = 7$  y  $s = 28$ , determinar  $h$ .
- Dado que  $r = 9$  y  $s = 3$ , determinar  $a$ .
- Dado que  $r = 7$  y  $s = 21$ , determinar  $b$ .
- Dado que  $r = \sqrt{3}$  y  $s = \sqrt{12}$ , determinar  $h$ ,  $a$  y  $b$ .



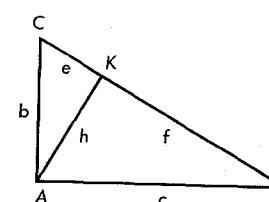
3. En la figura,  $\overline{RS}$  es la altura correspondiente a la hipotenusa  $\overline{PQ}$  del  $\triangle PQR$ .

- Si  $m = 27$  y  $n = 3$ , determinar  $a$ ,  $p$  y  $q$ .
- Si  $m = 24$  y  $n = 6$ , determinar  $a$ ,  $p$  y  $q$ .
- Si  $m = \sqrt{18}$  y  $n = \sqrt{8}$ , determinar  $a$ ,  $p$  y  $q$ .
- Si  $p = 15$  y  $n = 9$ , determinar  $m$  y  $q$ .
- Si  $a = 8$  y  $m = 16$ , determinar  $n$ ,  $p$  y  $q$ .



- \* 4. En la figura,  $\overline{AK}$  es la altura correspondiente a la hipotenusa del  $\triangle ABC$ .

- Si  $e = 5$  y  $h = 15$ , determinar  $f$ ,  $b$  y  $c$ .
- Si  $b = 4\sqrt{3}$  y  $e = 4$ , determinar  $f$ ,  $h$  y  $c$ .
- Si  $c = 6\sqrt{2}$  y  $e = 4$ , determinar  $f$ ,  $b$  y  $h$ .
- Si  $b = 3\sqrt{10}$  y  $f = 13$ , determinar  $e$ ,  $h$  y  $c$ .
- Si  $b = f = 8$ , determinar  $e$ ,  $h$  y  $c$ .

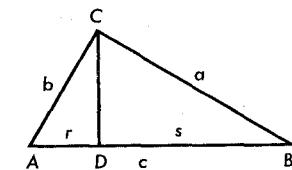


5. La altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo la divide en dos segmentos cuyas longitudes son  $r$  y  $s$ . Demuéstrese que el área del triángulo es igual al producto de la media geométrica de  $r$  y  $s$  y la media aritmética de  $r$  y  $s$ .

6. Determinar el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que la altura correspondiente a la hipotenusa divide a ésta en segmentos de longitudes 9 y 16; de longitudes 7 y 21.

7. *El teorema de Pitágoras.* En la sección 11-3, dedujimos el teorema de Pitágoras, utilizando una demostración basada en fórmulas de área. El teorema 12-7 sugiere otra demostración de esta relación importante.

En la figura de la derecha, el  $\angle ACB$  es un ángulo recto y  $\overline{CD}$  es la altura correspondiente a la hipotenusa. Por el teorema 12-8, tenemos que  $a = \sqrt{cs}$  y  $b = \sqrt{cr}$ . Partiendo de estos datos, complétense la demostración de que  $a^2 + b^2 = c^2$ .

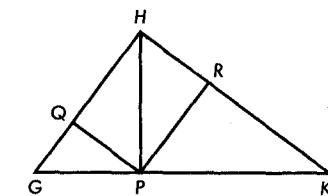


8. Se da el  $\triangle ABC$  con  $\overline{CD}$  como altura correspondiente a la hipotenusa  $\overline{AB}$ . Demostrar que

$$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2.$$

- \* 9. Se da la figura de la derecha, en la cual el  $\square PRHQ$  es un rectángulo y  $\overline{HP} \perp \overline{GK}$ . Demuéstrese que

$$a \square PRHQ = \sqrt{GQ \cdot QH \cdot HR \cdot RK}.$$



10. El  $\triangle ABC$  es un triángulo rectángulo y  $C$  es el vértice del ángulo recto. La bisectriz del  $\angle B$  interseca a  $\overline{AC}$  en  $D$ , y la bisectriz del ángulo exterior en  $B$  interseca a  $\overline{AC}$  en  $E$ . Si  $BD = 15$  y  $BE = 20$ , ¿cuáles son las longitudes de los lados del  $\triangle ABC$ ?

## 12-6. ÁREAS DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES

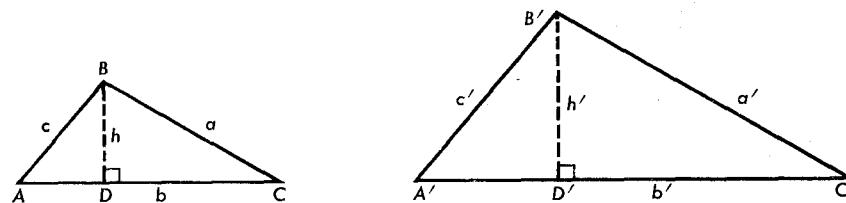
Dado un cuadrado de lado  $a$  y un cuadrado de lado  $2a$ , es fácil ver que el área del segundo cuadrado es cuatro veces el área del primero, pues  $(2a)^2 = 4a^2$ . (También es fácil ver esto geométricamente, sin utilizar fórmula alguna de área.) En general, si el segundo cuadrado tiene lado  $ka$ , entonces la razón de las áreas es  $k^2$ , porque

$$\frac{(ka)^2}{a^2} = \frac{k^2 a^2}{a^2} = k^2.$$

Un resultado análogo es válido para los triángulos semejantes.

**Teorema 12-9**

Si dos triángulos son semejantes, entonces la razón de sus áreas es el cuadrado de la razón de dos lados correspondientes cualesquiera.



**Demostración:** Se da que  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ . Sean  $A_1$  y  $A_2$  sus áreas. En la notación habitual, tenemos

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Sean  $k$  el valor común de estas tres fracciones. Queremos verificar que

$$\frac{A_2}{A_1} = k^2.$$

Sean  $\overline{BD}$  y  $\overline{B'D'}$  las alturas desde  $B$  y  $B'$  en los dos triángulos; y sean  $h$  y  $h'$  sus longitudes. Ahora bien,  $\angle A \cong \angle A'$ , porque  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ . También,  $\angle ADB \cong \angle A'D'B'$ , porque ambos son ángulos rectos. Del corolario AA, se deduce que

$$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'.$$

Por tanto,

$$\frac{b'}{b} = \frac{h'}{h} = k,$$

dado que los lados correspondientes son proporcionales. Esto da

$$b' = kb, \quad h' = kh.$$

Pero

$$A_1 = \frac{1}{2}bh, \quad A_2 = \frac{1}{2}b'h'.$$

Por tanto,

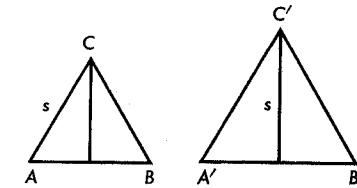
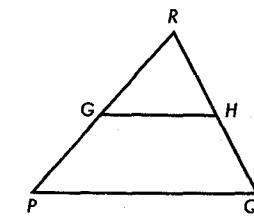
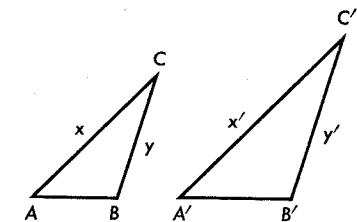
$$A_2 = \frac{1}{2}b'h' = \frac{1}{2}(kb)(kh) = \frac{1}{2}k^2bh,$$

$$\frac{A_2}{A_1} = k^2,$$

como queríamos demostrar.

**Conjunto de problemas 12-6**

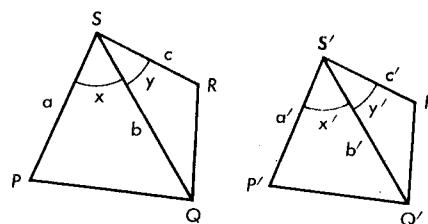
- ¿Cuál es la razón de las áreas de dos triángulos semejantes cuyos lados más largos tienen longitudes de 3 centímetros y 4 centímetros, respectivamente?
  - En la figura,  $\angle A \cong \angle A'$  y  $\angle B \cong \angle B'$ . ¿Cuál es la razón de las áreas de los triángulos, si  $x = 5$  y  $x' = 7$ ; si  $y = 4$  y  $y' = 3\sqrt{3}$ ; si  $x = 6$ ,  $y = 2\sqrt{5}$  y  $y' = x$ ?
  - Un lado de uno de dos triángulos semejantes tiene 5 veces el largo del lado correspondiente del otro. Si el área del triángulo más pequeño es 6 pulgadas cuadradas, ¿cuál es el área del triángulo mayor?
  - En el  $\triangle PQR$ ,  $G$  es el punto medio de  $\overline{PR}$  y  $H$  es el punto medio de  $\overline{QR}$ . ¿Cuál es la razón de  $a\triangle GHR$  a  $a\triangle PQR$ ? ¿Y de  $a\triangle GHR$  a  $a\square PQHG$ ?
  - Las áreas de dos triángulos semejantes son 16 y 25. ¿Cuál es la razón de un par de lados correspondientes?
  - El área del mayor de dos triángulos semejantes es 9 veces el área del menor. Si un lado del triángulo menor mide 5 centímetros de largo, ¿cuál es el largo del lado correspondiente del triángulo mayor?
  - Las áreas de dos triángulos semejantes son 144 y 81. Si la base del triángulo mayor es 30, ¿cuál es la base correspondiente del triángulo menor?
  - En el  $\triangle ABC$ ,  $D$  es un punto de  $\overline{AC}$  tal que  $AD = 2CD$ .  $E$  está en  $\overline{BC}$  de manera que  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ . Compárense las áreas de los triángulos  $\triangle CDE$  y  $\triangle ABC$ . Si  $a\square ABED = 40$ , ¿cuál es  $a\triangle ABC$ ?
  - Los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son equiláteros. Una altura del  $\triangle A'B'C'$  es de la misma longitud que un lado del  $\triangle ABC$ . Demostrar que
- $$a\triangle A'B'C' = \frac{4}{3}a\triangle ABC.$$
- ¿Qué longitud deberá tener un lado de un triángulo equilátero para que su área sea dos veces el área de un triángulo equilátero cuyo lado tiene longitud 10?



11. Se dan los cuadriláteros indicados a la derecha, con  $\angle x \cong \angle x'$ ,  $\angle y \cong \angle y'$  y

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

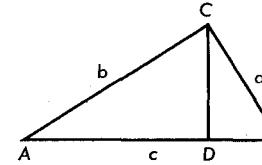
Demuéstrese que  $\frac{a \square P'Q'R'S'}{a \square PQRS} = k^2$ .



- \* 12. Se doblaron dos trozos de alambre de la misma longitud; a uno se le dio la forma de un cuadrado y al otro la de un triángulo equilátero. ¿Cuál es la razón de las áreas de las regiones determinadas por los alambres?
- \* 13. En el  $\triangle ABC$ ,  $\overline{CD}$  es la altura correspondiente a la base  $\overline{AB}$ . Se desea trazar una recta  $L$  paralela a  $\overline{AB}$ , que determine un triángulo semejante al  $\triangle ABC$ , pero cuya área sea sólo la mitad del área del  $\triangle ABC$ . Si  $L$  interseca a  $\overline{CD}$  en un punto  $M$  y si  $CD = 1$ , ¿cuál es la longitud de  $CM$ ?

14. *El teorema de Pitágoras.* El teorema 12-9 proporciona otra manera de demostrar el teorema de Pitágoras. El alumno deberá indicar las razones en que se fundan las afirmaciones de la demostración.

En la figura, el  $\angle ACB$  es un ángulo recto y  $\overline{CD}$  es la altura correspondiente a la hipotenusa.



$$1. a \triangle ABC = a \triangle ACD + a \triangle CBD.$$

$$2. 1 = \frac{a \triangle ACD}{a \triangle ABC} + \frac{a \triangle CBD}{a \triangle ABC}.$$

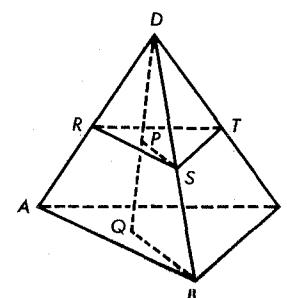
$$3. \triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD.$$

$$4. 1 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2.$$

$$5. AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \text{o} \quad c^2 = b^2 + a^2.$$

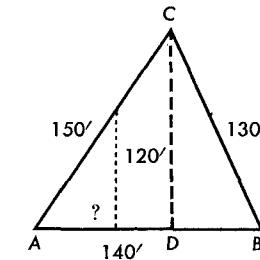
- \* 15. Se da el tetraedro  $ABCD$  cuya base es el  $\triangle ABC$ . Un plano paralelo a la base interseca a las caras del tetraedro en el  $\triangle RST$ .  $\overline{DQ}$  es la perpendicular desde  $D$  al plano del  $\triangle ABC$  y  $\overline{DQ}$  interseca al plano paralelo en  $P$ .

Demuéstrese que  $\frac{a \triangle RST}{a \triangle ABC} = \left(\frac{DP}{DQ}\right)^2$ .



## PROBLEMA OPTATIVO

Un solar triangular tiene lados de longitudes 130 pies, 140 pies y 150 pies, como se indica en la figura. La longitud de la perpendicular desde una esquina al lado de 140 pies es 120 pies. Se va a construir una verja perpendicular al lado de 140 pies de manera que el área del solar quede dividida en dos partes iguales. ¿A qué distancia de  $A$  sobre  $\overline{AB}$  deberá construirse la verja?



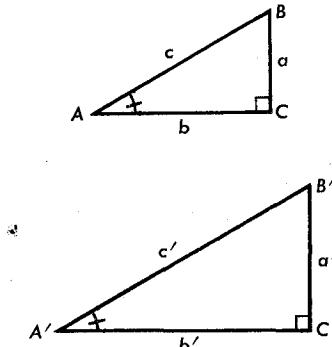
## 12-7. LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Considérense dos triángulos rectángulos con un par de ángulos agudos congruentes. Por el corolario AA, sabemos que  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ . En consecuencia,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

De estas igualdades, es fácil ver que

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}.$$



Por tanto, las razones  $a/c$ ,  $b/c$  y  $a/b$  no dependen del tamaño del triángulo. Una vez que sabemos  $m\angle A$ , podemos determinar estas razones, las cuales se llaman *razones trigonométricas*. (La palabra *trigonometría* proviene del griego. Un *trigon* es un triángulo, y la trigonometría es la medición de triángulos.)

La razón  $a/c$  se llama el *seno* del  $\angle A$ , y escribimos

$$\sin \angle A = \frac{a}{c}.$$

Si  $m\angle A = r$ , entonces podemos escribir

$$\sin r^\circ = \frac{a}{c}.$$

Esto tiene sentido, porque  $a/c$  queda determinado si conocemos el  $\angle A$  o  $r$ . Análogamente,  $b/c$  se llama el *coseno* del  $\angle A$ , y escribimos

$$\cos \angle A = \frac{b}{c} \quad \text{o} \quad \cos r^\circ = \frac{b}{c}.$$

La razón  $a/b$  se llama la *tangente* del  $\angle A$ , y escribimos

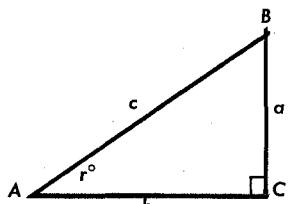
$$\tan \angle A = \frac{a}{b} \quad \text{o} \quad \tan r^\circ = \frac{a}{b}.$$

Resumiendo:

$$\sin \angle A = \sin r^\circ = \frac{a}{c},$$

$$\cos \angle A = \cos r^\circ = \frac{b}{c},$$

$$\tan \angle A = \tan r^\circ = \frac{a}{b}.$$



Para algunos ángulos y algunos números  $r$ , las razones trigonométricas son fáciles de calcular. Tomemos, por ejemplo, el caso de  $r = 45$ . Como las razones no dependen del tamaño del triángulo, podemos utilizar *cualquier* triángulo rectángulo  $\triangle ABC$  con un ángulo de  $45^\circ$  en  $A$ . Entonces, el triángulo es isósceles, con  $a = b$ . Tomamos  $a = b = 1$ . Por el teorema de Pitágoras,  $c = \sqrt{2}$ , como indica la figura. Ahora, tenemos

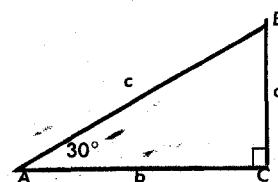
$$\sin \angle A = \sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \angle A = \cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan \angle A = \tan 45^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1.$$

(Pregunta: Si tomamos  $a = b = 3$ , ¿se alterarían las razones trigonométricas? ¿Por qué sí o por qué no?)

El caso en que  $r = 30$  no ofrece mayores dificultades.



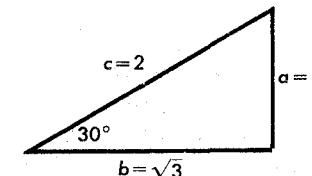
Sabemos, por el teorema 9-27, que  $a = \frac{c}{2}$ . Puesto que el tamaño del triángulo no

tiene importancia, podemos elegir cualquier tamaño. Así, por ejemplo, tomamos  $c = 2$ ,  $a = 1$ , como se muestra en la figura. El teorema de Pitágoras nos da  $b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$ . Ahora podemos, sin más, leer los valores:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

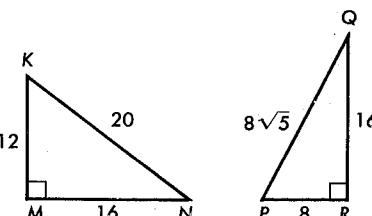
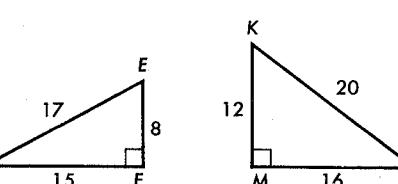
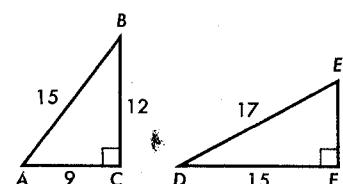
$$\tan 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



*Advertencia:* Obsérvese que hemos utilizado el signo de grados en las expresiones  $\sin r^\circ$ ,  $\cos r^\circ$  y  $\tan r^\circ$ . La razón es que más tarde se utilizará otra unidad de medida para ángulos llamada *radián*. Para saber cuál es el seno de un número, hay que saber qué unidad se está utilizando.

### Conjunto de problemas 12-7

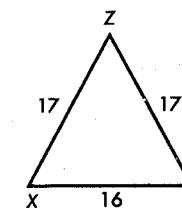
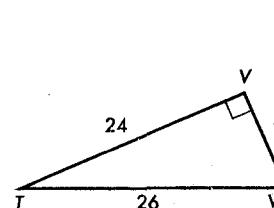
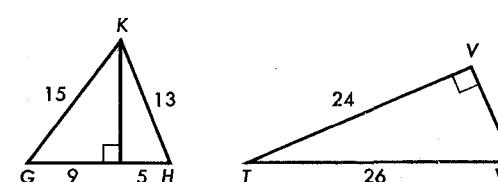
1.



Dados los triángulos rectángulos anteriores cuyos lados tienen las longitudes indicadas, determiníense las siguientes razones trigonométricas:

- |                     |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| (a) $\sin \angle A$ | (b) $\cos \angle A$ | (c) $\tan \angle A$ | (d) $\sin \angle D$ |
| (e) $\sin \angle N$ | (f) $\cos \angle D$ | (g) $\tan \angle N$ | (h) $\tan \angle P$ |
| (i) $\cos \angle P$ | (j) $\cos \angle N$ | (k) $\tan \angle D$ | (l) $\sin \angle E$ |

2.



Dados los triángulos anteriores cuyos lados tienen las longitudes indicadas, determiníense las siguientes razones trigonométricas:

- |                     |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| (a) $\cos \angle G$ | (b) $\sin \angle H$ | (c) $\tan \angle T$ | (d) $\sin \angle W$ |
| (e) $\cos \angle T$ | (f) $\tan \angle G$ | (g) $\sin \angle X$ | (h) $\cos \angle Y$ |

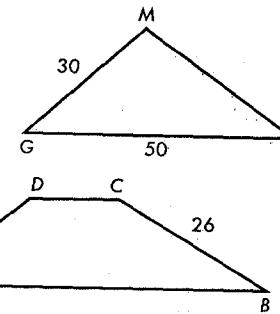
3. En el triángulo rectángulo  $\triangle ABC$ , la hipotenusa mide 25 centímetros de largo.

(a) Si  $\operatorname{sen} \angle A = \frac{4}{5}$ , ¿cuál es la longitud de  $\overline{BC}$ ?

(b) Si  $\cos \angle A = 0.60$ , ¿cuál es  $\tan \angle A$ , expresada en forma decimal?

(c) Si  $\tan \angle A = 3\frac{3}{7}$ , ¿cuáles son las longitudes de  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ ?

4. En el  $\triangle GKM$ ,  $GM = 30$ ,  $GK = 50$  y  $\cos \angle G = 0.80$ . Determinar la altura correspondiente a  $\overline{GK}$  y el área del  $\triangle GKM$ .



5. En el trapecio  $\square ABCD$ ,  $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ,  $AD = 20$  y  $BC = 26$ . Si  $\operatorname{sen} \angle A = 0.5$ , ¿cuál es la altura del trapecio y cuál es  $\operatorname{sen} \angle B$ ?

6. Determinar  $\operatorname{sen} 60^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$  y  $\tan 60^\circ$ .

7. Verificar que  $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ$ .

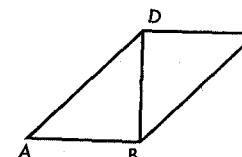
8. ¿Cuál es la relación entre  $\tan 60^\circ$  y  $\tan 30^\circ$ ?

9. En el  $\triangle PQR$ ,  $\operatorname{sen} \angle P = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  y  $\cos \angle Q = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Determinar  $m\angle R$ .

10. En el  $\triangle ABC$ ,  $\tan \angle A = \sqrt{3}$  y  $\tan \angle C = \sqrt{3}/3$ . Determinese  $m\angle B$ .

11. En el  $\triangle GHK$ ,  $\tan \angle H = 2 \cos \angle G = 1$ . Determinar  $m\angle K$ .

12. En el paralelogramo  $\square ABCD$ , la diagonal  $\overline{BD}$  es perpendicular a  $\overline{AB}$ . Si  $AB = 5$  y  $\operatorname{tan} \angle A = 1$ , ¿cuál es  $a\square ABCD$ ?



13. Demostrar el siguiente teorema:

El seno de un ángulo agudo es igual al coseno de su complemento.

14. Demostrar el siguiente teorema:

El producto de la tangente de un ángulo agudo y la tangente del complemento del ángulo es 1.

\* 15. Verificar que  $\tan \angle A = \frac{\operatorname{sen} \angle A}{\cos \angle A}$  para todo ángulo agudo  $\angle A$ .

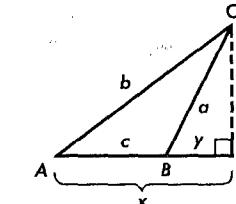
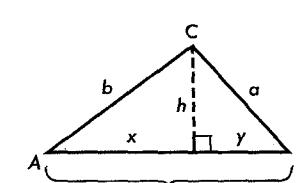
\* 16. Verificar que  $(\operatorname{sen} \angle A)^2 + (\cos \angle A)^2 = 1$  para todo ángulo agudo  $\angle A$ .

\* 17. Demostrar que el área de un triángulo equilátero con lado de longitud 1 viene dada por  $(\operatorname{sen} 60^\circ)(\cos 60^\circ)$ .

### PROBLEMA OPTATIVO

Demostrar el siguiente teorema:

Dado el  $\triangle ABC$  con el  $\angle A$  agudo, entonces  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$ .



### 12-8. TRIGONOMETRÍA NUMÉRICA. EMPLEO DE LAS TABLAS

En la sección anterior, calculamos el seno, el coseno y la tangente de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ . Expresamos estas razones en términos de  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$ . Los valores de estos números, con la aproximación de una milésima, son:

$$\sqrt{2} = 1.414, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707,$$

$$\sqrt{3} = 1.732, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577.$$

Por tanto, tenemos

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.500,$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.732}{2} = 0.866,$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577.$$

De igual modo, podemos calcular las razones trigonométricas correspondientes a  $45^\circ$  y  $60^\circ$ . Así, obtenemos la siguiente tabla:

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
$30^\circ$	0.500	0.866	0.577
$45^\circ$	0.707	0.707	1.000
$60^\circ$	0.866	0.500	1.732

Estas son las razones trigonométricas que hemos aprendido a calcular. Mediante métodos algo más complicados, es posible calcular el seno, el coseno y la tangente de un ángulo *cualquiera* con la exactitud que se desee. (De hecho, los antiguos griegos construían tablas de este tipo, porque las necesitaban en sus estudios de astronomía.) En la página 362, el alumno encontrará una tabla de los valores de las razones trigonométricas para ángulos cuyas medidas son grados enteros. La tabla contiene valores correctos con tres cifras decimales, lo cual es suficiente para nuestro objetivo.

Estas tablas tienen muchas aplicaciones importantes. Supongamos, por ejemplo, que un agrimensor quiere determinar la distancia entre dos puntos situados a lados opuestos de un lago. No puede medir  $BC$  directamente, pero puede medir  $AB$  y  $r$ . Supongamos que halla que  $AB = 305$  metros y  $r = 32$ . Ahora,

$$\operatorname{sen} r^\circ = \frac{BC}{AB}.$$

Por tanto,

$$BC = AB \operatorname{sen} r^\circ.$$

El agrimensor busca en su tabla y halla que  $\operatorname{sen} 32^\circ = 0.530$ . Por consiguiente,

$$BC = 305 \times 0.530 = 151.65 \text{ metros.}$$

Los agrimensores, cuya tarea es resolver problemas de este tipo, utilizan el método descrito.

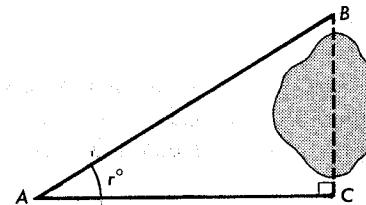
Estas tablas pueden emplearse también para otros tipos de mediciones indirectas. Una manera de medir el asta de una bandera, sin subir a ella, sería medir una cierta distancia, digamos, la de un punto a 100 metros de la base y, después, medir el  $\angle A$  indicado en la figura. Aquí,  $\overline{BC}$  representaría el asta y  $m\angle A = 22$ . Como

$$\operatorname{tan} 22^\circ = \frac{BC}{AC},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} BC &= AC \operatorname{tan} 22^\circ \\ &= 100 \times 0.404 \\ &= 40.4 \text{ metros.} \end{aligned}$$

Obsérvese que en los problemas de este tipo, siempre podemos lograr que los cálculos aritméticos necesarios sean fáciles. Como podemos medir cualquier distancia desde la base del asta, escogemos un punto  $A$  para el cual  $AC$  sea un número conveniente.



### Conjunto de problemas 12-8

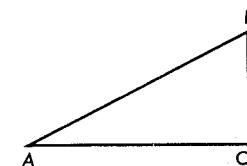
1. Utilizando la tabla de razones trigonométricas, indíquese la forma decimal de los siguientes números:

- |                                   |                     |                     |                                  |
|-----------------------------------|---------------------|---------------------|----------------------------------|
| (a) $\operatorname{sen} 12^\circ$ | (b) $\cos 35^\circ$ | (c) $\tan 20^\circ$ | (d) $\cos 66^\circ$              |
| (e) $\operatorname{sen} 50^\circ$ | (f) $\cos 40^\circ$ | (g) $\tan 82^\circ$ | (h) $\operatorname{sen} 3^\circ$ |
| (i) $\tan 3^\circ$                | (j) $\cos 60^\circ$ |                     |                                  |

2. Determinar  $m\angle A$ ; sabiendo que:

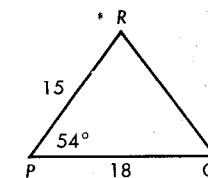
- |   |   |
|---|---|
| (a) $\operatorname{sen} \angle A = 0.309$ | (b) $\cos \angle A = 0.208$               |
| (c) $\tan \angle A = 0.306$               | (d) $\cos \angle A = 0.961$               |
| (e) $\tan \angle A = 2.904$               | (f) $\operatorname{sen} \angle A = 0.961$ |
| (g) $\operatorname{sen} \angle A = 0.454$ | (h) $\cos \angle A = 0.731$               |
| (i) $\tan \angle A = 8.144$               | (j) $\tan \angle A = 0.554$               |

3. Dado que la hipotenusa  $\overline{AB}$  del  $\triangle ABC$  mide 20 pies de largo y que  $m\angle A = 38$ , determinense  $BC$  y  $AC$ .

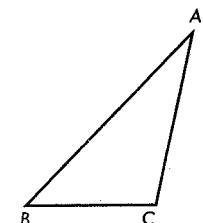


4. En el  $\triangle ABC$ , el  $\angle C$  es un ángulo recto,  $m\angle A = 42$  y  $AC = 7$ . ¿Cuál es la longitud de  $\overline{BC}$ ?

5. En el  $\triangle PQR$ ,  $m\angle P = 54$ ,  $PR = 15$  y  $PQ = 18$ . Determinar la longitud de la altura correspondiente a  $\overline{PQ}$ ; a  $\overline{PR}$ .



6. En el  $\triangle GHK$ ,  $m\angle G = 70$ ,  $GK = 12$  y  $GH = 20$ . Determinar la longitud de la altura correspondiente a  $\overline{GH}$  y el área del  $\triangle GHK$ .



7. Calcular el área del  $\triangle ABC$ , sabiendo que

$$AB = 30, \quad BC = 16 \quad \text{y} \quad m\angle B = 47.$$

8. Determinar las medidas, con la aproximación de un grado, de los ángulos agudos de un triángulo 3-4-5.

9. Determinar las medidas, con la aproximación de un grado, de los ángulos agudos de un triángulo 8-15-17.

10. La base de un triángulo isósceles mide 8 metros de largo y el ángulo opuesto a la base es de  $30^\circ$ . Calcúlense las longitudes de las tres alturas del triángulo.



11. En el  $\triangle ABC$ , el  $\angle C$  es un ángulo recto y  $AB = 9$ . Sabiendo también que  $\tan \angle A = 1.111$ , determinar  $BC$  y  $AC$ .

- \* 12. Búsquese en la tabla de razones trigonométricas los valores de  $\sin 53^\circ$ ,  $\sin 54^\circ$ ,  $\sin 55^\circ$  y  $\sin 56^\circ$ . Explíquese por qué 0.814 es una buena estimación de  $\sin 54^\circ 30'$ . ¿Cuál sería una buena estimación de  $\sin 55^\circ 30'$ ? 0.811 es una buena estimación de  $\sin 54^\circ 12'$ . ¿Por qué? Hállese una buena estimación de  $\sin 54^\circ 6'$ . Explíquese por qué cada uno de los siguientes números constituye una buena aproximación de la razón correspondiente:

$$\sin 30^\circ 30' = 0.508 \quad \sin 76^\circ 30' = 0.972$$

$$\sin 30^\circ 20' = 0.505 \quad \sin 76^\circ 45' = 0.973$$

Este método de hallar valores aproximados que no aparecen explícitamente en la tabla se llama *interpolación*.

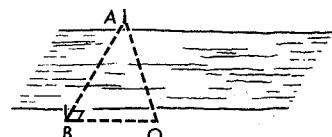
- \* 13. Interpolar en la tabla de razones trigonométricas para obtener estimaciones de los siguientes números (V. el problema 12):

- (a)  $\sin 37^\circ 30'$  (b)  $\sin 65^\circ 30'$  (c)  $\sin 63.5^\circ$  (d)  $\sin 56.3^\circ$   
 (e)  $\sin 47^\circ 20'$  (f)  $\sin 45^\circ 40'$  (g)  $\sin 73.4^\circ$  (h)  $\sin 20.5^\circ$   
 (i)  $\sin 17^\circ 30'$  (j)  $\sin 41^\circ 15'$

- \* 14. Interpolar en la tabla de razones trigonométricas para obtener estimaciones de los siguientes números (V. el problema 12):

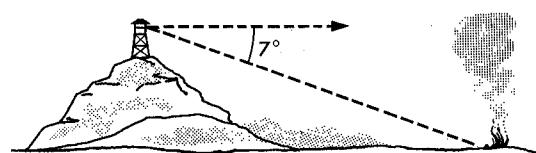
- (a)  $\cos 33^\circ 30'$  (b)  $\cos 36.6^\circ$  (c)  $\cos 18^\circ 24'$  (d)  $\tan 31^\circ 30'$   
 (e)  $\tan 42^\circ 20'$  (f)  $\cos 61^\circ 40'$  (g)  $\tan 58.5^\circ$  (h)  $\cos 67^\circ 15'$   
 (i)  $\tan 66^\circ 30'$  (j)  $\tan 63^\circ 45'$

15. Al hacer mediciones para la construcción de una nueva carretera, un ingeniero colocó dos postes,  $A$  y  $B$ , en lados opuestos de un río para marcar las posiciones de los linderos de un puente. Entonces, desde un punto  $O$ , a 100 pies de  $B$  y tal que  $OB \perp AB$ , midió el  $\angle AOB$ . Si  $m\angle AOB = 73$ , ¿cuál es la distancia a través del río desde  $A$  hasta  $B$ ?



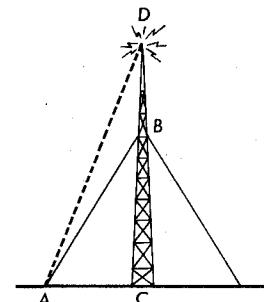
16. La escalera de un camión de bomberos puede extenderse hasta una longitud máxima de 68 pies cuando se levanta a un ángulo máximo de  $70^\circ$ . La base de la escalera se colocó en el camión, a 7 pies sobre el suelo. ¿Qué altura sobre el suelo podrá alcanzar la escalera?

17. Un guardabosques vigila los fuegos desde una torre situada en una colina. Este lugar está 800 metros más alto que la mayor parte de los terrenos colindantes y la torre mide 25 metros de alto. Si el guardabosques ve un fuego en una dirección que forma un ángulo de  $7^\circ$  con la horizontal, calcúlese, con la aproximación de medio kilómetro, a qué distancia de la torre está el fuego.



18. Un avión, volando a una altura de 21,000 pies, se está acercando a un aeropuerto. (Supóngase que el aeropuerto está casi al nivel del mar.) El piloto tiene órdenes de descender según un ángulo constante de  $6^\circ$  mientras se acerca para el aterrizaje. Calcúlese, con la aproximación de media milla, a qué distancia de la pista deberá el piloto comenzar a descender.

- \* 19. Una torre alta de radio está sujetada al suelo mediante cables de retención como el que representa  $AB$  en la figura. Si  $A$  está a 80 metros de la base de la torre y si  $m\angle BAC = 59$ , ¿cuál es la longitud del cable de retención? ¿A qué distancia del suelo estará sujeto el cable a la torre? Si  $m\angle DAC = 71$ , ¿cuál es la altura  $DC$  de la torre?



### PROBLEMA OPTATIVO

En el  $\triangle ABC$ ,  $\overline{CD}$  es la altura correspondiente a  $\overline{AB}$  y  $AB = c$ .

- (a) Verificar que la altura  $h$  viene dada por la fórmula

$$h = c \frac{\tan a^\circ \tan b^\circ}{\tan a^\circ + \tan b^\circ}.$$

- (b) Calcular  $h$ , dado que  $c = 68$ ,  $a = 35$  y  $b = 45$ .

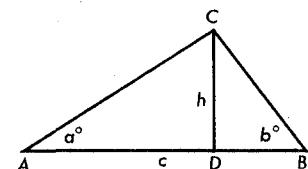


TABLA DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

$r'$	sen $r'$	cos $r'$	tan $r'$	$r$	sen $r$	cos $r$	tan $r$
1°	.017	1.000	.017	46°	.719	.695	1.035
2°	.035	.999	.035	47°	.731	.682	1.072
3°	.052	.999	.052	48°	.743	.669	1.111
4°	.070	.998	.070	49°	.755	.656	1.150
5°	.087	.996	.087	50°	.766	.643	1.192
6°	.105	.995	.105	51°	.777	.629	1.235
7°	.122	.993	.123	52°	.788	.616	1.280
8°	.139	.990	.141	53°	.799	.602	1.327
9°	.156	.988	.158	54°	.809	.588	1.376
10°	.174	.985	.176	55°	.819	.574	1.428
11°	.191	.982	.194	56°	.829	.559	1.483
12°	.208	.978	.213	57°	.839	.545	1.540
13°	.225	.974	.231	58°	.848	.530	1.600
14°	.242	.970	.249	59°	.857	.515	1.664
15°	.259	.966	.268	60°	.866	.5	1.732
16°	.276	.961	.287	61°	.875	.485	1.804
17°	.292	.956	.306	62°	.883	.469	1.881
18°	.309	.951	.325	63°	.891	.454	1.963
19°	.326	.946	.344	64°	.899	.438	2.050
20°	.342	.940	.364	65°	.906	.423	2.145
21°	.358	.934	.384	66°	.914	.407	2.246
22°	.375	.927	.404	67°	.921	.391	2.356
23°	.391	.921	.424	68°	.927	.375	2.475
24°	.407	.914	.445	69°	.934	.358	2.605
25°	.423	.906	.466	70°	.940	.342	2.747
26°	.438	.899	.488	71°	.946	.326	2.904
27°	.454	.891	.510	72°	.951	.309	3.078
28°	.469	.883	.532	73°	.956	.292	3.271
29°	.485	.875	.554	74°	.961	.276	3.487
30°	.5	.866	.577	75°	.966	.259	3.732
31°	.515	.857	.601	76°	.970	.242	4.011
32°	.530	.848	.625	77°	.974	.225	4.331
33°	.545	.839	.649	78°	.978	.208	4.705
34°	.559	.829	.675	79°	.982	.191	5.145
35°	.574	.819	.700	80°	.985	.174	5.671
36°	.588	.809	.727	81°	.988	.156	6.314
37°	.602	.799	.754	82°	.990	.139	7.115
38°	.616	.788	.781	83°	.993	.122	8.144
39°	.629	.777	.810	84°	.995	.105	9.514
40°	.643	.766	.839	85°	.996	.087	11.430
41°	.656	.755	.869	86°	.998	.070	14.301
42°	.669	.743	.900	87°	.999	.052	19.081
43°	.682	.731	.933	88°	.999	.035	28.636
44°	.695	.719	.966	89°	1.000	.017	57.290
45°	.707	.707	1				

## 12-9. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En un triángulo rectángulo, como el de la figura, tenemos que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Dividiendo por  $c^2$ , obtenemos

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Como

$$\text{sen } \angle A = \frac{a}{c} \quad \text{y} \quad \cos \angle A = \frac{b}{c},$$

tenemos el siguiente teorema:

## Teorema 12-10

Para todo  $\angle A$ ,  $(\text{sen } \angle A)^2 + (\cos \angle A)^2 = 1$ .

Generalmente, denotamos el cuadrado del seno del  $\angle A$  mediante la expresión  $\text{sen}^2 \angle A$ , que es más fácil de escribir que  $(\text{sen } \angle A)^2$ , y hacemos lo mismo en el caso del coseno del  $\angle A$ . Utilizando esta notación, la igualdad anterior toma la forma

$$\text{sen}^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1 \quad \text{o} \quad \text{sen}^2 r^\circ + \cos^2 r^\circ = 1,$$

si  $m\angle A = r$ . Las tres igualdades mencionadas dicen lo mismo.

En el triángulo anterior, leemos que

$$\tan \angle A = \frac{a}{b}.$$

Como

$$\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c},$$

obtenemos el siguiente teorema:

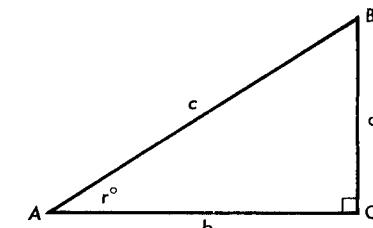
## Teorema 12-11

Para todo  $\angle A$ ,

$$\tan \angle A = \frac{\text{sen } \angle A}{\cos \angle A}.$$

En la notación para las medidas en grados, el enunciado anterior dice que para todo  $r$ ,

$$\tan r^\circ = \frac{\text{sen } r^\circ}{\cos r^\circ}.$$

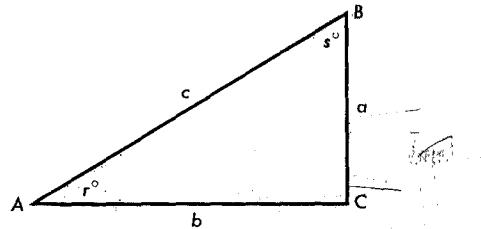


Finalmente, examinando el triángulo rectángulo adjunto, observamos que

$$\operatorname{sen} \angle B = \frac{b}{c} = \cos \angle A$$

y

$$\cos \angle B = \frac{a}{c} = \operatorname{sen} \angle A.$$



Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, tenemos que

$$s = m\angle B = 90 - r.$$

### Teorema 12-12

Si los ángulos  $\angle A$  y  $\angle B$  son complementarios, entonces

$$\operatorname{sen} \angle B = \cos \angle A$$

y

$$\cos \angle B = \operatorname{sen} \angle A.$$

Para las medidas en grados, estas igualdades toman la forma

$$\operatorname{sen}(90 - r)^\circ = \cos r^\circ,$$

$$\cos(90 - r)^\circ = \operatorname{sen} r^\circ.$$

La palabra *coseno*, según se utiliza en estas expresiones, es una abreviatura de la expresión latina *complementi sinus*, que significa *seno del complemento*. De hecho, el coseno de un ángulo es el seno de su complemento.

### Conjunto de problemas 12-9

Utilícese las relaciones fundamentales enunciadas en los teoremas 12-10, 12-11 y 12-12 para demostrar las siguientes identidades:

$$1. \frac{\tan r^\circ}{\tan s^\circ} = \frac{\operatorname{sen} r^\circ \cos s^\circ}{\operatorname{sen} s^\circ \cos r^\circ}.$$

$$2. \tan r^\circ + \tan s^\circ = \frac{\operatorname{sen} r^\circ \cos s^\circ + \cos r^\circ \operatorname{sen} s^\circ}{\cos r^\circ \cos s^\circ}.$$

$$3. \tan r^\circ = \frac{\operatorname{sen} r^\circ}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 r^\circ}}.$$

$$4. 1 + (\cos r^\circ - \operatorname{sen} r^\circ)^2 = 2 \operatorname{sen} r^\circ \cos r^\circ.$$

5. La *cotangente* de un ángulo es el recíproco de la tangente de ese ángulo; es decir,

$$\cot \angle A = \frac{1}{\tan \angle A}.$$

(a) Demostrar que  $\operatorname{tan}(90 - r)^\circ = \cot r^\circ$ .

(b) Demostrar que  $\cot(90 - r)^\circ = \operatorname{tan} r^\circ$ .

$$6. \frac{1 - \operatorname{sen} r^\circ}{\cos r^\circ} = \frac{\cos r^\circ}{1 + \operatorname{sen} r^\circ}.$$

$$7. \frac{2 \operatorname{sen} r^\circ \cos r^\circ}{\cos^2 r^\circ - \operatorname{sen}^2 r^\circ} = \frac{2 \operatorname{tan} r^\circ}{1 - \operatorname{tan}^2 r^\circ}.$$

$$8. \frac{\operatorname{sen} r^\circ}{1 - \cos r^\circ} = \frac{1 + \cos r^\circ}{\operatorname{sen} r^\circ}.$$

9. La *secante* de un ángulo es el recíproco del coseno de ese ángulo; es decir,

$$\sec \angle A = \frac{1}{\cos \angle A}.$$

Demuéstrese que  $\operatorname{tan} r^\circ = \operatorname{sen} r^\circ \sec r^\circ$ .

$$10. 1 + \operatorname{tan}^2 r^\circ = \sec^2 r^\circ. \text{ (V. el problema 9.)}$$

$$11. \sec r^\circ - \cos r^\circ = \operatorname{tan} r^\circ \operatorname{sen} r^\circ. \text{ (V. el problema 9.)}$$

$$* 12. \frac{1 - \operatorname{tan}^2 r^\circ}{1 + \operatorname{tan}^2 r^\circ} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 r^\circ.$$

$$* 13. \frac{1 - \operatorname{tan} r^\circ \operatorname{tan} s^\circ}{\operatorname{tan} r^\circ + \operatorname{tan} s^\circ} = \frac{\operatorname{cos} r^\circ \operatorname{cos} s^\circ - \operatorname{sen} r^\circ \operatorname{sen} s^\circ}{\operatorname{sen} r^\circ \operatorname{cos} s^\circ + \operatorname{cos} r^\circ \operatorname{sen} s^\circ}.$$

$$* 14. \frac{\sec r^\circ}{\operatorname{sen} r^\circ} - \frac{2 \cos r^\circ}{\operatorname{sen} r^\circ} = \operatorname{tan} r^\circ - \cot r^\circ.$$

### PROBLEMAS OPTATIVOS

(a) Verificar que

$$\frac{(\operatorname{cos}^2 r^\circ - \operatorname{sen}^2 r^\circ)^2}{\operatorname{cos}^4 r^\circ - \operatorname{sen}^4 r^\circ} = \frac{1 - \operatorname{tan}^2 r^\circ}{1 + \operatorname{tan}^2 r^\circ}.$$

(b) Verificar que

$$\frac{\operatorname{tan} r^\circ}{1 - \cot r^\circ} + \frac{\cot r^\circ}{1 - \operatorname{tan} r^\circ} = 1 + \operatorname{tan} r^\circ + \cot r^\circ.$$

## Repaso del capítulo

1. Completar cada uno de los siguientes enunciados:

(a) Si  $5x = 8y$ , entonces  $\frac{y}{x} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

(b) Si  $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$ , entonces  $\frac{7}{4} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

(c) Si  $\frac{a+b}{a} = \frac{15}{12}$ , entonces  $\frac{b}{a} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

(d) Si  $48 = 16k$ , entonces  $\frac{k}{3} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

2. Las quinas  $2, a, 6, 5, b$  y  $5, 10, c, d, 9$  son proporcionales. Determinense los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

3. Indicar la media geométrica y la media aritmética de cada uno de los siguientes pares de números:

(a) 6 y 24

(b) 12 y 20

(c)  $7\sqrt{3}$  y  $21\sqrt{3}$

(d)  $4\frac{1}{4}$  y  $6\frac{3}{8}$

4. Dibujar dos figuras cuyos lados correspondientes sean proporcionales, pero que no sean semejantes.

5. Dibujar dos figuras cuyos ángulos correspondientes sean congruentes, pero que no sean semejantes.

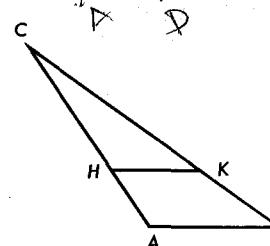
6. En el  $\triangle ABC$ ,  $\overline{HK} \parallel \overline{AB}$ .

(a) Si  $AH = 3$ ,  $BK = 5$ ,  $CK = 12$ , entonces  $CH = \underline{\hspace{1cm}}$ .

(b) Si  $AC = 14$ ,  $AH = 6$ ,  $CK = 12$ , entonces  $BC = \underline{\hspace{1cm}}$ .

(c) Si  $CH = 9$ ,  $AH = 4$ ,  $HK = 3$ , entonces  $AB = \underline{\hspace{1cm}}$ .

(d) Si  $AH = 4$ ,  $CH = BK$ ,  $BC = 48$ , entonces  $CH = \underline{\hspace{1cm}}$ .



7. Los lados de un triángulo tienen longitudes 5, 8 y 11. Un triángulo semejante tiene un perímetro de 60. ¿Cuáles son las longitudes de los lados de este triángulo?

8.  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  se intersecan en  $E$  de manera que  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  y  $AB = 3CD$ . Si  $AC = 21$ , calcúlense  $AE$  y  $EC$ .

9. Los lados de un triángulo tienen longitudes 7, 9 y 14. ¿Cuál será el perímetro de un triángulo semejante cuyo lado mayor tiene longitud 21?

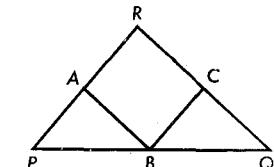
10. En el  $\triangle PQR$ ,  $\overline{AB} \parallel \overline{QR}$  y  $\overline{BC} \parallel \overline{PR}$ .

(a) Si  $PA = 4$ ,  $AR = 6$  y  $PQ = 25$ , entonces  $BQ = \underline{\hspace{1cm}}$ .

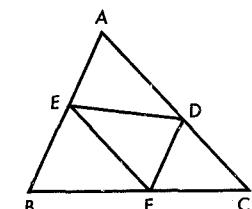
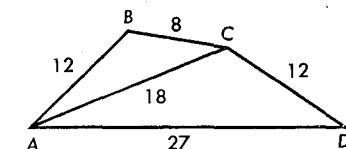
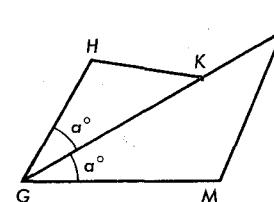
(b) Si  $RC = 3$ ,  $CQ = 5$  y  $PQ = 24$ , entonces  $PB = \underline{\hspace{1cm}}$ .

(c) Si  $PA = 2$ ,  $AR = 8$  y  $RC = 3$ , entonces  $CQ = \underline{\hspace{1cm}}$ .

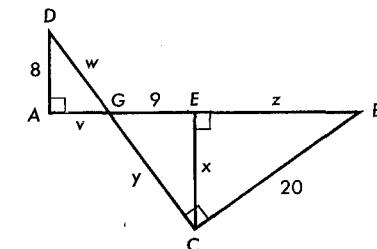
(d) Si  $PB = 4$ ,  $BQ = 5$ ,  $PR = 15$  y  $RQ = 18$ , entonces  $PA = \underline{\hspace{1cm}}$  y  $CQ = \underline{\hspace{1cm}}$ .

11. En la figura, el  $\square AEFD$  es un paralelogramo. Hágase una lista de todas las semejanzas entre triángulos y verifíquese que

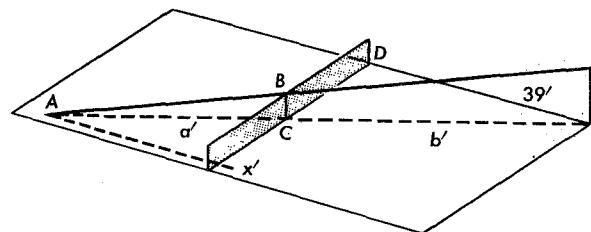
$$\frac{AE \cdot AD}{BE \cdot CD} = 1.$$

12. Dada la figura de la izquierda, a continuación, con  $\angle MGN \cong \angle HGK$ ,  $GH = 8$ ,  $GK = 12$ ,  $GM = 10$  y  $KN = 3$ , demuéstrese que  $\angle HKG \cong \angle N$ .13. Se da la figura anterior de la derecha, con las longitudes de los segmentos como se indica. Demuéstrese que  $\overrightarrow{AC}$  biseca al  $\angle DAB$ .

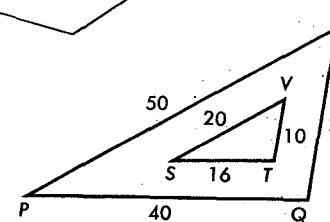
14. La altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en segmentos cuyas longitudes son 15 y 5. Determinense la longitud de la altura y las longitudes de los catetos del triángulo.

15. Dada la figura indicada a la derecha, determinense los valores de  $v$ ,  $w$ ,  $x$ ,  $y$  y  $z$ .16. Si  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  y  $\triangle DEF \sim \triangle ACB$ , ¿qué clase de triángulo es el  $\triangle DEF$ ?

17. Se sirve una bola de tenis desde una altura de 7 pies y pasa justo sobre una red de 3 pies de altura. Si la bola se sirvió desde una distancia de 39 pies de la red y va en línea recta, ¿a qué distancia de la red dará la bola en el piso?



18. Se dan los triángulos  $\triangle PQR$  y  $\triangle STV$  indicados a la derecha. ¿Cuál es la razón de sus áreas?

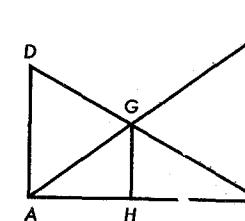


19. El  $\triangle ABC$  es un triángulo rectángulo isósceles con el  $\angle A$  recto.  $E$  y  $D$  son puntos a lados opuestos de  $\overleftrightarrow{AC}$ , y  $E$  está del mismo lado que  $B$  de  $\overleftrightarrow{AC}$ , de manera que los triángulos  $\triangle ACD$  y  $\triangle BCE$  son ambos equiláteros. Determinese la razón de las áreas de los triángulos  $\triangle ACD$  y  $\triangle BCE$ .

20. Un lado de un triángulo equilátero es congruente con una altura de otro triángulo equilátero. ¿Cuál es la razón de las áreas de los triángulos?

- \* 21. Se da la figura de la derecha, con  $\overline{AD}$ ,  $\overline{HG}$  y  $\overline{BC}$  cada uno perpendicular a  $\overline{AB}$ . Demuéstrese que:

- $AH \cdot GB = HB \cdot DG$ .
- $AH \cdot GC = HB \cdot AG$ .
- $AH \cdot BC = HB \cdot AD$ .



- \* 22. Sean  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $X$  puntos tales que tres cualesquiera de ellos no estén alineados y  $X$  esté en el exterior del  $\triangle PQR$ . Trácense los segmentos  $\overline{XP}$ ,  $\overline{XQ}$  y  $\overline{XR}$ . Se traza un punto cualquiera de  $\overline{XR}$  y tracemos una recta que pase por  $A$  paralela a  $\overline{PR}$  y que interseque a  $\overline{XP}$  en  $B$ . Tracemos, además, una recta que pase por  $B$  paralela a  $\overline{PQ}$  y que interseque a  $\overline{XQ}$  en  $C$ . Trácese  $\overline{AC}$  y demuéstrese que

$$\triangle ABC \sim \triangle RPQ.$$

23. En el  $\triangle ABC$ ,  $\angle B$  es un ángulo recto,

$$m\angle A = 54 \quad \text{y} \quad AC = 11.$$

Determinense  $AB$  y  $BC$ .

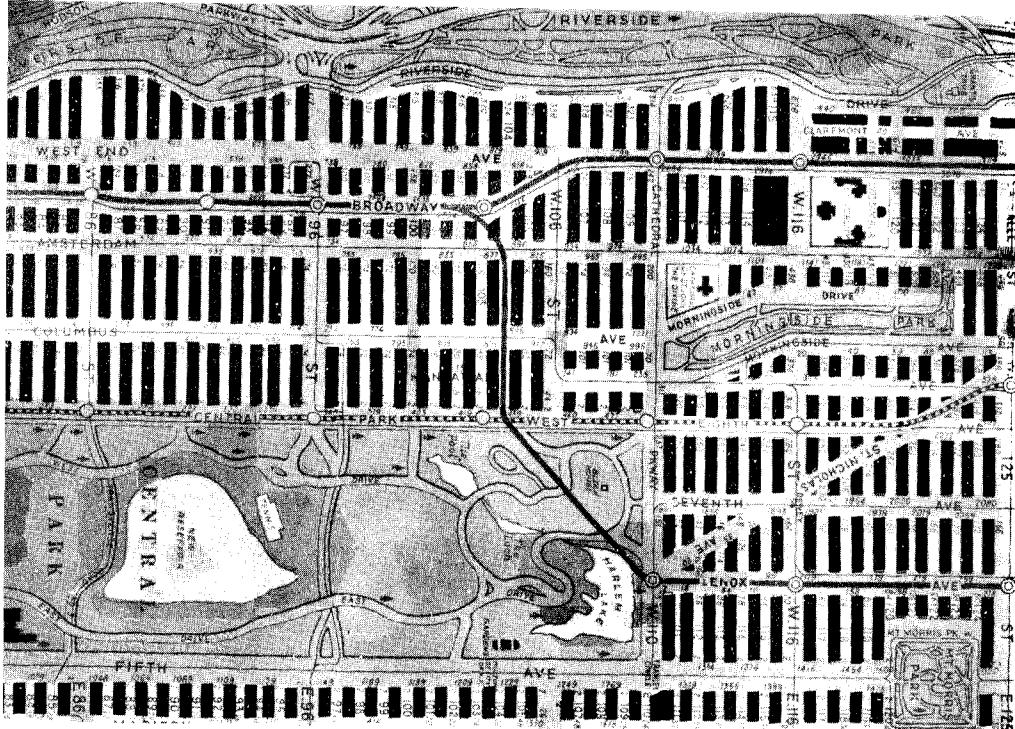


24. Determinar, con la aproximación de un grado, las medidas de los ángulos agudos de un triángulo 7-24-25.
25. Un avión de retropropulsión sale de un aeropuerto y se eleva manteniendo un ángulo constante de  $8^\circ$  hasta que adquiere una altura de 9,000 metros. ¿A qué distancia horizontal estará entonces del aeropuerto? (Calcúlese con la aproximación de un kilómetro.)

### PROBLEMA OPTATIVO

Explicar de qué manera dos triángulos pueden tener 5 partes (lados y ángulos) de uno congruentes con 5 partes del otro y aún así no ser congruentes.

# 13 | Geometría cartesiana en el plano



## 13-1. INTRODUCCIÓN

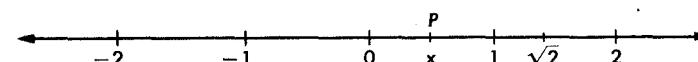
La matemática es, en cierto sentido, muy diferente de las otras ciencias: es la única ciencia en la cual prácticamente todo es aprovechable. Desde luego, los matemáticos son seres humanos y, como tales, cometan errores. Pero en la matemática, los errores individuales generalmente son pronto descubiertos. Esto lleva consigo que cuando una generación descubre algo en el campo de la matemática, la siguiente puede continuar adelante con nuevas investigaciones, sin tener que detenerse a corregir errores serios en las cosas que creían conocer.

Prueba de esto es el hecho de que la geometría desarrollada por los antiguos griegos parece tan cierta actualmente como lo era hace dos mil años.

El primer gran paso adelante en la geometría, después de la época de los griegos, fue el desarrollo de un nuevo método, llamado *geometría cartesiana*. Este método fue descubierto en el siglo XVII por René Descartes (1596-1650). Según veremos, lo que hizo Descartes fue explorar las relaciones entre la geometría y el álgebra e indicar cómo cada una de ellas puede iluminar a la otra. En este capítulo, ofreceremos una breve introducción a la geometría cartesiana; sólo lo suficiente para dar una idea de lo que es y cómo funciona.

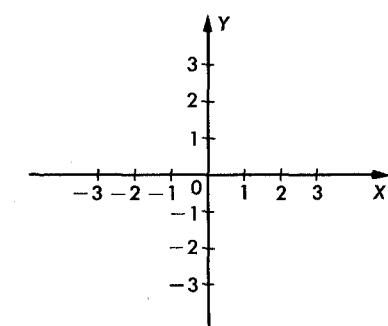
## 13-2. SISTEMAS DE COORDENADAS EN UN PLANO

Ya sabemos, por el Capítulo 2, cómo funciona un sistema de coordenadas en una recta.



Una vez fijado un sistema de coordenadas en una recta, todo número corresponde a un punto y todo punto corresponde a un número.

Haremos ahora lo mismo en un *plano*. Aquí, un punto no corresponderá a un solo número, sino a un *par* de números. El esquema consiste en lo siguiente: Primero, tomamos una recta *X* en el plano y construimos un sistema de coordenadas en *X*. Esta recta se llamará el *eje x*. Al dibujar figuras, acostumbramos poner una punta de flecha en el eje *x*, para distinguir el sentido positivo en *X*.



Ahora, elegimos otra recta  $Y$  que sea perpendicular al eje  $x$  y pase por el punto con coordenada 0. En  $Y$ , fijamos un sistema de coordenadas de tal modo que el punto cero en  $Y$  sea el punto cero en  $X$ . (Esto es posible, en virtud del postulado de colocación de la regla.) La recta  $Y$  se llamará el *eje y*. Como anteriormente, indicaremos el sentido positivo con una punta de flecha. El punto donde la recta  $X$  interseca a la recta  $Y$  se llama el *origen*. Éste se denota por 0, para recordarnos que es el punto cero en cada eje.

Ahora, podemos representar cualquier punto del plano mediante un par de números, como sigue: Dado un punto  $P$ , trazamos desde  $P$  una perpendicular al eje  $x$ . Sea el punto  $M$  el pie de esta perpendicular y sea  $x$  la coordenada de  $M$  en la recta  $X$ . El número  $x$  se llama la *coordenada x* de  $P$ . En la figura,  $x = 2\frac{1}{2}$ , aproximadamente.

Luego, trazamos una perpendicular al eje  $y$ . Sea  $N$  el pie de esta perpendicular y sea  $y$  la coordenada de  $N$  en la recta  $Y$ . El número  $y$  se llama la *coordenada y* de  $P$ . En la figura,  $y = 1\frac{1}{2}$ , aproximadamente. Por brevedad, indicamos que  $P$  tiene esas coordenadas, escribiendo  $P(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ .

Veamos otros ejemplos. En la figura, podemos leer lo siguiente:

$$P_1(1, 3)$$

$$P_2(-2, 4)$$

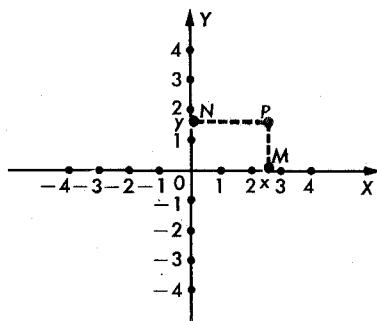
$$P_3(-4, 2)$$

$$P_4(-3, -2)$$

$$P_5(-1, -4)$$

$$P_6(3, -2)$$

$$P_7(3, 1)$$

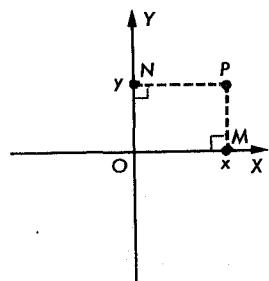


y no se puede determinar dónde está localizado dicho punto, si no se sabe qué número se considera el primero.

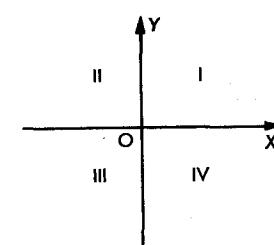
Resumimos todo esto en las siguientes definiciones:

### Definiciones

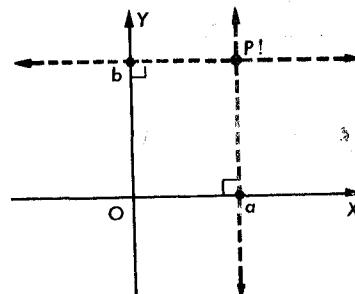
La *coordenada x* de un punto  $P$  es la coordenada del pie de la perpendicular desde  $P$  al eje  $x$ . La *coordenada y* del punto  $P$  es la coordenada del pie de la perpendicular desde  $P$  al eje  $y$ . Si  $P$  tiene coordenadas  $x$  y  $y$ , entonces escribimos  $P(x, y)$ .



Lo mismo que una recta separa al plano en dos partes (cada una de las cuales es un semiplano), los dos ejes separan al plano en cuatro partes, llamadas *cuadrantes*. Los cuatro cuadrantes se designan con números, como se indica a continuación:



Hemos demostrado que mediante el esquema que acabamos de explicar, todo punto  $P$  determina un par ordenado de números reales. ¿Podremos invertir el procedimiento? Esto es, ¿determina un punto todo par ordenado  $(a, b)$  de números reales? Es fácil ver que la contestación es "Sí".



Obsérvese que es esencial el orden en que se escriben las coordenadas. El punto de coordenadas  $(1, 3)$  es  $P_1$ , y ese punto es diferente del punto  $P_7$  de coordenadas  $(3, 1)$ . Así, las coordenadas de un punto forman un par *ordenado* de números reales,

En el punto del eje  $x$  con coordenada  $x = a$ , trazamos una perpendicular. Hacemos lo mismo en el punto del eje  $y$  con coordenada  $y = b$ . El punto en que esas perpendiculares se intersecan es el punto de coordenadas  $(a, b)$ .

Así, tenemos una correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y los pares ordenados de números reales. Una tal correspondencia se llama un *sistema de coordenadas*. Para describir un sistema de coordenadas, necesitamos elegir (1) una recta  $X$ , como eje  $x$ , (2) una recta  $Y$ , como eje  $y$ , (3) un sentido positivo en cada eje. Una vez efectuadas estas tres elecciones, los sistemas de coordenadas en ambos ejes quedan determinados y éstos, a su vez, determinan las coordenadas de todos los puntos del plano.

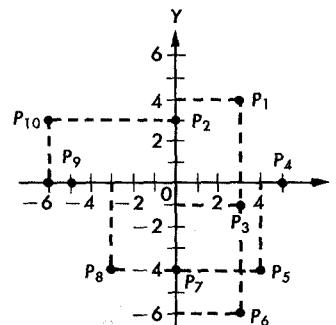
En este libro, nunca hablaremos de dos sistemas de coordenadas al mismo tiempo. Mientras consideremos un solo sistema de coordenadas, todo punto  $P$  determina un par ordenado  $(a, b)$  y todo par ordenado  $(a, b)$  determina un punto. Por consiguiente, no habrá confusión si pasamos por alto la diferencia entre puntos y pares de números. Esto nos permitirá abreviar, utilizando frases convenientes tales como "el punto  $(2, 3)$ " y " $P = (3, 4)$ ".

### Conjunto de problemas 13-2

1. (a) Dar las coordenadas de cada punto  $P$  de la figura como un par ordenado de números.

(b) ¿Qué ternas hay de puntos alineados? ¿Cuáles son sus coordenadas?

(c) Cuáles puntos están en el cuadrante I? ¿Cuáles en el cuadrante IV?



2. ¿Cuáles son las coordenadas del origen?

3. ¿Cuál es la coordenada  $y$  del punto  $(3, -5)$ ? ¿del punto  $(5, -3)$ ? ¿y del punto  $(-5, 3)$ ?

4. Considérese el punto  $C(4, 7)$ . ¿Cuáles son las coordenadas de su proyección,  $A$ , sobre el eje  $x$ ? ¿Cuáles son las coordenadas de su proyección,  $B$ , sobre el eje  $y$ ?

5. Contestar las preguntas del problema 4 para el punto  $D(-4, 7)$ .

6. Nombrar el punto que es la proyección del punto  $(0, 6)$  sobre el eje  $x$ .

7. Nombrar el punto que es la proyección del punto  $(-1, 0)$  sobre el eje  $y$ .

8. Completar: La coordenada  $x$  de todo punto del eje  $y$  es \_\_\_\_\_.

9. Completar: La coordenada  $y$  de todo punto del eje  $x$  es \_\_\_\_\_.

10. Considérense los puntos

$$A(5, 2), \quad B(4, -3), \quad C(-4, 4) \quad \text{y} \quad D(-3, -5).$$

(a) Escribanse sus nombres,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , en el orden (de izquierda a derecha) de sus proyecciones sobre el eje  $x$ .

(b) Nómbrense en el orden (de abajo arriba) de sus proyecciones sobre el eje  $y$ .

11. Las rectas por  $P(5, 7)$  que son perpendiculares al eje  $x$  y al eje  $y$  forman un rectángulo con los dos ejes. Calcular el perímetro del rectángulo.

12. Determinar el perímetro del rectángulo formado por los ejes y las perpendiculares a los ejes que pasan por el punto  $(-4, -2)$ .

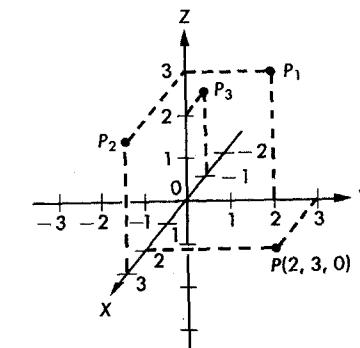
13. Seguir las instrucciones del problema 11 para el punto  $P(-\frac{7}{2}, 3)$ ; para el punto  $P(-\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ ; para el punto  $P(a, b)$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales cualesquiera.

14. Indicar en cuáles de los siguientes pares de puntos están éstos más cerca uno del otro:  $(3, 0)$  y  $(7, 0)$  ó  $(3, 0)$  y  $(-2, 0)$

15. Indicar en cuáles de los siguientes pares de puntos están éstos más cerca uno del otro:  $(2, 1)$  y  $(1, 2)$  ó  $(2, 1)$  y  $(2, 0)$

16. *Un sistema de coordenadas en tres dimensiones.*

Si trazamos una recta perpendicular al eje  $x$  y al eje  $y$  en su punto de intersección, podemos construir un sistema de coordenadas en el espacio. En este sistema, tenemos una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y las ternas ordenadas de números reales.



En la figura, las puntas de flechas indican el sentido positivo en cada eje y las líneas de trazo son las perpendiculares que proyectan cada punto  $P$  sobre los ejes respectivos. La proyección de un punto sobre un eje es su coordenada respecto de ese eje. Así, un punto está completamente determinado por sus tres coordenadas, y escribímos  $P(x, y, z)$ .

En la figura de la página anterior,  $P$  es un punto en el plano  $xy$ , de manera que su proyección (*no indicada*) sobre el eje  $z$  es 0. Su proyección sobre el eje  $x$  es 2 y su proyección sobre el eje  $y$  es 3. Por tanto, podemos escribir  $P(2, 3, 0)$ .

- $P_1$  es un punto en el plano  $yz$ . Escribanse sus coordenadas como terna ordenada de números reales.
- Los puntos  $P_2$  y  $P_3$  están ambos en el plano  $xz$ . Escribanse sus coordenadas como ternas ordenadas.
- ¿Cuáles dos puntos están en un plano paralelo al plano  $xy$ ? ¿Puede demostrar esto el alumno? ¿Qué puede observarse en relación con las coordenadas de los dos puntos?

\* 17. Si un punto  $P$  está descrito por  $P(x, y, z)$ , ¿en qué eje está cada uno de los siguientes puntos?

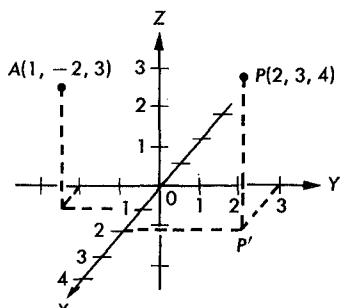
$$A(0, 3, 0), \quad B(-2, 0, 0), \quad C(0, 0, 5)$$

\* 18. Si un punto  $P$  está descrito por  $P(x, y, z)$ , ¿en qué plano está cada uno de los siguientes puntos?

$$R(4, 0, 2), \quad S(3, -2, 0), \quad T(0, 1, 5)$$

\*\* 19. Al representar un punto en un sistema de coordenadas en tres dimensiones, se acostumbra considerar primeramente su proyección sobre el plano  $xy$ . En la figura,  $P'$  es la proyección de  $P(2, 3, 4)$  sobre el plano  $xy$ . ¿Cuáles son las coordenadas de  $P'$ ?

- ¿Cuál es la distancia del punto  $P$  al plano  $xy$ ?; al plano  $xz$ ?; y al plano  $yz$ ?
  - ¿Cuál es la distancia del punto  $A$  al plano  $xy$ ?; al plano  $xz$ ?; y al plano  $yz$ ?
- \*\* 20. (a) ¿Cuál es la distancia del punto  $(3, 2, -2)$  al plano  $xy$ ?; al plano  $xz$ ?; y al plano  $yz$ ?
- (b) Contestar la parte (a) para el punto  $(x, y, z)$ , donde  $x, y, z$  son números reales cualesquiera.



RENÉ DESCARTES (1596–1650)

Descartes fue un hombre famoso en dos campos completamente separados: entre los filósofos, fue uno de los más grandes y entre los matemáticos, se le consideró un gran matemático.

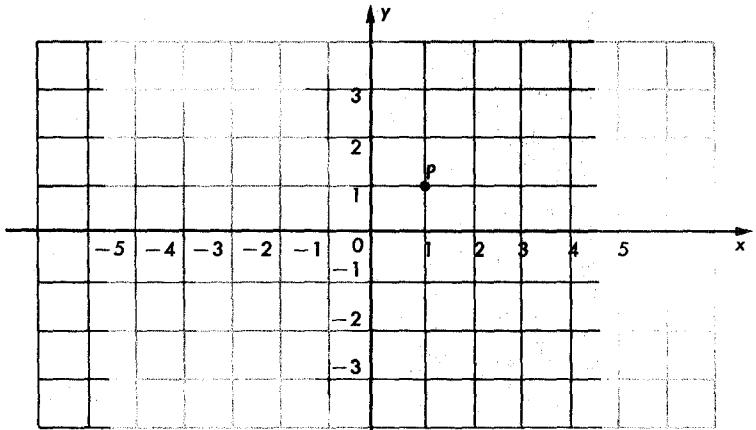
Su contribución principal a las matemáticas fue el descubrimiento de los sistemas de coordenadas y su aplicación a los problemas de la geometría. Desde entonces, el álgebra y la geometría han laborado juntas, para beneficio de ambas. Los sistemas de coordenadas utilizados en este libro se conocen con el nombre de sistemas de coordenadas cartesianas, en honor a su inventor. (La palabra *cartesiana* viene de *Cartesius*, que es la forma latina del nombre de Descartes.) El concepto de las coordenadas fue la primera contribución realmente fundamental a la geometría después de la época de los griegos.

Parte del crédito para el descubrimiento de Descartes se le debe dar a Pierre Fermat; quien tuvo casi las mismas ideas en la misma época. Fermat fue uno de los pocos grandes matemáticos aficionados. Fue un alto funcionario del gobierno francés y se dedicaba a las matemáticas en su tiempo libre. Escribía cartas a sus amigos relacionadas con sus descubrimientos, pero nunca publicó éstos en otra forma. El contenido de las cartas de Fermat está ahorrado en los libros corrientes sobre la teoría de los números.

El desarrollo del sistema de coordenadas sirvió de fundamento al cálculo infinitesimal, inventado poco después por Newton y Leibniz. De modo que, Descartes debe haber sido uno de los hombres en que Newton pensaba cuando dijo que estaba apoyado sobre los hombros de gigantes.

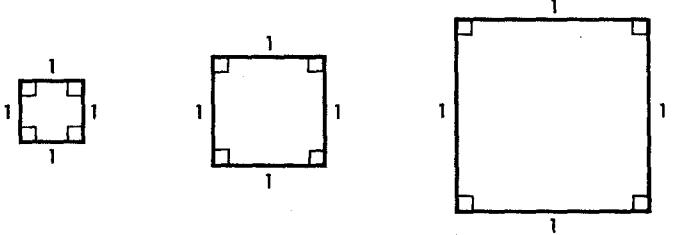
### 13-3. REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA DE COORDENADAS EN PAPEL CUADRICULADO

Al dibujar figuras referidas a sistemas de coordenadas, es conveniente utilizar papel cuadriculado, en el cual están ya impresas rectas equidistantes paralelas a los ejes coordenados; lo demás es para dibujarlo nosotros.



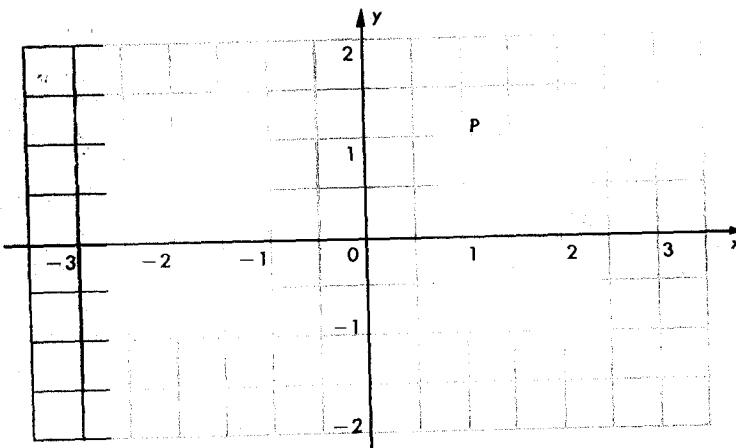
En la figura anterior, las rectas en rojo representan las rectas tal como aparecen corrientemente impresas en el papel cuadriculado. Todo lo demás hay que dibujarlo a pluma o con un lápiz. Obsérvese que el eje  $x$  se marca  $x$  en vez de  $X$ ; ésta es la costumbre. Aquí, el símbolo  $x$  no es el nombre de cosa alguna, es simplemente un recordatorio de que las coordenadas en este eje se denotan por la letra  $x$ ; y análogamente para el eje  $y$ .

Se recordará que, antes de comenzar el estudio de los sistemas de coordenadas, estábamos en libertad de dibujar figuras utilizando cualquier escala que deseáramos. Por ejemplo, cada una de las siguientes figuras es una buena imagen de un cuadrado de lado 1:



Del mismo modo y, por la misma razón, podemos representar la escala que queramos

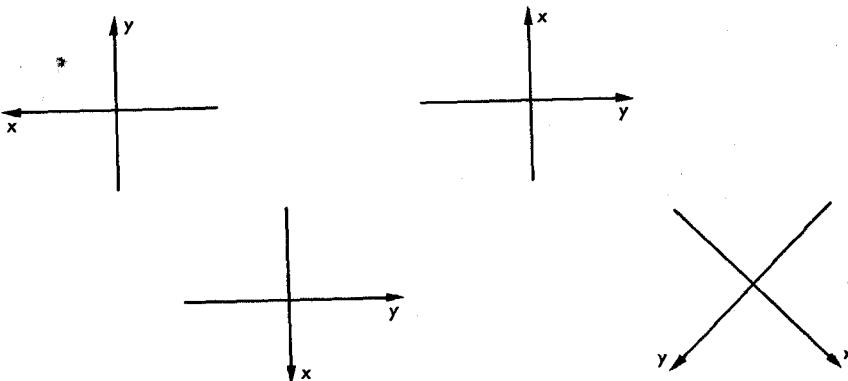
en un papel cuadriculado. Por ejemplo, pudimos haber marcado la misma hoja de papel anterior así:



En virtud de esta libertad de elección, es absolutamente necesario decir cuál hacemos, marcando con números los ejes para indicar la escala. Si no hacemos esto en la figura anterior, no se podría decir si  $P$  representa el punto  $(1, 1)$  o el punto  $(2, 2)$  o el punto  $(\pi, \pi)$ .

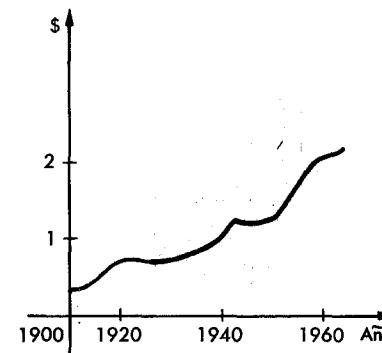
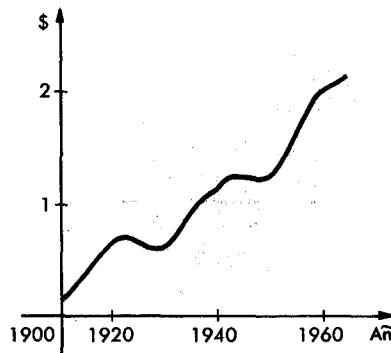
*Repitiendo:* Para definir un sistema de coordenadas en un papel cuadriculado, necesitamos dibujar los ejes e indicar la escala.

Nótese que podemos dibujar los ejes en cualquiera de las siguientes (u otras) posiciones:



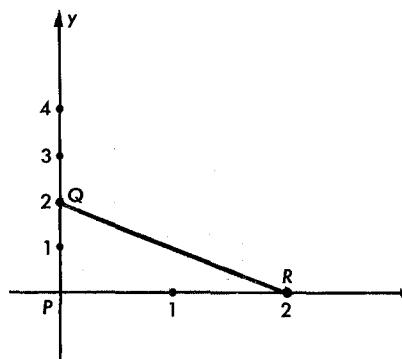
*Ninguna de estas figuras es lógicamente incorrecta.* Sin embargo, resulta más fácil leer gráficas cualesquiera, si se conviene en que el eje  $x$  será horizontal, con coordenadas en orden creciente de izquierda a derecha, y el eje  $y$  será vertical, con coordenadas en orden creciente de abajo arriba.

*Una advertencia final:* Probablemente, el alumno ha visto muchas gráficas en las cuales las escalas horizontal y vertical han sido elegidas independientemente una de otra.



Por ejemplo, si se quiere dibujar una gráfica para representar cómo el precio del queso (en dólares por libra) aumentó desde el año 1900 hasta el 1960, no es necesario que haya alguna relación particular entre las escalas del eje horizontal y del vertical. (Las escalas miden diferentes clases de cosas.)

Por otra parte, cuando dibujamos un sistema de coordenadas para trazar una figura, ésta se deformará, si las escalas en los ejes son diferentes. La razón es que las escalas se utilizan para medir distancias.



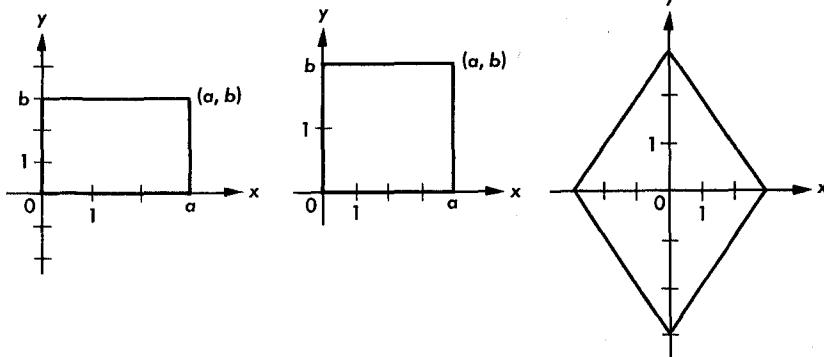
En la figura, las escalas nos dicen que  $PQ = 2$  y  $PR = 2$ . Por tanto, el  $\triangle PQR$  es isósceles. Pero, desde luego, no parece isósceles y los ángulos  $\angle Q$  y  $\angle R$  ciertamente no parecen congruentes. Esto quiere decir que hemos trazado una figura deformada. Para evitar estas deformaciones, generalmente utilizamos la misma escala en ambos ejes.

### Conjunto de problemas 13-3

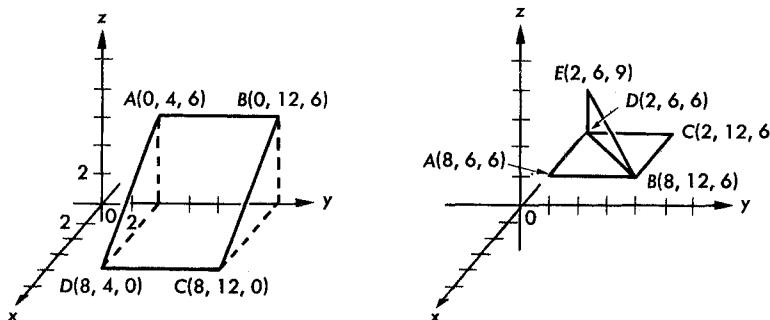
[Nota: En este conjunto de problemas, se verá que el papel cuadriculado servirá de gran ayuda, aunque no es esencial. En los problemas del 1 al 12, trácese un sistema de ejes para cada uno.]

- Elegir una escala apropiada en un sistema de ejes y situar cada uno de los siguientes puntos:  $A(2, 3)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $C(4, -3)$ ,  $D(-3, -4)$ . ¿En qué cuadrante está cada punto?
- Situar cada uno de los siguientes puntos:  $A(0, 0)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $C(5, 3)$ ,  $D(0, 3)$ . Calcular:
  - el perímetro del  $\square ABCD$ .
  - $a \square ABCD$ .
- Situar cada uno de los siguientes puntos:  $P(0, 0)$ ,  $Q(3, 0)$ ,  $R(0, 4)$ . Calcular:
  - el perímetro del  $\triangle PQR$ .
  - $a \triangle PQR$ .
- Situar cada uno de los siguientes puntos:  $F(0, 0)$ ,  $G(8, 0)$ ,  $H(8, -6)$ .
  - Calcular  $a \triangle FGH$ .
  - ¿Cuál es la longitud de  $\overline{FH}$ ?
- El  $\triangle ABC$  tiene sus vértices en los puntos  $(0, 1)$ ,  $(0, 6)$  y  $(12, 1)$ . Calcular  $a \triangle ABC$  y el perímetro del  $\triangle ABC$ .
- Situar cada uno de los siguientes puntos:  $A(1, 0)$ ,  $B(7, 0)$ ,  $C(10, 4)$ ,  $D(4, 4)$ . Calcular el perímetro y el área del  $\square ABCD$ .
- ¿Cuál es el área de un triángulo cuyos vértices son los puntos  $(0, 5)$ ,  $(4, 0)$  y  $(-4, 0)$ ?
- Situar cada uno de los puntos  $K(-2, 5)$ ,  $M(-2, -3)$ ,  $L(4, -3)$ . Calcular  $a \triangle KML$ . ¿Cuál es la longitud de  $\overline{KL}$ ?
- Un triángulo tiene sus vértices en  $(0, 0)$ ,  $(0, 12)$  y  $(10, 0)$ . Determinar la longitud de la mediana correspondiente al lado más pequeño.
- Situar cada uno de los puntos  $A(-3, -4)$ ,  $B(-3, 6)$ ,  $C(4, 6)$ . Determinar las coordenadas de un punto  $D$  tal que el  $\square ABCD$  sea un rectángulo.
- Los vértices de un triángulo son los puntos  $(1, 8)$ ,  $(4, 1)$  y  $(7, 1)$ . Calcular el área del triángulo.
- Los extremos de la base de un triángulo isósceles son los puntos  $(3, 0)$  y  $(-3, 0)$ . Determinar las coordenadas del otro vértice, de manera que el área del triángulo sea 15.

- + 13. "¿Cuándo no es un cuadrilátero un cuadrado?". En las siguientes figuras, la escala en cada eje  $x$  es, a propósito, diferente de la escala en el eje  $y$  correspondiente, para deformar intencionadamente la figura. ¿Cuál es, en cada caso, la figura en la cual se pensaba?



- + 14. Se da la siguiente figura de la izquierda. Determinar el perímetro del  $\square ABCD$ .



- + 15. En el problema 14, ¿cuál es la longitud de la proyección de  $\overline{AC}$  sobre el plano  $xy$ ?

- + 16. Se da la figura anterior de la derecha, tal como está marcada. Determinar  $BE$

- + 17. Dibújese un sistema de coordenadas en tres dimensiones. Elíjase la misma escala en los ejes  $y$  y  $z$ . En el eje  $x$  (el que se dirige hacia uno), utilícese una escala que sea alrededor de 0.7 de la escala en los otros dos ejes. Localícese el punto  $A(1, 3, 2)$  y el punto  $B(1, -3, 2)$ . Trácese  $\overline{AB}$ . ¿Cuál es su longitud?

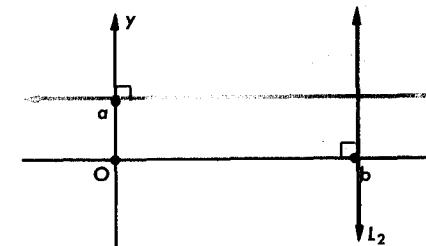
[*Indicación:* Véase el problema 19 del Conjunto de problemas 13-2.]

- + 18. Dibujar la figura del problema 19 del Conjunto de problemas 13-2, pero, en vez de proyectar  $P$  sobre el plano  $xy$  primero,

- (a) proyectese  $P$  sobre el plano  $yz$ ,  
(b) proyectese  $P$  sobre el plano  $xz$ .

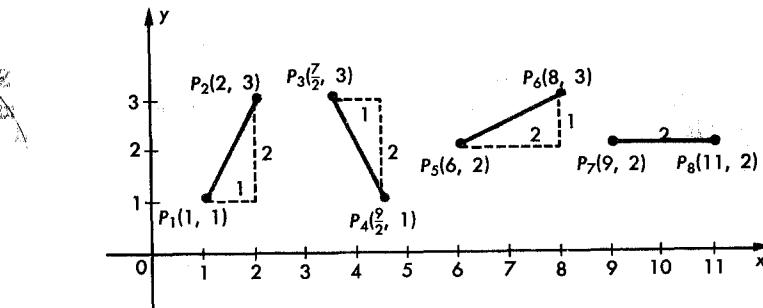
### 13-4. LA PENDIENTE DE UNA RECTA NO VERTICAL

El eje  $x$  y todas las rectas paralelas al mismo, se llaman rectas *horizontales*. El eje  $y$  y todas las rectas paralelas al mismo, se llaman rectas *verticales*.



En la figura, es fácil ver que todos los puntos de la recta horizontal  $L_1$  tienen la misma coordenada  $y$ , igual a  $a$ , puesto que el punto  $(0, a)$  es el pie de todas las perpendiculares al eje  $y$  desde puntos de  $L_1$ . Análogamente, todos los puntos de la recta vertical  $L_2$  tienen la misma coordenada  $x$ , igual a  $b$ . Desde luego, un segmento se llama horizontal, si la recta que lo contiene es horizontal; y un segmento se llama vertical, si la recta que lo contiene es vertical.

La idea de *pendiente* de un segmento está insinuada por cada una de las siguientes figuras:

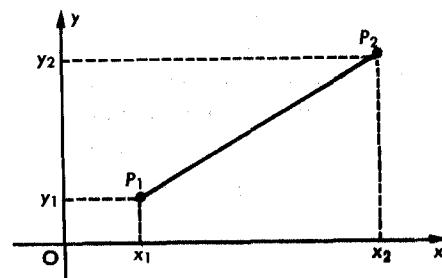


La pendiente del primer segmento es 2; la pendiente del segundo es  $-2$ ; la pendiente del tercero es  $\frac{1}{2}$ ; y la pendiente del cuarto es 0. Más precisamente:

#### Definición

Si  $P_1 = (x_1, y_1)$  y  $P_2 = (x_2, y_2)$  y  $\overline{P_1P_2}$  no es vertical, entonces la pendiente de  $\overline{P_1P_2}$  es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Algunas propiedades referentes a pendientes se deducen fácilmente de la definición:

(1) Si los puntos  $P_1$  y  $P_2$  se intercambian, la pendiente no varía, porque

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)}.$$

Con otras palabras, la pendiente de un segmento no depende del orden en que se nombren sus extremos.

(2) Por otra parte, es indispensable nombrar las coordenadas en el mismo orden en el numerador y en el denominador. La fórmula

$$\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$$

no es correcta para la pendiente.

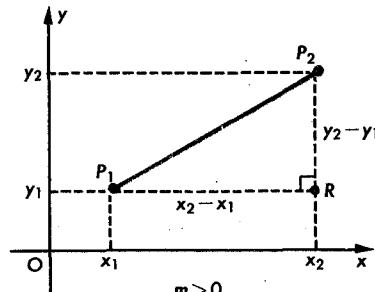
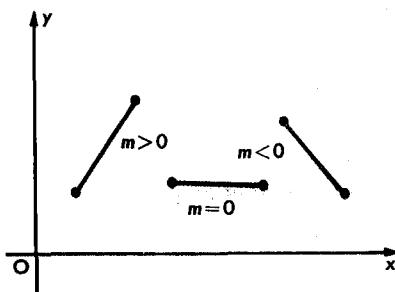
(3) Para segmentos no verticales, la fórmula de la pendiente siempre nos da un número, porque el denominador  $x_2 - x_1$  no puede ser cero.

(4) Para segmentos verticales, la fórmula de la pendiente *nunca* nos da un número, pues en este caso, el denominador  $x_2 - x_1$  es igual a 0. En realidad, un segmento vertical no tiene pendiente.

(5) Si un segmento es horizontal, su pendiente es 0. (El numerador  $y_2 - y_1$  es 0, y el denominador  $x_2 - x_1$  es distinto de 0.)

(6) Si un segmento no es horizontal (o vertical), entonces su pendiente no es 0.

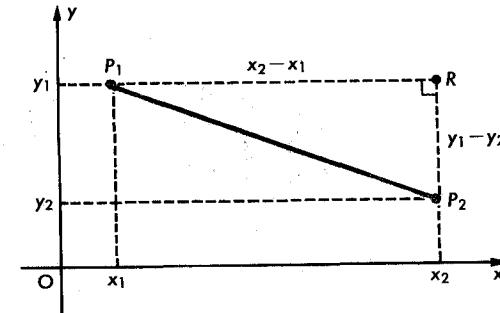
(7) Si un segmento asciende de izquierda a derecha, su pendiente es positiva. Si el segmento desciende de izquierda a derecha, su pendiente es negativa. (V. la siguiente figura de la izquierda.)



Si un segmento tiene pendiente positiva, entonces dicha pendiente es la razón de dos distancias, como en la figura anterior de la derecha. Aquí, por ser  $x_1 < x_2$  y  $y_1 < y_2$ , tenemos  $P_1R = x_2 - x_1$  y  $RP_2 = y_2 - y_1$ . (¿Por qué?) En consecuencia,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{RP_2}{P_1R}$$

Si un segmento tiene pendiente negativa, entonces dicha pendiente es el *negativo* de la razón de dos distancias.



Aquí, por ser  $x_1 < x_2$  y  $y_2 < y_1$ , tenemos

$$P_1R = x_2 - x_1,$$

como anteriormente, pero

$$RP_2 = y_1 - y_2 = -(y_2 - y_1).$$

Por tanto,

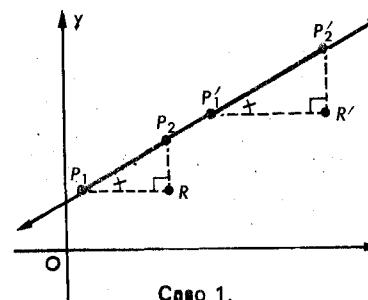
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{RP_2}{P_1R}.$$

Estas ideas relacionan las pendientes con la geometría, y hacen fácil ver por qué el siguiente teorema es cierto:

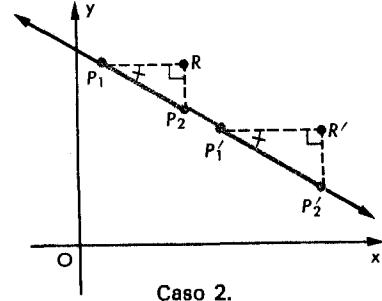
### Teorema 13-1

Todos los segmentos de una recta no vertical tienen la misma pendiente.

**Demostración:** Si la recta es horizontal, esta afirmación es evidente, porque todos los segmentos en la recta tienen pendiente igual a 0. Los casos interesantes están indicados por las siguientes figuras:



Caso 1.



Caso 2.

En el caso 1, tenemos

$$\triangle P_1RP_2 \sim \triangle P'_1R'P'_2.$$

Luego,

$$\frac{RP_2}{R'P'_2} = \frac{P_1R}{P'_1R'},$$

$$\frac{RP_2}{P_1R} = \frac{R'P'_2}{P'_1R'}.$$

Por tanto,  $\overline{P_1P_2}$  y  $\overline{P'_1P'_2}$  tienen la misma pendiente.

En el caso 2, también tenemos

$$\triangle P_1RP_2 \sim \triangle P'_1R'P'_2.$$

Así, obtenemos, como anteriormente,

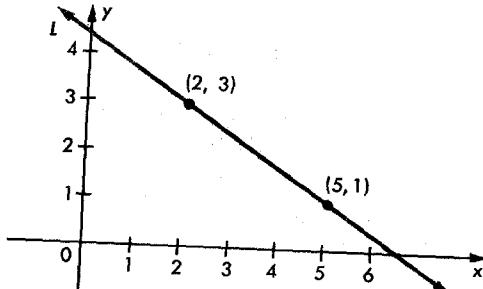
$$\frac{RP_2}{P_1R} = \frac{R'P'_2}{P'_1R'}.$$

Este resultado es el que deseábamos, pues las pendientes de los dos segmentos son los negativos de esas dos razones.

Una vez establecida la validez del teorema 13-1, podemos hablar no solamente de las pendientes de los segmentos, sino también de las pendientes de las rectas.

### Definición

La *pendiente* de una recta no vertical es el número que es igual a la pendiente de todo segmento de la recta.



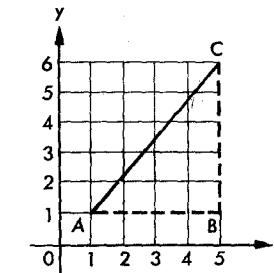
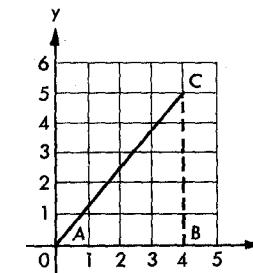
Así, en la figura, la pendiente de  $L$  es

$$\frac{1-3}{5-2} = -\frac{2}{3}.$$

Cualquier otro segmento de la misma recta nos daría la misma pendiente.

### Conjunto de problemas 13-4

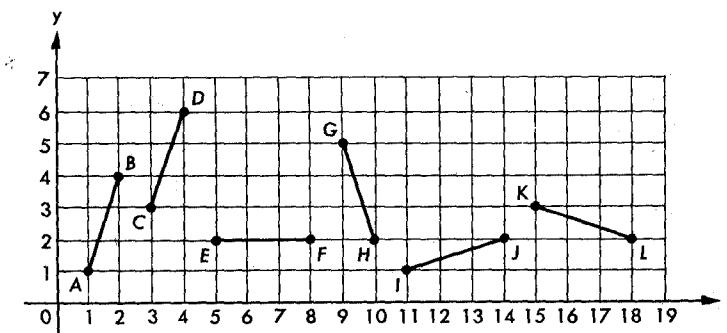
1. Contestar para cada figura las preguntas siguientes:



- (a) ¿Cuáles son las coordenadas de  $A$ ,  $B$  y  $C$ ?  
 (b) ¿Cuánto es  $BC$ ? ¿Cuánto es  $AB$ ? (c) ¿Cuál es la pendiente de  $\overline{AC}$ ?

2. Dibujar un sistema de ejes coordenados. Situar cuatro puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , que tengan 3 como coordenada  $x$ . Situar cuatro puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ , que tengan  $-2$  como coordenada  $y$ . Márquese cada punto con sus coordenadas.

3. Obtener la pendiente de cada segmento indicado en la siguiente figura:



4. ¿Qué pares de puntos dados a continuación determinarán rectas horizontales? ¿Cuáles, rectas verticales?

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| (a) $(5, 7)$ y $(-3, 7)$ | (b) $(2, 4)$ y $(2, -1)$  |
| (c) $(5, 2)$ y $(-3, 5)$ | (d) $(0, -1)$ y $(4, -1)$ |
| (e) $(3, 3)$ y $(-3, 3)$ | (f) $(4, 7)$ y $(-2, 6)$  |
| (g) $(0, 0)$ y $(0, 5)$  | (h) $(0, 6)$ y $(3, 0)$   |
| (i) $(a, b)$ y $(a, c)$  | (j) $(a, b)$ y $(c, b)$   |

5. Calcular la pendiente de la recta que contiene cada par de puntos dado a continuación:

- |                         |                          |
|-------------------------|--------------------------|
| (a) $(0, 0)$ y $(8, 4)$ | (b) $(10, 5)$ y $(6, 8)$ |
|-------------------------|--------------------------|

Dos rectas no verticales son paralelas, si, y solamente si, sus pendientes son iguales.

### Theorema 13-2

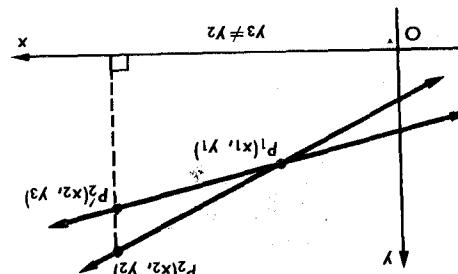
Combinando estos dos enunciados, obtenemos el siguiente teorema:

Aquí,  $m \neq m'$ , porque los denominadores son los mismos y los numeradores son distintos.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m' = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

Si las dos rectas se intersectan en  $P_1$ , como en la figura, entonces sus pendientes son

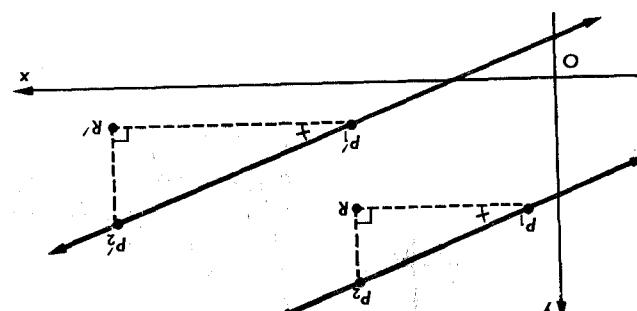


distintas.

(2) Si dos rectas distintas no verticales se intersectan, entonces sus pendientes son distintas.

$$\Delta P_1 R P_2 \sim \Delta P_1' R' P_2'$$

Esto se deduce de que



(1) Si dos rectas no verticales son paralelas, entonces tienen la misma pendiente. verticales son paralelas.

Mediante las pendientes, podemos decir con bastante facilidad si dos rectas no

### 13-5. RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

- 16. Dibuje un sistema de coordenadas y marque el punto  $(-3, 1)$ . Luego, marque en otros tres puntos cuyas coordenadas  $x$  sean mayores que  $0$  y menores que  $10$ , y que estén en la recta de pendiente igual a  $-3$ , que pasa por  $(-3, 1)$ .

- 15. Dibuje un sistema de coordenadas. Trace la recta que pasa por el origen y por el punto  $(9300000, 6200000)$ . Número de tres puntos de esta recta cuyas coordenadas  $x$  sean menores que  $10$ .

- 14. Una recta que tiene pendiente  $-1$  contiene al punto  $(-2, 5)$ . ¿Cuál es la coordenada  $y$  de un punto de la recta cuya coordenada  $x$  es  $8$ ?

- 13. Dibuje un sistema de coordenadas y marque el punto  $(2, 0)$ . Luego, marque en otros tres puntos cuyas coordenadas  $x$  sean mayores que  $8$ , y que estén en la recta de pendiente igual a  $2$ , que pasa por  $(2, 0)$ .

- 12. Se dan los puntos  $D(-4, 6)$ ,  $E(1, 1)$  y  $F(4, -6)$ . Determinar las pendientes de  $DE$  y  $EF$ .

- 11.  $C$  es el punto medio de  $AB$ ,  $A$  es el punto  $(-3, -2)$  y  $B$  es el punto  $(2, 8)$ . ¿Cuál es la pendiente de  $BC$ ?

- 10. Un cuadrilatero tiene como vértices los puntos  $M(a, b)$ ,  $N(c, d)$ ,  $O(c + d, e)$ ,  $P(a + d, e)$ . Hallar la pendiente de cada lado.

- 9. Determinar la pendiente de cada lado de un cuadrilatero cuyos vértices son los puntos  $A(5, 6)$ ,  $B(13, 6)$ ,  $C(11, 2)$  y  $D(1, 2)$ . ¿Puede decirse que clase de cuadrilatero es?

- 8. Los vértices de un paralelogramo son los puntos  $R(1, 4)$ ,  $S(3, 2)$ ,  $T(4, 6)$  y  $W(2, 8)$ . Determinar la pendiente de cada lado.

- 7. Los vértices de un triángulo son los puntos  $A(-2, 3)$ ,  $B(5, -4)$  y  $C(1, 8)$ . Calcular la pendiente de cada lado.

- 6. Calcular la pendiente de la recta determinada por cada par de puntos dado a continuación:

- (a)  $(-5, 7)$  y  $(3, -8)$

- (b)  $(\frac{5}{2}, \frac{3}{4})$  y  $(-\frac{13}{2}, \frac{15}{4})$

- (c)  $(5\sqrt{2}, 6\sqrt{3})$  y  $(\sqrt{8}, \sqrt{12})$

- (d)  $(63, 49)$  y  $(-7, 9)$

- (e)  $(2a, 3b)$  y  $(-a, b)$

- (f)  $(0, n)$  y  $(n, 0)$

Supongamos ahora que tenemos dos rectas perpendiculares que se intersectan en  $P$ . Supongamos, también, que ninguna de ellas es vertical.

Tomamos un punto  $Q$ , en una de las rectas, encima y a la derecha de  $P$ , y completamos el triángulo rectángulo  $\triangle PRQ$ . Luego, tomamos un punto  $Q'$ , en la otra recta, encima y a la izquierda de  $P$ , de manera que  $PQ' = PQ$ . Completamos el triángulo rectángulo  $\triangle Q'R'P$ .

Debemos ahora comprobar si se justifican las marcas en la figura. Éstas nos dicen que

$$\triangle PRQ \cong \triangle Q'R'P.$$

Por tanto,

$$\frac{RQ}{PR} = \frac{R'P}{Q'R'}.$$

Pero la pendiente de  $L$  es

$$m = \frac{RQ}{PR},$$

y la pendiente de  $L'$  es

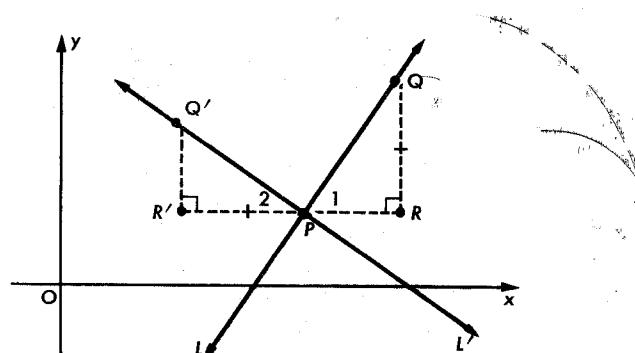
$$m' = -\frac{Q'R'}{R'P}.$$

Por consiguiente,

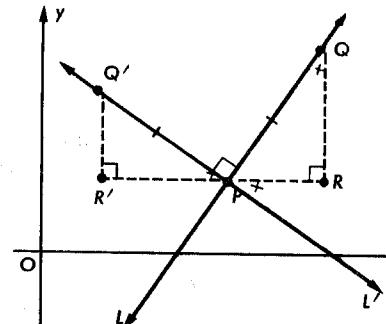
$$m' = -\frac{1}{m}.$$

Es decir, *para dos rectas perpendiculares, la pendiente de una es el recíproco negativo de la pendiente de la otra*.

La misma construcción vale a la inversa.



Sabiendo que  $m' = -1/m$ , construimos el  $\triangle PRQ$  como anteriormente. Entonces, tomamos  $R'$  tal que  $R'P = RQ$ , y completamos el triángulo rectángulo  $\triangle Q'R'P$ ,



con  $Q'$  en  $L'$ . Luego, tenemos

$$\triangle PRQ \cong \triangle Q'R'P,$$

como antes. Por tanto, los ángulos  $\angle 1$  y  $\angle 2$  son complementarios, y  $L \perp L'$ .

Resumimos esta discusión en el siguiente teorema:

### Teorema 13-3

Dos rectas no verticales son perpendiculares, si, y solamente si, la pendiente de una de ellas es el recíproco negativo de la pendiente de la otra.

Ninguno de los dos últimos teoremas se aplica al caso en que una de las dos rectas dadas es vertical. Pero este caso es sumamente simple. Si  $L$  es una recta vertical, entonces las rectas paralelas a  $L$  son sencillamente otras rectas verticales. Y las rectas perpendiculares a una recta vertical son las horizontales.

### Conjunto de problemas 13-5

1. Las rectas  $L_1, L_2, L_3$  y  $L_4$  tienen pendientes  $\frac{2}{3}, -4, -1\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ , respectivamente. ¿Qué pares de rectas son perpendiculares?
2. Considérense los puntos  $A(-1, 5), B(5, 1), C(6, -2), D(0, 2)$ . Calcúlense las pendientes de  $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}$  y  $\overleftrightarrow{AD}$ . ¿Es el  $\square ABCD$  un paralelogramo?
3. Sin marcar los puntos, determinar cuáles de los cuadriláteros cuyos vértices se dan a continuación son paralelogramos:
  - $A(-2, -2), B(4, 2), C(9, 1), D(3, -3)$ .
  - $K(-5, -2), L(-4, 2), M(4, 6), N(3, 1)$ .
  - $P(5, 6), Q(7, -3), R(-2, -12), S(-4, -3)$ .
4. Los vértices de un triángulo son  $A(16, 0), B(9, 2)$  y  $C(0, 0)$ .
  - ¿Cuáles son las pendientes de sus lados?
  - ¿Cuáles son las pendientes de sus alturas?
5. Se dan los puntos  $E(-4, 0), G(3, 5)$  y  $K(8, -2)$ . Verificar que el producto de la pendiente de  $\overleftrightarrow{EG}$  y la de  $\overleftrightarrow{GK}$  es  $-1$ .
6. Demostrar que el cuadrilátero de vértices  $A(-2, 2), B(2, -2), C(4, 2)$  y  $D(2, 4)$  es un trapecio con diagonales perpendiculares.
7. Se dan los puntos  $W(0, 3), X(6, 4), Y(12, -3)$  y  $Z(-2, -12)$ . ¿Cuáles dos rectas determinadas por esos puntos son perpendiculares? Justifíquese la respuesta.

$$= \sqrt{34}.$$

$$= \sqrt{25} +$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2}$$

$$P_1 P_2 = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (1 - 4)^2}$$

Por ejemplo, si  $P_1 = (3, 4)$  y  $P_2 = (-2, 1)$ , la fórmula nos dice que

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

La distancia entre los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  es

**Teorema 13-4.** La fórmula de la distancia

Esto es la fórmula que buscábamos. Al deducirla, hemos demostrado el teorema siguiente:

$$P_1 P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ya casi hemos terminado. Puesto que  $P_1 P_2 \geq 0$ , obtenemos

$$(P_1 P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Como el cuadrado de un número es el mismo que el de su valor absoluto, esta expresión puede escribirse en la forma

$$(P_1 P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

Por tanto,

$$N_1 N_2 = |y_2 - y_1|.$$

y

$$M_1 M_2 = |x_2 - x_1|$$

Però sabemos, por el postulado de la regla, que

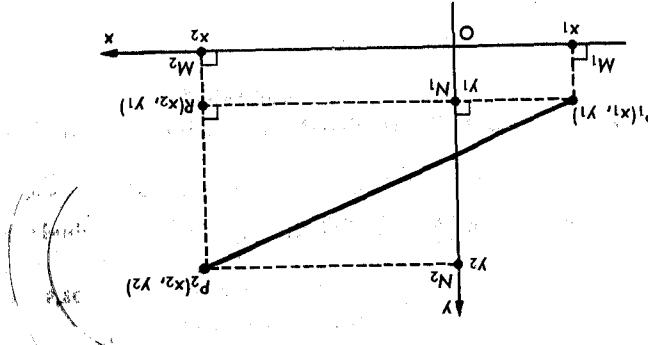
$$(P_1 P_2)^2 = (M_1 M_2)^2 + (N_1 N_2)^2.$$

en virtud del teorema de Pitágoras.  $P_1 R = M_1 M_2$ , porque los lados opuestos de un rectángulo son congruentes.  $R P_2 = N_1 N_2$ , por la misma razón. En consecuencia, en virtud del teorema de Pitágoras,  $P_1 R = M_1 M_2$ , porque los lados opuestos de un rectángulo son congruentes.  $R P_2 = N_1 N_2$ , por la misma razón. En consecuencia,

$$(P_1 P_2)^2 = (P_1 R)^2 + (R P_2)^2,$$

la vertical que pasa por  $P_2$ . Entonces,

Sean  $M_1, N_1, M_2$  y  $N_2$  los pies de las perpendiculares desde  $P_1$  y  $P_2$ , como se indica en la figura. Sea  $R$  el punto de intersección de la recta horizontal que pasa por  $P_1$ , con



Si conocemos las coordenadas de dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , estos quedan determinados.  $P_1, P_2$  en términos de las coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . Por tanto, la distancia entre ellos es la misma que la calculada en el Capítulo 2, puesto que los lados de la recta horizontal que pasa por  $P_1$  y  $P_2$  son los mismos que los lados de la recta vertical que pasa por  $P_1$  y  $P_2$ .

## 13-6. LA FÓRMULA DE LA DISTANCIA

16. Un rayo  $\overrightarrow{PQ}$  forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje  $x$ .  $\overline{QR} \perp \overrightarrow{PQ}$ . Si  $P, Q$  y  $R$  son los puntos  $(-4, 0), (5, 3\sqrt{3})$  y  $(x, 0)$ , respectivamente, determine el perímetro de  $\triangle PQR$ .

15. Calcular las pendientes de las seis rectas determinadas por los puntos  $A(-5, 4), B(3, 5), C(7, -2)$  y  $D(-1, -3)$ . Demuestre que el  $\square ABCD$  es un rombo.

14. Se dan los puntos  $P(1, 2), Q(5, -6)$  y  $R(b, b)$ . Determinar el valor de  $b$  tal que el  $\triangle PQR$  sea un triángulo recto.

13. En el problema 12, ¿para qué valores de  $k$  serán perpendiculares las dos rectas?

12. ¿Para qué valores de  $k$  serán la recta determinada por los puntos  $(k, 3)$  y  $(-2, 1)$  paralela a los puntos  $(1, -1)$  y  $(7, m + 1)$ , cuál debe ser el valor de  $m$ ?

11. Si la recta que contiene a los puntos  $(-8, m)$  y  $(2, 1)$  es paralela a la recta que contiene a los puntos  $(11, -1)$  y  $(7, m + 1)$ , cuál debe ser el valor de  $m$ ?

10. Demostre que la recta que pasa por los puntos  $(3n, 0)$  y  $(0, 7n)$  es paralela a la que pasa por los puntos  $(0, 21n)$  y  $(9n, 0)$ .

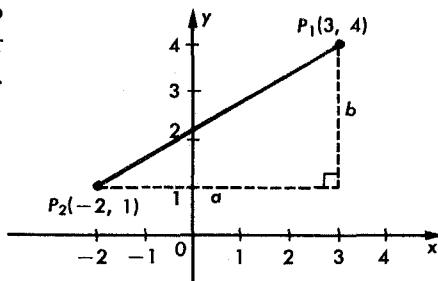
9. Demostre que el triángulo cuyos vértices son  $H(-12, 1), K(9, 3)$  y  $M(11, -18)$  es un triángulo rectángulo.

8. (a)  $A(3, 6), B(8, 2), C(5, 9), D(6, -1)$ .  
(b)  $P(0, -8), Q(3, -2), R(4, 0), S(7, 6)$ .

7. Dos segmentos que tienen la misma pendiente no son necesariamente paralelos. Cuatro puntos dados a continuación, averiguar qué segmentos son paralelos. [Advertencia: si los segmentos que tienen la misma pendiente no son necesariamente paralelos.]

Se notará que pudimos haber obtenido este resultado de la figura, sin utilizar la fórmula. Tenemos  $a = 5$  y  $b = 3$ . Por el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$



Sin embargo, se observará que para ver esto, tenemos que seguir el mismo razonamiento que utilizamos para deducir la fórmula. Lo importante al deducir una fórmula general es que seguimos el camino del razonamiento solamente *una vez* y, luego, aplicamos los resultados siempre que necesitamos hacerlo, en vez de repetir una y otra vez el mismo razonamiento.

### Conjunto de problemas 13-6

1. Utilizar la fórmula de la distancia para determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:

- (a)  $(0, 0)$  y  $(3, 4)$ . (b)  $(0, 0)$  y  $(3, -4)$ .  
 (c)  $(1, 2)$  y  $(6, 14)$ . (d)  $(8, 11)$  y  $(15, 35)$ .  
 (e)  $(3, 8)$  y  $(-5, -7)$ . (f)  $(-2, 3)$  y  $(-1, 4)$ .  
 (g)  $(5, -1)$  y  $(-3, -5)$ . (h)  $(-6, 3)$  y  $(4, -2)$ .

2. Determinar el perímetro del triángulo cuyos vértices son  $A(5, 7)$ ,  $B(1, 10)$  y  $C(-3, -8)$ .

3. El  $\triangle PQR$  tiene vértices  $P(8, 0)$ ,  $Q(-3, 2)$  y  $R(10, 2)$ .  
 (a) Determinar la longitud de cada lado. (b) Calcular  $a\triangle PQR$ .

- \* 4. El  $\triangle KLM$  tiene vértices  $K(-5, 18)$ ,  $L(10, -2)$  y  $M(-5, -10)$ .

- (a) Determinar su perímetro.  
 (b) Determinar  $a\triangle KLM$ .

5. Los vértices de un cuadrilátero son  $D(4, -3)$ ,  $E(7, 10)$ ,  $F(-8, 2)$  y  $G(-1, -5)$ . Determinar la longitud de cada diagonal.

6. Demostrar que el triángulo cuyos vértices son  $A(2, 3)$ ,  $B(-1, -1)$  y  $C(3, -4)$ , es isósceles.

7. Un triángulo tiene vértices  $G(0, 7)$ ,  $H(5, -5)$  y  $K(10, 7)$ . Determinar la longitud de la altura correspondiente al lado más pequeño.

8. Un triángulo tiene vértices  $M(-6, 0)$ ,  $P(0, 6)$  y  $Q(2, -2)$ .

- (a) Calcular el perímetro del  $\triangle MPQ$ .

- \* (b) Determinar la longitud de la altura correspondiente al lado más largo.

- \* (c) Calcular el área del triángulo.

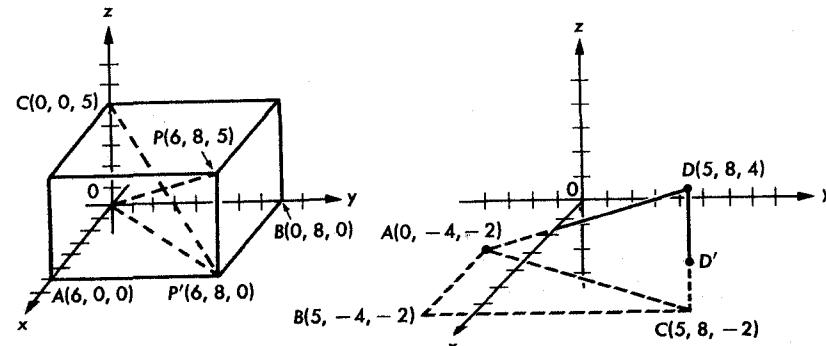
- \* 9. Determinar los valores de  $b$  tales que el triángulo cuyos vértices son  $(-6, 0)$ ,  $(0, 6)$  y  $(b, -b)$  sea equilátero.

10. Se dan los puntos  $A(-1, 6)$ ,  $B(1, 4)$  y  $C(7, -2)$ . Determinar  $AB$  y  $BC$ . Demuéstrese que  $B$  está entre  $A$  y  $C$ .

11. Demostrar que si  $D$ ,  $E$  y  $F$  son los puntos  $(-4, -6)$ ,  $(-1, -2)$  y  $(3, 1)$ , respectivamente, entonces  $E$  no está entre  $D$  y  $F$ .

- \* 12. En el siguiente cuerpo sólido rectangular de la izquierda, un vértice está en el origen y  $A$ ,  $B$  y  $C$  están en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.  $P'$  es la proyección de  $P$  sobre el plano  $xy$ .

- (a) Calcular  $OP'$ . (b) Calcular  $OP$ . (c) Calcular  $CP'$ .



13. Para la figura anterior de la derecha,

- (a) hallar  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ ,  $DC$  y  $AD$ .

- (b) demostrar que  $AD^2 = (5-0)^2 + (8+4)^2 + (4+2)^2$ .

- \* 14. Calcular la distancia desde el origen al punto  $P(a, b, c)$ . ¿Cambia la fórmula que se obtiene, si  $a$ ,  $b$  o  $c$  es un número negativo? [Sugerencia: Utilícese la figura del problema anterior como ayuda.]

- \*\* 15. Demostrar, mediante un diagrama análogo a la figura del problema 14, que la distancia  $PQ$  entre  $P(x_1, y_1, z_1)$  y  $Q(x_2, y_2, z_2)$  viene dada por la fórmula

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

16. Calcular la distancia  $PQ$ , si las coordenadas de  $P$  y  $Q$  están dadas por:

- $P(4, -1, -5); Q(7, 3, 7)$ .
- $P(0, 4, 5); Q(-6, 2, 3)$ .
- $P(3, 0, 7); Q(-1, 3, 7)$ .
- $P(-3, 4, -5); Q(6, -8, 3)$ .
- $P(1, 2, 3); Q(2, 3, 4)$ .

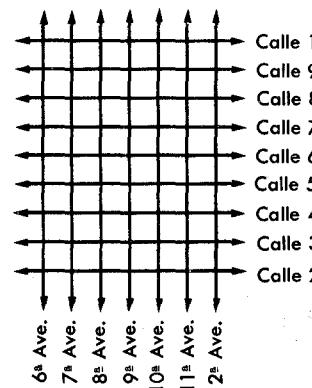
17. Demostrar que el triángulo con vértices  $A(2, 0, 8)$ ,  $B(8, -4, 6)$  y  $C(-4, -2, 4)$ , es isósceles.

18. Demostrar que si  $A(2, 4, 1)$ ,  $B(11, -8, 1)$  y  $C(2, 4, 21)$  son los vértices del  $\triangle ABC$ , entonces éste es un triángulo rectángulo.

19. La figura  $ABCD$  tiene vértices  $A(3, 2, 5)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(4, 0, 3)$  y  $D(6, 1, 7)$ .

- Demostrar que los lados opuestos son congruentes.
- ¿Es  $ABCD$  necesariamente un paralelogramo?

20. En una ciudad muy bien proyectada, las calles han sido trazadas como avenidas numeradas que van de norte a sur y como calles numeradas de este a oeste, de la manera indicada en la figura, formando cuadrados congruentes. Si se toma un taxi en la esquina de la segunda calle y la sexta avenida y se instruye al chofer que se dirija a la esquina de la calle 10 y la avenida 12 por la ruta más corta, ¿qué distancia (número de cuadras) se recorre? ¿Es ésa la distancia más corta? Explíquese.



### 13-7. LA FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO. EL PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Considérese un segmento  $\overline{P_1P_2}$ , en el eje  $x$ :



Sea  $P$  el punto medio; sean las coordenadas de los tres puntos las indicadas en la figura y supongamos que  $x_1 < x_2$ . Entonces, es bastante fácil expresar  $x$  en términos

de  $x_1$  y  $x_2$ . Deseamos que

$$P_1P = PP_2.$$

Como

$$P_1P = |x - x_1| = x - x_1$$

y

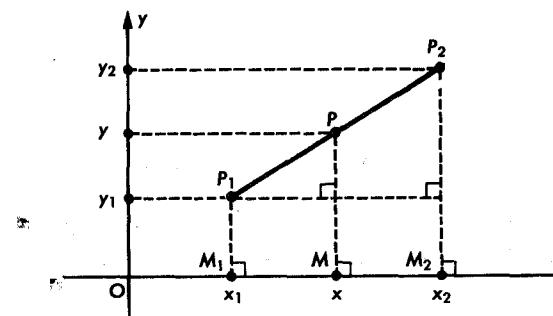
$$PP_2 = |x_2 - x| = x_2 - x,$$

nuestra primera ecuación implica que

$$x - x_1 = x_2 - x \quad \text{o} \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Esta fórmula también sirve cuando  $x_2 < x_1$ . (Demuéstrese esto. Si permutamos  $x_1$  y  $x_2$ , el problema no cambia, ni la fórmula tampoco.)

Una vez que se tiene la fórmula para el punto medio de un segmento en el eje  $x$ , es fácil pasar al caso general.



Aquí, si  $P$  es el punto medio de  $\overline{P_1P_2}$ , entonces  $M$  es el punto medio de  $\overline{M_1M_2}$ . (¿Por qué?) En consecuencia,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Del mismo modo, obtenemos

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

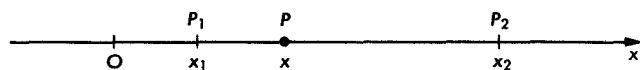
Para resumir, enunciamos el siguiente teorema:

#### Teorema 13-5. La fórmula del punto medio

Si  $P_1 = (x_1, y_1)$  y  $P_2 = (x_2, y_2)$ , entonces el punto medio de  $\overline{P_1P_2}$  es

$$P = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Consideremos ahora un problema más general. Sea  $\overline{P_1P_2}$  un segmento en el eje  $x$ , y  $r$  un número real positivo.



Queremos hallar las coordenadas del punto  $P$  que divide a  $\overline{P_1P_2}$  en la razón  $r$  a 1. Es decir, queremos

$$\frac{P_1P}{PP_2} = r \quad \text{o} \quad P_1P = rPP_2.$$

Si  $x_1 < x_2$ , como en la figura, esto significa que

$$x - x_1 = r(x_2 - x) \quad \text{o} \quad x + rx = x_1 + rx_2,$$

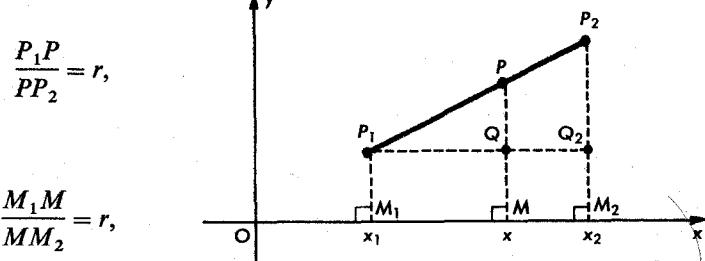
o sea,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}.$$

Observemos que para  $r = 1$ , esto debiera dar la coordenada del punto medio. (¿Es así?)

En el caso  $x_2 < x_1$ , la fórmula es exactamente la misma, pero la deducción es un poco diferente. (Utilizamos  $P_1P = x_1 - x$ ,  $PP_2 = x - x_2$ , y obtenemos la misma respuesta.)

Lo mismo que en el caso del punto medio, podemos fácilmente pasar al caso general. Si



puesto que  $\triangle P_1PQ \sim \triangle P_1P_2Q_2$ . Por tanto, se deduce que

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}.$$

Exactamente de la misma manera, obtenemos

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}.$$

Así, tenemos el teorema siguiente:

### Teorema 13-6

Si  $P$  está entre  $P_1$  y  $P_2$  y

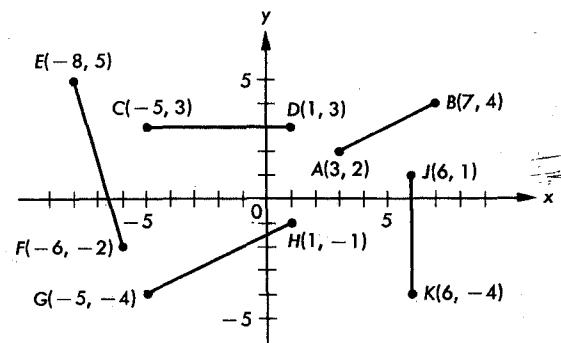
$$\frac{P_1P}{PP_2} = r,$$

entonces

$$P = \left( \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \right).$$

### Conjunto de problemas 13-7

1. Determinar las coordenadas del punto medio de cada segmento en la figura:

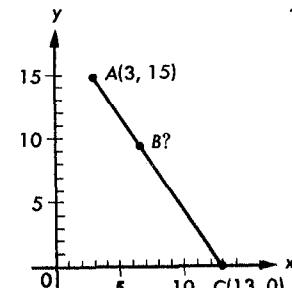


2. Utilizar la fórmula del punto medio para calcular las coordenadas del punto medio del segmento determinado por cada uno de los siguientes pares de puntos:

- |                             |                            |                                   |                                |
|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| (a) (6, 0)                  | y (10, 2)                  | (b) (5, 7)                        | y (11, 17)                     |
| (c) (12, 3)                 | y (3, 2)                   | (d) (-5, 6)                       | y (6, -5)                      |
| (e) $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ | y $(\sqrt{18}, \sqrt{75})$ | (f) $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{3})$ | y $(\frac{3}{4}, \frac{2}{3})$ |
| (g) $(a, 0)$                | y $(0, b)$                 | (h) $(a, b)$                      | y $(c, d)$                     |

3. Si  $A(3, 15)$  y  $C(13, 0)$  son los extremos de un segmento y  $B$  es un punto de  $\overline{AC}$ , determinense las coordenadas de  $B$ , sabiendo que la razón  $AB/BC$  es igual a:

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| (a) 4             | (b) $\frac{2}{3}$ |
| (c) $\frac{1}{4}$ | (d) $\frac{3}{2}$ |



4. Se dan los puntos  $P(5, 2)$  y  $R(20, 14)$  y  $Q$  está entre  $P$  y  $R$ . Determinar las coordenadas de  $Q$ , si  $PQ/QR$  es igual a:  
 (a)  $\frac{1}{2}$       (b) 2      (c)  $\frac{1}{3}$       (d) 4

5. ¿Cuáles son las coordenadas de los dos puntos que trisecan al segmento cuyos extremos son  $(2, -3)$  y  $(8, 9)$ ?

6. Si los vértices de un triángulo son  $A(5, -1)$ ,  $B(1, 5)$  y  $C(-3, 1)$ , ¿cuáles son las longitudes de sus medianas?

7. Los vértices de un cuadrilátero son  $A(0, 0)$ ,  $B(5, 1)$ ,  $C(7, 4)$  y  $D(2, 3)$ . Demostrar que las diagonales tienen el mismo punto medio. ¿Es el cuadrilátero un paralelogramo? ¿Por qué?

8. Se dan  $P(-3, -4)$ ,  $M(b, -1)$  y  $Q(7, b)$ . Determinar  $b$  de manera que  $M$  sea el punto medio de  $\overline{PQ}$ .

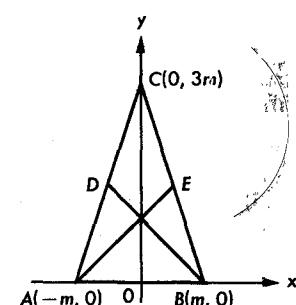
9. Se dan  $G(-5, 8)$ ,  $K(2, a)$  y  $H(b, 1)$ . Determinar  $a$  y  $b$  de manera que  $K$  sea el punto medio de  $\overline{GH}$ .

10. Un segmento tiene el punto medio  $M(3, -5)$  y un extremo es  $A(2, -4)$ . ¿Cuáles son las coordenadas del otro extremo  $B$ ?

11. Se da el cuadrilátero cuyos vértices son  $A(3, -2)$ ,  $B(-3, 4)$ ,  $C(1, 8)$  y  $D(7, 4)$ .  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son los puntos medios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$ , respectivamente.

- (a) Calcular las coordenadas de  $W$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .  
 (b) Calcular el perímetro del  $\square WXYZ$ .  
 (c) Calcular las pendientes de  $\overline{WX}$  y  $\overline{YZ}$ .

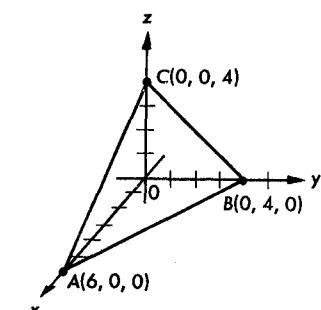
12. Demostrar que si  $P(2, 1)$ ,  $Q(7, 4)$ ,  $R(4, 9)$  y  $S(-1, 6)$  son los vértices de un  $\square PQRS$ , entonces sus diagonales tienen el mismo punto medio y son perpendiculares entre sí.



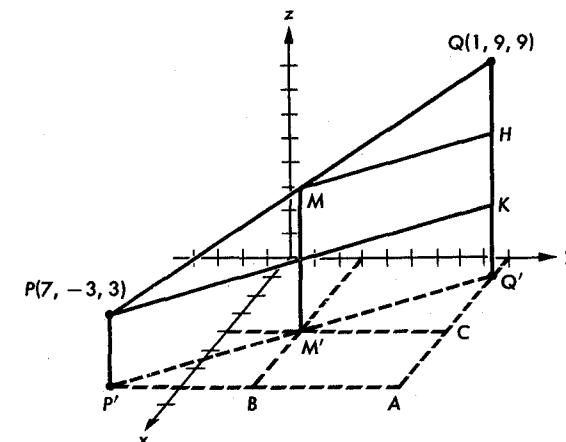
- \* 13. Mediante coordenadas, demostrar que dos de las medianas de un triángulo con vértices en  $(m, 0)$ ,  $(-m, 0)$  y  $(0, 3m)$  son perpendiculares entre sí.

- \* 14.  $A(-3, 2)$  y  $B(5, 12)$  son dos vértices del  $\triangle ABC$ . Una recta que pasa por  $G$ , punto medio de  $\overline{AB}$ , y es paralela a  $\overline{AC}$ , interseca a  $\overline{BC}$  en  $H(10, 2)$ . Determinar las coordenadas del tercer vértice  $C$ .

- \* 15. En la figura dada, determinar las coordenadas del punto medio de cada uno de los segmentos  $\overline{AO}$ ,  $\overline{BO}$ ,  $\overline{CO}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ .



- \* 16. En la figura,  $\overline{P'Q'}$  es la proyección de  $\overline{PQ}$  sobre el plano  $xy$ ,  $\overline{PK} \parallel \overline{P'Q'}$ ,  $\overline{P'A} \parallel$  eje  $y$ ,  $\overline{AQ'} \parallel$  eje  $x$ ,  $M$  es el punto medio de  $\overline{PQ}$ ,  $M'$  es la proyección de  $M$ ,  $H$  es el punto medio de  $\overline{QK}$ , y  $B$  y  $C$  son los puntos medios de  $\overline{AP'}$  y  $\overline{AQ'}$ , respectivamente.



- (a) ¿Por qué es  $\overline{PP'} \parallel \overline{MM'} \parallel \overline{QQ'}$ ?  
 (b) ¿Por qué es  $M'$  el punto medio de  $\overline{P'Q'}$ ?  
 (c) Calcular las coordenadas de  $P'$ ,  $Q'$ ,  $A$  y  $K$ .  
 (d) Calcular las coordenadas de  $B$ ,  $C$ ,  $H$  y  $M'$ .  
 (e) Calcular las coordenadas de  $M$ , el punto medio de  $\overline{PQ}$ .

- \* 17. Enunciar una fórmula general para las coordenadas del punto medio  $M$  del segmento determinado por  $P(x_1, y_1, z_1)$  y  $Q(x_2, y_2, z_2)$ , basada en observaciones sobre la resolución del problema 16.

- \* 18. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento determinado por los siguientes pares de puntos:

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| (a) $(3, 5, 0)$                          | y $(1, 1, 8)$                 |
| (b) $(8, 5, 3)$                          | y $(0, 0, -5)$                |
| (c) $(-6, 2, 4)$                         | y $(6, -2, -4)$               |
| (d) $(3\sqrt{2}, 2\sqrt{15}, 5\sqrt{3})$ | y $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{27})$ |

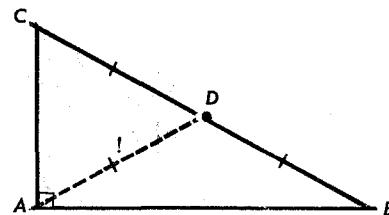
19. En el problema 16, calcular las coordenadas de los dos puntos que triseccan a  $\overline{PQ}$ .
20. En el problema 16, calcular los perímetros de los triángulos  $\triangle BMM'$  y  $\triangle AQQ'$ . ¿Es  $\triangle BMM' \sim \triangle AQQ'$ ?

### 13-8. EL EMPLEO DE SISTEMAS DE COORDENADAS EN LA DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS GEOMÉTRICOS

Veremos ahora cómo los sistemas de coordenadas pueden ser utilizados en la demostración de teoremas geométricos. El propósito de esta sección es ilustrar un cierto método de trabajo en la geometría. El método será fácil de entender, si los primeros ejemplos que tratamos son sencillos. Por esta razón, comenzaremos con algunos teoremas que ya conocemos.

#### Teorema A

El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los vértices.



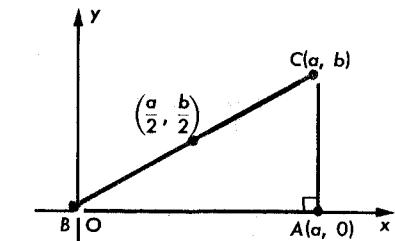
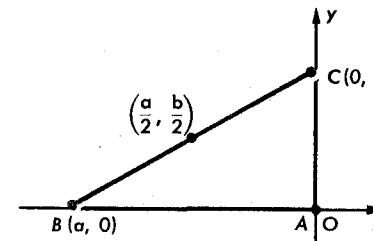
El primer paso al aplicar el método de las coordenadas es la elección de un sistema de coordenadas de tal modo que el álgebra que empleemos sea lo más simple posible. Una buena elección para el problema que tratamos es la indicada en la siguiente figura. Esto es, colocamos el origen en  $A$ , y  $B$  y  $C$  en las porciones positivas de los dos ejes. Así,  $B = (a, 0)$ , y  $C = (0, b)$ , como se indica en la figura. Por tanto,  $D = (a/2, b/2)$ , en virtud de la fórmula del punto medio. Ahora,

$$AD = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2},$$

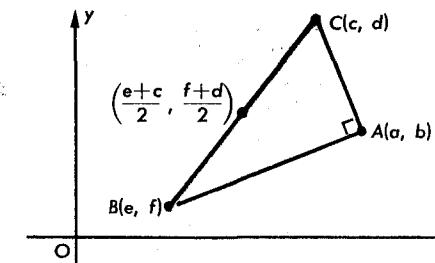
$$BD = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2}.$$

En consecuencia,  $AD = BD$ . Esto demuestra el teorema, pues  $BD = CD$ , en virtud de la definición de punto medio.

Nuestra elección de los ejes no es la única adecuada. La siguiente figura sugiere otra disposición que es igualmente sencilla:



Sin embargo, si tomamos al azar ejes cualesquiera, podríamos convertir un problema fácil en otro sumamente complicado.



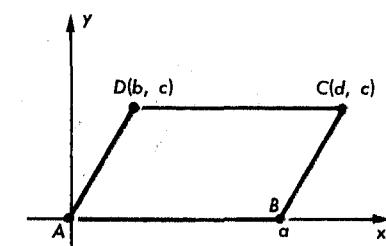
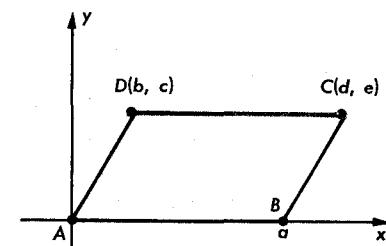
Para iniciar una demostración, de acuerdo con esta figura, tenemos que hallar el modo de decir, *algebraicamente*, que el  $\triangle ABC$  tiene un ángulo recto en  $A$ . Esto puede hacerse, pero no parece muy fácil.

Al utilizar sistemas de coordenadas para demostrar propiedades relacionadas con paralelogramos, casi siempre colocamos los ejes como se indica a la derecha. Dado el paralelogramo  $\square ABCD$ , tomamos el origen en  $A$ ,  $B$  en la porción positiva del eje  $x$  y  $C$  y  $D$  en el semiplano superior. Ahora, la pendiente de  $\overline{AB}$  es 0, y  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ . Por consiguiente, la pendiente de  $\overline{CD}$  es 0. Esto da

$$\frac{e - c}{d - b} = 0.$$

Luego, podemos reemplazar  $e$  por  $c$  en la figura. (¿Por qué?) También, podemos afirmar que

$$d = a + b.$$



Si  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$  no son verticales, entonces tienen pendientes, y éstas son iguales. Así, pues,

$$\frac{c-0}{b-0} = \frac{c-0}{d-a},$$

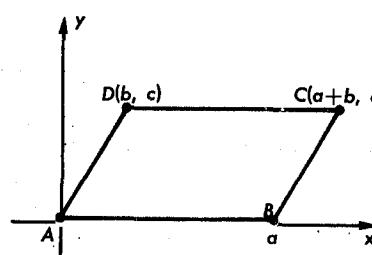
$b = d - a$ , y  $d = a + b$ . Si  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$  son verticales, entonces

$$b = 0, \quad d = a, \quad y \quad d = a + 0 = a + b,$$

como anteriormente.

Por consiguiente, podemos marcar nuestra figura como se indica a la derecha.

Una vez conocido lo relacionado con este esquema, muchos teoremas acerca de paralelogramos resultan muy fáciles.



### Teorema B

Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, entonces el paralelogramo es un rectángulo.

**Democión:** En la notación de la figura anterior, se nos da que  $AC = BD$ . Por la fórmula de la distancia, esto quiere decir que

$$\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2},$$

$$(a+b)^2 + c^2 = (a-b)^2 + c^2,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + c^2.$$

En consecuencia,

$$4ab = 0.$$

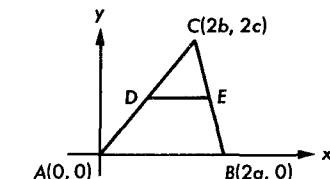
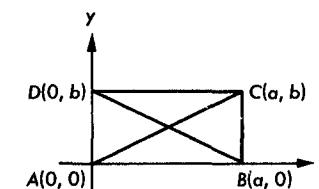
Como  $a > 0$ , se deduce que  $b = 0$ , y esto significa que  $D$  está en el eje  $y$ . Luego, el  $\angle DAB$  es un ángulo recto, y el  $\square ABCD$  es un rectángulo.

El siguiente conjunto de problemas está preparado para ofrecer práctica en el empleo de los sistemas de coordenadas. En la resolución de los problemas, por tanto, debe tratarse de lograr que el álgebra haga la mayor parte del trabajo, tomando como modelos los ejemplos ilustrativos de esta sección.

### Conjunto de problemas 13-8

Demostrar los siguientes teoremas, utilizando los métodos de la geometría cartesiana:

1. Las diagonales del rectángulo de la izquierda, a continuación, tienen longitudes iguales.

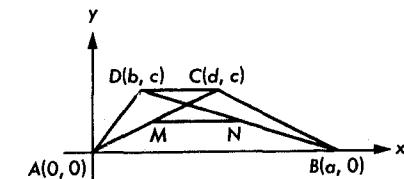


2. El segmento que une los puntos medios de dos lados del triángulo anterior de la derecha, es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado. [Sugerencia: Como tenemos que determinar las coordenadas de los puntos medios y la mitad de la longitud de la base, es conveniente, pero no necesario, procurar que las coordenadas de  $A$ ,  $B$  y  $C$  sean como en la figura].

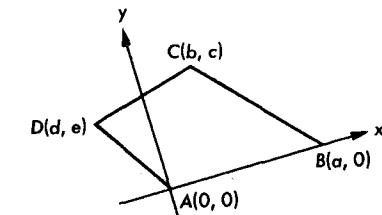
3. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. [Sugerencia: Tómense los puntos  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a+b, c)$  y  $(b, c)$  como vértices. Verifíquese que las pendientes son recíprocas y opuestas entre sí.]

4. La mediana de un trapecio es paralela a las bases, y su longitud es la semisuma de las longitudes de las bases.

5. El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralelo a las bases, y su longitud es la semidiferencia de las longitudes de las bases.



6. Los segmentos determinados, en orden, por los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero forman un paralelogramo. [Nota: Podemos elegir los ejes de manera que un vértice sea  $(0, 0)$  y un lado de la figura esté en el eje  $x$ .]



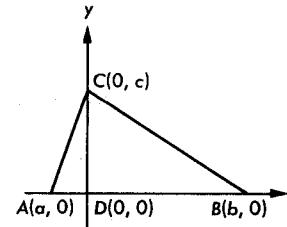
7. Los segmentos determinados, en orden, por los puntos medios de los lados consecutivos de un trapecio isósceles forman un rombo.

8. En el  $\triangle ABC$ , si  $\overline{CM}$  es la mediana correspondiente a  $\overline{AB}$ , entonces

$$AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2CM^2.$$

[Sugerencia: Tómese el punto medio de  $\overline{AB}$  en  $(0, 0)$ .]

9. En un triángulo cualquiera, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de uno de esos lados y la proyección del otro sobre él. Demuéstrese que  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot DB$ . ¿En qué parte de los cálculos se necesita la hipótesis de que el  $\angle B$  es agudo?



10. La suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

- \* 11. En un cuadrilátero cualquiera, la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más cuatro veces el cuadrado de la longitud del segmento determinado por los puntos medios de las diagonales.

12. Demostrar que las cuatro diagonales de un cuerpo sólido rectangular son congruentes y se intersecan en el punto medio común.

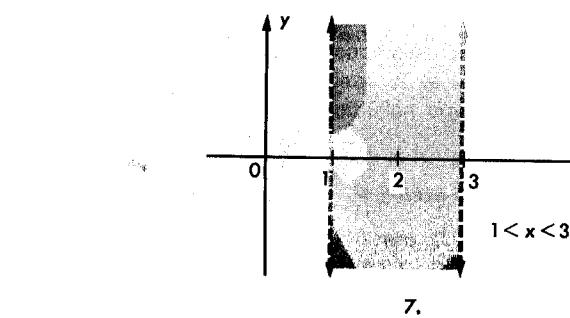
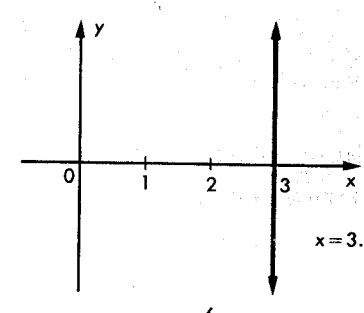
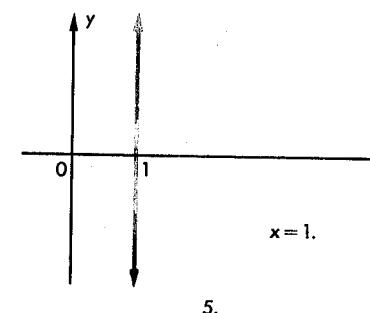
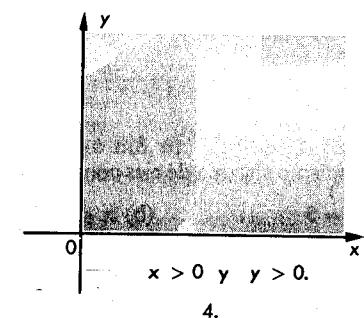
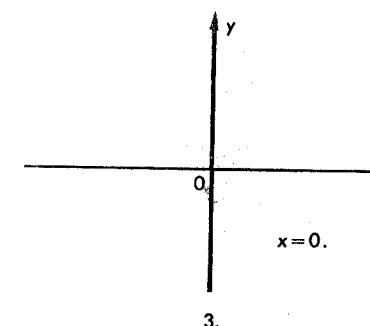
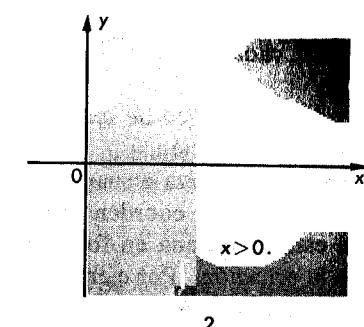
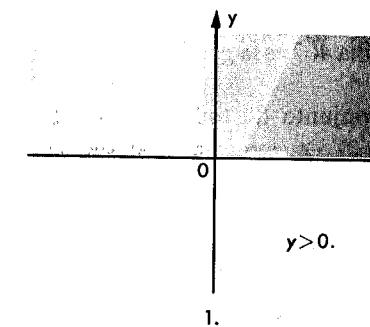
### 13-9. LA GRÁFICA DE UNA CONDICIÓN

Por una *gráfica* entendemos simplemente una figura en el plano, es decir, un conjunto de puntos. Así, ángulos, triángulos y semiplanos son gráficas y, también, lo son segmentos, rayos y rectas.

El término *gráfica* se utiliza generalmente cuando representamos una figura definida mediante una condición que se satisface por todos los puntos de dicha figura y no por otros puntos. He aquí algunos ejemplos:

CONDICIÓN	GRÁFICA
1. $y > 0$	El semiplano sobre el eje $x$
2. $x > 0$	El semiplano a la derecha del eje $y$
3. $x = 0$	El eje $y$
4. $x > 0$ y $y > 0$	El primer cuadrante
5. $x = 1$	La recta vertical que pasa por $(1, 0)$
6. $x = 3$	La recta vertical que pasa por $(3, 0)$
7. $1 < x < 3$	La banda infinita entre las rectas que satisfacen a las condiciones 5 y 6

Las siete gráficas aparecen en la página 407.



En cada uno de estos casos, decimos que la figura es la *gráfica de la condición* que la define. Así, cada una de las siete figuras en la página 407 es la *gráfica de la condición* indicada.

*Repitiendo:* La *gráfica de una condición* es el conjunto de todos los puntos que satisfacen a esa condición.

Este término se utiliza a menudo cuando la condición está enunciada algebraicamente en función de coordenadas, como en los ejemplos anteriores. Cuando la condición está enunciada en forma de ecuación, nos referimos a la figura como la *gráfica de la ecuación*. Por ejemplo, la recta vertical que pasa por  $(1, 0)$  es la *gráfica de la ecuación*  $x = 1$ . Análogamente, la primera de las siete figuras se llama la *gráfica de la inecuación*  $y > 0$ .

### Conjunto de problemas 13-9

1. En el mismo sistema de ejes coordenados, dibujar las gráficas de las siguientes condiciones:

(a)  $x = 5$       (b)  $x < -2$       (c)  $y \geq 4$       (d)  $y = 0$

2. Dibujar en un sistema de ejes coordenados el conjunto de puntos definido mediante cada una de las siguientes condiciones:

(a)  $|x| = 2$       (b)  $|y| < 1$       (c)  $|x| \geq 3$

3. Dibujar la reunión de las gráficas de  $x = 3$  y  $y = 2$ . ¿Cuál es su intersección?

4. Se dan las condiciones: (i)  $x$  es un número positivo y (ii)  $y$  es un número positivo.

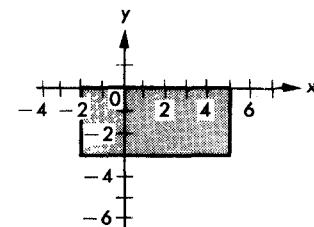
(a) Dibujar la reunión de las gráficas correspondientes.

(b) Dibujar la intersección de las gráficas.

5. Dibujar la intersección de las gráficas de las cuatro condiciones que siguen:

$$x \geq 0, \quad x \leq 6, \quad y \geq 0, \quad y \leq 4.$$

Describábase la intersección verbalmente.



6. Enunciar las condiciones que definen la región indicada a la derecha.

7. Dibujar la gráfica y determinar el área de la intersección de los conjuntos de puntos que satisfacen a las condiciones

$$-1 \leq x \leq 3 \quad y \quad -2 \leq y \leq 5.$$

8. La distancia del punto  $A(1, 0)$  a  $P(x, y)$  es igual a la distancia de  $P$  a  $B(7, 0)$ . Escribábase una ecuación que exprese esta condición. ¿Cuántos puntos  $P$  hay? Dibújese el conjunto de todos esos puntos  $P$ .

9. Escribir una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(x, y)$  equidistantes de los puntos  $A(0, 6)$  y  $B(6, 0)$ . Dibújese la gráfica.

\* 10. Trazar la gráfica de  $y = |x|$ .

\* 11. Trazar la gráfica de  $y = -|x|$ .

\* 12. Un punto  $P(x, y)$  está entre el punto  $A(1, 3)$  y el punto  $B(8, 6)$ . Utilícese la fórmula de la distancia y la definición de "estar entre" para escribir una ecuación que exprese esta condición en  $P$ .

\*+ 13. Si  $P = (x, y)$ ,  $A = (a, c)$  y  $B = (b, d)$ , ¿qué condición para los puntos  $P$ ,  $A$  y  $B$  está expresada por la siguiente ecuación?

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2}$$

\*+ 14. En el mismo sistema de ejes coordenados, dibujar el conjunto de todos los puntos  $P(x, y)$  que satisfacen a las condiciones que siguen:

(a)  $\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = 5$ .

(b)  $\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$ .

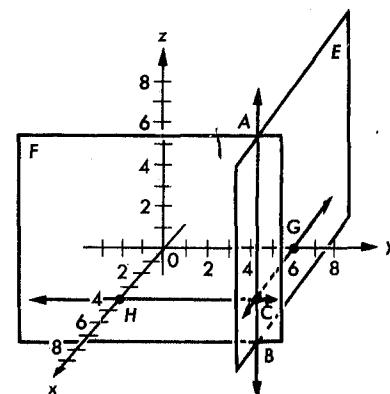
\*+ 15. En la figura, el plano  $E$  es paralelo al plano  $xz$  y el plano  $F$  es paralelo al plano  $yz$ .  $E$  y  $F$  se intersecan en  $\overleftrightarrow{AB}$ .  $\overleftrightarrow{CG}$  está en el plano  $E$ ,  $\overleftrightarrow{CH}$  está en el plano  $F$ , y ambas rectas están en el plano  $xy$ .

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de  $C$ ?

(b) ¿Qué ecuación da la condición en virtud de la cual el plano  $E$  es su gráfica?; ¿cuál da la condición cuya gráfica es el plano  $F$ ?

(c) ¿De qué condición es  $\overleftrightarrow{AB}$  la gráfica?

(d) ¿De qué condición es el punto  $C$  la gráfica?



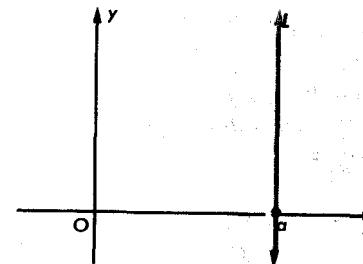
16. ¿Cuáles son las gráficas de cada una de las siguientes condiciones en un sistema de coordenadas de tres dimensiones?

- (a)  $z = 0$
- (b)  $x = 0$
- (c)  $y = 0$
- (d)  $y = 3$
- (e)  $z = 5$
- (f)  $|y| = 2$
- (g)  $x = 0$  y  $y = 0$
- (h)  $x = 3$  y  $z = 0$
- (i)  $|y| = 2$  y  $z = 0$
- (j)  $x = 3$  y  $y = 2$

### 13-10. LA REPRESENTACIÓN DE UNA RECTA MEDIANTE UNA ECUACIÓN

Es fácil describir una recta vertical mediante una ecuación.

Si la recta interseca al eje  $x$  en  $(a, 0)$ , entonces dicha recta es la gráfica de la ecuación  $x = a$ .



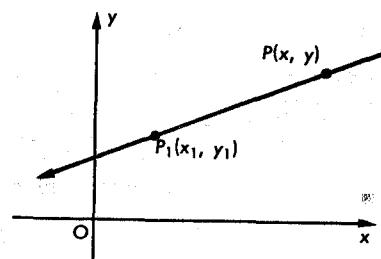
Para rectas no verticales, necesitamos utilizar el concepto de pendiente. Supongamos que la recta  $L$  pasa por el punto  $P_1 = (x_1, y_1)$  y tiene pendiente  $m$ . Si  $P = (x, y)$  es cualquier otro punto de  $L$ , entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

puesto que todos los segmentos de  $L$  tienen pendiente  $m$ . Desde luego, esta ecuación no se satisface cuando  $x = x_1$  y  $y = y_1$ , pues, en ese caso, la fracción se convierte en la expresión  $0/0$ , que es indeterminada. Pero esto puede arreglarse fácilmente, multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por  $x - x_1$ . Así, obtenemos

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Esta operación *añade un punto a la gráfica*; la nueva ecuación se satisface por todo punto de  $L$  distinto de  $P_1$  y, también, por el mismo  $P_1$ , porque cuando  $x = x_1$  y  $y = y_1$ , obtenemos  $0 = m \cdot 0$ , lo cual constituye un enunciado cierto.



Enunciamos este resultado como un teorema.

### Teorema 13-7

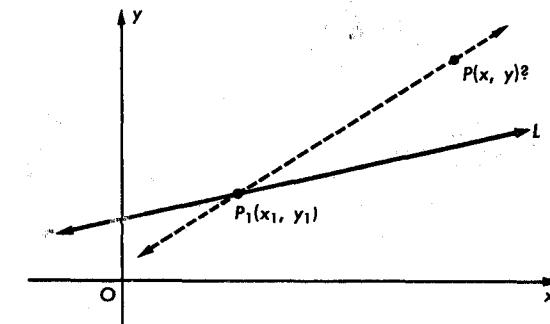
Sea  $L$  una recta con pendiente  $m$ , que pasa por el punto  $(x_1, y_1)$ . Entonces, todo punto  $(x, y)$  de  $L$  satisface a la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Se observará que este teorema *no* dice que  $L$  es la gráfica de la ecuación. En efecto, todavía no hemos demostrado esto por completo, sino sólo a medias. Cuando decimos que  $L$  es la gráfica de la ecuación, esto significa dos cosas:

- (1) todo punto de  $L$  satisface a la ecuación, y
- (2) todo punto que satisface a la ecuación está en  $L$ .

Hasta el presente, hemos demostrado el enunciado (1). Demostraremos ahora el enunciado (2).



Supongamos que  $P(x, y)$  es un punto para el cual

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Si  $x = x_1$ , entonces  $y = y_1$ , y  $P$  está en  $L$ . Si  $x \neq x_1$ , entonces  $\overrightarrow{P_1P}$  no es vertical y su pendiente es

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Por tanto,  $\overrightarrow{P_1P}$  y  $L$  tienen la misma pendiente. Luego, estas rectas o son paralelas, o son la misma recta. Ahora bien, no pueden ser paralelas, porque  $(x_1, y_1)$  está en ambas. En consecuencia,  $\overrightarrow{P_1P}$  es la misma recta  $L$ , y  $P$  está en  $L$ .

Esto nos da un teorema más sencillo y, también, nos dice más que el teorema anterior.

### Teorema 13-8

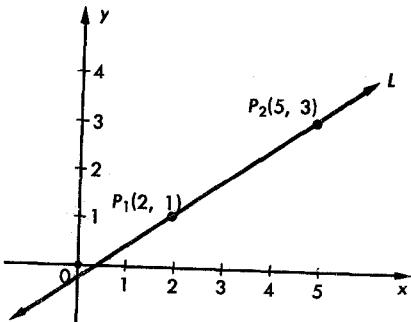
La gráfica de la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

es la recta que pasa por el punto  $(x_1, y_1)$  con pendiente  $m$ .

La ecuación dada en este teorema se llama la forma de *punto y pendiente* de la ecuación de una recta.

Si conocemos las coordenadas de dos puntos de una recta, es fácil determinar su ecuación.



Supongamos, por ejemplo, que la recta pasa por los puntos

$$P_1(2, 1) \quad y \quad P_2(5, 3).$$

Entonces, su pendiente es

$$m = \frac{3 - 1}{5 - 2} = \frac{2}{3}.$$

Utilizando  $P_1(2, 1)$  y  $m = \frac{2}{3}$ , la forma de punto y pendiente da

$$(1) \quad y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2).$$

Podemos simplificar esto para obtener una ecuación equivalente:

$$(2) \quad \begin{aligned} 3y - 3 &= 2x - 4, \\ 2x - 3y &= 1. \end{aligned}$$

Se observará, sin embargo, que aun cuando la ecuación (2) es más sencilla que la ecuación (1), no es tan fácil de interpretar. En virtud del teorema 13-8, podemos decir inmediatamente que la gráfica del enunciado (1) es la recta que pasa por  $(2, 1)$  con pendiente  $\frac{2}{3}$ . Esto no es tan evidente en la forma simplificada (2).

Dada una ecuación en la forma de punto y pendiente, es fácil dibujar su gráfica. Tomemos, por ejemplo,

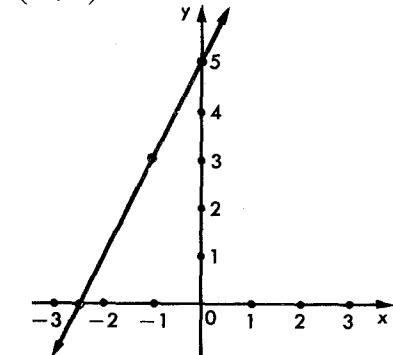
$$y - 3 = 2(x + 1).$$

Puede verse inmediatamente que la gráfica contiene al punto  $(-1, 3)$ . Para trazar la recta, necesitamos conocer otro punto más en ella. (¿Por qué?) Haciendo  $x = 0$ , obtenemos

$$y - 3 = 2(0 + 1),$$

o sea,

$$y = 5.$$



Por consiguiente,  $(0, 5)$  está en la gráfica. Ahora, podemos utilizar una regla, porque sabemos desde el principio que la gráfica tiene que ser una recta. En la práctica, sin embargo, es muy buena idea verificar nuestro trabajo, calculando las coordenadas de un tercer punto. Por ejemplo, para  $y = 0$ , obtenemos

$$0 - 3 = 2(x + 1),$$

lo cual nos da

$$x = -\frac{5}{2}.$$

Por tanto,  $(-\frac{5}{2}, 0)$  está en la gráfica, justamente como sugiere la figura.

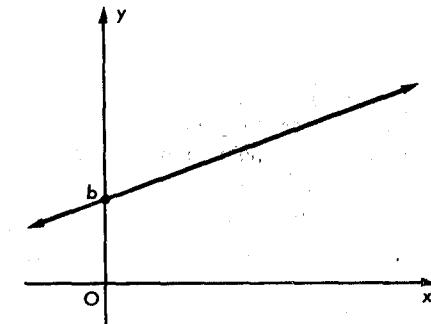
El siguiente teorema se deduce fácilmente del teorema 13-8:

### Teorema 13-9

La gráfica de la ecuación

$$y = mx + b$$

es la recta que pasa por el punto  $(0, b)$  con pendiente  $m$ .



La razón de ello es que dicha ecuación puede escribirse en la forma

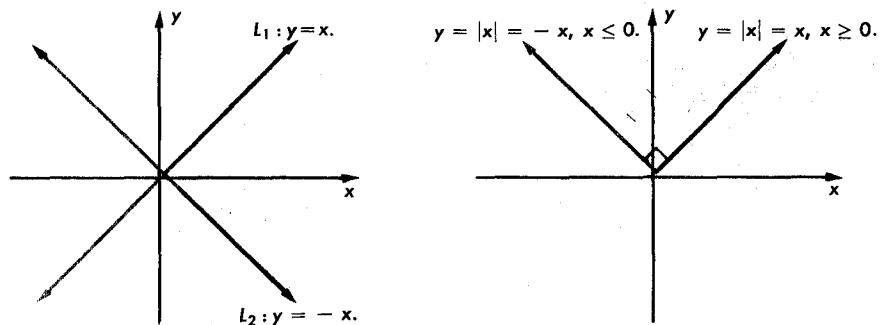
$$y - b = m(x - 0).$$

La ecuación  $y = mx + b$  se llama la forma de *ordenada en el origen y pendiente*. En muchos cursos, resulta ser la forma más conveniente.

Podemos ahora dibujar la gráfica de la ecuación

$$y = |x|$$

del modo siguiente: Primero, dibujamos a continuación, a la izquierda, las gráficas de las ecuaciones  $y = x$  y  $y = -x$ :



Recordamos que  $|x|$  está definido mediante las siguientes condiciones:

- (1) Para  $x \geq 0$ ,  $|x| = x$ .
- (2) Para  $x \leq 0$ ,  $|x| = -x$ .

Esto significa que a la derecha del eje  $y$ , nuestra gráfica está en la recta  $L_1$ , pero no en  $L_2$ . A la izquierda del eje  $y$ , nuestra gráfica está en la recta  $L_2$ , pero no en  $L_1$ . La gráfica, por consiguiente, se parece a la que está arriba, a la derecha.

Es fácil ver que los dos rayos son perpendiculares. Luego, la gráfica de  $y = |x|$  es un ángulo recto.

### Conjunto de problemas 13-10

1. Las ecuaciones siguientes están escritas en la forma de punto y pendiente; para cada ecuación, determinar la pendiente y las coordenadas de dos puntos de su gráfica y dibujar ésta:

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| (a) $y - 3 = 2(x - 4)$ .            | (b) $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 6)$ . |
| (c) $y + 6 = -\frac{1}{4}(x - 8)$ . | (d) $y - 5 = 3x$ .                 |
| (e) $y = -2(x + 3)$ .               |                                    |

2. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P$  y tiene pendiente  $m$  en cada uno de los siguientes casos:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $P = (4, 1)$ y $m = 3$ .           | (b) $P = (\frac{1}{2}, -4)$ y $m = -2$ . |
| (c) $P = (8, 2)$ y $m = \frac{3}{4}$ . | (d) $P = (-4, 0)$ y $m = \frac{5}{4}$ .  |
| (e) $P = (-6, 5)$ y $m = 0$ .          |  |

3. Para cada par de puntos, primero hallar la pendiente de la recta que los une y, luego, escribir la ecuación de la recta:

- (a)  $(5, 2)$  y  $(2, 8)$ .
- (b)  $(2, 4)$  y  $(4, 5)$ .
- (c)  $(0, 0)$  y  $(1, 5)$ .
- (d)  $(2, 7)$  y  $(-8, 5)$ .
- (e)  $(-6, 0)$  y  $(0, 4)$ .
- (f)  $(9, -15)$  y  $(12, -18)$ .
- (g)  $(-4, -13)$  y  $(19, 33)$ .
- (h)  $(\sqrt{2}, \sqrt{8})$  y  $(-\sqrt{8}, -\sqrt{2})$ .

4. Juan y Alberto estaban comparando sus soluciones a un problema de la tarea asignada. El problema era:

“Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(2, -5)$  y  $(8, 7)$ ”.

Juan tenía la ecuación  $y + 5 = 2(x - 2)$  y Alberto tenía  $y - 7 = 2(x - 8)$ . ¿Cuál de las respuestas es correcta? Explíquese.

5. Para cada una de las siguientes ecuaciones escritas en la forma de ordenada en el origen y pendiente, determinar la pendiente, la ordenada en el origen, y dibujar la gráfica:

- |                            |                   |
|----------------------------|-------------------|
| (a) $y = 2x + 6$           | (b) $y = -2x + 6$ |
| (c) $y = \frac{2}{3}x$     | (d) $y = 2x - 6$  |
| (e) $y = \frac{2}{3}x - 6$ |                   |

6. Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a  $-5$  y que contiene al punto  $(0, 4)$ .

7. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(7, -6)$  y es paralela a la recta de ecuación

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

8. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(-2, 0)$  y es perpendicular a la recta de ecuación

$$y = -\frac{2}{3}x + 6.$$

9. En un sistema de ejes coordenados, dibujar las gráficas de las ecuaciones

$$y = 3, \quad y = x + 3, \quad y - 3 = -\frac{5}{3}(x - 8).$$

- (a) ¿Cuáles son las coordenadas de los tres puntos en que las rectas se intersecan?
- (b) Calcular el área de la región triangular limitada por las tres rectas.

- \* 10. En un sistema de ejes coordenados, dibujar las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4, \quad y = \frac{3}{4}x + 4, \quad y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 10)$$

- (a) ¿Cuáles son las coordenadas de los tres puntos en que las rectas se intersecan?  
 (b) Calcular el área de la región triangular limitada por las tres rectas.

- \* 11. Dibujar la gráfica de  $x = |y|$ .

- \* 12. Dibujar la gráfica de  $|x| + |y| = 4$ .

13. Utilizando la forma de *punto y pendiente* de la ecuación de una recta, demostrar que la ecuación de la recta que pasa por  $(a, 0)$  y  $(0, b)$  puede escribirse así:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a, b \neq 0).$$

Explicar por qué esta forma se dice que es la forma de *intersecciones con los ejes*.

- \* 14. Utilizar el problema 13 para escribir la ecuación de la recta cuya intersección con el eje  $x$  es  $(5, 0)$  y cuya intersección con el eje  $y$  es  $(0, 3)$ . Cotejar la ecuación, utilizando la forma de ordenada en el origen y pendiente o la forma de punto y pendiente.

- \* 15. En un sistema de coordenadas de tres dimensiones,

$$3x + 6y + 2z = 12$$

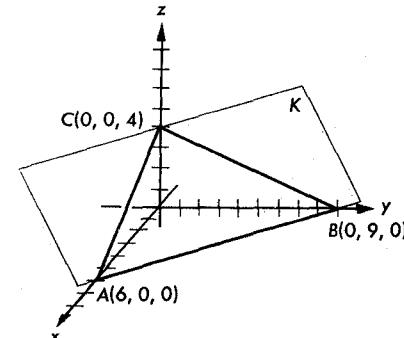
es la ecuación de un plano. ¿Cuáles son las coordenadas de las intersecciones con los ejes?

- \* 16. En la figura de la derecha, el plano  $K$  interseca a los ejes en los puntos indicados. La ecuación del plano  $K$  es

$$6x + 4y + 9z = 36.$$

- (a) Determinar la ecuación de la intersección del plano  $K$  con cada plano coordenado.  
 (b) Demostrar que la ecuación de  $K$  puede ponerse en la forma

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{9} + \frac{z}{4} = 1.$$



17. Escribir la ecuación del plano determinado por los siguientes puntos:

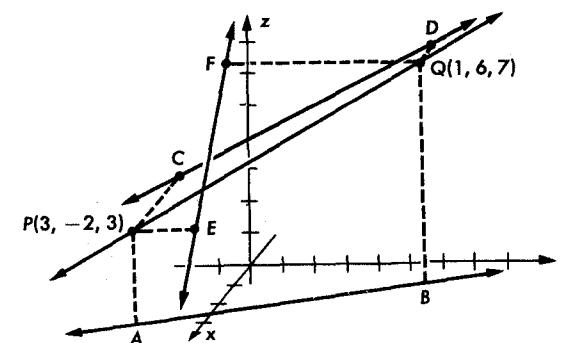
- (a)  $(5, 0, 0), (0, 3, 0)$  y  $(0, 0, 4)$   
 (b)  $(12, 0, 0), (0, 4, 0)$  y  $(0, 0, -3)$   
 (c)  $(5, 0, 0), (0, -3, 0)$  y  $(0, 0, 10)$

[Sugerencia: Véanse los problemas 13 y 16 anteriores. No es necesario demostrar que las ecuaciones son correctas.]

- \* 18. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determinar las intersecciones con los ejes y dibujar la gráfica en tres dimensiones de cada ecuación:

- (a)  $4x + 3y + 2z = 12$   
 (b)  $14x + 35y + 10z = 70$   
 (c)  $9x - 7y + 21z = 63$   
 (d)  $6x + 5z = 30$

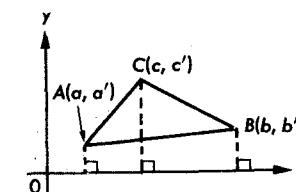
- \* 19. En la figura,  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{CD}$  y  $\overleftrightarrow{EF}$  son las proyecciones de  $\overleftrightarrow{PQ}$  sobre el plano  $xy$ , el plano  $yz$  y el plano  $xz$ , respectivamente.



- (a) Determinar las coordenadas de  $A, B, C, D, E$  y  $F$ .  
 (b) Determinar las ecuaciones de  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{CD}$  y  $\overleftrightarrow{EF}$  en sus planos coordenados respectivos.

### PROBLEMA OPTATIVO

Se da el  $\triangle ABC$  con vértices  $A(a, a')$ ,  $B(b, b')$  y  $C(c, c')$ , siendo  $0 < a < c < b$  y  $0 < a' < b' < c'$ .



Demuéstrese que

$$a \Delta ABC = \frac{1}{2}[a(b' - c') + b(c' - a') + c(a' - b')].$$

¿Qué sucedería con la fórmula de la derecha, si  $A$  y  $B$  se intercambian?; si  $A$  y  $C$  se intercambian?; y si  $B$  y  $C$  se intercambian?

13. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(0, 5)$  y es paralela a la recta  $y = 3x + 1$ .

14. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(6, -1)$  y es perpendicular a la recta  $y = 3x + 1$ .
15. En un sistema de ejes coordenados, dibujar las gráficas de las ecuaciones  $x = 9$ ,  $y = x$ ,  $y = 3x + 1$ .

1. ¿Cuáles son las coordenadas de la proyección del punto  $(5, 2)$  sobre el eje  $x$ ?; sobre el eje  $y$ ?

2. Determinar el cuarto vértice de un rectángulo que tiene tres vértices en  $(-1, -1)$ ,  $(3, -1)$  y  $(3, 5)$ .

3. Se da un triángulo con vértices  $(3, 2)$ ,  $(3, -4)$  y  $(9, -4)$ . Calculese su longitud y el área de la región triangular correspondiente.

4. Se da el  $\triangle ABC$  con vértices  $A(-3, -5)$ ,  $B(3, 3)$  y  $C(13, -9)$ .

5. Los vértices de un cuadrilatero son los puntos  $A(-1, 1)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(6, -2)$  y  $D(1, -4)$ .

(a) Determinar que el  $\square ABCD$  es un paralelogramo.

(b) Demostar que sus diagonales son perpendiculares.

6. Una recta tiene pendiente  $\frac{3}{2}$  y contiene al punto  $(0, -6)$ . ¿Cuál es la coordenada  $y$  del punto de la recta cuya coordenada  $x$  es  $12\frac{1}{2}$ ?

7. Utilizando los métodos de la geometría cartesiana, demostrar que las diagonales de un triángulo isósceles son congruentes, si el trapezo no es un paralelogramo.

8. Demostar que el triángulo cuyos vértices son  $A(-3, 7)$ ,  $B(2, -2)$  y  $C(11, 3)$ , es un triángulo rectángulo isósceles.

9. Un extremo de un segmento es el punto  $(-1, 8)$  y el punto medio del segmento es  $(4, 2)$ .

10. Un triángulo tiene vértices  $A(5, 7)$ ,  $B(2, 0)$  y  $C(5, -3)$ . Hallar las coordenadas de los puntos que dividen al lado más largo. Calcular el área del triángulo.

11. Un segmento tiene extremos  $(4, -2)$  y  $(13, 13)$ . Hallar las coordenadas de los puntos que dividen al segmento.

12. Escribir una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(x, y)$  equidistantes de los puntos  $A(0, 8)$  y  $B(12, -8)$ .

13. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(0, 5)$  y es paralela a la recta  $y = 3x + 1$ .

- (a) Determinar las coordenadas de las intersecciones de las rectas.
- (b) Calcular el área de la región triangular limitada por las rectas.

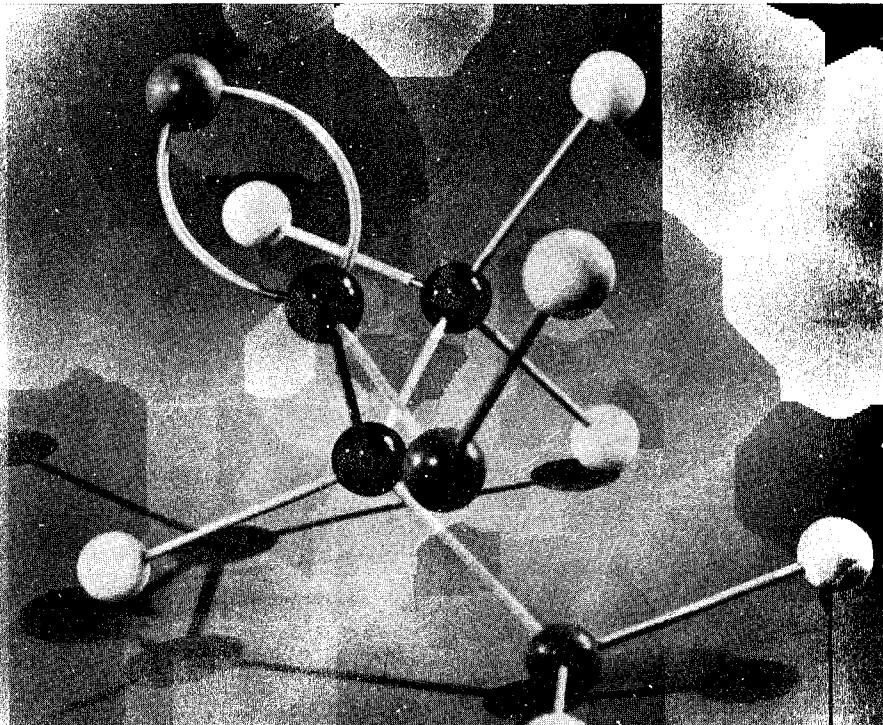
- (a) Determinar las coordenadas de las intersecciones de las rectas.
- (b) Calcular el área de la región triangular correspondiente.

- (a) Determinar las coordenadas del punto medio de cada lado.
- (b) Calcular la longitud de cada mediana.

- (c) Escribir la ecuación de la recta que contiene a cada mediana, en la forma de punto y pendiente.

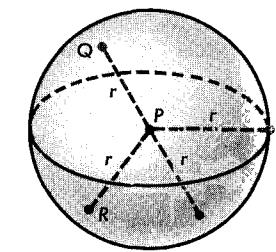
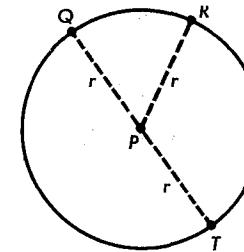
- (d) Escribir la ecuación de la recta que contiene a cada mediana, en la forma de punto y pendiente.

# 14 | Circunferencias y superficies esféricas



## 14-1. DEFINICIONES BÁSICAS

En términos generales, una circunferencia es la frontera de una región redonda en un plano; y una superficie esférica es la superficie de una bola en el espacio.



En las siguientes definiciones, se expresan estas mismas ideas con un lenguaje más preciso:

### Definición

Sea  $P$  un punto de un plano dado y sea  $r$  un número positivo. La *circunferencia con centro  $P$  y radio  $r$*  es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia  $r$  del punto  $P$ .

### Definición

Sea  $P$  un punto y sea  $r$  un número positivo. La *superficie esférica con centro  $P$  y radio  $r$*  es el conjunto de todos los puntos del espacio que están a la distancia  $r$  del punto  $P$ .

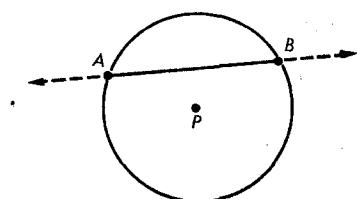
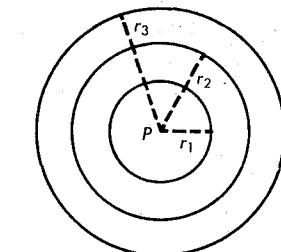
Dos o más superficies esféricas o circunferencias con el mismo centro se llaman *concéntricas*.

En la figura,  $P$  es el centro común de las tres circunferencias concéntricas.

Una *cuerda* de una circunferencia es un segmento cuyos extremos están en la circunferencia.

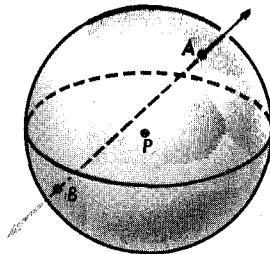
En la figura,  $\overline{AB}$  es una cuerda.

Una recta que corta a la circunferencia en dos puntos se llama una *secante* a la circunferencia.

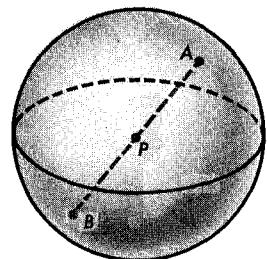
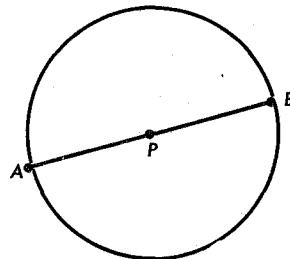


Así, pues, cada cuerda determina una secante, y cada secante contiene una cuerda.

Análogamente, una *cuerda* de una superficie esférica es un segmento cuyos extremos están en la superficie esférica; y una *secante* a una superficie esférica es una recta que interseca a la superficie esférica en dos puntos.



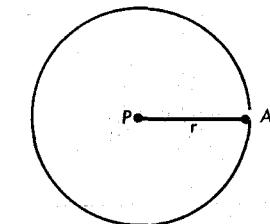
Un *diámetro* de una circunferencia o de una superficie esférica es una cuerda que contiene al centro.



Un *radio* de una circunferencia es un segmento que va desde el centro a un punto de la circunferencia (y análogamente para las superficies esféricas). El punto *A* se llama el *extremo del radio*  $\overline{PA}$ .

Obsérvese que estamos empleando la palabra *radio* en dos sentidos, para designar o bien un segmento o un número. En cada caso particular, el contexto aclarará a cuál de los dos significados nos referimos. Análogamente, si una circunferencia tiene radio  $r$ , nos referiremos al número  $2r$  como el *diámetro* de la circunferencia. Desde luego, el número  $2r$  es la longitud de toda cuerda que pase por el centro.

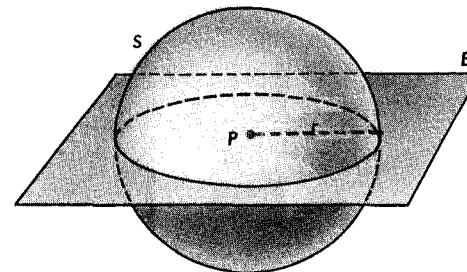
En la figura de la derecha,  $r$  es el *radio*;  $\overline{PB}$  es un *radio*;  $\overline{PA}$  es otro *radio*;  $2r$  es el *diámetro*;  $\overline{AB}$  es un *diámetro* y  $\overline{PC}$  es un *radio* cuyo *extremo* es *C*.



### Teorema 14-1

La intersección de una superficie esférica con un plano que pasa por su centro es una circunferencia con el mismo centro y el mismo radio.

Para ver por qué esto es así, sólo es necesario recordar las definiciones de una superficie esférica y de una circunferencia. Sean dados una superficie esférica  $S$  con centro  $P$  y radio  $r$ , y un plano  $E$ . Entonces,  $S$  es el conjunto de todos los puntos del espacio que están a la distancia  $r$  de  $P$ . La intersección de  $S$  y  $E$  es el conjunto de todos los puntos de  $E$  que están a la distancia  $r$  de  $P$  y es, efectivamente, una circunferencia con el mismo centro  $P$  y el mismo radio  $r$  que la superficie esférica  $S$ .

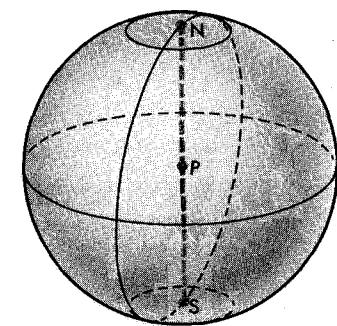


Sabiendo esto, podemos enunciar la siguiente definición:

### Definición

La intersección de una superficie esférica con un plano que pasa por su centro se llama *circunferencia máxima* de la superficie esférica.

Hay otra razón para el empleo de este término: las circunferencias máximas son las circunferencias *de mayor longitud* en la superficie esférica. Por ejemplo, si dibujamos meridianos y paralelos de la manera acostumbrada, como en los globos terráqueos, entonces el ecuador es una circunferencia máxima, pero los demás paralelos de latitud no lo son. Los otros paralelos de latitud tienen una longitud menor que la del ecuador, y van siendo cada vez más pequeños a medida que nos acercamos al Polo Norte o al Polo Sur.



### Conjunto de problemas 14-1

1. Completar: El conjunto de todos los puntos \_\_\_\_\_ que están a una distancia fija de un punto dado se llama una \_\_\_\_\_.
2. Completar: Un diámetro de una circunferencia es una \_\_\_\_\_ que contiene al \_\_\_\_\_ de la circunferencia.

3. El siguiente enunciado contiene la palabra "diámetro" dos veces. Explíquese cuál es el significado de "diámetro" en cada caso.

Aunque una circunferencia sólo puede tener un diámetro, en realidad, tiene una infinitud de diámetros.

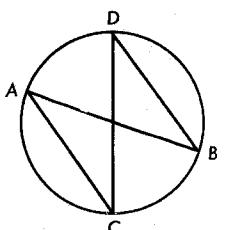
4. En el enunciado del teorema 14-1, ¿qué significa la palabra "radio"?

5. Indicar si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso:

- (a) Un diámetro de una circunferencia es una secante a la circunferencia. *F*
- (b) Todos los radios de una superficie esférica son congruentes. *C*
- (c) Todo diámetro de una superficie esférica es un diámetro de una circunferencia máxima. *C*
- (d) Un radio es una cuerda de una circunferencia. *F*
- (e) Una secante a una superficie esférica corta a la superficie esférica solamente en un punto. *F*
- (f) Una cuerda de una circunferencia contiene exactamente dos puntos de la circunferencia. *C*
- (g) Una superficie esférica y una cualquiera de sus circunferencias máximas tienen el mismo centro y el mismo radio. *C*

6. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

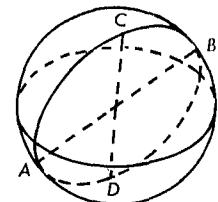
- (a) Si un radio biseca a una cuerda de una circunferencia, entonces es perpendicular a la cuerda.
- (b) La intersección de una recta y una circunferencia puede ser vacía.
- (c) Dos circunferencias pueden intersecarse exactamente en tres puntos.
- (d) Una recta puede cortar a una circunferencia exactamente en un punto.
- (e) Dos superficies esféricas pueden intersecarse exactamente en un punto.
- (f) La intersección de dos superficies esféricas puede ser una circunferencia.
- (g) La secante que es mediatriz de una cuerda de una circunferencia contiene al centro de la circunferencia.
- (h) Si una recta corta a una circunferencia en un punto, la interseca en dos puntos.



7. Si  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  son dos diámetros de una circunferencia, entonces  $\overline{AC} \cong \overline{BD}$  y  $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ .

8. Demostrar que los diámetros de una circunferencia son las cuerdas más largas de la circunferencia. [Indicación: Si  $c$  representa la longitud de otra cuerda cualquiera, ¿es  $c < 2r$ ?]

9. Si  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  son dos diámetros de una superficie esférica, entonces la figura  $ACBD$  es un rectángulo.



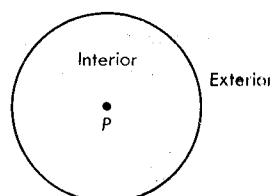
10. Demostrar lo siguiente: Si dos cuerdas congruentes de una circunferencia tienen un extremo común con un diámetro y, además, intersecan a la circunferencia en puntos a distinto lado del diámetro, entonces las cuerdas determinan ángulos congruentes con el diámetro.

## 14-2. RECTAS TANGENTES A LAS CIRCUNFERENCIAS

En toda esta sección, consideraremos circunferencias en un plano fijo.

### Definiciones

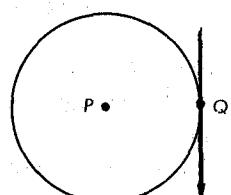
El *interior* de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano cuyas distancias del centro son menores que el radio. El *exterior* de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano cuyas distancias del centro son mayores que el radio.



Así, pues, todo punto del plano o está en el interior de la circunferencia, o en el exterior de la circunferencia, o en la circunferencia. En los dos primeros casos, diremos frecuentemente, para abreviar, que un punto está *dentro* o *fuera* de la circunferencia. (Recuérdese que  $0 < r$ , porque  $r > 0$ . Por tanto, el centro está en el interior.)

### Definiciones

Una *tangente* a una circunferencia es una recta (en el mismo plano) que corta a la circunferencia en un solo punto. Este punto se llama *punto de tangencia* o *punto de contacto*. Decimos que la recta y la circunferencia son *tangentes* en el punto de contacto.



Toda circunferencia tiene una tangente en cada uno de sus puntos. Esto lo podemos deducir del teorema siguiente:

**Teorema 14-2**

Una recta perpendicular a un radio en su extremo es tangente a la circunferencia.

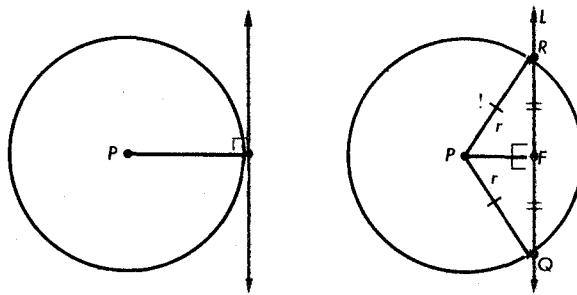
**Demuestra**ón: Sea  $L$  la perpendicular al radio  $\overline{PQ}$  en  $Q$ . Hay que demostrar que ningún otro punto de  $L$  está en la circunferencia.

Sea  $R$  otro punto cualquiera de  $L$ . En virtud del primer teorema de mínima distancia (teorema 7-7), el segmento más corto desde  $P$  a  $L$  es el segmento perpendicular. Por tanto,  $PR > PQ$ . Luego,  $PR > r$  y  $R$  no está en la circunferencia, pues  $R$  está en el exterior.

El recíproco de este teorema también es cierto.

**Teorema 14-3**

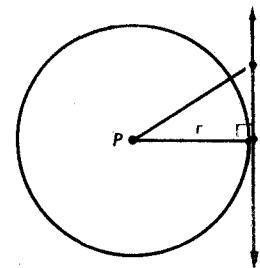
Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.



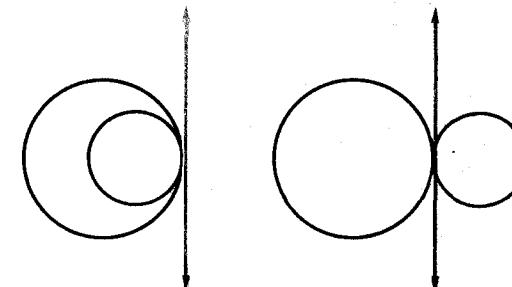
La figura anterior de la izquierda representa este caso exactamente como ocurre. La figura de la derecha ilustra la demostración indirecta ofrecida a continuación:

**Demuestra**ón: Se da que  $L$  es tangente a la circunferencia  $C$  en el punto  $Q$ . Supongamos que  $L$  no es perpendicular a  $\overline{PQ}$ . Demostraremos que esta suposición conduce a una contradicción.

Sea  $F$  el pie de la perpendicular desde  $P$  a  $L$ . Entonces,  $F \neq Q$ . Sea  $R$  un punto del rayo opuesto a  $\overline{FQ}$ , tal que  $FR = FQ$ . Entonces,  $\triangle PFR \cong \triangle PFQ$ . (¿Por qué?) En consecuencia,  $PR = PQ = r$  y  $R$  está en la circunferencia. Por consiguiente,  $L$  corta a la circunferencia en dos puntos en lugar de uno. Pero, esto es imposible, pues  $L$  es una recta tangente a la circunferencia. Luego, nuestra suposición es falsa y  $L \perp \overline{PQ}$  en  $Q$ , como queríamos demostrar.



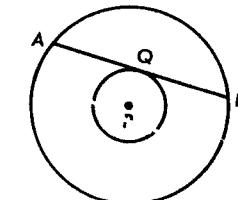
En la figura de la izquierda, a continuación, las dos circunferencias son *tangentes interiormente*. En la figura de la derecha, las dos circunferencias son *tangentes exteriormente*.

**Definición**

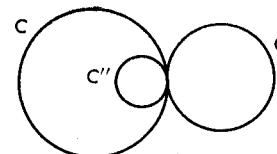
Dos circunferencias se dicen *tangentes*, si son tangentes a la misma recta en el mismo punto. Si dos circunferencias tangentes son coplanares y sus centros están al mismo lado de su tangente común, entonces las circunferencias son *tangentes interiormente*. Si dos circunferencias tangentes son coplanares y sus centros están a lados opuestos de su tangente común, entonces las circunferencias son *tangentes exteriormente*.

**Conjunto de problemas 14-2A**

- Dibújese una circunferencia con centro  $P$  y radio  $PQ = 1\frac{1}{2}$  centímetros. Márquense un punto  $A$  tal que  $PA = 2$  centímetros y un punto  $B$  tal que  $PB = 1$  centímetro. Ahora, complétense los siguientes enunciados:
  - $A$  está en el \_\_\_\_\_ de la circunferencia, porque \_\_\_\_\_.
  - $B$  está en el \_\_\_\_\_ de la circunferencia, porque \_\_\_\_\_.
  - Las circunferencias con radios  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PQ}$  y  $\overline{PB}$  se llaman \_\_\_\_\_.
- Describir cómo puede construirse una tangente a una circunferencia en un punto dado de ésta, si se da el centro de dicha circunferencia.
- $E$  es un punto en el exterior de una circunferencia. ¿Cuáles tangentes a la circunferencia contienen al punto  $E$ ? Hágase un dibujo.
- Demostrar lo siguiente: Dadas dos circunferencias concéntricas, toda cuerda de la circunferencia mayor que es tangente a la circunferencia menor es bisecada en su punto de tangencia. [Sugerencia: Trácese  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PQ}$  y  $\overline{PB}$ .]
- Demostrar que las tangentes a una circunferencia en los extremos de un diámetro son paralelas.



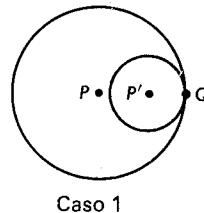
6. En la figura, se muestra una disposición de tres circunferencias que tienen radios diferentes y tal que cada circunferencia es tangente a las otras dos. Dibújense por lo menos otras tres disposiciones análogas.



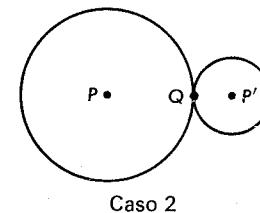
7. Demostrar el siguiente teorema:

Si dos circunferencias son tangentes, sus centros están alineados con el punto de tangencia.

[Sugerencia: Trácese la tangente común.]



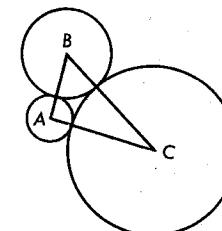
Caso 1



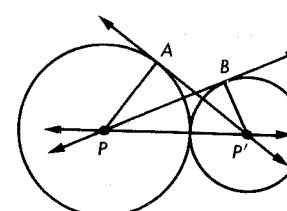
Caso 2

8. Demostrar que si dos circunferencias con radios congruentes son tangentes exteriormente, un punto cualquiera equidistante de sus centros está en su tangente común.

9. La distancia de un punto  $E$  al centro,  $A$ , de una circunferencia es 20. El radio de la circunferencia es 5. Una recta que pasa por  $E$  es tangente a la circunferencia en  $B$ . Determiníse  $EB$ .



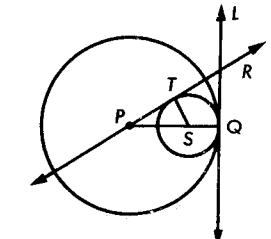
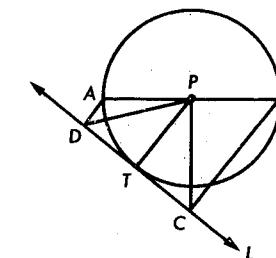
10. En la figura, cada una de las circunferencias con centros  $A$ ,  $B$  y  $C$  es tangente a las otras dos. Si  $AB = 10$ ,  $AC = 14$  y  $BC = 18$ , determiníse el radio de cada circunferencia. [Sugerencia: Sea  $x$  el radio de una circunferencia.]



11. Se da la figura de la derecha, en la cual las circunferencias son tangentes,  $P$  y  $P'$  son sus centros, y  $\overleftrightarrow{PB}$  y  $\overleftrightarrow{P'A}$  son tangentes en  $B$  y  $A$ , respectivamente. Sabiendo que los radios son 9 y 6, determiníse  $PB$  y  $P'A$ .

12. Dos circunferencias concéntricas tienen diámetros de 10 y 26. Considérense tangentes a la circunferencia menor que pasan por los extremos de un diámetro de la circunferencia mayor. Determiníse la longitud del segmento de cada tangente que tiene un extremo en cada circunferencia.

- \* 13. Datos: En la figura de la izquierda, a continuación,  $\overline{AB}$  es un diámetro de la circunferencia con centro  $P$ ;  $L$  es tangente en  $T$  a la circunferencia;  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$  son perpendiculares a  $L$ . Demuéstrese que  $PD = PC$ .



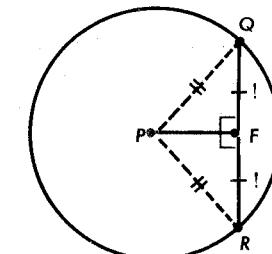
- \* 14. En la figura anterior de la derecha, las circunferencias con centros  $P$  y  $S$  son tangentes a la recta  $L$  en  $Q$ . Una secante a la circunferencia mayor pasa por  $P$ , es tangente a la circunferencia menor en  $T$  y corta a  $L$  en  $R$ . Si los radios de las circunferencias son 8 y 3, determiníse  $QR$ .

- \* 15. En una circunferencia con centro  $P$ ,  $\overline{AB}$  es un diámetro y  $\overline{AC}$  es otra cuerda cualquiera. Una secante que pasa por  $P$  y es paralela a  $\overleftrightarrow{AC}$  interseca en un punto  $D$  a la tangente en  $C$ . Demuéstrese que  $\overleftrightarrow{DB}$  es tangente a la circunferencia en el punto  $B$ . [Sugerencia: Trácese  $\overleftrightarrow{PC}$ .]

Los siguientes teoremas son fáciles de demostrar:

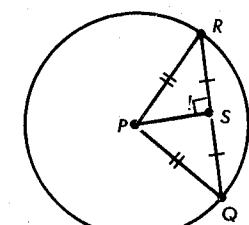
#### Teorema 14-4

La perpendicular desde el centro de una circunferencia a una cuerda biseca a ésta.



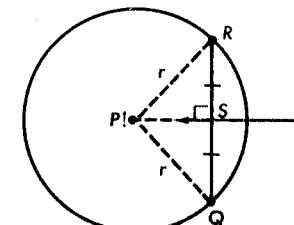
#### Teorema 14-5

El segmento desde el centro de una circunferencia al punto medio de una cuerda es perpendicular a ésta.



#### Teorema 14-6

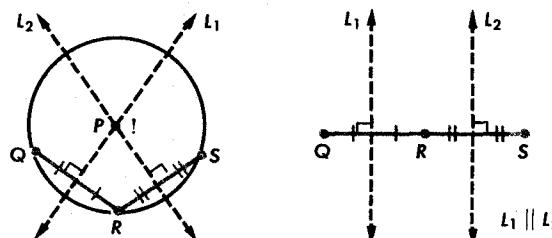
En el plano de una circunferencia, la mediatrix de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.



Demuéstrese esto. (Si el alumno no se da cuenta de cómo emplear alguno de los teoremas anteriores, deberá tratar de utilizar el teorema 6-2.)

**Corolario 14-6.1**

Ninguna circunferencia contiene tres puntos alineados.



**Demostración:** Si tres puntos  $Q$ ,  $R$  y  $S$  de una circunferencia estuvieran alineados, entonces las mediatrices de las cuerdas  $\overline{QR}$  y  $\overline{RS}$  serían paralelas. Pero, esto es imposible, porque dichas mediatrices pasan por el centro.

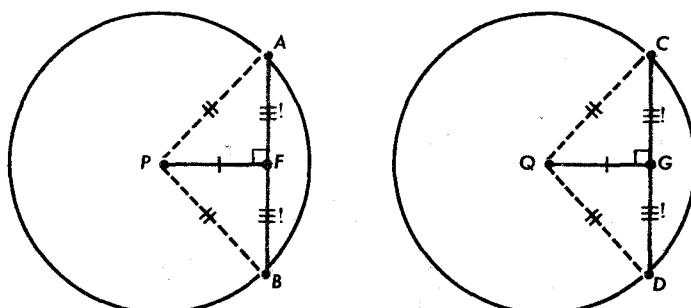
## Definición

Dos o más circunferencias con radios congruentes se llaman *congruentes*.

Obsérvese que esta definición de *circunferencias congruentes* está de acuerdo con el empleo de la palabra *congruente* para segmentos, ángulos y triángulos. La idea básica en cada caso es que dos figuras son congruentes, si tienen el mismo tamaño y la misma forma.

### Teorema 14-7

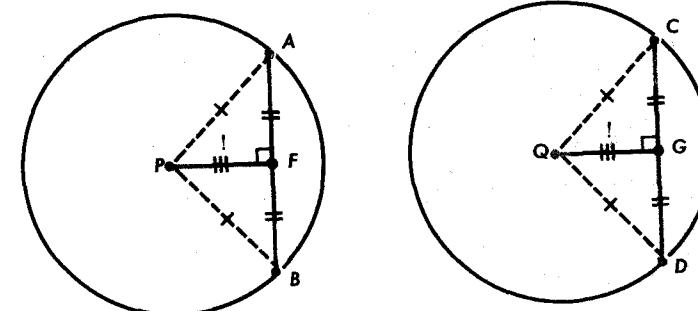
En la misma circunferencia o en circunferencias congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.



Demuéstrese esto. (En las figuras anteriores, algunas de las marcas están basadas en el teorema 14-4.)

### Teorema 14-8

En la misma circunferencia o en circunferencias congruentes, dos cuerdas congruentes cualesquiera equidistan del centro.



Demuéstrese esto.

Finalmente, tenemos:

### Teorema 14-9

Si una recta interseca al interior de una circunferencia, entonces corta a la circunferencia exactamente en dos puntos.

**Demostración:** Según se indica en la figura, sea  $C$  una circunferencia de radio  $r$ , sea  $L$  una recta y supongamos que  $L$  contiene un punto  $R$  del interior de  $C$ . Entonces,  $PR < r$ . Sea  $F$  el pie de la perpendicular desde  $P$  a  $L$  y sea  $PF = s$ .

- (1) Si  $X$  está en  $L$  y en  $C$ , entonces el  $\triangle PFX$  tiene un ángulo recto en  $F$  y, así,

$$r^2 = s^2 + FX^2.$$

Por tanto,

$$FX = \sqrt{r^2 - s^2}.$$

- (2) Si  $X$  es un punto de  $L$  y  $FX = \sqrt{r^2 - s^2}$ , entonces  $X$  está en  $C$ , pues

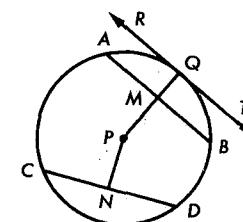
$$\begin{aligned}PX^2 &= PF^2 + FX^2 \\&= s^2 + (r^2 - s^2) \\&= r^2.\end{aligned}$$

Pero  $r^2 - s^2 > 0$ , porque  $r > s$ . Luego, en virtud del teorema de la localización de puntos, hay exactamente dos puntos  $X$  de  $L$  tales que  $FX = \sqrt{r^2 - s^2}$ . Por tanto, exactamente dos puntos de  $L$  están en  $C$ , como se quería demostrar.

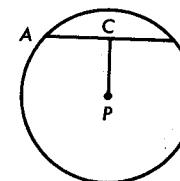
## Conjunto de problemas 14-2B

1. Enunciense el teorema o corolario que justifica cada una de las conclusiones siguientes relacionadas con la figura, en la cual  $P$  es el centro de la circunferencia:

- Si  $\overline{PN} \perp \overline{CD}$ , entonces  $CN = ND$ .
- Los puntos  $A$ ,  $Q$  y  $B$  no están alineados.
- Si  $PM = PN$ ,  $\overline{PM} \perp \overline{AB}$  y  $\overline{PN} \perp \overline{CD}$ , entonces  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ .
- Si  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ,  $\overline{PM} \perp \overline{AB}$  y  $\overline{PN} \perp \overline{CD}$ , entonces  $PM = PN$ .
- Si  $\overleftrightarrow{RT}$  es una tangente,  $RT \perp \overline{PQ}$ .
- Si  $M$  está en el interior de la circunferencia, entonces  $\overleftrightarrow{MQ}$  interseca a la circunferencia exactamente en un punto distinto de  $Q$ .



2. En una circunferencia con radio de 10 centímetros, una cuerda dista 6 centímetros del centro. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?



3. Un diámetro y una cuerda de una circunferencia tienen un extremo común. Si la longitud del diámetro es 40 y la longitud de la cuerda es 24, ¿a qué distancia del centro de la circunferencia está la cuerda?

4. Una cuerda de 16 pulgadas está a 15 pulgadas del centro de una circunferencia. ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

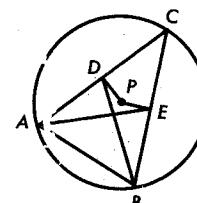
5. En la figura,  $P$  es el centro de la circunferencia,

$$\overline{PD} \perp \overline{AC}, \quad \overline{PE} \perp \overline{BC},$$

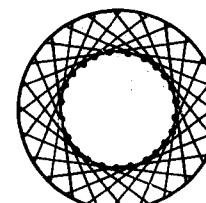
y

$$PD = PE.$$

Demuéstrese que  $\angle DBA \cong \angle EAB$ .



6. Demostrar lo siguiente: En una circunferencia cualquiera, los puntos medios de todas las cuerdas congruentes con una cuerda dada forman una circunferencia concéntrica con la circunferencia dada y de radio igual a la distancia de una cualquiera de las cuerdas al centro.



7. Demostrar lo siguiente: En una circunferencia, si dos cuerdas que tienen un extremo común forman ángulos congruentes con el diámetro que pasa por dicho extremo, entonces las cuerdas son congruentes.

8. Si se da un arco de una circunferencia, como en la figura de la derecha, explíquese cómo se pueden determinar el centro y el radio de la circunferencia.



9. En una circunferencia, una cuerda de 12 pulgadas es paralela a una tangente y biseca al radio trazado por el punto de tangencia. ¿Cuál es la longitud del radio?
10. Una cuerda de 18 pulgadas es perpendicular a un radio de una circunferencia. La distancia desde la intersección de la cuerda y el radio al extremo del radio es de 3 pulgadas. Determíñese la longitud del radio.

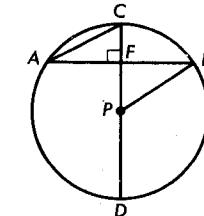
11. Contestar cada parte del siguiente problema, según se explica a continuación:

Escríbase "superflua", si se da más información que la necesaria para obtener una respuesta numérica. Escríbase "no es suficiente", si no se da suficiente información. Escríbase "suficiente", si se da justamente la suficiente información para lograr una solución numérica. Escríbase "contradicitorio", si los datos son contradictorios.

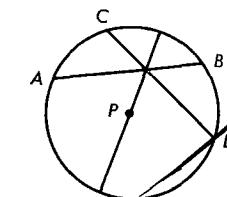
[Observación: No es necesario resolver cada parte, solamente decidir su posibilidad o imposibilidad.]

En la figura,  $P$  es el centro de la circunferencia y  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ .

- $AF = 5$ ,  $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- $PB = 7$ ,  $CD = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- $AC = 9$ ,  $PB = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- $CF = 3$ ,  $FP = 2$ ,  $PD = 6$ ,  $CD = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- $PB = 13$ ,  $PF = 5$ ,  $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- $AB = 16$ ,  $CD = 20$ ,  $CF = 4$ ,  $PB = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- $CF = 7$ ,  $PB = 17$ ,  $FB = 10$ ,  $CD = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- $CD = 30$ ,  $AB = 24$ ,  $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- $PB = 25$ ,  $FB = 20$ ,  $CF = 10$ ,  $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- $PD = 12$ ,  $CF = 6$ ,  $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ .



- \* 12. Demostrar lo siguiente: Si dos cuerdas (que no sean diámetros) congruentes de una circunferencia se intersecan en un diámetro, forman ángulos congruentes con el diámetro.



- \* 13. Dos circunferencias, de radios desiguales, se intersecan en los puntos  $R$  y  $S$ .  $M$  es el punto medio de  $\overline{PP'}$ , el segmento definido por los centros de las circunferencias. Una recta que pasa por  $R$  es perpendicular a  $\overline{MR}$  y corta a las circunferencias nuevamente en  $A$  y en  $B$ . Demuéstrese que  $AR = BR$ .

- \* 14. Demostrar el siguiente teorema:

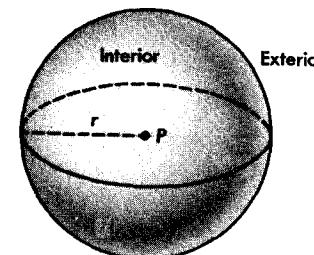
Tres puntos no alineados cualesquiera están en una circunferencia.

### 14-3. PLANOS TANGENTES A LAS SUPERFICIES ESFÉRICAS

Si el alumno ha entendido lo expuesto en la sección anterior, no encontrará dificultades en la presente, pues la relación entre superficies esféricas y planos en el espacio es muy parecida a la relación entre circunferencias y rectas en un plano. Por consiguiente, hay una estrecha analogía entre las definiciones y los teoremas de la sección anterior y las definiciones y los teoremas de ésta.

#### Definiciones

El *interior* de una superficie esférica es el conjunto de todos los puntos del espacio cuyas distancias al centro son menores que el radio. El *exterior* de una superficie esférica es el conjunto de todos los puntos del espacio cuyas distancias al centro son mayores que el radio.

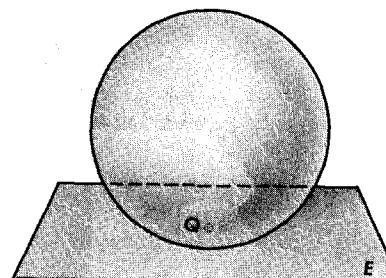


Así, pues, todo punto del espacio está o en el interior de la superficie esférica, o en el exterior de la superficie esférica, o en la superficie esférica. En los dos primeros casos, diremos frecuentemente, para abbreviar, que un punto está *dentro* de la superficie esférica o *fuera* de la superficie esférica.

(Recuérdese que  $0 < r$ , porque  $r > 0$ . Por tanto, el centro está en el interior.)

#### Definiciones

Un *plano tangente* a una superficie esférica es un plano que interseca a la superficie esférica en un solo punto. Este punto se llama *punto de tangencia* o *punto de contacto*. Decimos que el plano y la superficie esférica son *tangentes* en el punto de contacto.

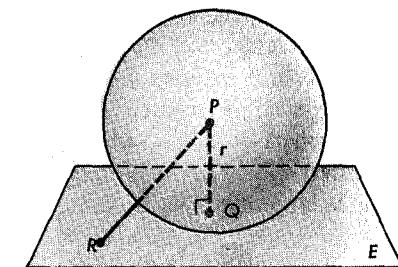


En la figura anterior, el plano  $E$  es tangente a la superficie esférica en  $Q$ . Obsérvese que  $Q$  no parece estar en la frontera de la superficie esférica. (Cuando una bola está colocada sobre una mesa y la miramos desde arriba, no podemos ver el punto en el cual se apoya.)

Toda superficie esférica tiene un plano tangente en cada uno de sus puntos. Podemos deducir esto del siguiente teorema:

#### Teorema 14-10

Un plano perpendicular a un radio en su extremo es tangente a la superficie esférica.



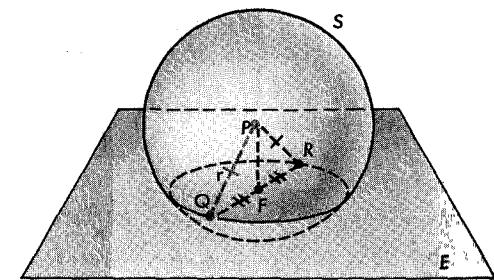
**Demostración:** Sea  $E$  el plano perpendicular al radio  $\overline{PQ}$  en  $Q$ . Hay que demostrar que ningún otro punto de  $E$  está en la superficie esférica.

Sea  $R$  otro punto cualquiera de  $E$ . En virtud del segundo teorema de mínima distancia (teorema 8-10), el segmento más corto desde  $P$  a  $E$  es el segmento perpendicular. Por tanto,  $PR > PQ$ . Luego,  $PR > r$  y  $R$  no está en la superficie esférica, pues  $R$  está en el exterior.

El recíproco de este teorema también es cierto.

#### Teorema 14-11

Todo plano tangente a una superficie esférica es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.



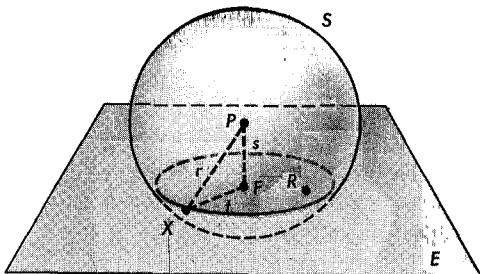
**Demostración:** Se da que  $E$  es tangente a  $S$  en el punto  $Q$ . Supongamos que  $E$  no es perpendicular a  $\overline{PQ}$ . Verificaremos que esta suposición conduce a una contradicción. La figura anterior ilustra la demostración indirecta.

Sea  $F$  el pie del segmento perpendicular desde  $P$  a  $E$ . Entonces,  $F \neq Q$ . Sea  $R$  un punto del rayo opuesto a  $\overrightarrow{FQ}$ , tal que  $FR = FQ$ . Entonces,  $\triangle PFR \cong \triangle PFQ$ . (¿Por qué?) Luego,  $PR = PQ = r$  y  $R$  está en la superficie esférica. Por tanto,  $E$  corta a la superficie esférica en un punto distinto de  $Q$ . Pero, esto es imposible, porque  $E$  es un plano tangente.

En esta demostración y en varias ocasiones anteriores, hemos dibujado figuras en las cuales la intersección de un plano y una superficie esférica aparenta ser una circunferencia. Antes de proseguir con nuestro estudio de los planos tangentes, señalamos que esas figuras son correctas.

**Teorema 14-12**

Si un plano interseca al interior de una superficie esférica, entonces la intersección del plano y la superficie esférica es una circunferencia. El centro de la circunferencia es el pie del segmento perpendicular desde el centro de la circunferencia al plano.



**Demostración:** La notación es la de la figura. Se sabe que el plano  $E$  interseca al interior de la superficie esférica  $S$  en un punto  $R$ . Sea  $F$  el pie de la perpendicular desde  $P$  a  $E$ . Hay que demostrar que la intersección de  $E$  y  $S$  es una circunferencia con centro  $F$ .

Ahora bien,  $PR < r$ , porque  $R$  está en el interior. Por el segundo teorema de mínima distancia,  $PF \leq PR$ . Luego,  $PF < r$ . Sea  $PF = s$ .

(1) Sea  $X$  un punto cualquiera de la intersección de  $E$  y  $S$ . Entonces, el  $\triangle PFX$  tiene un ángulo recto en  $F$ . Luego,

$$s^2 + FX^2 = r^2 \quad \text{y} \quad FX = \sqrt{r^2 - s^2}.$$

Por tanto,  $X$  está en la circunferencia con centro  $F$  y radio  $t = \sqrt{r^2 - s^2}$ .

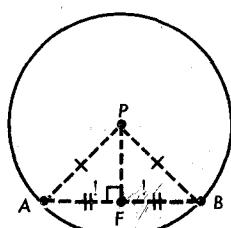
Así, pues, la intersección de  $E$  y  $S$  está en la circunferencia con centro  $F$  y radio  $t = \sqrt{r^2 - s^2}$ .

Esto no significa necesariamente que la intersección es la circunferencia. Para completar la demostración, debemos verificar que todo punto de la circunferencia está en la intersección.

(2) Sea  $X$  un punto cualquiera de la circunferencia en  $E$  con centro  $F$  y radio  $t = \sqrt{r^2 - s^2}$ . Por el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} PX^2 &= t^2 + s^2 \\ &= (r^2 - s^2) + s^2 \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Luego,  $PX = r$  y  $X$  está en la superficie esférica.

**Teorema 14-13**

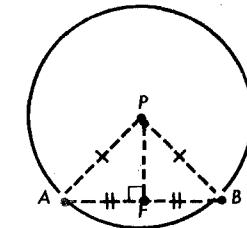
El segmento perpendicular desde el centro de una superficie esférica a una cuerda biseca a la cuerda.

(La demostración es análoga a la del teorema 14-4.)

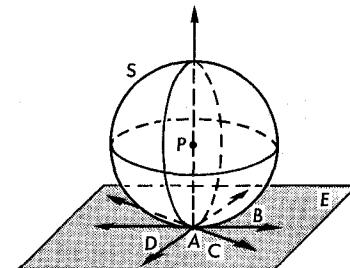
**Teorema 14-14**

El segmento desde el centro de una superficie esférica al punto medio de una cuerda es perpendicular a la cuerda.

La demostración es parecida a la del teorema 14-5.

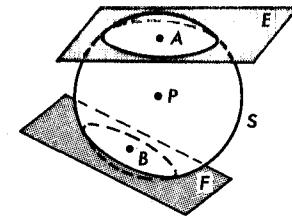
**Conjunto de problemas 14-3**

1. Completar el siguiente enunciado: Si un plano interseca a una superficie esférica, la intersección es o bien \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_.
2. Completar el siguiente enunciado: Si una recta interseca a una superficie esférica, la intersección es o bien \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_.
3. ¿Podrán estar alineados tres puntos de una superficie esférica? Explíquese.
4. La superficie esférica  $S$  es tangente al plano  $E$  en  $A$ ;  $P$  es el centro de  $S$ ; y  $B, C$  y  $D$  están en  $E$ . ¿Cuál es la relación entre  $\overleftrightarrow{PA}$  y  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{AD}$ ? Explíquese.
5. En una superficie esférica de radio 15, la distancia desde una cuerda al centro es 9. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?
6. Una cuerda de una superficie esférica mide 12 pulgadas de largo y dista 6 pulgadas del centro de la superficie esférica. Determíñese el radio de la superficie esférica.
7. Demostrar lo siguiente: Si dos diámetros de una superficie esférica son perpendiculares, la figura formada por los segmentos que unen sus extremos en sucesión es un cuadrado.
8. Calcular el radio de la circunferencia determinada por un plano que dista 4 centímetros del centro de una superficie esférica de diámetro 10 centímetros.
9. Se dan una superficie esférica y tres puntos de la misma. Explíquese cómo determinar el centro y el radio de la circunferencia que contiene los tres puntos y, también, cómo determinar el centro y el radio de la superficie esférica.
10. Explicar por qué dos circunferencias máximas cualesquiera de una superficie esférica se intersecan en los extremos de un diámetro de la superficie esférica.



## 11. Demostrar el siguiente teorema:

Si dos planos cortan a una superficie esférica y sus distancias al centro son iguales, entonces las intersecciones son o bien dos puntos o dos circunferencias congruentes.



- \* 12. Datos: El plano  $E$  interseca a la superficie esférica  $S$ ;  $P$  es el centro de  $S$ ; los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $M$  están en  $E$ ;  $A$  y  $B$  están en  $S$ .

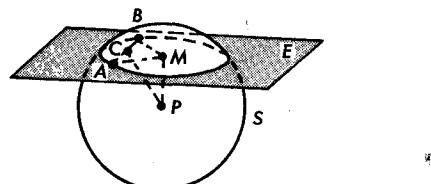
$$\overline{PM} \perp E.$$

$$\overline{AM} \perp \overline{MB}.$$

$$AC = BC.$$

$$AM = PM.$$

$$AB = 5.$$



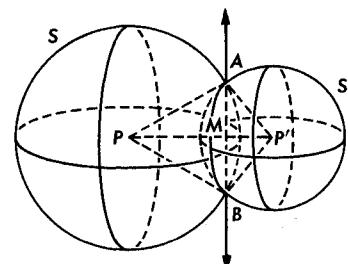
Calcular el radio de la superficie esférica,  $m\angle APB$  y  $PC$ .

- \* 13. Dos circunferencias máximas son perpendiculares, si están en planos perpendiculares. Demuéstrese que para cada dos circunferencias máximas, existe otra circunferencia máxima perpendicular a ambas. Si dos circunferencias máximas sobre la Tierra son meridianos (es decir, pasan por los polos), ¿cuál es la circunferencia máxima perpendicular a las dos?

- \* 14. En la figura de la derecha,  $P$  y  $P'$  son los centros de las superficies esféricas  $S$  y  $S'$ .  $A$  y  $B$  son dos puntos de la intersección de las dos superficies esféricas.  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{PP'}$  se cortan en  $M$ .  $\overleftrightarrow{PA}$  es tangente a  $S'$  en  $A$ .

(a) Describase la intersección de las superficies esféricas  $S$  y  $S'$ .

(b) Si el radio de  $S$  es 12 y  $PA = AB$ , determíñese el radio de  $S'$  y la distancia entre los centros de las superficies esféricas.



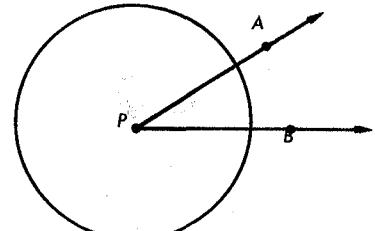
## 14-4. ARCOS DE CIRCUNFERENCIAS

Empezamos este capítulo con un estudio de las circunferencias y, luego, procedimos a hacer un estudio análogo de las superficies esféricas. En el resto del capítulo, sin embargo, nos ocuparemos solamente de las circunferencias, porque la teoría correspondiente para las superficies esféricas es muy complicada para un curso inicial de geometría.

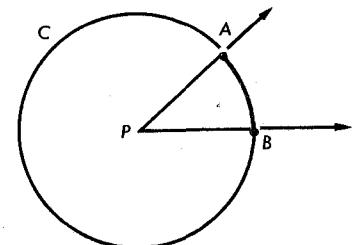
En la figura siguiente, el  $\angle APB$  es un *ángulo central* de la circunferencia  $C$ .

## Definición

Un *ángulo central* de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.



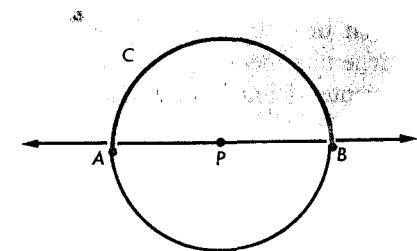
En la figura de la derecha, la línea roja es el *arco menor*  $\widehat{AB}$  y la negra es el *arco mayor*  $\widehat{AB}$ . En cada caso,  $A$  y  $B$  son los *extremos* del arco.



## Definiciones

Sea  $C$  una circunferencia con centro  $P$  y sean  $A$  y  $B$  dos puntos que están en  $C$ , pero que no son los extremos de un diámetro. Entonces, el *arco menor*  $\widehat{AB}$  es la reunión de  $A$ ,  $B$  y todos los puntos de  $C$  que están en el interior del  $\angle APB$ . El *arco mayor*  $\widehat{AB}$  es la reunión de  $A$ ,  $B$  y todos los puntos de  $C$  que están en el exterior del  $\angle APB$ . En cada caso,  $A$  y  $B$  son los *extremos* del arco  $\widehat{AB}$ .

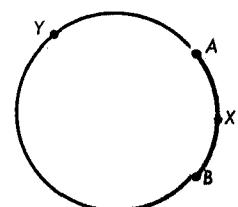
Si  $A$  y  $B$  son los extremos de un diámetro, entonces obtenemos dos arcos, cada uno de los cuales se llama una *semicircunferencia*.



## Definición

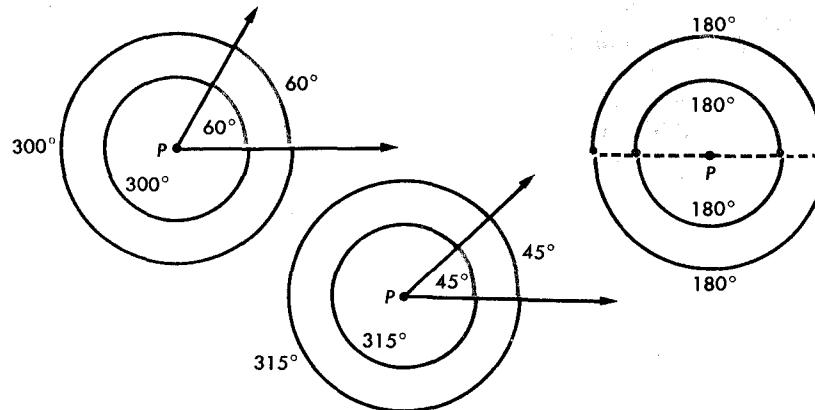
Sea  $C$  una circunferencia y sean  $A$  y  $B$  los extremos de un diámetro. Una *semicircunferencia*  $\widehat{AB}$  es la reunión de  $A$ ,  $B$  y los puntos de  $C$  que están en un semiplano dado de arista  $\overleftrightarrow{AB}$ . Los puntos  $A$  y  $B$  son los *puntos extremos* de la semicircunferencia.

Obsérvese que la notación  $\widehat{AB}$  para arcos es siempre ambigua, porque cada dos puntos  $A$  y  $B$  de una circunferencia son los extremos de dos arcos distintos de la circunferencia. La manera más fácil de evitar esta ambigüedad es elegir otro punto  $X$  del arco y denotar dicho arco por  $\widehat{AXB}$ .



Por ejemplo, en la figura anterior,  $\widehat{AXB}$  es el arco menor, dibujado en rojo, y  $\widehat{AYB}$  es el arco mayor, dibujado en negro. Cuando está claro por el contexto a qué arco nos referimos, podemos escribir simplemente  $\widehat{AB}$ .

Ahora, definiremos las *medidas en grados* de los arcos de la manera sugerida por las marcas en las figuras siguientes:

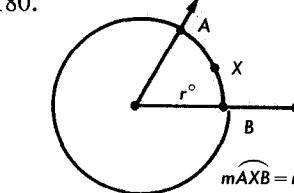


Obsérvese que la medida en grados de un arco no depende del tamaño de la circunferencia. En los pares de circunferencias concéntricas anteriores, los arcos correspondientes tienen la misma medida. Obsérvese, también, que a medida que un arco aumenta (en una circunferencia dada), su medida aumenta. Así, un arco mayor siempre tiene una medida en grados mayor que 180.

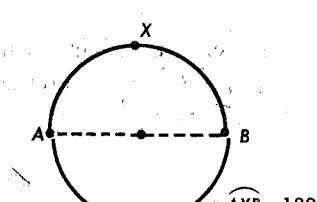
La siguiente definición se relaciona con estas ideas:

### Definición

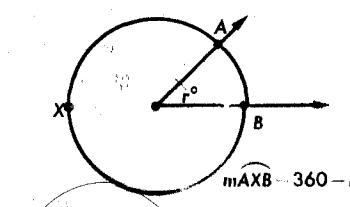
(1) La *medida en grados* de un arco menor es la medida del ángulo central correspondiente.



(2) La *medida en grados* de una semicircunferencia es 180.

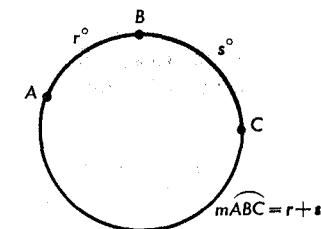


(3) La *medida en grados* de un arco mayor es igual a 360 menos la medida del arco menor correspondiente.



De ahora en adelante, nos referiremos a la medida en grados de un arco simplemente como su medida. La medida de un arco  $\widehat{AB}$  se denotará por  $m\widehat{AB}$ .

El siguiente teorema parece plausible, pero su demostración es asombrosamente tediosa:



### Teorema 14-15. El teorema de la adición de arcos

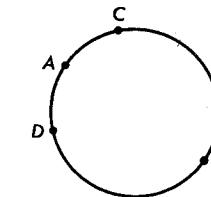
Si  $B$  es un punto de  $\widehat{AC}$ , entonces

$$m\widehat{ABC} = m\widehat{AB} + m\widehat{BC}.$$

Omitimos la demostración de este teorema, y lo consideramos como un postulado. Obsérvese que cuando  $\widehat{ABC}$  es un arco menor, nuestra fórmula se deduce inmediatamente del postulado de la adición de ángulos. No obstante, hay otros casos que tendríamos que considerar en una demostración completa.

### Conjunto de problemas 14-4

1. En la figura,  $A$  y  $B$  son los extremos de un diámetro.

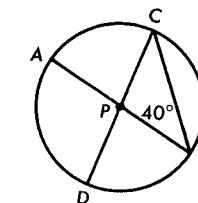
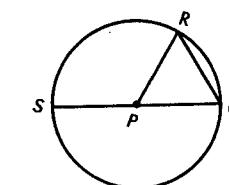


(a) Nómbrense las semicircunferencias.

(b) Nómbrense los arcos menores.

(c) Nómbrense los arcos mayores.

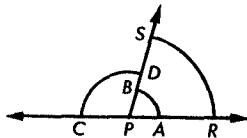
2. En la figura de la izquierda, a continuación,  $P$  es el centro de la circunferencia y  $RQ = PS$ . Determíñense  $m\widehat{RQ}$ ,  $m\widehat{RS}$ ,  $m\widehat{SRQ}$  y  $m\widehat{RSQ}$ .



3. En la figura anterior de la derecha, los diámetros  $\widehat{AB}$  y  $\widehat{CD}$  se intersecan en  $P$ . Si  $m\angle ABC = 40$ , determíñense la medida de cada uno de los arcos menores de la circunferencia.

4. Demostrar lo siguiente: Si  $\widehat{GH}$  y  $\widehat{KM}$  son dos diámetros de una circunferencia, entonces  $m\widehat{GK} = m\widehat{HM}$ .

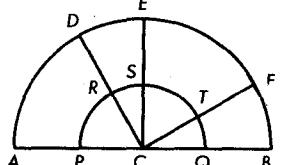
5. En la figura de la derecha, ¿cuál de los arcos tiene la medida mayor?



6. Demostrar lo siguiente: La bisectriz de un ángulo central de una circunferencia biseca al arco menor correspondiente.

7. Datos:  $\widehat{AB}$  es una semicircunferencia con centro  $C$ ;  $\widehat{PQ}$  es concéntrica con  $\widehat{AB}$ ;  $\overline{EC} \perp \overline{AB}$  y  $\overline{DC} \perp \overline{CF}$ .

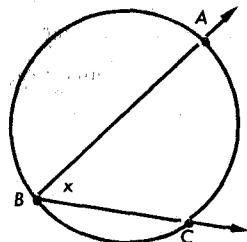
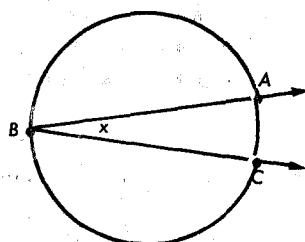
Demostrar que  $m\widehat{AD} + m\widehat{QT} = m\widehat{EF} + m\widehat{RS}$ .



8. Dos puntos de una circunferencia determinan un arco menor y un arco mayor. Si la medida del arco mayor es 40 menos que 4 veces la medida del arco menor, determine la medida de cada uno.

#### 14-5. ÁNGULOS INSCRITOS Y ARCOS INTERCEPTADOS

En cada una de las siguientes figuras, el  $\angle x$  se dice que está *inscrito* en el arco ojo.



Esta idea se describe con palabras, rápida y fácilmente.

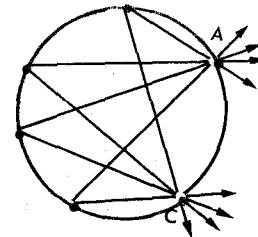
#### Definición

Un ángulo está *inscrito* en un arco, si

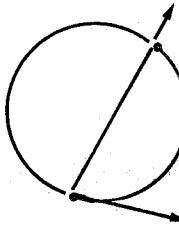
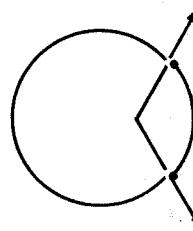
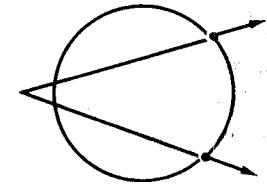
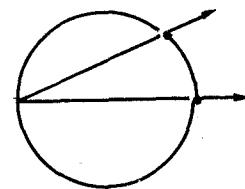
- (1) los lados del ángulo contienen los extremos del arco y
- (2) el vértice del ángulo es un punto, pero no un extremo, del arco.

Desde luego, si  $D$  es un punto cualquiera del arco  $\widehat{ABC}$ , distinto de  $A$  y  $C$ , entonces  $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$  y, así, el  $\angle ADC$  está también inscrito en el mismo arco. En la figura

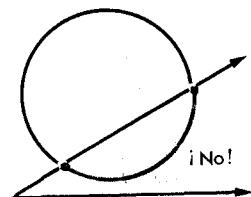
de la derecha, todos los ángulos indicados están inscritos en el arco  $\widehat{AC}$  que se dibujó en rojo y parecen ser todos congruentes. En efecto, esto es lo que siempre sucede, como veremos pronto.



En cada una de las figuras que aparecen a continuación, el ángulo *intercepta* el arco rojo:



Pero en la figura que sigue, *no* decimos que el ángulo intercepta el arco rojo:



En la definición siguiente, admitimos los primeros cuatro casos, pero descartamos el quinto:

#### Definición

Un ángulo *intercepta* un arco, si

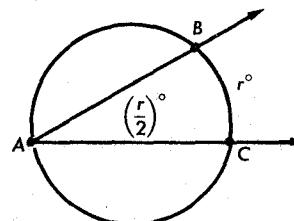
- (1) los puntos extremos del arco están en el ángulo,
- (2) todos los otros puntos del arco están en el interior del ángulo, y
- (3) cada lado del ángulo contiene un extremo del arco.

**Teorema 14-16**

La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.

**O de otro modo:** Sea el  $\angle A$  un ángulo inscrito en un arco  $\widehat{BAC}$  de una circunferencia, y que intercepta el arco  $\widehat{BC}$ . Entonces,

$$m\angle A = \frac{1}{2}m\widehat{BC}.$$



**Demostración:** *Caso 1.* Consideramos primero el caso en que el  $\angle A$  contiene un diámetro de la circunferencia. En virtud del corolario 9-13.3,

$$r = s + t.$$

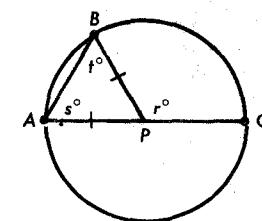
Por el teorema del triángulo isósceles,  $t = s$ . Luego,

$$s = \frac{r}{2}.$$

Esto demuestra el caso 1 del teorema, porque  $s = m\angle A$  y  $r = m\widehat{BC}$ .

Ahora, sabemos que el teorema es válido en el caso 1. Utilizaremos esto para demostrar que es válido en todos los casos.

*Caso 2.* Supongamos que  $B$  y  $C$  están a lados opuestos del diámetro que pasa por  $A$ , como muestra la figura:



Por el caso 1, sabemos que

$$t = \frac{r}{2} \quad \text{y} \quad u = \frac{s}{2}.$$

En consecuencia, por adición,

$$t + u = \frac{1}{2}(r + s).$$

Pero

$$t + u = m\angle A \quad \text{y} \quad r + s = m\widehat{BC}.$$

(¿Cuál es la razón de cada paso?) Por consiguiente,  $m\angle A = \frac{1}{2}m\widehat{BC}$ , como anteriormente.

*Caso 3.* Finalmente, supongamos que  $B$  y  $C$  están al mismo lado del diámetro que pasa por  $A$ . Entonces,

$$r + s = m\widehat{BCD}$$

y

Por el caso 1,

y

Luego,

$$t + u = m\angle BAD.$$

$$t + u = \frac{1}{2}(r + s)$$

$$u = \frac{1}{2}s.$$

$$t = \frac{1}{2}r$$

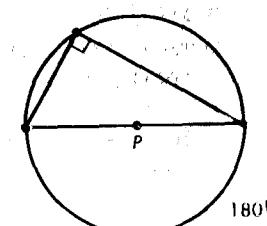
y  $m\angle A = \frac{1}{2}m\widehat{BC}$ , como anteriormente. (¿Cuál es la razón de cada paso?)

El teorema 14-16 tiene dos corolarios importantes.

**Corolario 14-16.1**

Un ángulo cualquiera inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

La demostración es evidente, pues un tal ángulo siempre intercepta una semicircunferencia, y  $90 = \frac{1}{2} \cdot 180$ .

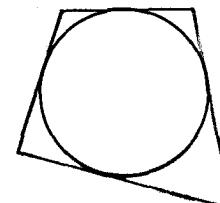
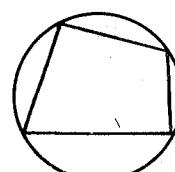
**Corolario 14-16.2**

Dos ángulos cualesquiera inscritos en el mismo arco son congruentes.

También, la demostración es evidente, pues los ángulos interceptan el mismo arco.

**Definiciones**

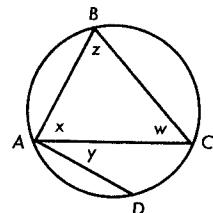
Un cuadrilátero está *inscrito* en una circunferencia, si los vértices del cuadrilátero están en la circunferencia. Si cada lado del cuadrilátero es tangente a la circunferencia, entonces el cuadrilátero está *circunscrito* a la circunferencia.



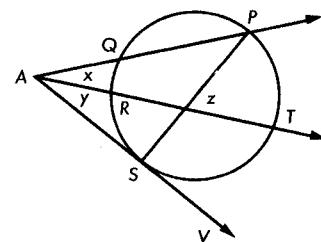
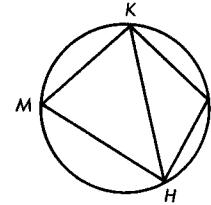
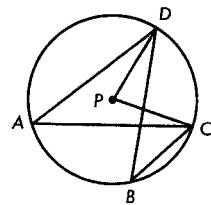
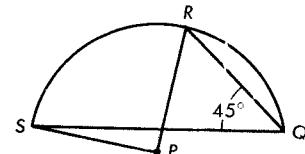
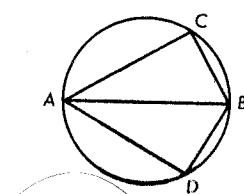
## Conjunto de problemas 14-5

1. Sea dada la figura de la derecha.

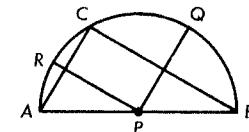
- Nombrar el arco en el cual está inscrito el  $\angle z$ .
- Nombrar el arco interceptado por el  $\angle x$ .
- Nombrar el arco interceptado por el  $\angle z$ .
- Nombrar el ángulo inscrito en el  $\widehat{BCA}$ .
- Nombrar el arco interceptado por el  $\angle BAD$ .
- Nombrar el ángulo inscrito en el  $\widehat{CBD}$ .

2. Sea dada la figura de la derecha, con  $\overrightarrow{AS}$  tangente en S.

- Nombrar el arco (o los arcos) interceptados por el  $\angle x$ .
- Nombrar el arco (o los arcos) interceptados por el  $\angle z$ .
- Nombrar el arco (o los arcos) interceptados por el  $\angle y$ .

3. En la figura de la izquierda, a continuación, P es el centro de la circunferencia. Si  $m\angle B = 35$ , determiníense  $m\angle A$  y  $m\angle P$ .4. En la figura anterior de la derecha, si  $m\angle M = 75$ ,  $m\widehat{MK} = 90$  y  $m\widehat{GH} = 70$ , determiníense las medidas de todos los arcos y ángulos.5. Si  $m\angle RQS = 45$  y P es el centro, demuéstrese que  $\overline{RP} \perp \overline{SP}$ .6.  $\overline{AB}$  es un diámetro de una circunferencia y C y D son puntos de la misma a lados opuestos de  $\overline{AB}$  tales que  $BC = BD$ . Demuéstrese que

$$\triangle ABC \cong \triangle ABD.$$

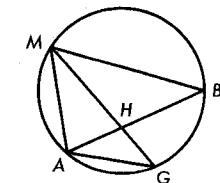
7. Datos: P es el centro de la semicircunferencia  $\widehat{AB}$ ; PR biseca a  $\widehat{AC}$  y  $\overline{PQ}$  biseca a  $\widehat{BC}$ .Demostrar que  $\overline{PR} \perp \overline{PQ}$ .

8. Demostrar lo siguiente: Si dos circunferencias son tangentes interiormente de manera que la circunferencia menor contenga el centro de la circunferencia mayor, entonces una cuerda cualquiera de la circunferencia mayor que tenga un extremo en el punto de tangencia, es bisecada por la circunferencia menor.

9. Se da la figura de la derecha, con  $m\widehat{AG} = m\widehat{BG}$ .

Demuéstrese que

$$\triangle MHB \sim \triangle MAG.$$



10. Demostrar lo siguiente: En una circunferencia cualquiera, las cuerdas paralelas interceptan arcos que tienen medidas iguales.

11. Demostrar el siguiente teorema:

En una circunferencia, un diámetro perpendicular a una cuerda biseca a cada uno de los arcos determinados por los extremos de la cuerda.

12. Demostrar lo siguiente: Si un ángulo inscrito en un arco circular es un ángulo recto, el arco es una semicircunferencia.

13. En la semicircunferencia  $\widehat{ACB}$ ,  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$  en D. Demuéstrese que CD es la media geométrica de AD y DB.

14. Se da la figura de la derecha.

- Si  $AD = 9$  y  $DB = 4$ , determiníense CD.
- Si  $AB = 25$  y  $AD = 5$ , determiníense CD.
- Si  $AD = 32$  y  $CD = 8$ , determiníense DB.
- Si  $AD = 3$  y  $DB = 1$ , determiníense CD.
- Si  $AB = 25$  y  $CD = 12$ , determiníense AD y DB.

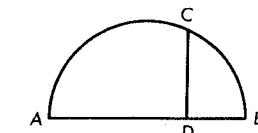


Figura para los problemas 13 y 14

\* 15. En una circunferencia, si el diámetro  $\overline{AB}$  es perpendicular a la cuerda  $\overline{CD}$  en E, demuéstrese que  $CD^2 = 4AE \cdot BE$ .

16. Demostrar el siguiente teorema:

Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios.

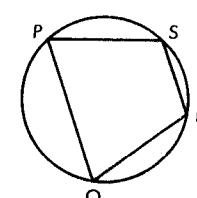
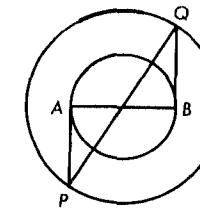
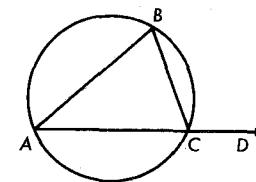
17. En la figura de la derecha, si  $m\angle P = 60$  y  $m\widehat{PSR} = 128$ , ¿cuáles son  $m\angle Q$ ,  $m\angle R$  y  $m\angle S$ ?

Figura para los problemas 16 y 17

18. En la figura,  $AB$  es un diámetro de la más pequeña de dos circunferencias concéntricas.  $\overline{AP}$  y  $\overline{BQ}$  son tangentes a la circunferencia más pequeña en  $A$  y  $B$ , respectivamente. Demuéstrese que  $\overline{AB}$  y  $\overline{PQ}$  se intersecan en el centro de las circunferencias.



19. Si un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia, la medida del arco interceptado por el ángulo en el vértice es dos veces la diferencia de las medidas del ángulo externo en la base del triángulo y de un ángulo en la base.



20. El  $\triangle ABC$  está inscrito en una circunferencia. La cuerda  $\overline{AE} \perp \overline{BC}$  y la cuerda  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ . Demuéstrese que  $\overline{BD} \cong \overline{BE}$ .

21. Dos circunferencias congruentes son tangentes exteriormente en  $T$ . El diámetro  $\overleftrightarrow{PQ}$  es paralelo al diámetro  $\overleftrightarrow{SR}$ , con  $S$  y  $Q$  en lados distintos de  $\overleftrightarrow{PR}$ . Demuéstrese que el  $\square PQRS$  es un rombo.

## 14-6. ARCOS CONGRUENTES

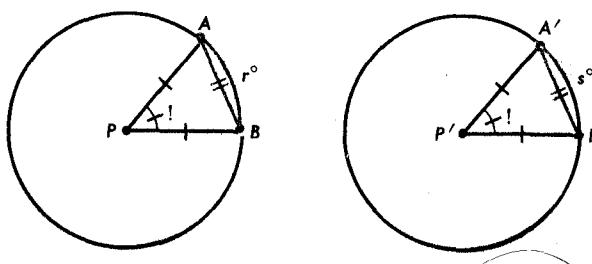
### Definición

En la misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, dos arcos se llaman *congruentes*, si tienen la misma medida.

Obsérvese que aquí, como de costumbre, el significado intuitivo de la palabra *congruente* es que las dos figuras tienen el mismo tamaño y la misma forma; una puede moverse hasta coincidir con la otra.

### Teorema 14-17

En la misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, si dos cuerdas son congruentes, entonces también lo son los arcos menores correspondientes.



**Demostración:** La notación de la demostración es la de la figura. Hay que verificar que  $r = s$ . Por el postulado LLL,

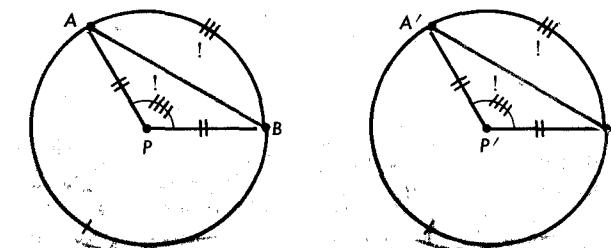
$$\triangle APB \cong \triangle A'P'B'.$$

Por tanto,  $m\angle APB = m\angle A'P'B'$ . Como  $m\widehat{AB} = m\angle APB$  y  $m\widehat{A'B'} = m\angle A'P'B'$ , tenemos  $r = s$  y  $\widehat{AB} \cong \widehat{A'B'}$ .

### Teorema 14-18

En la misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, si dos arcos son congruentes, entonces también lo son las cuerdas correspondientes.

En la demostración, es necesario considerar tres casos, porque los dos arcos congruentes pueden ser arcos menores, arcos mayores o semicircunferencias. Las figuras siguientes sugieren la demostración para el segundo de los casos mencionados:



Obtenemos  $AB = A'B'$ , utilizando el postulado LAL.

### Teorema 14-19

Se da un ángulo con el vértice en una circunferencia, formado por un rayo secante y un rayo tangente. La medida del ángulo es la mitad de la medida del arco interceptado.

**Demostración:** Utilizando la notación de la figura, tenemos

$$x + y = 90, \quad 2y + z = 180;$$

y deseamos demostrar que

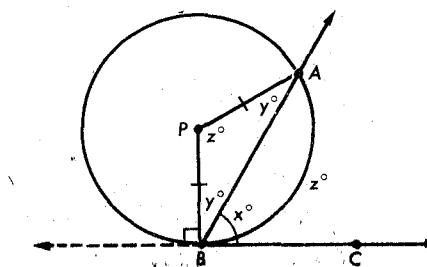
$$x = \frac{1}{2}z.$$

Esto resulta fácil, porque

$$x = 90 - y$$

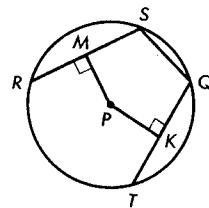
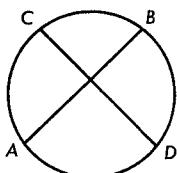
y

$$z = 180 - 2y.$$



## Conjunto de problemas 14-6

1. En la figura de la izquierda, a continuación,  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ . Demuéstrese que  $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ .



2. En la circunferencia anterior de la derecha, con centro  $P$ ,  $PM = PK$  y  $\overline{PM}$  y  $\overline{PK}$  son perpendiculares a las cuerdas  $\overline{RS}$  y  $\overline{QT}$ , respectivamente. Demuéstrese que  $\overline{RS} \cong \overline{QT}$ .
3. En la siguiente figura,  $\overline{KH}$  y  $\overline{KG}$  son tangentes a la circunferencia en  $H$  y  $G$ . Si la medida del arco mayor  $\widehat{GH}$  es 242, determiníense  $m\angle DGH$  y  $m\angle GHK$ .

4. En la figura para el problema 3, ¿por qué es  $\angle KHG \cong \angle KGH$ ?

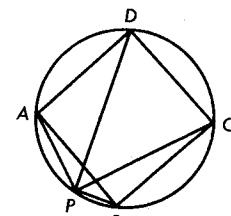
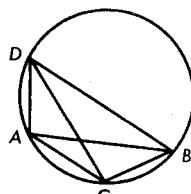
5. En la figura para el problema 3, si  $m\angle K = 60$ , demuéstrese que la medida del arco mayor  $\widehat{GH}$  es dos veces la medida del arco menor  $\widehat{GH}$ .

6. Demostrar lo siguiente: Si dos tangentes a una circunferencia se intersecan, forman un triángulo isósceles con la cuerda que une los puntos de tangencia.

7. Demostrar el siguiente teorema:

Si dos arcos son congruentes, entonces un ángulo cualquiera inscrito en uno de los arcos es congruente con un ángulo cualquiera inscrito en el otro.

8. En la figura de la izquierda, a continuación,  $\widehat{AD} \cong \widehat{CB}$ . Demuéstrese que el  $\square ADBC$  es un trapezio isósceles.



9. En la figura anterior de la derecha, el cuadrado  $\square ABCD$  está inscrito en una circunferencia y  $P$  es un punto cualquiera de  $\overline{AB}$ , distinto de  $A$  y de  $B$ . Demuéstrese que  $\overline{PC}$  y  $\overline{PD}$  trisecan al  $\angle APB$ .

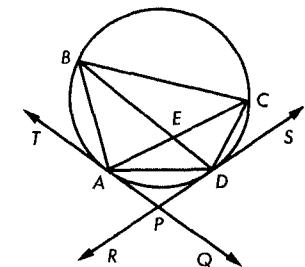
10. En la figura,  $\overleftrightarrow{PA}$  y  $\overleftrightarrow{PD}$  son tangentes en  $A$  y  $D$ , respectivamente. Si

$$m\widehat{AD} = 70, \quad m\widehat{BC} = 170$$

y

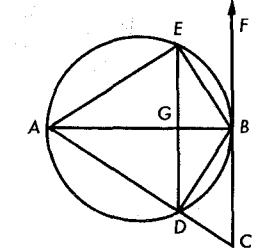
$$m\angle TAB = 40,$$

determine la medida de cada ángulo y cada arco menor de la figura.



11.  $\overline{AB}$  es un diámetro de la circunferencia en la cual la cuerda  $\overline{DE}$  es paralela a la tangente  $\overleftrightarrow{CB}$ .

- (a) Si  $m\widehat{BD} = 64$ , determine la medida de cada ángulo y de cada arco menor de la figura.  
 (b) Si  $AE = 16$  y el radio de la circunferencia es 10, determine la longitud de cada segmento.  
 (c) Utilizando la información de la parte (b), determine el área del  $\square ADBE$ .



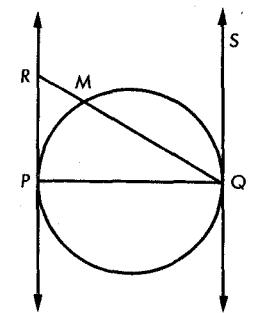
12. Se da un ángulo con el vértice en una circunferencia, formado por un rayo secante y un rayo tangente. Demuéstrese que el punto medio del arco interceptado equidista de los lados del ángulo.

- \* 13. Dos circunferencias no congruentes son tangentes en un punto  $T$ . Una secante,  $l$ , que pasa por  $T$ , interseca a la circunferencia mayor en  $A$  y a la menor en  $B$ . Demuéstrese que las tangentes en  $A$  y en  $B$  son paralelas. [Nota: Hay dos casos: (a) Las circunferencias son tangentes interiormente; (b) Las circunferencias son tangentes exteriormente.]

14. En la figura de la derecha,  $\overleftrightarrow{PR}$  y  $\overleftrightarrow{QS}$  son tangentes y  $\overline{PQ}$  es un diámetro. Dado que

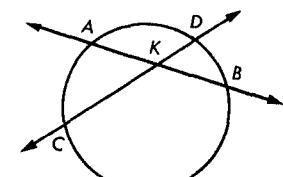
$$m\widehat{MQ} = 120 \quad \text{y} \quad RQ = 8,$$

determine el radio de la circunferencia.



15. Demostrar el siguiente teorema:

La medida de un ángulo formado por dos secantes a una circunferencia, que se intersecan en un punto del interior de la circunferencia, es igual a la semisuma de las medidas de los arcos interceptados por el ángulo y su opuesto por el vértice.



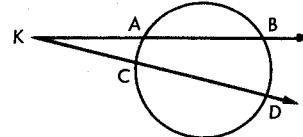
[Sugerencia: Demuéstrese que  $m\angle DKB = \frac{1}{2}(m\widehat{DB} + m\widehat{AC})$ . Trácese primero  $\overline{BC}$ .]

16. Refiérase a la figura para el problema 15.

- Si  $m\widehat{DB} = 40$  y  $m\widehat{AC} = 90$ , determinar  $m\angle AKC$ .
- Si  $m\widehat{AD} = 100$  y  $m\widehat{BC} = 170$ , determinar  $m\angle BKC$ .
- Si  $m\widehat{AC} = 130$  y  $m\angle DKB = 75$ , determinar  $m\widehat{DB}$ .
- Si  $m\widehat{ACD} = 310$  y  $m\widehat{BC} = 200$ , determinar  $m\angle AKC$ .
- Si  $m\widehat{BAC} = 180$  y  $m\angle DKB = 57$ , determinar  $m\widehat{AD}$ .

17. Demostrar el siguiente teorema:

La medida de un ángulo formado por dos secantes a una circunferencia, que se intersecan en un punto en el exterior de la circunferencia, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.

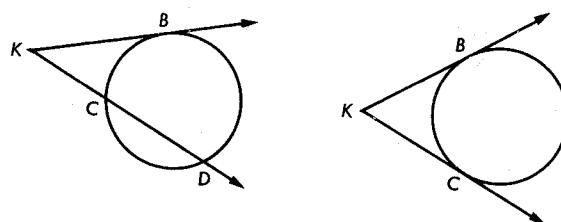


[Sugerencia: Demuéstrese que  $m\angle K = \frac{1}{2}(m\widehat{BD} - m\widehat{AC})$ . Primero, trácese  $\overline{BC}$ .]

18. Refiérase a la figura para el problema 17.

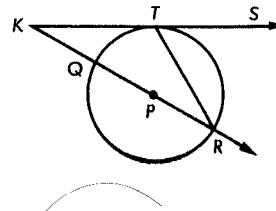
- Si  $m\widehat{BD} = 70$  y  $m\widehat{AC} = 30$ , determinar  $m\angle K$ .
- Si  $m\widehat{BD} = 126$  y  $m\widehat{AC} = 18$ , determinar  $m\angle K$ .
- Si  $m\widehat{AC} = 50$  y  $m\angle K = 22$ , determinar  $m\widehat{BD}$ .
- Si  $m\widehat{AB} = 80$ ,  $m\widehat{BD} = 80$  y  $m\widehat{CD} = 190$ , determinar  $m\angle K$ .
- Si  $m\angle K = 28$ ,  $m\widehat{AB} = 166$  y  $m\widehat{ACB} = 290$ , determinar  $m\widehat{CD}$ .

19. Verificar que el teorema del problema 17 es válido si las palabras "dos secantes" se reemplazan por "una secante y una tangente" o por "dos tangentes".



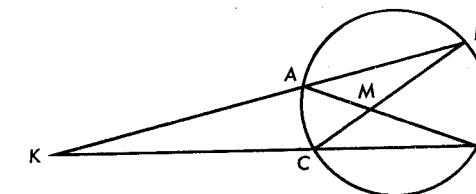
20. Dos tangentes a una circunferencia forman un ángulo cuya medida es 72. ¿Cuál es el número de grados de cada arco interceptado?

21. En la figura de la derecha,  $\overleftrightarrow{KS}$  es tangente a la circunferencia en  $T$  y la secante  $\overleftrightarrow{KR}$  contiene al punto  $P$ , centro de la circunferencia. Si  $m\angle K = 35$ , determinense  $m\widehat{QT}$  y  $m\angle STR$ .



22. Se dan dos tangentes a una circunferencia que se intersecan en  $K$ . Si la medida de uno de los arcos interceptados es 4 veces la medida del otro, ¿cuál es la medida del  $\angle K$ ?

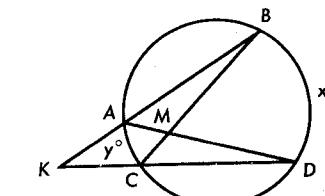
23.



En la figura, si  $m\widehat{BD} = 70$  y  $m\angle DMB = 4m\angle K$ , determinense  $m\widehat{AC}$  y  $m\angle K$ .

24. Dada la figura de la derecha, determinense la razón de  $x$  a  $y$  para que

$$m\angle DMB = 2m\angle K.$$

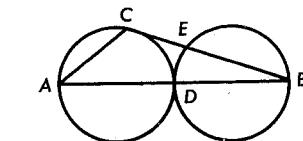


25. Se dan una circunferencia y un punto en su exterior. Una recta que pasa por  $P$  es tangente a la circunferencia en  $T$ . Una secante que contiene al punto  $P$  corta a la circunferencia en  $Q$  y en  $R$ , estando  $Q$  entre  $R$  y  $P$ . La bisectriz del  $\angle QTR$  interseca a  $\overline{RQ}$  en  $S$ . Demuéstrese que

$$PT = PS.$$

26. Datos:  $\overline{AD}$  y  $\overline{DB}$  son diámetros de circunferencias congruentes y tangentes;  $\overline{BC}$  es una tangente en  $C$ .

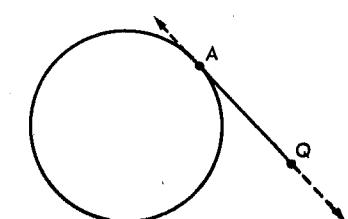
Demostrar que  $m\widehat{AC} = m\widehat{DC} + m\widehat{DE}$ .



#### 14-7. SEGMENTOS SECANTES Y TANGENTES. LA POTENCIA DE UN PUNTO CON RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

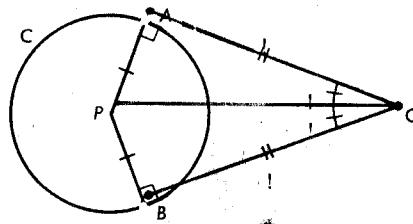
##### Definición

Si  $\overleftrightarrow{QA}$  es tangente a una circunferencia en  $A$ , entonces  $\overleftrightarrow{QA}$  se llama un *segmento tangente* desde  $Q$  a la circunferencia.



**Teorema 14-20**

Los dos segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior son congruentes y determinan ángulos congruentes con el segmento que une el punto exterior al centro.



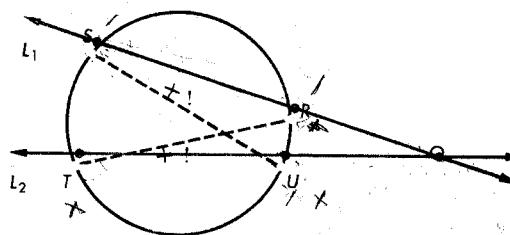
**O de otro modo:** Sea  $C$  una circunferencia con centro  $P$  y sea  $Q$  un punto del exterior de  $C$ . Si  $\overline{QA}$  y  $\overline{QB}$  son tangentes a  $C$  en  $A$  y  $B$ , respectivamente, entonces  $QA = QB$  y  $\angle PQA \cong \angle PQB$ .

**Demuestra:**  $PA = PB$ , porque  $A$  y  $B$  están en la circunferencia; también,  $PQ = PQ$ . En virtud del teorema 14-3, los ángulos  $\angle A$  y  $\angle B$  son ángulos rectos. Por el teorema de la hipotenusa y el cateto (teorema 7-4), tenemos

$$\triangle PQA \cong \triangle PQB.$$

En consecuencia,  $QA = QB$  y  $\angle PQA \cong \angle PQB$ , como se quería demostrar.

Consideremos ahora el caso de dos rectas secantes a una circunferencia, que pasan por el mismo punto del exterior.



En la figura anterior,  $\overline{QS}$  y  $\overline{QT}$  se llaman *segmentos secantes* a la circunferencia. A continuación, se da una definición más precisa de este término:

**Definición**

Si un segmento corta a una circunferencia en dos puntos y precisamente uno de éstos es un extremo del segmento, entonces el segmento se llama *segmento secante* a la circunferencia.

El teorema de más adelante establece que en la figura anterior, siempre tenemos

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT.$$

Es decir, el producto de las "dos distancias" desde  $Q$  a la circunferencia está completamente determinado por la circunferencia y el punto  $Q$ , y queda inalterado cuando elegimos diferentes rectas secantes.

**Teorema 14-21. El teorema de la potencia de un punto**

Se dan una circunferencia  $C$  y un punto  $Q$  de su exterior. Sea  $L_1$  una secante que pasa por  $Q$  e interseca a  $C$  en los puntos  $R$  y  $S$ ; y sea  $L_2$  otra recta secante que pasa por  $Q$  e interseca a  $C$  en los puntos  $U$  y  $T$ . Entonces,

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT.$$

$$\overline{PR}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}.$$

**Demostración:** Consideremos los triángulos  $\triangle QSU$  y  $\triangle QTR$ . Estos triángulos tienen común el  $\angle Q$ . También,  $\angle QSU \cong \angle QTR$ , porque están inscritos en el mismo arco  $\widehat{RSU} = \widehat{RTU}$ . Por el corolario AA (12-3.1), tenemos

$$\triangle QSU \sim \triangle QTR.$$

Por tanto,

$$\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR}$$

y, así,

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT,$$

como queríamos demostrar.

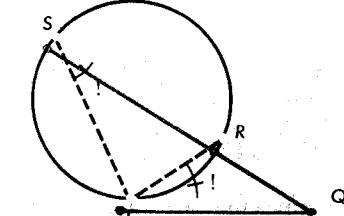
Así, pues, el producto  $QR \cdot QS$  queda determinado cuando se dan la circunferencia  $C$  y el punto exterior  $Q$ . Este número se llama la *potencia de Q con respecto a C*.

El teorema 14-22 nos dirá que en la siguiente figura, en la cual  $\overline{QT}$  es un segmento tangente, tenemos

$$QR \cdot QS = QT^2.$$

Esta igualdad significa que

$$QT = \sqrt{QR \cdot QS}.$$



Por tanto,  $QT$  es la media geométrica de  $QR$  y  $QS$ . Este teorema es más fácil de enunciar que el anterior.

**Teorema 14-22**

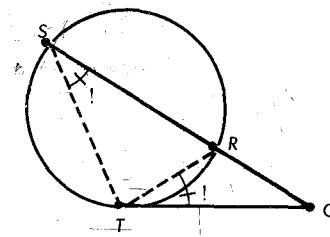
Se da un segmento tangente  $\overline{QT}$  a una circunferencia, y una recta secante que pasa por  $Q$  e interseca a la circunferencia en los puntos  $R$  y  $S$ . Entonces,

$$QR \cdot QS = QT^2.$$

Con otras palabras, el cuadrado de la longitud de un segmento tangente es la potencia con respecto a la circunferencia del extremo del segmento distinto del punto de contacto.

**Demostración:**  $\widehat{TR}$  es el arco interceptado por los ángulos  $\angle QST$  y  $\angle QTR$ . Los pasos principales de la demostración son los siguientes:

- (1)  $m\angle QST = \frac{1}{2}m\widehat{TR}$
- (2)  $m\angle QTR = \frac{1}{2}m\widehat{TR}$
- (3)  $\angle QST \cong \angle QTR$
- (4)  $\angle Q \cong \angle Q$
- (5)  $\triangle QST \sim \triangle QTR$
- (6)  $\frac{QS}{QT} = \frac{QT}{QR}$
- (7)  $QR \cdot QS = QT^2$



¿Cuál es la razón de cada paso?

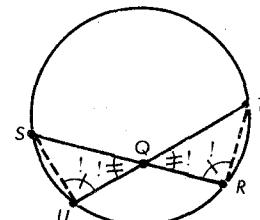
El teorema a continuación afirma que en la figura siguiente, tenemos

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT.$$

### Teorema 14-23

Sean  $\overline{RS}$  y  $\overline{TU}$  cuerdas de la misma circunferencia que se intersecan en  $Q$ . Entonces,

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT.$$



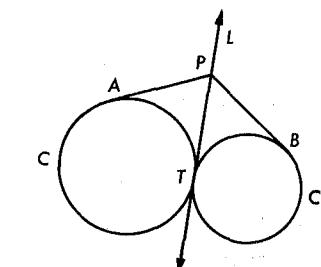
De nuevo, presentamos solamente los pasos principales de la demostración:

- (1)  $\angle U \cong \angle R$
- (2)  $\angle SQU \cong \angle TQR$
- (3)  $\triangle SQU \sim \triangle TQR$
- (4)  $\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR}$
- (5)  $QR \cdot QS = QU \cdot QT$

Este teorema nos permite definir la potencia de un punto con respecto a una circunferencia en el caso de que el punto está *dentro* de la circunferencia. Hemos encontrado que el producto  $QR \cdot QS$  se determina cuando se dan la circunferencia  $C$  y el punto  $Q$ , y este número queda inalterado cuando elegimos diferentes cuerdas que pasan por  $Q$ . Por tanto, podemos definir la *potencia de  $Q$  con respecto a  $C$*  como el número  $QR \cdot QS$ .

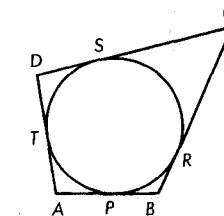
### Conjunto de problemas 14-7

1. Demostrar lo siguiente: Si la medida del ángulo determinado por dos segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto del exterior es 60, entonces los segmentos tangentes forman un triángulo equilátero con la cuerda que une los puntos de tangencia.
2. Un punto  $P$  está a 13 centímetros del centro de una circunferencia cuyo diámetro es 10 centímetros. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos tangentes desde el punto  $P$ ?
3. La suma de las longitudes de dos segmentos tangentes a una circunferencia desde el mismo punto exterior, es igual al diámetro de la circunferencia. Hállese la medida del ángulo determinado por los segmentos tangentes.
4. Datos: Las circunferencias  $C$  y  $C'$  son ambas tangentes a  $L$  en  $T$ ;  $P$  es un punto cualquiera de  $L$ , distinto de  $T$ ;  $\overline{PA}$  y  $\overline{PB}$  son segmentos tangentes. Demostrar que  $PA = PB$ .

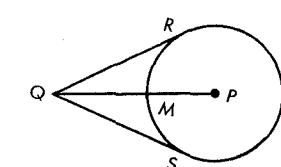


5. Los lados del  $\square ABCD$  son tangentes a una circunferencia, según se indica en la figura de la derecha. Demuéstrese que

$$AB + DC = AD + BC.$$

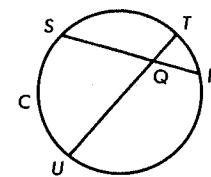


6. Dos segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto del exterior determinan un ángulo de  $60^\circ$ . Si el diámetro de la circunferencia es 10, ¿cuáles son las longitudes de los segmentos tangentes?
7. Si los segmentos tangentes mencionados en el problema 6 determinaran un ángulo de  $120^\circ$ , ¿cuáles serían las longitudes de dichos segmentos?
8. En la figura de la derecha,  $\overline{QR}$  y  $\overline{QS}$  son segmentos tangentes a la circunferencia cuyo centro es  $P$ .  $\overline{QP}$  corta a la circunferencia en  $M$ . Demuéstrese que  $M$  equidista de los segmentos tangentes.
9. Dos cuerdas de una circunferencia se intersecan. Las longitudes de los segmentos de una cuerda son 4 y 6. Si la longitud de un segmento de la otra cuerda es 3, determine la longitud del otro segmento.



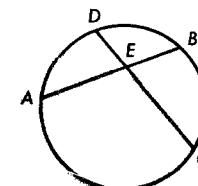
10. Determinar la potencia de  $Q$  con respecto a  $C$  (véase la figura), si se da la siguiente información:

- $QS = 9$  y  $QR = 5$
- $QS = 3$  y  $SR = 12$
- $QU = 7$  y  $QT = 5$
- $QT = 1$  y  $TU = 13$
- $QR = 4$  y  $SR = 14$



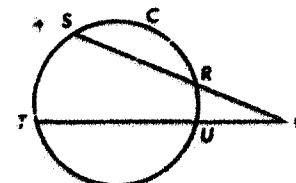
11. En una circunferencia de 37 pulgadas de diámetro, un diámetro corta a una cuerda de tal modo que el punto de intersección está a 4 pulgadas de un extremo de la cuerda y a 11 pulgadas de un extremo del diámetro. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

12. En la figura,  $AB = 25$ ,  $AE = 18$  y  $DC = 27$ . Determinense  $EB$ ,  $DE$  y  $EC$ .



13. Determinar la potencia de  $Q$  con respecto a  $C$  (véase la figura), si se da la siguiente información:

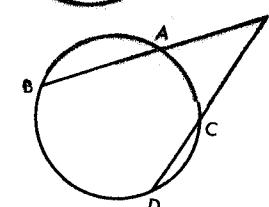
- $QR = 4$  y  $QS = 13$
- $QR = 6$  y  $RS = 8$
- $QT = 17$  y  $UT = 9$
- $QU = \sqrt{14}$  y  $QT = \sqrt{56}$
- $QS = 23$  y  $RS = 17$



14. En la figura de la derecha, si  $PA = 6$ ,  $PB = 15$  y  $PC = 8$ , determinense  $PD$ .

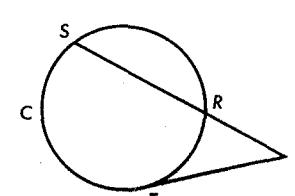
15. En la figura de la derecha, si  $PB = 24$ ,  $AB = 16$  y  $PD = 16$ , determinense  $PC$ .

16. En la figura de la derecha, si  $PD = 20$ ,  $CD = 12$  y  $AB = 27$ , determinense  $PB$ .



17. En la figura de la derecha,  $\overline{QT}$  es un segmento tangente. Determinense la potencia de  $Q$  con respecto a  $C$ , si se da la siguiente información:

- $QR = 4$ ,  $QS = 9$  y  $QT = 6$
- $QS = 13$  y  $RS = 9$
- $QT = 8$  y  $RS = 12$
- $QR = \sqrt{6}$  y  $QS = \sqrt{54}$
- $QS = \sqrt{17}$  y  $QT = \sqrt{13}$



18. En la figura de la parte superior de la página 459,  $\overline{PA}$  es un segmento tangente. Si  $PB = 5$  y  $PC = 20$ , determinense  $PA$ .

19. En la figura de la derecha,  $\overline{PA}$  es un segmento tangente. Si  $PA = 8$  y  $PB = 7$ , determinense  $PC$ .

20. En la figura,  $\overline{PA}$  es un segmento tangente. Si  $PA = 16$  y  $BC = 24$ , determinense  $PC$ .

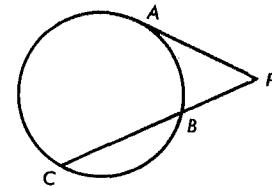
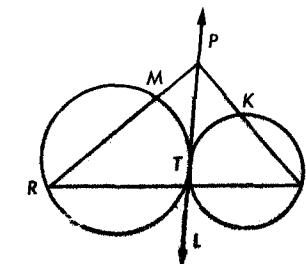
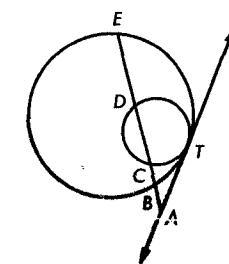


Figura para los problemas 18, 19 y 20

21. Se da la figura de la derecha, a continuación, con ambas circunferencias tangentes a  $L$  en  $T$ .  $P$  es un punto cualquiera de  $L$  distinto de  $T$ . Demuéstrese que

$$PM \cdot PR = PK \cdot PS.$$



22. En la figura anterior de la izquierda,  $A$  es un punto cualquiera de  $L$  distinto de  $T$ , el punto de tangencia común de las dos circunferencias. Demuéstrese que

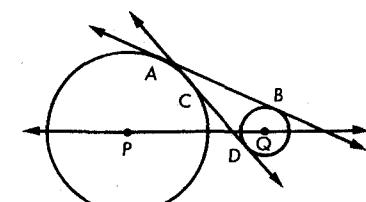
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

23. Si una tangente común a dos circunferencias interseca a la recta de los centros en un punto situado entre dichos centros, se dice que es una *tangente común interna*. Si no interseca a la recta de los centros en un punto situado entre los centros, se dice que es una *tangente común externa*.

En la figura de más adelante,  $\overleftrightarrow{AB}$  es una tangente común externa y  $\overleftrightarrow{CD}$  es una tangente común interna.

Si se dan dos circunferencias, indíquese cuántas tangentes comunes externas y cuántas tangentes comunes internas habrá en cada uno de los siguientes casos:

- Las circunferencias no se cortan, como en la figura.
- Las circunferencias son tangentes exteriormente.
- Las circunferencias se intersecan en dos puntos.
- Las circunferencias son tangentes interiormente.
- Las circunferencias son concéntricas.

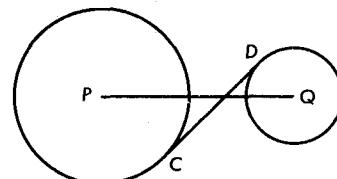
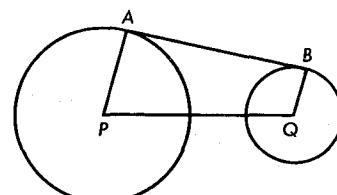


24. Dos circunferencias tienen radios de longitudes 5 y 17 y una tangente común externa de longitud 16. ¿Cuál es la distancia entre sus centros?

25. Los radios de dos circunferencias tienen longitudes 3 y 8, respectivamente, y la distancia entre sus centros es 13. Determinese la longitud del segmento tangente común externo.

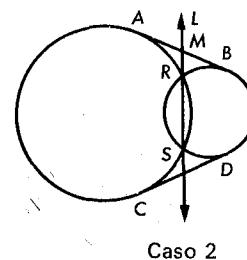
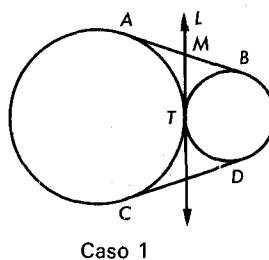
[Sugerencia: Trácese una recta que pase por  $Q$  y sea perpendicular a  $\overline{AP}$ .]

26. La distancia entre los centros de dos circunferencias de radios 3 y 6, es 18. ¿Cuál será la longitud del segmento tangente común interno?



27. Demuéstrese que los segmentos tangentes comunes externos a dos circunferencias son congruentes.

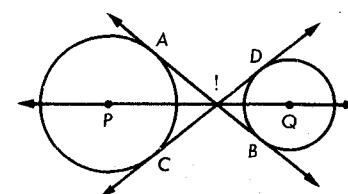
- \* 28. Demostrar lo siguiente: Si dos circunferencias y una recta se intersecan en un punto, o en dos puntos, entonces la recta biseca a cada segmento tangente común externo a las circunferencias.



Caso 1

Caso 2

29. Demostrar lo siguiente: Las tangentes comunes internas a dos circunferencias que no se cortan y la recta de los centros de las circunferencias se intersecan en el mismo punto.



[Sugerencia: Utilícese una demostración indirecta. Dibújense los radios y empleéense semejanzas y proporciones.]

- \* 30. Demostrar que los segmentos tangentes comunes internos a dos circunferencias que no se intersecan son congruentes.

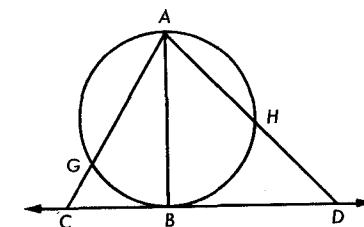
- \* 31.  $\overline{DB}$  es un diámetro de una circunferencia. Una tangente por  $D$  y una secante por  $B$  se cortan en un punto  $A$ . La secante también interseca a la circunferencia en  $C$ . Demuéstrese que  $DB^2 = AB \cdot BC$ .

- \* 32.  $\overline{RS}$  es un diámetro de una circunferencia.  $L_1$  es la tangente a la circunferencia en  $R$ , y  $L_2$  es la tangente en  $S$ . Una recta que pasa por  $Q$ , un punto cualquiera de  $L_1$  distinto de  $R$ , es tangente a la circunferencia en  $P$  e interseca a  $L_2$  en  $T$ . Demuéstrese que

$$a \square QRST = \frac{1}{2} RS \cdot QT.$$

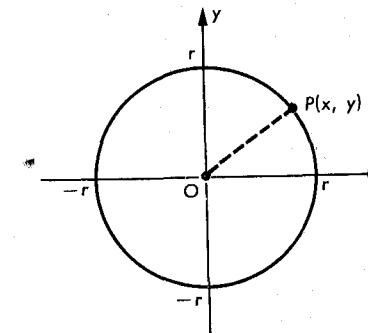
- \* 33. En la figura de la derecha,  $\overline{AB}$  es un diámetro y  $\overleftrightarrow{CD}$  es la tangente en  $B$ . Demuéstrese que

$$AC \cdot AG = AD \cdot AH.$$



## 14-8. CIRCUNFERENCIAS EN UN PLANO COORDENADO

Si marcamos un sistema de coordenadas en un plano, es fácil deducir la ecuación de una circunferencia. Consideremos primero el caso en que el centro de la circunferencia está en el origen.



La circunferencia con centro  $O$  y radio  $r$  viene definida por la condición

$$OP = r.$$

Siendo  $(x, y)$  las coordenadas de  $P$ , utilizamos la fórmula de la distancia y escribimos la ecuación algebraica así:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Si el centro es el punto  $Q(a, b)$ , entonces la circunferencia viene definida por la condición

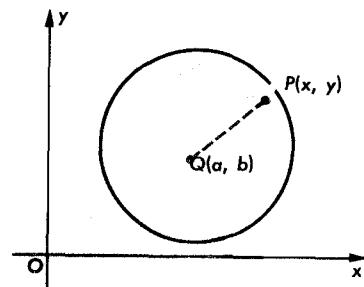
$$QP = r.$$

Algebraicamente, tenemos

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

o

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$



#### Teorema 14-24

La gráfica de la ecuación

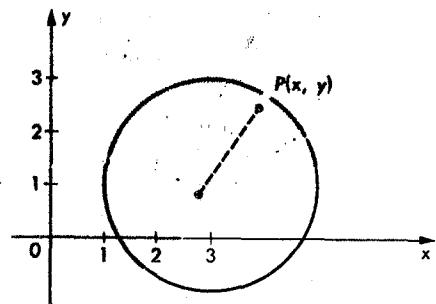
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

es la circunferencia con centro  $(a, b)$  y radio  $r$ .

Podemos aplicar este teorema de dos maneras:

(1) Si sabemos cuáles son el centro y el radio, podemos escribir una ecuación para representar la circunferencia. Por ejemplo, la circunferencia con centro  $(3, 1)$  y radio 2 es la gráfica de la ecuación

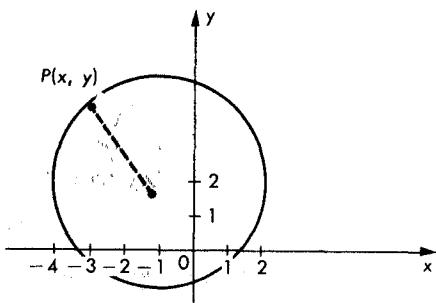
$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$



(2) Si se da una ecuación del tipo presentado en el teorema 14-24, podemos decir cuáles son el centro y el radio de la circunferencia. Por ejemplo, si se da la ecuación

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9,$$

sabemos que el centro es  $(-1, 2)$  y el radio es 3.



Hasta ahora, todo va bien. Pero, supongamos que la segunda ecuación para la circunferencia cae en manos de alguien que gusta de "simplificar" todas las ecuaciones

que ve. Esta persona hubiera "simplificado" la forma canónica, obteniendo primero

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$$

y, luego,

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$$

Algunas veces, encontraremos ecuaciones de circunferencias dadas en esa forma. Para determinar cuáles son las gráficas correspondientes, tenemos que "deshacer la simplificación" de las ecuaciones, para obtener la forma canónica

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

El método consiste en completar cuadrados. Primero, reagrupamos los términos en  $x$  y los términos en  $y$ ; después, pasamos los términos constantes al otro miembro de la igualdad. Para el caso en consideración, esto nos da

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4.$$

Ahora, debemos añadir algo a los dos primeros términos para completar un cuadrado perfecto. Es decir, queremos

$$x^2 + 2x + (?) = (x - a)^2.$$

Puesto que

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2,$$

tendremos  $a = -1$  y, en consecuencia,  $a^2 = 1$ . Por tanto, lo que debemos añadir es 1. (La regla es simple: Dividimos el coeficiente de  $x$  por 2 y cuadramos el resultado.) Del mismo modo, vemos que para obtener otro cuadrado perfecto, debemos añadir 4 a los términos en  $y$ .

Como hemos añadido un total de 5 unidades al miembro de la izquierda, debemos también añadir 5 unidades al miembro de la derecha. Esto nos da

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 + 5,$$

o sea,

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9,$$

que es la forma canónica. Basándonos en ésta, podemos decir que la gráfica es la circunferencia con centro  $(-1, 2)$  y radio 3.

Si en la forma canónica  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , efectuamos las multiplicaciones y reagrupamos los términos, obtenemos

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Esta ecuación tiene la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

donde

$$A = -2a, \quad B = -2b \quad \text{y} \quad C = a^2 + b^2 - r^2.$$

Así, pues, tenemos el siguiente teorema:

#### Teorema 14-25

Toda circunferencia es la gráfica de una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Tal vez, parezca razonable suponer que el recíproco de este resultado también es cierto. Es decir, podríamos pensar que la gráfica de toda ecuación de la forma indicada es una circunferencia. Pero esto no es cierto. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Aquí,  $A = B = C = 0$ . Si  $x$  y  $y$  satisfacen a esta ecuación, entonces ambos son cero. Por tanto, la gráfica contiene un solo punto, a saber, el origen.

Ahora, consideremos la ecuación

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Aquí,  $A = B = 0$  y  $C = 1$ . Como  $x^2 \geq 0$  y  $y^2 \geq 0$  para todo  $x$  y todo  $y$ , se deduce que  $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$  para todo  $x$  y todo  $y$ . Por consiguiente,  $x^2 + y^2 + 1$  será distinto de 0 para valores arbitrarios de  $x$  y  $y$ . Así, pues, la gráfica de nuestra ecuación *no contiene punto alguno*; la gráfica es el conjunto vacío.

El siguiente teorema nos dice que, en efecto, las únicas gráficas posibles son la circunferencia, como corrientemente se espera, y las dos posibilidades inesperadas que acabamos de considerar:

#### Teorema 14-26

La gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

es o bien (1) una circunferencia, o (2) un punto, o (3) el conjunto vacío.

**Demostración:** En la ecuación general, completaremos el cuadrado en los términos

en  $x$  y, también, en los términos en  $y$ , tal como hicimos en el ejemplo anterior. Tenemos, pues,

$$x^2 + Ax + y^2 + By = -C,$$

$$x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + By + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2,$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}.$$

Ahora, hay tres posibilidades:

(1) Si la fracción de la derecha es positiva, tiene una raíz cuadrada real. La gráfica es, entonces, la circunferencia con centro

$$(a, b) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

y radio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

(2) Si la fracción de la derecha es 0, entonces la gráfica es el punto

$$\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right).$$

(3) Si la fracción de la derecha es negativa, entonces la gráfica es el conjunto vacío, porque el miembro de la izquierda nunca puede ser negativo.

#### Conjunto de problemas 14-8

[Nota: Los ejercicios en este Conjunto de problemas deben resolverse mediante métodos de la geometría cartesiana, en lo posible.]

1. En cada uno de los siguientes casos, escribir la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el origen y cuyo radio se da a continuación:

- |        |                 |                   |
|--------|-----------------|-------------------|
| (a) 4  | (b) 7           | (c) $\frac{2}{3}$ |
| (d) 11 | (e) $\sqrt{15}$ | (f) $\pi$         |

2. Dada la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 25$ , ¿cuáles de los siguientes puntos están en la circunferencia?

- |             |                              |                              |
|-------------|------------------------------|------------------------------|
| (a) (0, 5)  | (b) (3, -4)                  | (c) (3, 2)                   |
| (d) (24, 1) | (e) $(\sqrt{8}, -\sqrt{17})$ | (f) $(2\sqrt{3}, \sqrt{13})$ |

**Teorema 14-25**

Así, pues, tenemos el siguiente teorema:

$$A = -2a, \quad B = -2b \quad y \quad C = a^2 + b^2 - r^2.$$

donde

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

Toda circunferencia es la gráfica de una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Tal vez, parezca razonable suponer que el reciproco de este resultado también es cierto. Es decir, podemos pensar que la gráfica de toda ecuación de la forma indicada es una circunferencia. Pero esto no es cierto. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Aquí,  $A = B = C = 0$ . Si  $x$  y  $y$  satisfacen a esta ecuación, entonces ambos son cero.

Por tanto,

la gráfica contiene un solo punto, a saber, el origen.

Ahora, consideremos la ecuación

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Aquí,  $A = B = C = 1$ . Como  $x^2 \geq 0$  y  $y^2 \geq 0$  para todo  $x$  y  $y$ , se deduce que  $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$  para todo  $x$  y todo  $y$ . Por consiguiente,  $x^2 + y^2 + 1$  será distinto de 0 para valores arbitrarios de  $x$  y  $y$ . Así, pues, la gráfica de nuestra ecuación no contiene punto alguno; la gráfica es el conjunto vacío.

El siguiente teorema nos dice que, en efecto, las únicas gráficas posibles son la circunferencia, como corrientemente se espera, y las dos posibilidades imposibles que acabamos de considerar:

**Teorema 14-26**

La gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

es o bien (1) una circunferencia, o (2) un punto, o (3) el conjunto vacío.

**Demotración:** En la ecuación general, completemos el cuadrado en los términos

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

(m)

(n)

(o)

(p)

(q)

(r)

(s)

2. Dada la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 25$ , ¿cuáles de los siguientes puntos

(d) 11 (e)  $\sqrt{15}$  (f)  $\pi$

(a) 4 (b) 7 (c)  $\frac{3}{2}$

están en la circunferencia?

1. En cada uno de los siguientes casos, escribir la ecuación de la circunferencia cuyo centro

la geometría cartesiana, en lo posible.]

[Nota: Los ejercicios en este Conjunto de problemas debén resolverse mediante métodos de

Conjunto de problemas 14-8

que acabanos de considerar:

&lt;p

3. Se da la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 36$ . Indiquense cuáles de los siguientes puntos están en su interior, cuáles están en su exterior y cuáles están en la circunferencia:

- (a)  $(3, 3\sqrt{3})$  (b)  $(4, -5)$  (c)  $(-6, 0)$  (d)  $(5, -3)$   
 (e)  $(-4, -4)$  (f)  $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{7})$  (g)  $(\frac{9}{2}, \frac{7}{4})$  (h)  $(-2\sqrt{6}, 4)$

4. En cada uno de los siguientes casos, determinar el radio y escribir la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que contiene al punto dado:

- (a)  $(0, -4)$  (b)  $(3, 5)$  (c)  $(-2, 7)$  (d)  $(2, \sqrt{17})$

5. Escribir la ecuación de cada una de las circunferencias cuyo centro y radio se dan a continuación:

- (a)  $(2, 5); 4$  (b)  $(-3, 0); 6$   
 (c)  $(-4, -6); \sqrt{21}$  (d)  $(0, 7); \frac{5}{3}$

6. Una circunferencia cuyo centro es el punto  $(2, 3)$ , contiene al punto  $(6, 6)$ . Escribáse su ecuación.

7. Una circunferencia con centro  $(-4, 0)$  pasa por el punto  $(2, -1)$ . Escribáse su ecuación.

8. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son  $(-6, 2)$  y  $(6, -2)$ . Determínense el centro y el radio de la circunferencia y escribáse su ecuación.

9. Escribir la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro con extremos  $(5, 8)$  y  $(-1, -4)$ .

10. Determinar el centro y el radio de la circunferencia representada por cada una de las siguientes ecuaciones:

- (a)  $x^2 + y^2 = 16$  (b)  $x^2 + y^2 - 9 = 0$   
 (c)  $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 8$  (d)  $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$   
 (e)  $(x - 2)^2 + y^2 = 13$  (f)  $4x^2 + 4y^2 = 36$   
 (g)  $9x^2 + 9y^2 - 25 = 0$  (h)  $3x^2 + 3(y - 1)^2 = 12$   
 (i)  $2(x + 5)^2 + 2(y - 4)^2 - 14 = 0$  (j)  $5x^2 + 5y^2 - 7 = 0$

11. Determinar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4.$$

12. Determinar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0.$$

13. Dibujar la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 11.$$

14. Dibujar la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0.$$

15. Dibujar la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = -10.$$

16. Escribir la ecuación de la circunferencia con centro  $(-3, 4)$  y que es tangente al eje  $x$ .

17. Escribir la ecuación de la circunferencia tangente al eje  $x$  y al eje  $y$ , si se sabe que su radio es 3 y que su centro está en el cuarto cuadrante.

18. Identificar las figuras geométricas representadas por las siguientes ecuaciones:

- (a)  $x^2 + y^2 = 15$   
 (b)  $x^2 + y^2 + 14x - 16y + 104 = 0$   
 (c)  $x^2 + 6x - 2y - x^2 + 2 = 0$   
 (d)  $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 33 = 0$   
 (e)  $2x^2 + 2y^2 + 12x + 9 = 0$   
 (f)  $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$

19. En la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 49$ , una cuerda es perpendicular a un diámetro en el punto  $(0, 4)$ . Determínense la longitud de la cuerda y las coordenadas de sus extremos.

20. Demostrar que la mediatrix del segmento cuyos extremos son  $(a, 0)$  y  $(0, a)$ , contiene al centro de la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = a^2$ .

21. Se dan la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 225$  y los puntos  $A(-15, 0)$  y  $B(9, 12)$ .

- (a) Demuéstrese que  $\overline{AB}$  es una cuerda de la circunferencia.  
 (b) Determínese el punto medio de  $\overline{AB}$ .  
 (c) Determínese la ecuación de la mediatrix de  $\overline{AB}$ .  
 (d) Demuéstrese que la mediatrix de  $\overline{AB}$  contiene al centro de la circunferencia.

\* 22. Se dan la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$  y los puntos  $D(-1, 2)$  y  $E(8, 5)$ .

- (a) Demuéstrese que  $\overline{DE}$  es una cuerda de la circunferencia.  
 (b) Demuéstrese que la mediatrix de  $\overline{DE}$  contiene al centro de la circunferencia.  
 (c) Determínese la distancia del centro de la circunferencia a  $\overline{DE}$ .

23. Determinar el área de un cuadrado inscrito en la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 144$ .
- \* 24. Determinar el área de un cuadrado inscrito en la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ .
- \* 25. Una cuerda de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 72$  es tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 18$ . Determíñese la longitud de la cuerda.
- \*+ 26. Si la cuerda del problema 25 es tangente a la circunferencia más pequeña en el punto  $(-3, -3)$ , obténgase la ecuación de la recta determinada por la cuerda, y hállese las coordenadas de los extremos de la cuerda.
27. Determinar las longitudes de los segmentos tangentes desde el punto  $(13, 0)$  a la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 25$ .
28. Determinar las longitudes de los segmentos tangentes desde el punto  $(16, 12)$  a la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 100$ .
- \* 29. Determinar las longitudes de los segmentos tangentes desde el punto  $(-8, 3)$  a la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 - 14x + 10y + 10 = 0$ .
- \*+ 30. Se da la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 36$ . ¿Para qué valores de  $a$  estará el punto  $(a, a + 4)$  en el interior de la circunferencia?
- \*+ 31. Demostrar que las dos circunferencias cuyas ecuaciones son  $x^2 + y^2 = 16$  y  $x^2 + y^2 - 20x + 64 = 0$  son tangentes exteriormente. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de tangencia?
- \*+ 32. Demostrar que las dos circunferencias cuyas ecuaciones son  $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$  y  $x^2 + y^2 - 16x - 12y = 0$  son tangentes exteriormente. Determíñese la ecuación de la recta que pasa por el punto de contacto y que es la tangente común.
- \*+ 33. Se da la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 + 16x + 12y = 125$ .
  - Determíñese la ecuación de la circunferencia de radio 5 que es tangente interiormente a la circunferencia dada en el punto  $(4, 3)$ .
  - Determíñese la ecuación de la tangente común a las dos circunferencias.
- \*+ 34. Determíñese la ecuación de la circunferencia que es tangente a cada una de las cuatro circunferencias representadas por las siguientes ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + 10x = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 10y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10y = 0$$

- \*\* 35. Utilizar una escala aproximadamente de 1 pulgada = 1 unidad, para hacer un dibujo detallado de las circunferencias cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

- (a) Determíñese la ecuación de la circunferencia que es tangente interiormente a cada una de las circunferencias dadas.
- (b) Determíñese la ecuación de la circunferencia que es tangente exteriormente a cada una de las circunferencias dadas.

### Resumen del capítulo

1. El alumno deberá cerciorarse de que sabe definir cada uno de los siguientes términos:

circunferencia	circunferencia máxima	arco interceptado
superficie esférica	extremo de un radio	ángulo central
cuerda	punto de contacto	arco mayor
secante	interior de una circunferencia	arco menor
tangente	tangente interiormente	semicircunferencia
radio	tangente exteriormente	segmento tangente
diámetro	ángulo inscrito	

2. Completar el siguiente enunciado: Dos circunferencias, o dos superficies esféricas, con el mismo centro se llaman \_\_\_\_\_.

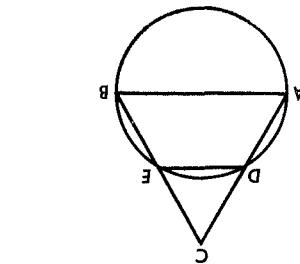
3. Completar el siguiente enunciado: La intersección de un plano y una superficie esférica es \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_.

4. Completar el siguiente enunciado: La intersección de una recta y una circunferencia es \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_.

5. Completar el siguiente enunciado: Un punto está en el exterior de una circunferencia, si está en \_\_\_\_\_ y su distancia al centro es \_\_\_\_\_.

6. Completar el siguiente enunciado: Un ángulo inscrito en un arco mayor es siempre un ángulo \_\_\_\_\_, y un ángulo inscrito en un arco menor es siempre un ángulo \_\_\_\_\_; un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo \_\_\_\_\_.

7. Completar el siguiente enunciado: Si dos cuerdas de una circunferencia se intersecan en un punto de su interior, la potencia del punto con respecto a la circunferencia es \_\_\_\_\_.



22. La circunferencia que tiene como diámetro el lado  $AB$  del triángulo equilátero  $\triangle ABC$  interseca a los otros dos lados del  $\triangle ABC$  en  $D$  y en  $E$ , segúin se indica en la figura. Si el diámetro de la circunferencia es de 16, determine el área del cuadrilátero inscrito  $ABED$ .

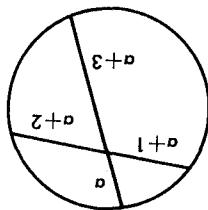
21. En un tablero de madera laminada, se hace un agujero circular de 40 centímetros de diámetro y en el agujero se coloca un globo esférico de 50 centímetros de diámetro. ¿Cuánto sobrará el globo por debajo del tablero?

20. Un cuadrilatero está inscrito en una circunferencia. Si las medidas de los otros dos ángulos son 68 y 143, ¿cuáles son las medidas de los otros dos ángulos?

19. Determinar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + 10x + y^2 + 16 = 0$ .

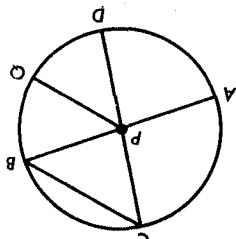
18. Escribir la ecuación de la circunferencia con centro  $(0, 0)$  y radio 4.

17. Mientras exploraba unas ruinas antiguas, un arqueólogo encuentra un trozo del borde de una rueda. Para poder reconstruir la rueda, necesita conocer el diámetro. A su lili, con la cuerda  $AC$ . Si  $AB = 15$  pulgadas y  $BC = 24$  pulgadas, ¿cuál era el diámetro de la rueda?



16. Demostar que es imposible que las longitudes de los segmentos determinados en dos cuerdas de una circunferencia, que se intersecan, sean cuatro números enteros consecutivos.

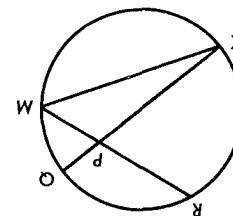
15. Si  $AB$  es un diámetro de una circunferencia con centro  $P$ , y  $X$  y  $Y$  son puntos de la circunferencia tales que  $XY$  biseca al  $\angle AXB$ , demuestre que  $XY \perp AB$ .



14. Se da la circunferencia con centro  $P$  y, además,  $CB \parallel PQ$ . Si  $m\angle BCP = 55$ , determine  $mBQ$  y  $mAD$ .

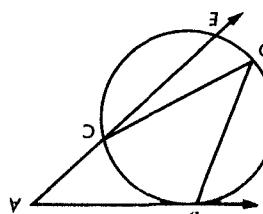
- (i) Dos tangentes a una misma circunferencia pueden ser perpendiculares entre sí.
- (k) Dos tangentes a una circunferencia en los extremos de un diámetro son paralelas.
- (j) El centro de un arco es el punto que biseca al arco.
- (l) Una tangente a una circunferencia en el punto medio de un arco es paralela a la cuerda correspondiente al arco.
- (m) Si dos cuerdas de una circunferencia no son congruentes, la cuerda más corta es la más cerca del centro.
- (n) Si dos cuerdas de una circunferencia no son congruentes, la cuerda más corta es la que biseca a dos cuerdas de una circunferencia es perpendicular a cada una de ellas.
- (o) Una secante que biseca a dos cuerdas de una circunferencia es perpendicular a cada cuerda que biseca a la cuerda.
- (p) Si una recta biseca a una cuerda de una circunferencia, entonces biseca al arco menor correspondiente a la cuerda.
- (q) Una secante que biseca a dos cuerdas de una circunferencia es perpendicular a cada una de ellas.
- (r) Una secante que biseca a dos cuerdas de una circunferencia es perpendicular a cada cuerda que biseca a la cuerda.
- (s) Si dos arcos que están inscritos en dos cuerdas son congruentes, entonces los arcos son congruentes.
- (t) Si dos arcos son congruentes, un arco inscrito en uno de los arcos es congruente con un arco inscrito en el otro.
- (u) La medida de un arco central es igual a la medida del arco interceptado.
- (v) La medida de los segmentos enunciados son ciertos y cuáles son falsos:

Figura para los problemas 11 y 12



12. En la misma figura anterior, si  $MR = MK$ ,  $mMK = 140$  y  $mMQ = 26$ , calcular  $m\angle RPK$ .
11. En la figura de la derecha, si  $RP = 8$ ,  $MP = 6$  y  $PQ = 3$ , calcular  $KQ$ .

Figura para los problemas 8, 9 y 10

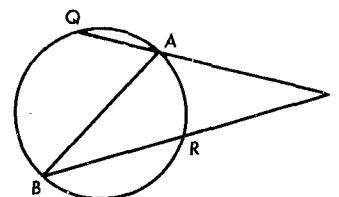


10. En la figura anterior, si  $BD = CD = 15$  y  $mBC = 120$ , cuál es el radio de la circunferencia?

9. En la misma figura anterior,  $AB$  es tangente a la circunferencia. Si  $AC = 9$  y  $CE = 7$ , calcular  $AB$ .

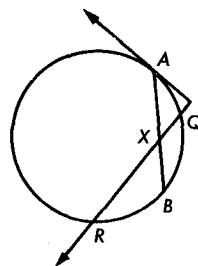
8. En la figura,  $AB$  es tangente a la circunferencia. Si  $mBD = 128$ ,  $mDE = 38$  y  $mCE = 104$ , cuáles son las medidas de los seis ángulos?

- \* 23. En la figura de la derecha,  $\overline{AB}$  es un diámetro de la circunferencia. Si  $AB = 8$ ,  $AQ = 4$  y  $PQ = 12$ , determinense  $PB$  y  $PR$ .



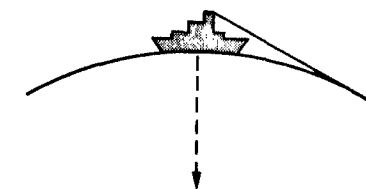
24. Demostrar que los segmentos tangentes a todas las circunferencias que son tangentes a una recta en el mismo punto, trazados desde otro punto cualquiera de la recta, son congruentes.

- \* 25. Se sabe que  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son puntos de una circunferencia tales que  $m\widehat{AB} = m\widehat{AC}$ ,  $m\widehat{BC} = 120$ .  $P$  es un punto cualquiera de  $\overline{AB}$ . Demuéstrese que  $PA + PB = PC$ . [Sugerencia: Trácese una recta por  $A$  paralela a  $\overline{PB}$ .]



- \* 26. En la figura de la derecha,  $\overrightarrow{PA}$  es tangente a la circunferencia en  $A$ ;  $AP = PX = XB$ . Si  $PQ = 1$  y  $QR = 8$ , calcular  $AX$ .

- (c) Sobre el puente de un barco que navega en el océano, el capitán pide a un joven oficial nuevo que determine la distancia al horizonte. El oficial toma papel y lápiz y a los pocos instantes presenta su respuesta. En el papel, había escrito la fórmula  $d = \frac{5}{4}\sqrt{h}$ . Demuéstrese que esta fórmula da una buena aproximación de la distancia en millas al horizonte, si  $h$  es la altura en pies del observador sobre el nivel del mar. (Puede suponerse que el radio de la Tierra es 4000 millas.) Si el puente estaba a 88 pies sobre el nivel del mar, ¿cuál era la distancia al horizonte?



### PROBLEMAS OPTATIVOS

- (a) Uno de los primeros datos que aprende un estudiante de astronomía es que la latitud de un lugar en la Tierra es la misma que el ángulo de elevación de la estrella Polar sobre el horizonte, cuando se observa desde dicho lugar. Demuéstrese por qué esto es así, probando el teorema de más adelante. La situación real se describe mediante el siguiente simbolismo:  $\overleftrightarrow{NS}$  es el eje terrestre, la circunferencia es un meridiano,  $C$  es el centro,  $E$  está en el ecuador,  $O$  es el observador,  $\overleftrightarrow{OH}$  es el horizonte, y  $m\angle POH$  es la altura de la estrella Polar.

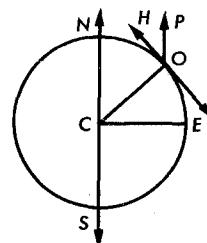
Datos: La circunferencia con centro  $C$ ;

radio  $\overrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{NS}$ ;

$\overleftrightarrow{OH}$  es la tangente a la circunferencia en  $O$ ;

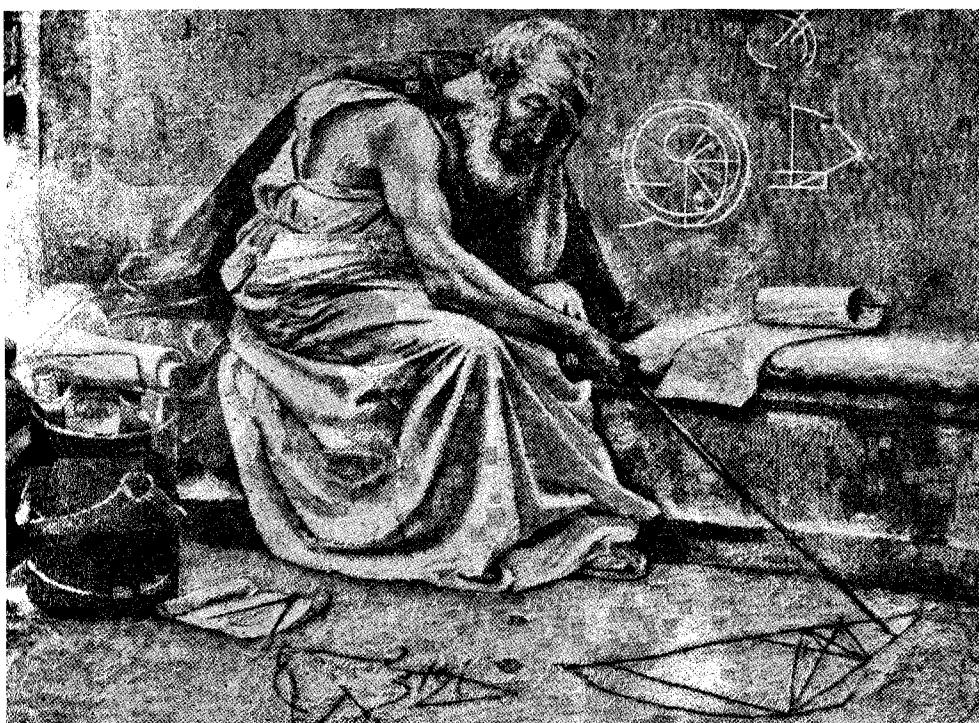
$\overrightarrow{OP} \parallel \overleftrightarrow{NS}$ .

Demostrar que  $m\widehat{OE} = m\angle POH$ .



- (b) Dos circunferencias no congruentes se intersecan en dos puntos  $X$  y  $Y$ . Una secante que pasa por  $X$  corta a la circunferencia mayor en  $A$  y a la circunferencia menor en  $B$ . Una secante que pasa por  $Y$  interseca a la circunferencia mayor en  $C$  y a la circunferencia menor en  $D$ . Demuéstrese que  $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ .

# 15 | Caracterizaciones y construcciones

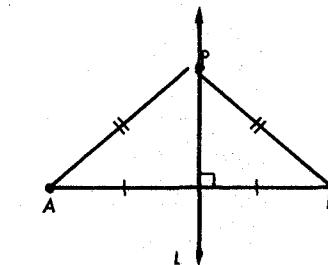


## 15-1. CARACTERIZACIONES

El alumno recordará que en el Capítulo 6, demostramos un teorema de caracterización referente a la mediatrix de un segmento en un plano.

### Teorema 6-2

La mediatrix de un segmento en un plano, es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.



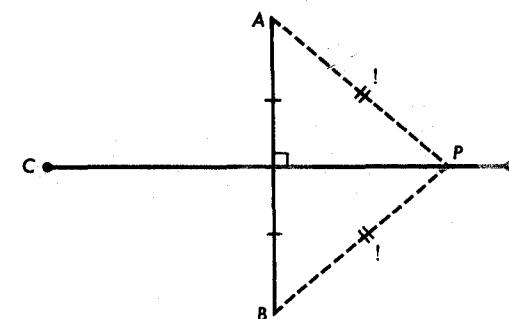
Más brevemente, decimos que los puntos de la mediatrix  $L$  están *caracterizados* por la condición  $PA = PB$ . Con esto, entendemos que (1) todo punto de  $L$  satisface a la condición  $PA = PB$ , y (2) todo punto del plano que satisface a la condición  $PA = PB$  está en  $L$ .

Análogamente, demostramos en el Capítulo 8 que el plano bisecante perpendicular de un segmento  $\overline{AB}$  está caracterizado por la condición  $PA = PB$ . (Desde luego, aquí  $P$  puede ser un punto cualquiera del espacio.)

Las caracterizaciones aparecen no solamente en teoremas, sino también en definiciones. Por ejemplo, la superficie esférica con centro  $P$  y radio  $r$  es, por definición, el conjunto de todos los puntos  $Q$  tales que  $PQ = r$ . Así, pues, decimos que la superficie esférica está caracterizada por la condición

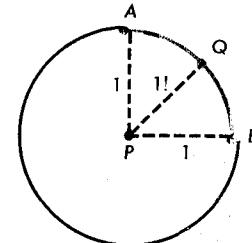
$$PQ = r.$$

*Advertencia:* En la figura plana presentada a continuación, todo punto de  $\overline{CD}$  equidista de  $A$  y  $B$ :



Pero el segmento  $\overline{CD}$  no está caracterizado por la condición  $PA = PB$ , porque esta condición incluye muchos puntos que no están en  $\overline{CD}$ , a saber, todos los puntos

de la recta  $\overleftrightarrow{CD}$ . Análogamente, en la figura siguiente, todo punto del arco  $\widehat{AB}$  dista 1 unidad del punto  $P$ . Pero  $\widehat{AB}$  no está caracterizado por la condición  $PQ = 1$ , porque todos los demás puntos de la circunferencia satisfacen a la misma condición.



Ésta es la razón por la cual, al expresar de otro modo un teorema de caracterización, generalmente el nuevo enunciado consta de dos partes:

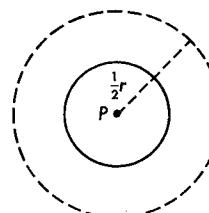
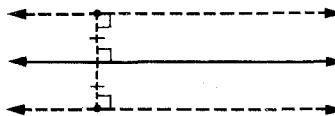
- (1) Todo punto del conjunto dado satisface a la condición dada.
- (2) Recíprocamente, todo punto que satisface a la condición dada está en el conjunto dado.

Véase, por ejemplo, cómo se redactaron de otro modo los teoremas 6-2 y 8-6.

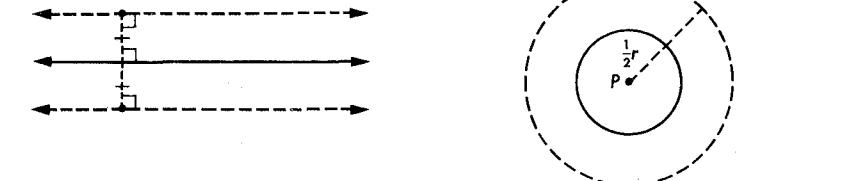
### Conjunto de problemas 15-1

En los problemas del 1 al 8, se acompaña cada enunciado de caracterización con una figura representativa. El alumno deberá decidir si cada enunciado es, efectivamente, una caracterización. Si lo es, contéstese "Cierto". Si no lo es, corríjase el enunciado y constrúyase una figura correcta. En las figuras presentadas, el conjunto de puntos que se pide está indicado mediante líneas de trazo lleno, mientras que las líneas de trazos corresponden a las condiciones dadas o a figuras necesarias para la explicación.

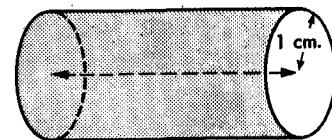
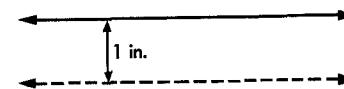
1. El conjunto de todos los puntos del plano  $E$  que equidistan de dos rectas paralelas en  $E$  es la mediatrix, en  $E$ , de un segmento cualquiera perpendicular a las dos rectas, que tenga un extremo en cada una de ellas.



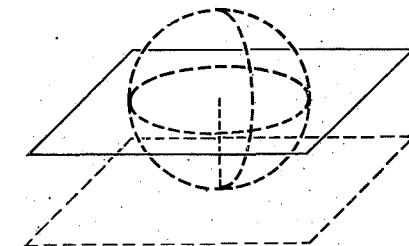
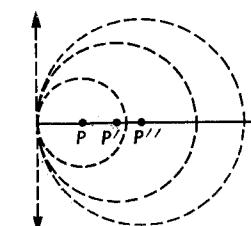
2. El conjunto de todos los puntos que son puntos medios de los radios de una circunferencia dada es una circunferencia concéntrica con la dada y cuyo radio es igual a la mitad del radio de la circunferencia dada.



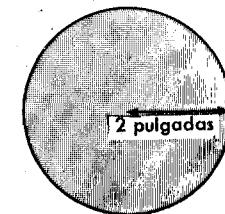
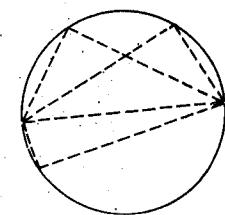
3. El conjunto de todos los puntos de un plano que están a 1 centímetro de una recta dada es una recta paralela a ella y a una distancia de 1 centímetro de la misma.



4. El conjunto de todos los puntos que están a 1 centímetro de una recta dada es una superficie cilíndrica de radio 1 centímetro y que tiene como eje la recta dada.
5. El conjunto de todos los puntos que son centros de circunferencias tangentes a una recta dada en un punto dado de ella, es un rayo perpendicular a la recta en el punto dado.



6. El conjunto de todos los puntos que son centros de superficies esféricas de radio  $r$ , tangentes a un plano dado, es un plano paralelo al dado y a una distancia  $r$  de éste.
7. El conjunto de todos los puntos de un plano que son vértices de ángulos rectos de triángulos rectángulos que tienen el mismo segmento como hipotenusa, es una circunferencia con la hipotenusa como diámetro, exceptuando los extremos de éste.

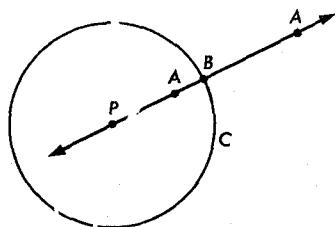


8. El conjunto de todos los puntos de un plano que distan de un punto dado menos de 2 pulgadas, es la reunión de una circunferencia de radio 2 pulgadas con centro en el punto dado, y su interior.

En cada uno de los problemas del 9 al 20, describáse el conjunto de puntos mencionado y hágase un dibujo para representarlo:

9. El conjunto de todos los puntos que equidistan de dos puntos dados.
10. El conjunto de todos los puntos que son puntos medios de todas las cuerdas de una circunferencia, que tienen una longitud dada.

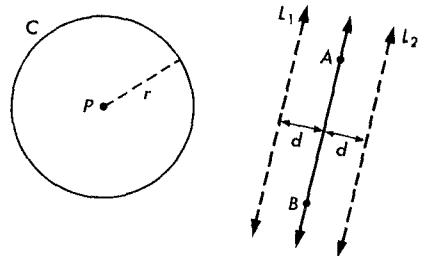
11. El conjunto de todos los puntos que son puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que tienen un punto dado de la circunferencia como extremo común.
12. El conjunto de todos los puntos que están a 1 centímetro de un segmento dado de longitud 4 centímetros y que, también, distan 2 centímetros del punto medio del segmento.
13. El conjunto de todos los puntos  $A$ , de un plano, para los cuales el  $\triangle ABC$ , que tiene el segmento dado  $\overline{BC}$  como base, tiene un área dada.
14. El conjunto de todos los puntos de un plano que son centros de circunferencias tangentes a una circunferencia dada en un punto dado de la misma.
15. El conjunto de todos los puntos del exterior de una circunferencia de diámetro 6 que son extremos de segmentos tangentes de longitud 4.
16. El conjunto de todos los puntos de un plano que están a  $\frac{1}{2}$  centímetro de un segmento  $\overline{AB}$  de longitud 2 centímetros.
17. El conjunto de todos los puntos que están a  $\frac{1}{2}$  centímetro de un segmento  $\overline{AB}$  de longitud 2 centímetros.
18. El conjunto de todos los puntos de un plano que son centros de circunferencias de radio dado y que pasan por un punto dado.
19. El conjunto de todos los puntos de un plano que distan 3 centímetros de dos puntos cuya distancia es 5 centímetros.
20. El conjunto de todos los puntos que distan 3 centímetros de un punto dado y que, además, distan 5 centímetros de un punto dado del plano.
21. Se dan una circunferencia  $C$ , con centro  $P$ , y un punto  $A$  en el plano de  $C$ . Sea  $B$  el punto de intersección de  $\overleftrightarrow{AP}$  y  $C$  tal que  $P$  no esté entre  $A$  y  $B$ . Entonces,  $AB$  es la *distancia del punto A a la circunferencia C*.
22. Describese el conjunto de todos los puntos de un plano cuyas distancias a una circunferencia son iguales al radio de la circunferencia.
23. Algunas veces, para resolver un problema de caracterización, es necesario analizar varios casos. Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema y su resolución, que el alumno deberá completar, llenando los espacios en blanco:



Describese el conjunto de todos los puntos de un plano a una distancia fija de un punto dado y que equidistan de dos rectas paralelas dadas.

Resolución:

- (1) El conjunto de todos los puntos a una distancia  $r$  del punto  $P$  es la  $\square$   $C$  con centro  $P$  y radio  $r$ .
  - (2) El conjunto de todos los puntos equidistantes de las rectas paralelas  $L_1$  y  $L_2$  es  $\overleftrightarrow{AB}$ , la  $\square$  de un segmento entre  $L_1$  y  $L_2$  y perpendicular a las dos rectas.
  - (3) El conjunto en cuestión es la intersección de  $C$  y  $\overleftrightarrow{AB}$ .
    - (i) Si  $C$  y  $\overleftrightarrow{AB}$  no se intersecan, el conjunto es  $\square$ .
    - (ii) Si  $C$  y  $\overleftrightarrow{AB}$  son  $\square$ , el conjunto contiene solamente un punto.
    - (iii) Si  $\overleftrightarrow{AB}$  contiene un punto en el  $\square$  de  $C$ , el conjunto contiene exactamente  $\square$  puntos.
- + 24. Describir el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de dos puntos dados y, también, de dos rectas paralelas dadas.
- + 25. Describir el conjunto de todos los puntos de un plano que están a una distancia fija de un punto dado y a una distancia fija de una recta dada.
- + 26. Describir el conjunto de todos los puntos de un plano que son centros de circunferencias tangentes a una recta dada en un punto dado de la misma y que son centros de circunferencias de radio dado, tangentes a la misma recta dada.
- + 27. Describir el conjunto de todos los puntos que están a una distancia fija de un punto dado y a una distancia fija de un punto dado de dicho punto.

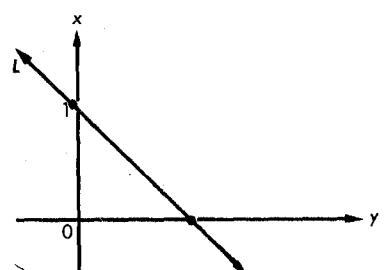


## 15-2. EL EMPLEO DE CARACTERIZACIONES EN LA GEOMETRÍA CARTESIANA

En la geometría cartesiana, constantemente utilizamos caracterizaciones. Por ejemplo, en la figura, la recta  $L$  es la gráfica de la ecuación

$$x + y = 1.$$

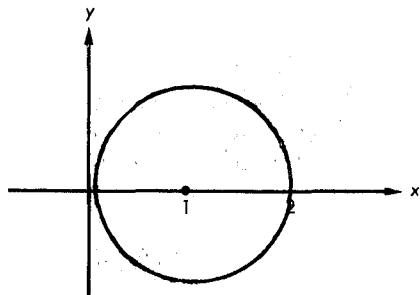
(¿Por qué?) Esto significa que la recta está *caracterizada* por la condición  $x + y = 1$ ; todo punto  $(x, y)$  de  $L$  satisface a la condición y ningún otro punto  $(x, y)$  la satisface.



Análogamente, en la próxima figura, la circunferencia está caracterizada por la condición

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

(¿Por qué?) De hecho, cada vez que decimos que una figura es la gráfica de cierta ecuación, implicamos que la ecuación es una caracterización de la gráfica. En la mayoría de los casos, nuestro trabajo en la geometría cartesiana depende de que las figuras que estamos tratando estén caracterizadas por ecuaciones simples.



### Conjunto de problemas 15-2

[Nota: La siguiente notación se utiliza frecuentemente para describir conjuntos en la geometría cartesiana:

$$\{(x, y) \mid x + y = 1 \text{ y } x = 1\}.$$

Esto significa "El conjunto de todos los pares ordenados  $(x, y)$  tales que  $x + y = 1$  y  $x = 1$ ". Desde luego, el conjunto consiste en el par único  $(1, 0)$ . Por tanto, podríamos escribir  $\{(x, y) \mid x + y = 1 \text{ y } x = 1\} = \{(1, 0)\}$ .]

1. Hacer un esquema de los siguientes conjuntos (es decir, dibujar sus gráficas):

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| (a) $\{(x, y) \mid x = 3\}$     | (b) $\{(x, y) \mid y = -2\}$    |
| (c) $\{(x, y) \mid y = x - 2\}$ | (d) $\{(x, y) \mid x + y = 0\}$ |

2. Hacer un esquema de los siguientes conjuntos:

- |                              |                                    |
|------------------------------|------------------------------------|
| (a) $\{(x, y) \mid x > -1\}$ | (b) $\{(x, y) \mid y \leq 0\}$     |
| (c) $\{(x, y) \mid x < y\}$  | (d) $\{(x, y) \mid x + y \geq 1\}$ |

3. Hacer un esquema del conjunto de todos los puntos  $P(x, y)$  que equidistan de los puntos  $A(5, 0)$  y  $B(1, 0)$  y describir dicho conjunto mediante una ecuación.

4. Hacer un esquema del conjunto de todos los puntos  $P(x, y)$  que equidistan de los puntos  $C(2, 2)$  y  $D(2, -8)$  y describir dicho conjunto mediante una ecuación.

5. Hacer un esquema del conjunto de todos los puntos  $P(x, y)$  que equidistan de las rectas  $x = -3$  y  $x = 7$  y describir dicho conjunto mediante una ecuación.

6. Hacer un esquema de cada uno de los siguientes conjuntos:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$      | (b) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 8\}$       |
| (c) $\{(x, y) \mid (x - 1)^2 + y^2 = 4\}$ | (d) $\{(x, y) \mid x^2 + (y + 1)^2 = 9\}$ |

7. Hacer un esquema del conjunto de todos los puntos  $P(x, y)$  que equidistan de los puntos  $A(0, 5)$  y  $B(5, 0)$  y describir dicho conjunto mediante una ecuación.

8. Hacer un esquema de cada uno de los siguientes conjuntos y describir el conjunto de la manera más breve posible:

- $\{(x, y) \mid x = 3 \text{ y } y = 6\}$
- $\{(x, y) \mid x = y \text{ y } x = 5\}$
- $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 16 \text{ y } x = -4\}$
- $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25 \text{ y } y = 3\}$
- $\{(x, y) \mid y = -2 \text{ y } |x| = 7\}$
- $\{(x, y) \mid |x| = 3 \text{ y } |y| = 5\}$

9. ¿Cuál es la diferencia entre los dos conjuntos siguientes?

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\{(x, y) \mid x = 4 \text{ y } y = 5\}$ | (b) $\{(x, y) \mid x = 4 \text{ o } y = 5\}$ |
|--|--|

10. Hacer un esquema de todos los puntos  $P(x, y)$  que distan de  $(8, 0)$  dos veces lo que distan de  $(2, 0)$ .

11. Hacer un esquema del siguiente conjunto:  $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 5 \text{ y } 0 \leq y \leq 4\}$ .

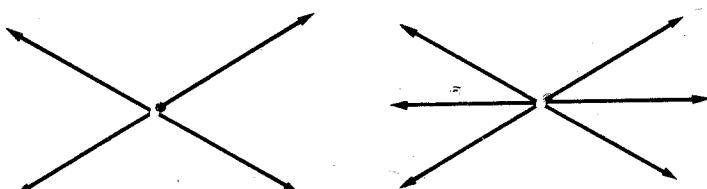
12. Hacer un esquema del siguiente conjunto:

$$\{(x, y) \mid (x - 3)^2 + y^2 = 25 \text{ o } (x + 6)^2 + y^2 = 52\}.$$

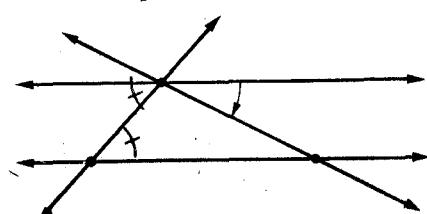
### 15-3. TEOREMAS DE CONCURRENCIA

#### Definición

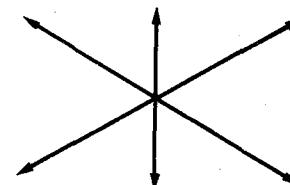
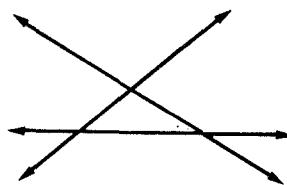
Dos o más rectas son *concurrentes*, si hay un solo punto que esté en todas ellas. El punto común se llama el *punto de concurrencia*.



Desde luego, es fácil que *dos* rectas de un mismo plano sean concurrentes. Esto es lo que esperamos cuando dibujamos dos rectas al azar; si ocurre que dos rectas son paralelas y giramos una de ellas aunque sea un poco, se convierten en rectas concurrentes.



Ahora bien, que *tres rectas sean concurrentes* es otra cuestión. Generalmente, esperamos que tres rectas de un plano determinen un triángulo.

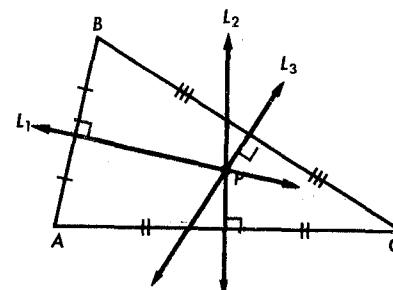


Si son concurrentes y movemos una de ellas aunque sea un poco, es probable que dejen de ser concurrentes.

Sin embargo, en ciertas condiciones, podemos demostrar que tres rectas tienen que ser concurrentes. Nuestro primer teorema de esta clase es el siguiente:

#### Teorema 15-1. El teorema de concurrencia de las mediatrixes

Las mediatrixes de los lados de un triángulo son concurrentes. Su punto de concurrencia equidista de los vértices del triángulo.



**Demostración:** Se da el  $\triangle ABC$ . Sean  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  las mediatrixes de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente. Si  $L_1$  y  $L_2$  fueran paralelas, entonces  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$  serían paralelas. (¿Por qué?) Pero  $\overleftrightarrow{AB}$  interseca a  $\overleftrightarrow{AC}$ . Por tanto,  $L_1$  corta a  $L_2$  en un punto  $P$ .

En virtud del teorema de caracterización de las mediatrixes (teorema 6-2), tenemos que  $PA = PB$ , porque  $P$  está en  $L_1$ . Por el mismo teorema,  $PA = PC$ , ya que  $P$  está en  $L_2$ . En consecuencia,  $PB = PC$ . Por el mismo teorema, esto significa que  $P$  está en  $L_3$ .

Así, pues, las mediatrixes son concurrentes y su punto de intersección equidista de los vértices.

#### Corolario 15-1.1

Tres puntos no alineados cualesquiera están en una circunferencia y sólo en una.

(Están en la circunferencia con centro  $P$  y radio  $PA = PB = PC$ )

#### Corolario 15-1.2

Dos circunferencias diferentes pueden intersecarse a lo más en dos puntos.

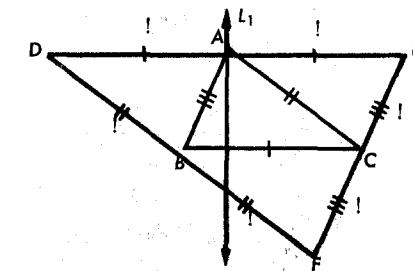
(En la demostración, se necesitan los corolarios 14-6.1 y 15-1.1.)

Hasta ahora, hemos utilizado el término *altura* (con referencia a un triángulo) en dos sentidos: puede significar (1) un segmento perpendicular desde un vértice del triángulo al lado opuesto, o (2) la longitud de ese segmento perpendicular. En el siguiente teorema, utilizamos la palabra *altura* en un tercer sentido; aquí, significa (3) una recta que pasa por un vértice del triángulo, perpendicular al lado opuesto:

#### Teorema 15-2. El teorema de concurrencia de las alturas

Las tres alturas de un triángulo son siempre concurrentes.

La demostración es fácil, si se utiliza el artificio indicado a la derecha.



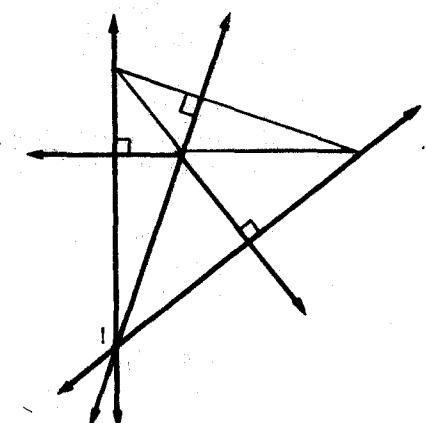
**Demostración:** Se da el  $\triangle ABC$ ; por cada uno de los vértices, dibujamos una recta paralela al lado opuesto. Dos cualesquiera de estas tres rectas no son paralelas. (¿Por qué?) En consecuencia, determinan un triángulo  $\triangle DEF$ .

Sabemos que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Aplicando este teorema dos veces, obtenemos

$$AD = BC = AE.$$

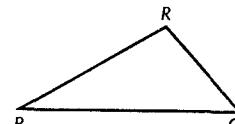
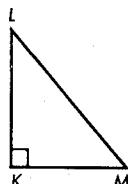
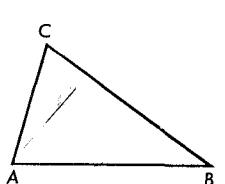
Por consiguiente, la altura desde  $A$  a  $\overleftrightarrow{BC}$  es la mediatrix de  $\overline{DE}$ . Por las mismas razones, las otras dos alturas del  $\triangle ABC$  son las mediatrixes de los otros dos lados del  $\triangle DEF$ . En virtud del teorema 15-1, estas tres rectas son concurrentes.

Obsérvese que este teorema sería falso si interpretáramos la palabra *altura* como un segmento. Los segmentos perpendiculares no necesariamente se intersecan. Son siempre las rectas las que son concurrentes.

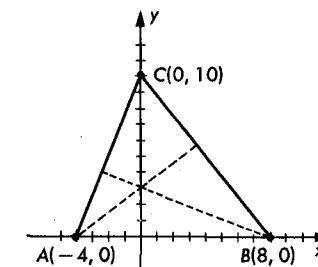
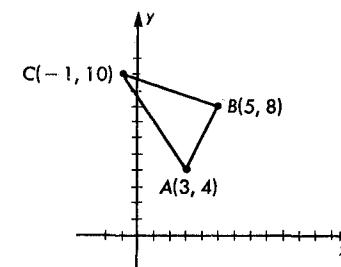


## Conjunto de problemas 15-3

1. Cópíese cada uno de los siguientes triángulos en una hoja de papel y constrúyanse las tres mediatries de sus lados y las tres alturas, indicando sus puntos de concurrencia:



2. El punto de concurrencia de las alturas de un triángulo se llama el *ortocentro*.  
 (a) ¿En qué tipo de triángulo es el ortocentro un vértice del triángulo?  
 (b) ¿En qué tipo de triángulo coincide el ortocentro con el punto de concurrencia de las mediatries?
3. Tres puntos están en una circunferencia. Los puntos determinan tres segmentos que forman un triángulo. ¿Cuál será el punto de concurrencia de las mediatries de los segmentos?
4. Dados tres puntos no alineados, ¿cuál será el punto del plano determinado por ellos, que equidista de los tres puntos dados? ¿Por qué no deben estar alineados los puntos?
5. Hacer un esquema del conjunto de todos los puntos que equidistan de tres puntos no alineados y describir dicho conjunto.
6. Dado un triángulo rectángulo, ¿cuál es el punto del plano del triángulo, que equidista de sus vértices?
7. La longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es 7. ¿Cuál es el área del triángulo?
8. Se da un ángulo  $\angle BAC$  cualquiera. Describáse el conjunto de todos los puntos de su interior que equidistan de los lados del ángulo. El alumno deberá justificar su respuesta. (Advertencia: Este conjunto no es un rayo ni una recta.)
9. Decimos que un cuadrilátero es *cíclico*, si sus cuatro vértices están en una circunferencia. Demuéstrese que las mediatries de los cuatro lados y las mediatries de las dos diagonales de un cuadrilátero cíclico son concurrentes.
- \*\* 10. Se dan los puntos  $A(3, 4)$ ,  $B(5, 8)$  y  $C(-1, 10)$ . Determinar las ecuaciones que representan las mediatries de los lados del  $\triangle ABC$  (V. la figura de la izquierda en la parte superior de la página 485) y verificar que dichos lados son concurrentes.



- \*\* 11. Se da la figura anterior de la derecha. Determinense las ecuaciones que representan las alturas desde  $A$  y  $B$  del  $\triangle ABC$  y demuéstrese que esas alturas se intersecan en el eje  $y$ .

## PROBLEMA OPTATIVO

En un antiguo documento, se encontraron las siguientes instrucciones:

“Partiendo de la intersección del Camino del Rey y el Camino de la Reina, sígase hacia el norte por el Camino del Rey y búsquese un pino y, después, un arce. Regréssese a la intersección. Hacia el oeste, por el Camino de la Reina, hay un olmo y hacia el este en ese mismo camino, hay un abeto. El punto en el cual la recta determinada por el olmo y el pino corta a la recta determinada por el arce y el abeto es uno de dos puntos mágicos. El otro punto mágico está situado en la intersección de la recta determinada por el abeto y el pino y la recta determinada por el olmo y el arce. El tesoro está enterrado donde la recta que une los dos puntos mágicos interseca al Camino de la Reina”.

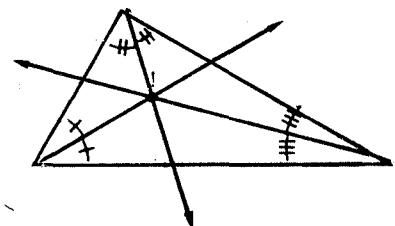
Una patrulla encontró el olmo a 4 kilómetros de la intersección, el abeto a 2 kilómetros de ella y el pino a 3 kilómetros de la misma, pero no encontró trazas del arce. No obstante, mediante las instrucciones, logró hallar el tesoro. Muéstrese cómo fue esto posible.

Uno de los miembros de la patrulla comentó acerca de cuán afortunados habían sido por haber encontrado el pino. El jefe de la patrulla sonrió y dijo: “Tampoco necesitábamos el pino”. Demuéstrese que estaba en lo cierto.

## 15-4. LAS BISECTRICES DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

Ahora, demostraremos que las bisectrices de los ángulos de un triángulo son siempre concurrentes.

Sin embargo, para obtener este resultado, debemos aprender un poco más acerca de las bisectrices de

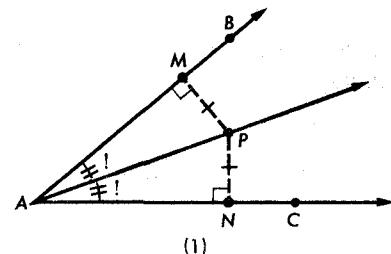


ángulos. Lo que necesitamos es una caracterización y el siguiente teorema nos la da:

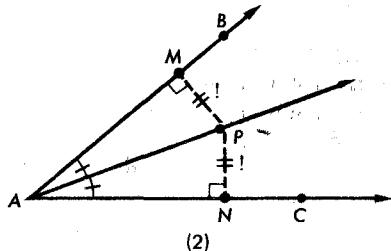
### Teorema 15-3

La bisectriz de un ángulo, exceptuado su extremo, es el conjunto de todos los puntos del interior del ángulo que equidistan de los lados del ángulo.

O de otro modo: (1) Si  $P$  está en el interior del  $\angle BAC$ , y  $P$  equidista de  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$ , entonces  $P$  está en la bisectriz del  $\angle BAC$ .



(2) Si  $P$  está en la bisectriz del  $\angle BAC$ , y  $P \neq A$ , entonces  $P$  está en el interior del  $\angle BAC$  y equidista de  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$ .



Las figuras anteriores ilustran las dos partes de la segunda redacción del teorema. La notación utilizada en las demostraciones es la misma que aparece en las figuras.

### Demostración de la parte (1)

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $P$ está en el interior del $\angle BAC$ .	Dato
2. $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{AC}$ .	Definición de la distancia de un punto a una recta
3. Los ángulos $\angle M$ y $\angle N$ son ángulos rectos.	Dato
4. $\angle M \cong \angle N$	Los ángulos rectos son congruentes
5. $PM = PN$	Dato
6. $\triangle AMP \cong \triangle ANP$	Teorema de la hipotenusa y el cateto
7. $\angle PAM \cong \angle PAN$	Partes correspondientes
8. $\overrightarrow{AP}$ es la bisectriz del $\angle BAC$ .	Pasos 1 y 7 y la definición de la bisectriz de un ángulo

### Demostración de la parte (2)

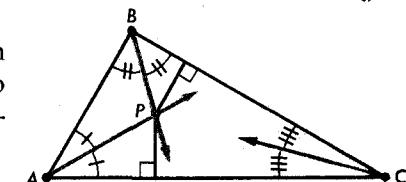
AFIRMACIONES	RAZONES
1. $P$ está en la bisectriz del $\angle ABC$ , y $P \neq A$ .	Dato
2. $P$ está en el interior del $\angle BAC$ .	Paso 1 y la definición de la bisectriz de un ángulo
3. $\angle PAM \cong \angle PAN$	Definición de la bisectriz de un ángulo
4. $\angle M \cong \angle N$	Los ángulos rectos son congruentes.
5. $PA = PA$	Identidad
6. $\triangle AMP \cong \triangle ANP$	El teorema LAA
7. $MP = NP$	Partes correspondientes

Los pasos 2 y 7 son las conclusiones que deseábamos.

Ahora, podemos demostrar el teorema de concurrencia:

### Teorema 15-4. El teorema de concurrencia de las bisectrices de los ángulos

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto que equidista de los tres lados del triángulo.



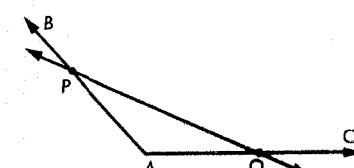
**Demostración:** En el  $\triangle ABC$ , sea  $P$  la intersección de las bisectrices de los ángulos  $\angle A$  y  $\angle B$ . Entonces,  $P$  está en el interior del  $\angle A$  y en el interior del  $\angle B$  y, por tanto, en el interior del  $\angle C$ . En consecuencia,

- (1)  $P$  equidista de  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{AB}$ ;
- (2)  $P$  equidista de  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ;
- (3)  $P$  equidista de  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ;
- (4)  $P$  está en la bisectriz del  $\angle C$ .

¿Cuáles son las razones?

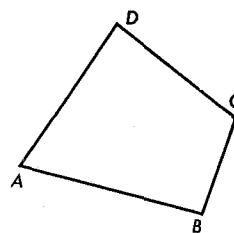
### Conjunto de problemas 15-4

1. Una recta interseca a los lados del  $\angle BAC$  en los puntos  $P$  y  $Q$ . Obténgase un punto de  $\overleftrightarrow{PQ}$  que equidista de  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$ .



2. El  $\square ABCD$  es un cuadrilátero convexo cualquiera.

- Explicar cómo hallar un punto que equidista de  $\overleftrightarrow{AD}$  y  $\overleftrightarrow{AB}$  y que también equidista de  $D$  y  $C$ .
- Explicar cómo hallar un punto que equidista de  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AD}$  y  $\overleftrightarrow{DC}$ .
- ¿Coinciden los puntos descritos en las partes (a) y (b)?



3. Describir el conjunto de todos los puntos que son centros de circunferencias tangentes a ambos lados de un ángulo dado.

4. Describir el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de dos rectas que se intersecan.

5. Describir el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de dos rectas que se cortan y que distan 2 centímetros del punto de intersección de las mismas.

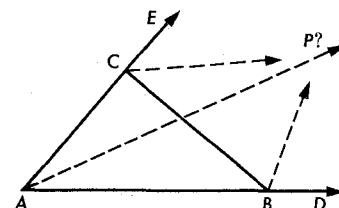
6. Describir el conjunto de todos los puntos que equidistan de dos planos que se cortan.

7. Describir el conjunto de todos los puntos del interior de un ángulo, que equidistan de los lados de éste, y que están a una distancia fija de una recta dada.

8. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo se intersecan en un punto que equidista de un par de lados opuestos.

9. Demostrar el siguiente teorema:

Se dan el ángulo  $\angle DAE$  y  $A-C-E$  y  $A-B-D$ . Entonces, las bisectrices de los ángulos  $\angle DAE$ ,  $\angle DBC$  y  $\angle ECB$  son concurrentes.



\* 10. Describir el conjunto de todos los puntos que equidistan de las tres rectas determinadas por los lados de un triángulo.

\* 11. Dibújense varios cuadriláteros convexos diferentes y trácese con cuidado las bisectrices de los ángulos. ¿Son concurrentes las cuatro bisectrices en cada caso? ¿Para qué tipo especial de cuadrilátero son las bisectrices concurrentes? ¿Habrá una manera general de describir los cuadriláteros tales que las bisectrices de sus ángulos sean concurrentes?

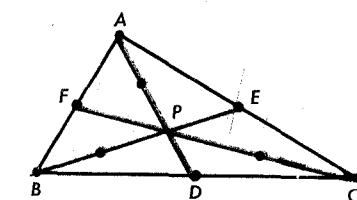
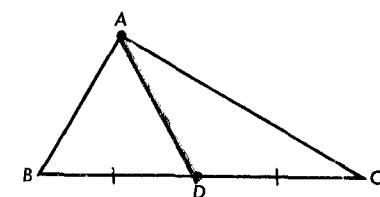
\* 12. Se da un par de ejes coordenados. Demuéstrese que el conjunto de todos los puntos que equidistan de los dos ejes es

$$\{(x, y) \mid y = x \text{ o } y = -x\}$$

## 15-5. 11. TEOREMA DE CONCURRENCIA DE LAS MEDIANAS

Una *mediana* de un triángulo es un segmento que une un vértice y el punto medio del lado opuesto. En la figura de la derecha,  $D$  es el punto medio de  $\overline{BC}$ , y  $\overline{AD}$  se llama la *mediana desde A* a  $\overline{BC}$ .

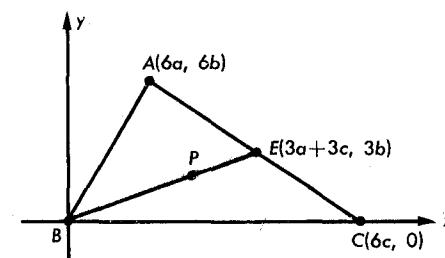
Una figura dibujada con precisión sugiere que las tres medianas de un triángulo son siempre concurrentes. En efecto, esto es cierto. Sin embargo, será mucho más fácil de demostrar, si utilizamos una figura auxiliar para poder hacer una conjectura acerca de dónde deberá estar situado el punto de intersección. La figura de la derecha sugiere que  $AP = 2PD$ ,  $BP = 2PE$  y  $CP = 2PF$ . En definitiva, esto también es cierto.



### Teorema 15-5. El teorema de concurrencia de las medianas

Las medianas de todo triángulo son concurrentes y su punto de concurrencia está en cada mediana a dos tercios de camino del vértice.

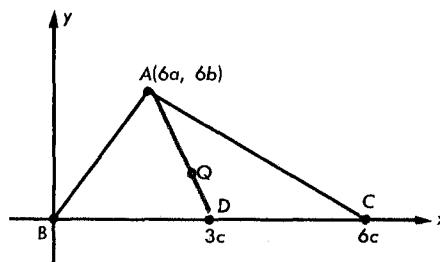
En la demostración, será conveniente utilizar un sistema de coordenadas.



**Demostración:** Tomamos los ejes como se indica en la figura anterior. Utilizamos  $6a$ ,  $6b$  y  $6c$  para evitar tener que trabajar con fracciones más tarde.  $E$  es el punto medio de  $\overline{AC}$ ; obtenemos sus coordenadas mediante la fórmula del punto medio (teorema 13-5).

Ahora, sea  $P$  el punto de la mediana  $\overline{BE}$  tal que  $BP = 2PE$ . Por el teorema 13-6 (que el estudiante deberá volver a leer), obtenemos

$$P = \left( \frac{0 + 2(3a+3c)}{3}, \frac{0 + 2 \cdot 3b}{3} \right) = (2a+2c, 2b).$$



Sea  $Q$  el punto de la mediana  $\overline{AD}$  desde  $A$  a  $\overline{BC}$  tal que  $AQ = 2QD$ . Como  $D = (3c, 0)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} Q &= \left( \frac{6a + 2 \cdot 3c}{3}, \frac{6b + 2 \cdot 0}{3} \right) \\ &= (2a + 2c, 2b). \end{aligned}$$

Esto significa que  $P = Q$ , pues un punto viene determinado por sus coordenadas.

Ánalógicamente, se deduce que el punto correspondiente de la mediana desde  $C$  a  $\overline{AB}$  es el mismo punto  $P$ . Con esto, queda demostrado el teorema.

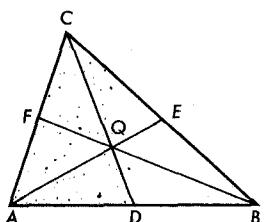
### Definición

El punto de concurrencia de las medianas de un triángulo se llama el *centroide* o *baricentro* del triángulo.

### Conjunto de problemas 15-5

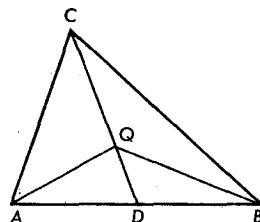
1. En la figura de la izquierda, a continuación, las medianas  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$  y  $\overline{CD}$  son concurrentes en  $Q$ .

- (a) Si  $AE = 9$ , ¿cuánto es  $AQ$ ? (b) Si  $QD = 5$ , ¿cuánto es  $CD$ ?  
(c) Si  $BQ = 12$ , ¿cuánto es  $QF$ ? (d) Si  $QE = 4$ , ¿cuánto es  $AQ$ ?



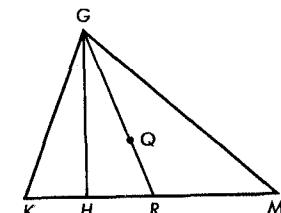
2. Se da la figura anterior de la derecha, donde  $\overline{CD}$  es una mediana y  $Q$  es el centroide del  $\triangle ABC$ .

Demuéstrese que la altura desde  $Q$  a  $\overline{AB}$  es un tercio de la altura desde  $C$  a  $\overline{AB}$ .



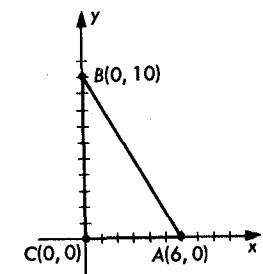
3. Utilizando la figura para el problema 1, demostrar que  $a\triangle AQB \sim a\triangle CEQF$ .

4. En el  $\triangle GKM$ , el centroide  $Q$  está en la mediana  $\overline{GR}$  y  $\overline{GH}$  es una altura. Si  $QR = 4$  y  $HR = 6$ , ¿cuánto es  $GH$ ?



+ 5. Se da el  $\triangle ABC$  con vértices  $A(6, 0)$ ,  $B(0, 10)$  y  $C(0, 0)$ .

- (a) Determinar las coordenadas del punto de concurrencia de las mediatrices de los lados.  
(b) Determinar las coordenadas del ortocentro.  
(c) Calcular la distancia del ortocentro al punto de concurrencia de las mediatrices.



+ 6. Para el  $\triangle ABC$  del problema 5, determinense las coordenadas del centroide y la distancia del centroide al ortocentro.

++ 7. Se da el  $\triangle PQR$  con vértices  $P(-6, 0)$ ,  $Q(2, 0)$  y  $R(0, 6)$ . Determinese la distancia entre el centroide y el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados.

++ 8. Para el  $\triangle PQR$  del problema 7, determinense las coordenadas del ortocentro y la distancia del ortocentro al centroide.

### 15-6. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

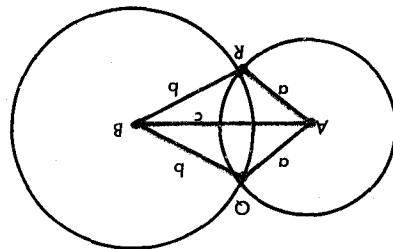
Hasta ahora, hemos estado haciendo geometría con una regla y un transportador. En efecto, nuestros postulados nos dicen que tenemos una regla de longitud infinita, con marcas numéricas. Utilizamos esta "regla" para trazar rectas y medir distancias. Además, tenemos un transportador. Con éste, podemos medir ángulos y, también, marcar ángulos con una medida dada, a partir de un rayo dado.

Probablemente, ésta es la manera más simple de hacer geometría. Sin embargo, hay otra manera muy importante, que consiste en hacer uso de regla y compás. En este

En esta sección y en la siguiente, mencionaremos como se ejecutan las distintas técnicas más simples. Dadas las diferencias entre los sistemas, las descripciones más detalladas se harán en un plano más tarde aparecerán como punto para llevar a cabo construcciones más complejas.

## 15-2. CONSTRUCTIONS ELEMENTALES

Este enunciado es un tema, porque puede demostarse, si estamos dispuestos a afrontar sus dificultades. Sin embargo, en este capítulo, omitiremos la demostación y consideremos el enunciado como un postulado.

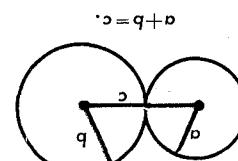
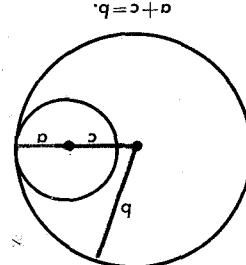
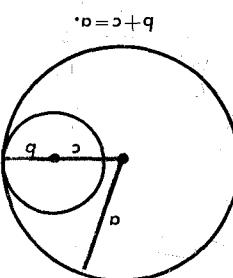


determinada por sus centros.

Se dan dos circunferencias de radios  $a$  y  $b$ , siendo  $c$  la distancia entre sus centros,  $c^2 = a^2 + b^2$  si cada uno de los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  es menor que la suma de los otros dos, entonces las circunferencias se cortan en dos puntos, a distancias tales de la recta que une los centros.

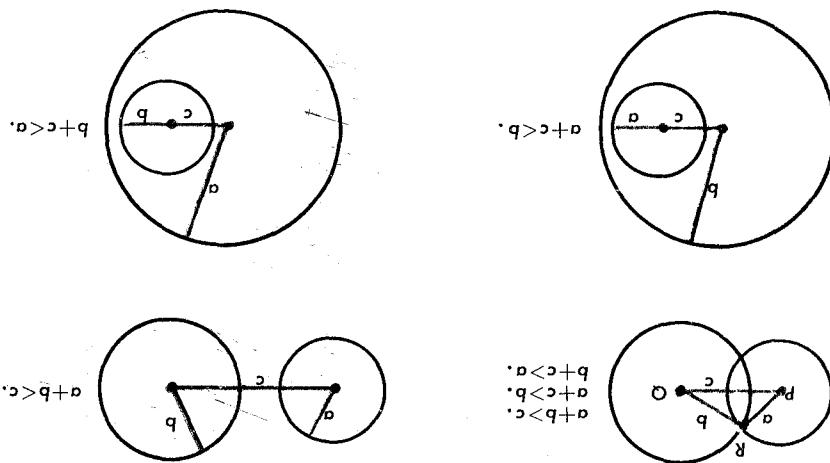
Teorema 15-6. El teorema de las dos circunferencias

En el siguiente teorema, se describe esta situación:



según como lo ilustran las otras tres figuras. Si la suma de dos de los números es igual a 11, entonces las circunferencias son tangentes.

Si las circunferencias se cortan en dos puntos, como en la figura superior de la izquierda, contóncas cada uno de los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  menor que la suma de los otros incluidos, obtendremos estas tres desigualdades, aplicando el teorema de la desigualdad del triángulo (teorema 7-8) al  $\triangle PQR$  de tres maneras. Por otra parte, si una cualquiera de las tres desigualdades cumplida en sentido opuesto, las circunferencias no se inter-



Para justificar nuestras construcciones con regularidad y compás, necesitamos un teorema que afirma que dos circunferencias de radios  $a$  y  $b$ , y que  $c$  es la distancia entre sus centros.

que describe la manera de interseccrse las circunferencias. Supongamos que se numera dos circunferencias de radios  $a$  y  $b$ , y que  $c$  es la distancia entre sus centros.

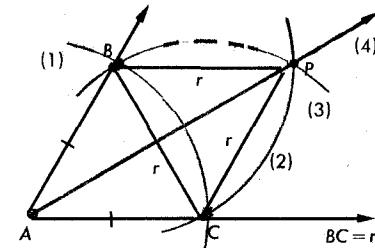
No importa cómo estudíemos la geometría, tenemos ciertos instrumentos reales para dibujar y una teoría matemática correspondiente. En todos los casos, la teoría matemática es exacta, pero los resultados que se obtienen con los instrumentos reales

Este es el esquema desarrollado por los antiguos geómetras griegos. (Dicho sea de paso, los términos *distanzia* y *medida angular* no se mencionan en los Elementos de Euclides). Este esquema es de gran interés para los matemáticos de hoy y conduce a algunas problemáticas curiosas cuando tratamos de averiguar qué tipo de figuras podemos trazar con la regla y el compás. Las resoluciones de estos problemas tienen valor práctico en el dibujo mecánico y, por eso, los dibujantes profesionales las conocen bien

caso, no tenemos una regla con marcas, sino una regla lisa (de longitud infinita, desde luego), de modo que aun cuando podemos trazar rectas, no podemos medir distancias. También, tenemos un compás. Con éste, podemos dibujar circunferencias centrales en un punto cualquiera, y pasando por otro punto dado arbitrario. Pero no

**CONSTRUCCIÓN 1.** Bisectar un ángulo dado.

Se da el  $\angle A$ .



**PASO 1.** Utilizando  $A$  como centro, trácese una circunferencia cualquiera. La circunferencia intersecará a los lados del  $\angle A$  en los puntos  $B$  y  $C$ . Evidentemente,  $AB = AC$ , como indica la figura anterior.

**PASO 2.** Trácese la circunferencia con centro  $B$  y radio  $r = BC$ .

**PASO 3.** Trácese la circunferencia con centro  $C$  y el mismo radio  $r = BC$ .

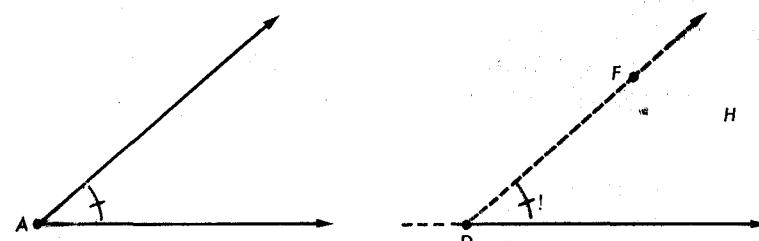
Por el teorema de las dos circunferencias, éstas se cortan en dos puntos que están a distintos lados de  $\overleftrightarrow{BC}$ . (La hipótesis del teorema de las dos circunferencias se cumple, porque cada uno de los números  $r$ ,  $r$  y  $r$  es menor que la suma de los otros dos.) Sea  $P$  el punto de intersección que está a distinto lado de  $\overleftrightarrow{BC}$  que  $A$ , como en la figura.

**PASO 4.** Trácese  $\overrightarrow{AP}$ .

Por el teorema LLL, tenemos que  $\triangle PAB \cong \triangle PAC$ . Luego,  $\angle PAB \cong \angle PAC$ , y  $\overrightarrow{AP}$  es la bisectriz.

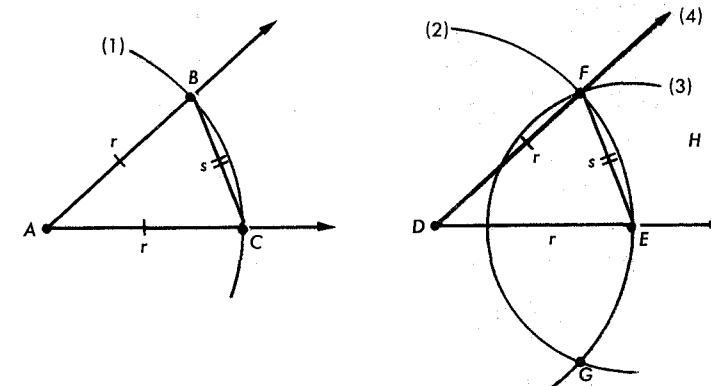
(Al trazar las dos circunferencias, en los pasos 2 y 3, pudimos haber utilizado cualquier radio mayor que  $\frac{1}{2}BC$ . No tendremos dificultades, a menos que utilicemos un radio tan pequeño que las circunferencias no se corten.)

**CONSTRUCCIÓN 2.** Copiar un ángulo dado a un lado dado de un rayo dado.



Se dan el  $\angle A$ , un rayo con extremo  $D$  y un semiplano  $H$ , en cuya arista está el rayo dado. Queremos construir un rayo  $\overrightarrow{DF}$ , con  $F$  en  $H$ , de modo que obtengamos un segundo ángulo congruente con el primero.

**PASO 1.** Trácese una circunferencia con centro  $A$  y con un radio  $r$  cualquiera. La circunferencia intersecará a los lados del  $\angle A$  en los puntos  $B$  y  $C$ .



**PASO 2.** Trácese la circunferencia con centro  $D$  y radio  $r = AB = AC$ . Esta circunferencia intersecará al rayo dado en un punto  $E$ .

**PASO 3.** Trácese la circunferencia con centro  $E$  y radio  $s = BC$ .

Estas dos últimas circunferencias se cortarán en dos puntos  $F$  y  $G$ , a distintos lados de  $\overleftrightarrow{DE}$ . (Pregunta: ¿Cómo sabemos que cada uno de los números  $r$ ,  $s$  y  $r$  es menor que la suma de los otros dos? Esta condición es la que se necesita para poder aplicar el teorema de las dos circunferencias.) Sea  $F$  el punto de intersección que está en  $H$ , como se indica en la figura.

**PASO 4.** Trácese  $\overrightarrow{DF}$ .

Éste es el rayo que buscábamos. Por el teorema LLL,  $\triangle FDE \cong \triangle BAC$ . En consecuencia,  $\angle FDE \cong \angle BAC$ , como queríamos.

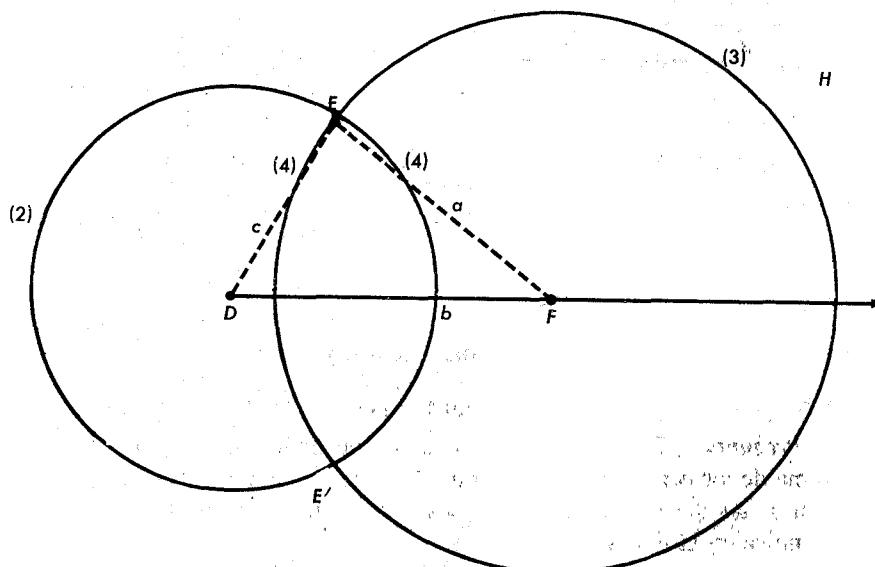
**CONSTRUCCIÓN 3.** Copiar un triángulo dado a un lado dado de un rayo dado.



Se da el triángulo  $\triangle ABC$ . También, se dan un rayo con extremo  $D$  y un semiplano  $H$  que contiene al rayo en su arista. Queremos construir el  $\triangle DEF$ , con  $F$  en el rayo dado y  $E$  en  $H$ , de modo que  $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ .

PASO 1. Primeramente, trazamos una circunferencia con centro  $D$  y radio  $b = AC$ . Esta circunferencia corta al rayo dado en un punto  $F$ , y  $DF = AC$ .

PASO 2. Trácese una circunferencia con centro  $D$  y radio  $c$ .



PASO 3. Trácese una circunferencia con centro  $F$  y radio  $a$ . Estas dos últimas circunferencias deben intersecarse, como se indica en la figura, en dos puntos a lados distintos de  $\overleftrightarrow{DF}$ . Por el teorema de las dos circunferencias, sabemos que, en realidad, éste es el caso, porque cada uno de los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  es menor que la suma de los otros dos. (¿Por qué?) Como se indica en la figura, sea  $E$  el punto de intersección que está en  $H$ .

PASO 4. Ahora, trácese los segmentos  $\overline{DE}$  y  $\overline{EF}$ . Por el teorema LLL, tenemos que  $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ , como queríamos.

Si examinamos de nuevo la sección 6-7, veremos que en la demostración del teorema LLL, teníamos casi la misma situación que en la construcción 3, a saber, la de copiar un triángulo dado a un lado dado de un rayo dado. Vale la pena comparar los dos métodos. (En la sección 6-7, utilizamos una regla graduada y un transportador, en vez de una regla sin marcas y un compás. También, allí utilizamos el postulado LAL, en vez del teorema LLL, para demostrar que nuestra construcción era correcta.)

### Conjunto de problemas 15-7

[Nota: Las construcciones indicadas en este Conjunto de problemas deben hacerse con regla y compás únicamente.]

1. Trácese una recta horizontal en la parte superior de una hoja de papel. Utilizando la longitud del segmento  $\overline{AB}$  que aparece más adelante, márquese una escala (con un compás) de 10 unidades de largo, al menos. Utilícese la escala cuando sea necesario para resolver los problemas que siguen.



Constrúyanse triángulos cuyos lados tengan las longitudes dadas a continuación:

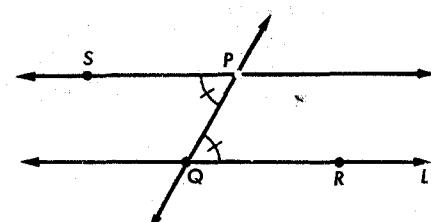
- (a) 5, 6, 8      (b) 3, 5, 7      (c) 4, 4, 5      (d) 6, 10, 8

2. Dibújese un triángulo obtusángulo cualquiera y trácese la bisectriz de cada uno de sus ángulos.
3. Dibújese un triángulo escaleno cualquiera  $\triangle ABC$ . Cópíese el triángulo a un lado dado de un rayo dado, mediante un método que dependa del postulado ALA.
4. Constrúyase un triángulo equilátero con un lado de longitud 5.
5. Constrúyase un triángulo isósceles con la base de longitud 8 y dos lados congruentes de longitud 5.
6. Demuéstrese que siempre es posible construir un triángulo equilátero que tenga un lado dado como uno de sus lados.
7. Sean  $a$  y  $b$  las longitudes de los lados congruentes y de la base, respectivamente, de un triángulo isósceles que ha de construirse. ¿Qué condiciones deberán cumplir  $a$  y  $b$  para que la construcción sea posible?
8. Trácese un cuadrilátero convexo cualquiera. Cópíese éste a un lado dado de un rayo dado.

### 15-8. CONSTRUCCIONES ELEMENTALES (CONTINUACIÓN)

**CONSTRUCCIÓN 4.** Construir una paralela a una recta dada por un punto exterior dado.

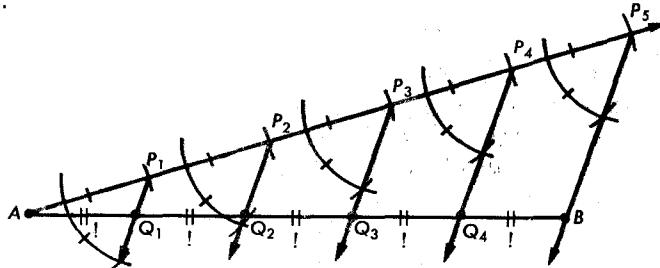
Se dan la recta  $L$  y el punto exterior  $P$ . Sean  $Q$  y  $R$  dos puntos cualesquiera de  $L$ .



PASO 1. Trácese  $\overleftrightarrow{PS}$ .

PASO 2. Mediante la construcción 2, trácese el  $\angle QPS$  congruente con el  $\angle PQR$ , de modo que  $S$  y  $R$  estén a lados distintos de  $\overleftrightarrow{PQ}$ . Entonces, los ángulos  $\angle QPS$  y  $\angle PQR$  son ángulos alternos internos y, por tanto,  $\overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{QR}$ , como se quería.

**CONSTRUCCIÓN 5.** Dividir un segmento en un número dado de segmentos congruentes.



Dado  $\overline{AB}$ , queremos dividirlo en  $n$  segmentos congruentes. (En la figura, se indica el caso  $n = 5$ .)

**PASO 1.** Partiendo de  $A$ , trácese un rayo cualquiera que no esté en  $\overleftrightarrow{AB}$ .

**PASO 2.** Sobre este rayo, márquense sucesivamente  $n$  segmentos congruentes  $\overline{AP}_1, \overline{P}_1P_2, \dots, \overline{P}_{n-1}P_n$ . (La longitud de estos segmentos no es importante, con tal que sea la misma para todos los segmentos. Por consiguiente, podemos elegir  $P_1$  arbitrariamente y, luego, con el compás, marcar los demás segmentos uno a uno.)

**PASO 3.** Trácese  $\overline{P_nB}$ .

**PASO 4.** Por los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ , tráncense rayos paralelos a  $\overline{P_nB}$  que corten a  $\overline{AB}$  en los puntos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ .

Como las rectas paralelas determinan segmentos congruentes en la secante  $\overleftrightarrow{AP}_n$ , también determinan segmentos congruentes en la secante  $\overleftrightarrow{AB}$ . (Corolario 9-30.1) En consecuencia, los puntos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$  dividen al segmento  $\overline{AB}$  en  $n$  segmentos congruentes.

**CONSTRUCCIÓN 6.** Construir la mediatrix de un segmento dado.

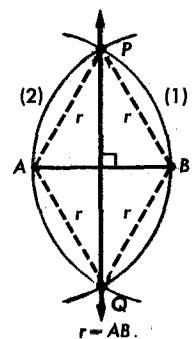
Se da el segmento  $\overline{AB}$ .

**PASO 1.** Trácese la circunferencia con centro  $A$  y radio  $r = AB$ .

**PASO 2.** Trácese la circunferencia con centro  $B$  y radio  $r = AB$ .

Ahora, puede aplicarse el teorema de las dos circunferencias, porque cada uno de los números  $r, r$  y  $r$  es menor que la suma de los otros dos. Por tanto, las circunferencias se intersecan en dos puntos,  $P$  y  $Q$ .

**PASO 3.** Trácese  $\overleftrightarrow{PQ}$ .



Como  $P$  equidista de  $A$  y  $B$ ,  $P$  está en la mediatrix de  $\overline{AB}$ . Por la misma razón,  $Q$  también está en la mediatrix de  $\overline{AB}$ . Pero, dos puntos determinan una recta. En consecuencia,  $\overleftrightarrow{PQ}$  es la mediatrix de  $\overline{AB}$ .

Desde luego, no era necesario utilizar circunferencias de radio  $r = AB$ ; cualquier radio mayor hubiera servido. En realidad, hubiéramos podido utilizar cualquier radio mayor que  $\frac{1}{2}AB$ . (¿Por qué?)

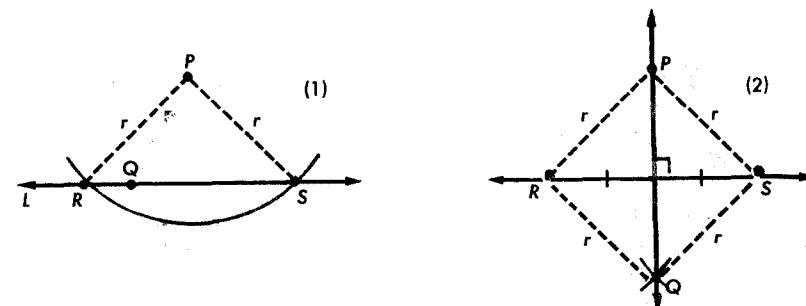
Evidentemente, si podemos construir la mediatrix de un segmento, podemos construir el punto bisectante. (Éste es el punto  $R$  de la figura anterior.) Consideramos esto como una especie de “construcción corolaria”.

**CONSTRUCCIÓN 7.** Construir el punto medio de un segmento dado

La mediatrix nos da inmediatamente el punto medio.

**CONSTRUCCIÓN 8.** Construir una perpendicular a una recta dada, por un punto dado.

*Caso 1.* Se dan una recta  $L$  y un punto  $P$ . Supongamos primero que  $P$  es un punto exterior. Sea  $Q$  un punto cualquiera de  $L$ .



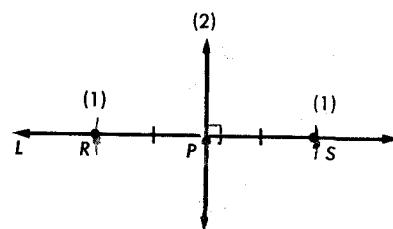
**PASO 1.** Trácese una circunferencia con centro  $P$  y radio  $r > PQ$ . Como  $Q$  está en el interior de la circunferencia, del teorema 14-9 se deduce que  $L$  interseca a la circunferencia en dos puntos,  $R$  y  $S$ .

**PASO 2.** Constrúyase la mediatrix de  $\overline{RS}$ . Esta recta pasa por  $P$ , ya que  $P$  equidista de  $R$  y  $S$ .

Obsérvese que para trazar la mediatrix, no es necesario efectuar *todos* los pasos de la construcción 6; basta con trazar una parte de cada una de las dos circunferencias para obtener un punto de intersección  $Q$  diferente de  $P$ .

Por tanto,  $\overleftrightarrow{PQ}$  tiene que ser la mediatrix, pues contiene dos puntos que equidistan de  $R$  y  $S$ .

Caso 2. Si el punto  $P$  está en la recta  $L$ , la construcción es más fácil.



PASO 1. Trácese una circunferencia con centro  $P$ , que corte a  $L$  en los puntos  $R$  y  $S$ .

PASO 2. Constrúyase la mediatrix de  $\overline{RS}$ .

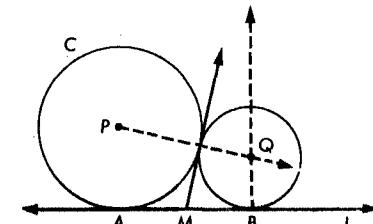
Con esto, queda terminada la construcción.

### Conjunto de problemas 15-8

[Nota: Las construcciones indicadas en este Conjunto de problemas se deberán efectuar con regla y compás únicamente.]

1. Construir un triángulo rectángulo isósceles.
2. Construir un rombo, dadas las longitudes de sus diagonales.
3. Construir un paralelogramo, si se dan uno de sus ángulos, la longitud del lado más corto y la longitud de la diagonal más larga.
4. Construir un ángulo de  $60^\circ$ .
5. Construir un ángulo de  $30^\circ$ .
6. Construir un ángulo de  $15^\circ$ .
7. Construir un ángulo de  $75^\circ$ .
8. Construir un triángulo isósceles, si se dan la base y la altura correspondiente.
9. Construir un triángulo equilátero, dada su altura.
10. Dado el ángulo del vértice de un triángulo isósceles, construir un ángulo de la base.
11. Construir un triángulo isósceles, dados un ángulo de la base y la altura correspondiente a la base.
12. Trisecar un segmento dado.
13. Dado un segmento de longitud  $a$ , construir un segmento de longitud  $a\sqrt{2}$ .

14. Dado un segmento de longitud  $a$ , construir un segmento de longitud  $a\sqrt{3}$ .
15. Dados dos segmentos cuyas longitudes son  $a$  y  $b$ , constrúyase un segmento cuya longitud sea la media geométrica de  $a$  y  $b$ . [Sugerencia: Véase el problema 13 del Conjunto de problemas 14-5.]
16. Dado un segmento cuya longitud es  $a$ , constrúyase un segmento de longitud  $a\sqrt{6}$ .
17. Construir un triángulo rectángulo, dado un ángulo agudo y la longitud de la hipotenusa.
18. Construir un triángulo rectángulo, dado un ángulo agudo y la altura correspondiente a la hipotenusa.
19. Construir un triángulo, si se dan las longitudes de dos lados y la longitud de la mediana correspondiente al lado más largo.
20. Construir un paralelogramo, dados un ángulo, un lado y la altura correspondiente a ese lado.
21. Construir dos circunferencias tangentes interiormente, dado el radio de cada circunferencia.
22. Construir una circunferencia tangente a ambos lados de un ángulo, dados el ángulo y el radio de la circunferencia.
23. Dado el radio, constrúyanse tres circunferencias congruentes y tangentes entre sí dos a dos.
24. Construir un triángulo equilátero, dado un segmento cuya longitud es igual al perímetro del triángulo.
- \* 25. Construir una tangente a una circunferencia desde un punto exterior a ella. [Sugerencia: Utilícese el corolario 14-16.1.]
- \* 26. Construir un trapezio isósceles, dadas las bases y una diagonal.
- \* 27. Construir un triángulo isósceles, dadas la base y la altura correspondiente a uno de los lados congruentes. [Indicación: El problema 25 deberá servir de ayuda.]
- \* 28. Construir un triángulo rectángulo, dado un ángulo agudo y un segmento cuya longitud es la suma de las longitudes de los catetos. [Indicación: ¿Cómo puede utilizarse un ángulo de  $45^\circ$ ?]
- \* 29. Se dan dos puntos,  $A$  y  $B$ , de una recta  $L$ . Una circunferencia  $C$  es tangente a  $L$  en  $A$ . Constrúyase una circunferencia tangente a  $L$  en  $B$  y, también, tangente a la circunferencia  $C$ . [Sugerencia: Analícese el diagrama, en el cual  $Q$  es el centro de la circunferencia requerida.]



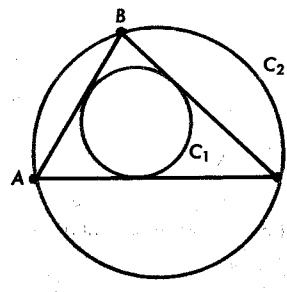
- \* 30. Construir un triángulo, dadas las longitudes de dos lados y la longitud de la mediana correspondiente al tercer lado.

### PROBLEMA OPTATIVO

Dados un segmento  $\overline{AB}$  y un ángulo  $\angle C$ , constrúyase el conjunto de todos los puntos  $P$  de un plano tales que  $\angle APB \cong \angle C$ .

### 15-9. CIRCUNFERENCIAS INSCRITA Y CIRCUNSCRITA

En la figura de más adelante, la circunferencia  $C_1$  está *inscrita en* el  $\triangle ABC$  y la circunferencia  $C_2$  está *circunscrita* al  $\triangle ABC$ .



#### Definiciones

Si una circunferencia es tangente a los tres lados de un triángulo, entonces decimos que la circunferencia está *inscrita en* el triángulo y que el triángulo está *circunscrito a* la circunferencia. Si una circunferencia pasa por los tres vértices de un triángulo, entonces decimos que la circunferencia está *circunscrita al* triángulo y que el triángulo está *inscrito en* la circunferencia.

En realidad, todo triángulo está circunscrito a una circunferencia e inscrito en otra. Una manera intuitiva de ver por qué esto es cierto es considerar una pequeña circunferencia en el interior de un triángulo, que va dilatándose gradualmente. Cuando ya no puede agrandarse más, tiene que quedar inscrita. Análogamente, consideremos una cinta de acero ajustable, que va ciñéndose gradualmente a un triángulo en su interior. Cuando ya no pueda ceñirse más, tiene que quedar circunscrita.

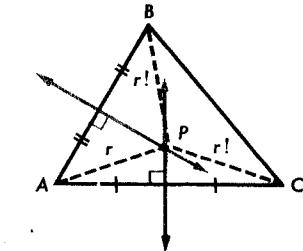
Ahora, demostraremos no solamente que existen circunferencias inscritas y circunscritas, sino que también pueden trazarse con regla y compás.

**CONSTRUCCIÓN 9.** Circunscribir una circunferencia a un triángulo dado.

Se da el  $\triangle ABC$ .

**PASO 1.** Constrúyanse las mediatrices de  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ . Estas rectas se intersecan en un punto  $P$ . Por el teorema 15-1,  $P$  equidista de  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

**PASO 2.** Trácese una circunferencia con centro  $P$  y radio  $r = PA$ . Puesto que  $PB = PC = PA = r$ , la circunferencia contiene no solamente a  $A$ , sino también a  $B$  y a  $C$ .



#### Definición

El punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo se llama el *circuncentro* del triángulo.

También, podemos dibujar la circunferencia inscrita.

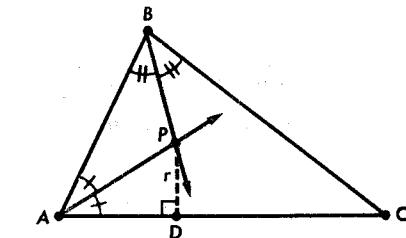
**CONSTRUCCIÓN 10.** Inscribir una circunferencia en un triángulo dado.

Se da el  $\triangle ABC$ .

**PASO 1.** Biséquese el  $\angle A$ .

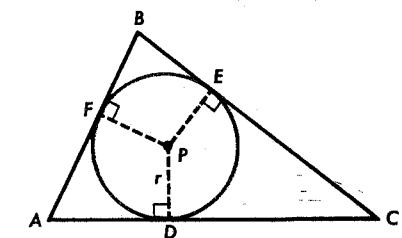
**PASO 2.** Biséquese el  $\angle B$ .

Por el teorema 15-4, estas bisectrices se cortan en un punto que equidista de los tres lados del triángulo.



**PASO 3.** Trácese una perpendicular desde  $P$  a  $\overline{AC}$ . Sea  $D$  el pie de la perpendicular.

**PASO 4.** Trácese la circunferencia de centro  $P$  y radio  $r = PD$ .



La circunferencia es tangente a  $\overline{AC}$  en  $D$ , porque  $\overleftrightarrow{AC}$  es perpendicular al radio  $\overrightarrow{PD}$ . Por la misma razón, la circunferencia es también tangente a los otros dos lados. Por consiguiente, hemos construido la circunferencia requerida.

#### Definición

El punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos de un triángulo se llama el *incentro* del triángulo.

## Conjunto de problemas 15-9

[Nota: Las construcciones indicadas en este Conjunto de problemas deben hacerse con regla y compás únicamente.]

1. Construir un triángulo equilátero. Después, constrúyanse sus circunferencias circunscrita e inscrita.
  2. Construir un triángulo rectángulo isósceles. Después, constrúyase su circunferencia inscrita.
  3. Dado un triángulo escaleno cualquiera, constrúyase su circunferencia circunscrita.
  4. Dado un triángulo escaleno cualquiera, constrúyase su circunferencia inscrita.
  5. Circunscribir una circunferencia a un cuadrado dado.
  6. Dado un rombo, constrúyase su circunferencia inscrita.
  7. Contéstese la siguiente pregunta, efectuando la construcción indicada; luego, compruébese la respuesta.
- ¿Cuántas cuerdas, colocadas de manera que cada una con la siguiente sólo tenga un extremo común, cabrán en una circunferencia, si cada cuerda es congruente con el radio de la circunferencia?
8. Construir un triángulo rectángulo, dado un ángulo agudo y el radio de la circunferencia circunscrita.
  9. Construir un triángulo isósceles, si se dan la base y el radio de la circunferencia inscrita.
  10. Construir un triángulo rectángulo isósceles, dado el radio de la circunferencia circunscrita.
  11. Construir un triángulo equilátero, dado el radio de la circunferencia inscrita.
  - \* 12. Construir un triángulo rectángulo, dados un cateto y el radio de la circunferencia inscrita.
  - \* 13. Construir un triángulo isósceles, dados el ángulo en el vértice y el radio de la circunferencia inscrita.
  - \* 14. Demostrar que el perímetro de un triángulo rectángulo es igual a la suma del diámetro de la circunferencia inscrita y dos veces el diámetro de la circunferencia circunscrita.

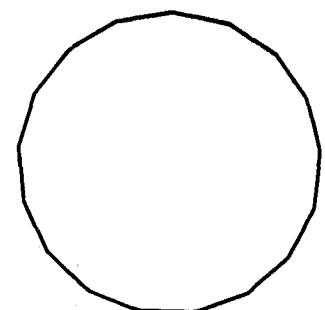
## 15-10. LOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCIONES IMPOSIBLES DE LA ANTIGÜEDAD

Los antiguos griegos descubrieron todas las construcciones que hemos estudiado hasta ahora y muchas otras más complicadas. Hubo, sin embargo, varios problemas que los mejores matemáticos griegos trataron de resolver, durante muchos años, sin éxito alguno.

Para lograr una idea de lo difícil que puede ser un problema de construcción, consideremos el problema de dividir con regla y compás una circunferencia en 17 arcos congruentes contiguos, de manera que cada arco sólo tenga un extremo común con el arco siguiente.

Cuando se dibujan las cuerdas correspondientes, se obtiene una figura llamada *polígono regular de 17 lados*. Este problema era muy conocido, pero permaneció sin resolver durante más de dos mil años. Finalmente, en el siglo pasado, el matemático alemán C. F. Gauss descubrió la construcción requerida.

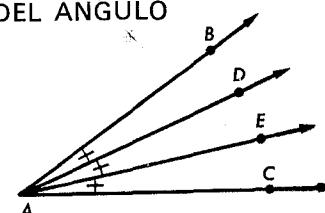
Sin embargo, algunos problemas de los antiguos griegos resultaron más que muy difíciles; en realidad, sus soluciones eran imposibles.



## (1) EL PROBLEMA DE LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO

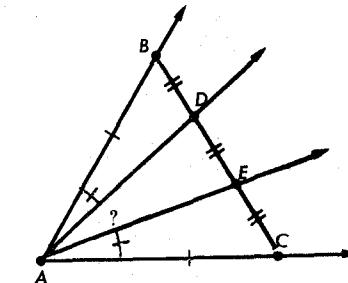
Se da un ángulo  $\angle BAC$  cualquiera; queremos construir dos rayos  $\overrightarrow{AD}$  y  $\overrightarrow{AE}$  (con  $D$  y  $E$  en el interior del  $\angle BAC$ ) de manera que

$$\angle BAD \cong \angle DAE \cong \angle EAC.$$



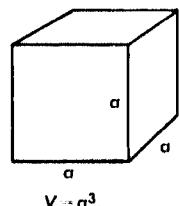
Para esta construcción, sólo debemos emplear una regla y un compás.

Lo primero que la mayoría de las personas trata de hacer es tomar  $AB = AC$ , trazar  $\overline{BC}$  y, luego, trisecar  $\overline{BC}$ , como se indica en la figura de la derecha. Esto no funciona; se puede demostrar que los ángulos  $\angle BAD$  y  $\angle EAC$  son congruentes, pero ninguno de estos ángulos es congruente con el  $\angle DAE$ . En realidad, nadie ha encontrado un método que efectúe la construcción.



(2) LA DUPLICACIÓN DEL CUBO. Un cubo de arista  $a$  tiene un volumen igual a  $a^3$ . Dado un segmento de longitud  $a$ , queremos construir un segmento de longitud  $b$ , tal que el cubo de arista  $b$  tenga un volumen doble que el cubo de arista  $a$ . Algebraicamente, desde luego, esto significa que

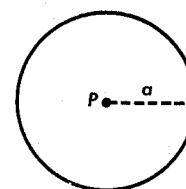
$$b^3 = 2a^3 \quad \text{o} \quad b = a\sqrt[3]{2}.$$



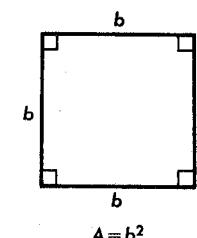
Tampoco, nadie ha podido resolver este famoso problema. Hay una leyenda curiosa acerca de éste. Se cuenta que los habitantes de una cierta ciudad griega se morían en gran número a causa de una plaga, y decidieron consultar al oráculo de Delfos para averiguar el dios que estaba enojado y por qué. La respuesta dada por el oráculo fue que Apolo estaba enojado. El altar dedicado a Apolo en la ciudad consistía en un cubo sólido de oro y Apolo quería que su altar fuese exactamente el doble.

Cuando la gente regresó de Delfos, construyeron un nuevo altar, con una arista doble que la del antiguo. Entonces, la plaga empeoró en lugar de mejorar, y la gente se dio cuenta de que Apolo debió haber estado pensando en el *volumen* de su altar. (Desde luego, al hacer la arista el doble, el volumen se multiplicó por ocho en lugar de por dos.) Esto planteó el problema de la duplicación del cubo, pero los matemáticos locales fueron incapaces de resolver el problema. De modo que la primera oportunidad de aplicar la matemática a la salud pública fue un fracaso total.

(3) LA CUADRATURA DEL CÍRCULO. Dado un círculo (la reunión de una circunferencia y su interior), queremos construir un cuadrado cuya área sea igual a la del círculo.



$$A = \pi a^2.$$



$$A = b^2.$$

Algebraicamente, esto significa que  $b = a\sqrt{\pi}$ .

Durante más de dos mil años, los mejores matemáticos trataron de resolver estos problemas mediante construcciones con regla y compás. Finalmente, se descubrió en tiempos recientes que los tres problemas son *imposibles* de resolver con sólo regla y compás.

*Imposibilidad* en la matemática no significa lo mismo que imposibilidad en la vida real y, por tanto, requiere una explicación.

Frecuentemente, cuando decimos que algo es imposible, queremos significar simplemente que es muy difícil, como encontrar una aguja en un pajar. A menudo, queremos decir que no sabemos cómo hacer algo y que dudamos de que se pueda hacer. Así, la gente solía decir que era imposible construir una máquina que volase y estaban en lo cierto hasta que alguien construyó un aeroplano y voló en él.

La imposibilidad matemática no es así. En la matemática, hay algunas cosas que, efectivamente, no se pueden hacer, y es posible demostrar que no se pueden hacer.

(1) Por muy capaz que una persona sea, no podrá encontrar un número natural entre 2 y 3, porque no existe tal número.

(2) Si el problema anterior parece demasiado trivial para considerarlo seriamente, examinemos la siguiente situación: Partimos de los números enteros positivos, negativos y cero. Nos está permitido efectuar la adición, la sustracción, la multiplicación y la división (excepto por cero). Decimos que un número “*se puede construir*”, si podemos obtenerlo a partir de los enteros, efectuando las operaciones indicadas un número finito de veces. Por ejemplo, el número siguiente *puede construirse*:

$$\frac{\left(\frac{3}{7} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{13} \left(\frac{4}{9} - \frac{5}{7}\right)}{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right) - \frac{2}{3} \left(\frac{7}{5} - \frac{1}{2}\right)}.$$

Ahora, supongamos que se nos plantea el problema de “construir” el número  $\sqrt{2}$  mediante operaciones de ese tipo. Este problema es imposible, es decir, no puede resolverse. La razón es que los números que “pueden construirse” de acuerdo con estas reglas son los números racionales, y  $\sqrt{2}$  no es uno de esos números. No vale de nada tratar de encontrarlo entre los “números que pueden construirse”, porque no pertenece a este conjunto.

Los problemas referentes a construcciones con regla y compás son muy parecidos a este segundo ejemplo. Empezando con un segmento  $\overline{AB}$ , vemos que hay ciertos segmentos que podemos construir con regla y compás. Por ejemplo, podemos construir segmentos cuyas longitudes sean  $2AB$ ,  $\frac{1}{2}AB$ ,  $\sqrt{2}AB$  y  $\frac{1}{10}AB$ . Pero no podemos construir un segmento  $\overline{CD}$  para el cual se verifique

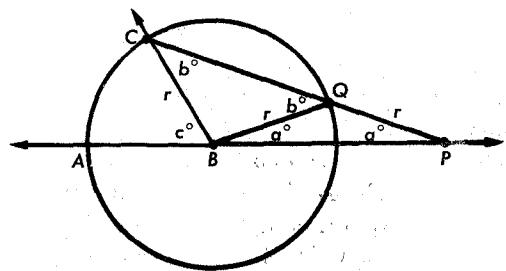
$$CD^3 = 2AB^3.$$

Esto es lo que significa decir que la duplicación del cubo con regla y compás es imposible.

El problema de la trisección de un ángulo merece algún análisis ulterior.

(1) *Algunos* ángulos pueden trisecarse fácilmente mediante regla y compás. Por ejemplo, un ángulo recto puede trisecarse de esa manera y esto significa que la trisección es posible para los ángulos de  $45^\circ$ , de  $22\frac{1}{2}^\circ$  y muchos otros. Cuando decimos que el problema de la trisección de un ángulo es imposible, queremos significar que hay *algunos* ángulos para los cuales no pueden construirse rayos trisecantes.

- (2) El problema de la trisección del ángulo se convierte en uno soluble, si permitimos hacer dos marcas en la regla.



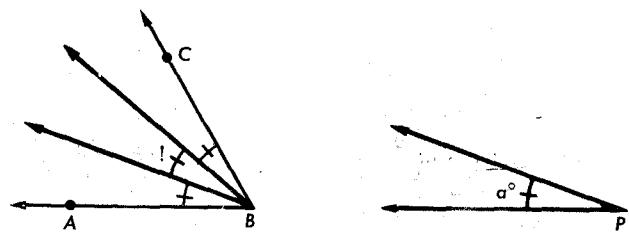
Supongamos que se nos da el  $\angle B$  y una regla con dos marcas en ella. Sea  $r$  la distancia entre las dos marcas. Primero, dibujamos una circunferencia con centro  $B$  y radio  $r$ . Ésta interseca al ángulo en dos puntos,  $A$  y  $C$ .

Se coloca ahora la regla de manera que (a) pase por  $C$ . Luego, se desliza y se gira de manera que (b) una de las marcas coincida con el punto  $Q$  de la circunferencia y (c) la otra marca coincida con un punto  $P$  del rayo opuesto a  $\overrightarrow{BA}$ .

Tenemos así la situación indicada en la figura. Como el  $\triangle QBP$  es isósceles, con  $QB = QP = r$ , sus ángulos en la base tienen la misma medida  $a$ , según se indica; análogamente para el  $\triangle BCQ$ .

Ahora, la medida de un ángulo externo de un triángulo es la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos. Aplicando este teorema al  $\triangle QBP$ , obtenemos  $b = a + a = 2a$ . Aplicando este mismo teorema al  $\triangle BCP$ , obtenemos  $c = b + a$ . Por tanto,  $c = 3a$ . Es decir,  $m\angle P = \frac{1}{3}m\angle ABC$ .

Ahora, copiamos el  $\angle P$  dos veces en el interior del  $\angle ABC$ :

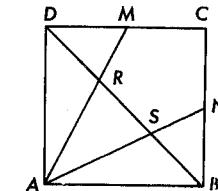


Hemos, pues, trisecado al  $\angle ABC$ .

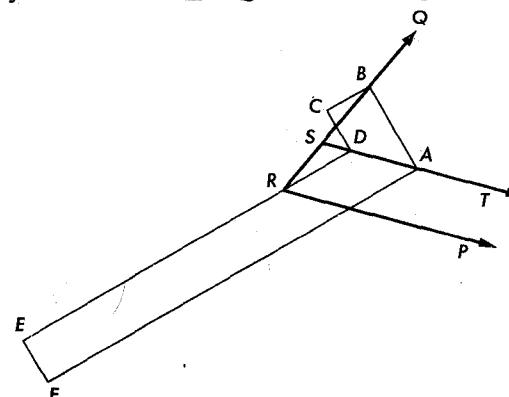
Desde luego, este procedimiento no está de acuerdo con las reglas de los antiguos griegos para hacer construcciones con regla y compás.

### Conjunto de problemas 15-10

- (a) Determinar el número tal que al sumarle 5, la suma sea igual a 5 veces el número buscado. Justifíquese la respuesta.  
(b) Determinar el número tal que 4 veces el número dividido por dicho número es igual a 5. Justifíquese la respuesta.
- Explicar cómo trisecar un ángulo de  $135^\circ$  con regla y compás.
- Demostrar que es imposible construir un triángulo dos de cuyos lados miden 2 y 3 centímetros de largo, respectivamente, y en el cual la altura correspondiente al tercer lado sea de 4 centímetros.
- Se da un cuadrado  $\square ABCD$ .  $M$  y  $N$  son los puntos medios de  $\overline{DC}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente.  $\overline{AM}$  y  $\overline{AN}$  intersecan a  $\overline{BD}$  en  $R$  y  $S$ . Demuéstrese que  $\overline{AM}$  y  $\overline{AN}$  trisecan a  $\overline{BD}$ , pero no trisecan al  $\angle DAB$ .
- Un carpintero puede trisecar un ángulo cualquiera con el instrumento que se muestra en la figura de la derecha, llamada una *escuadra de carpintero*. Todos los ángulos son ángulos rectos y  $EF = CD = \frac{1}{2}AB$ .

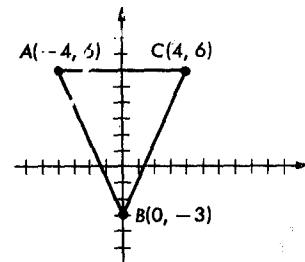


Para trisecar a un ángulo  $\angle PRQ$  con esta escuadra, el carpintero emplea primero la arista más larga para trazar un rayo  $\overrightarrow{ST}$  paralelo a  $\overrightarrow{RP}$  a una distancia  $EF$  de éste. Entonces, coloca la escuadra de manera que  $\overline{DE}$  contenga al punto  $R$ ,  $A$  esté en  $\overrightarrow{ST}$ , y  $B$  esté en  $\overrightarrow{RQ}$ ; así, sabe que  $\overrightarrow{RD}$  y  $\overrightarrow{RA}$  trisecan al  $\angle PRQ$ . Demuéstrese que esto es cierto.



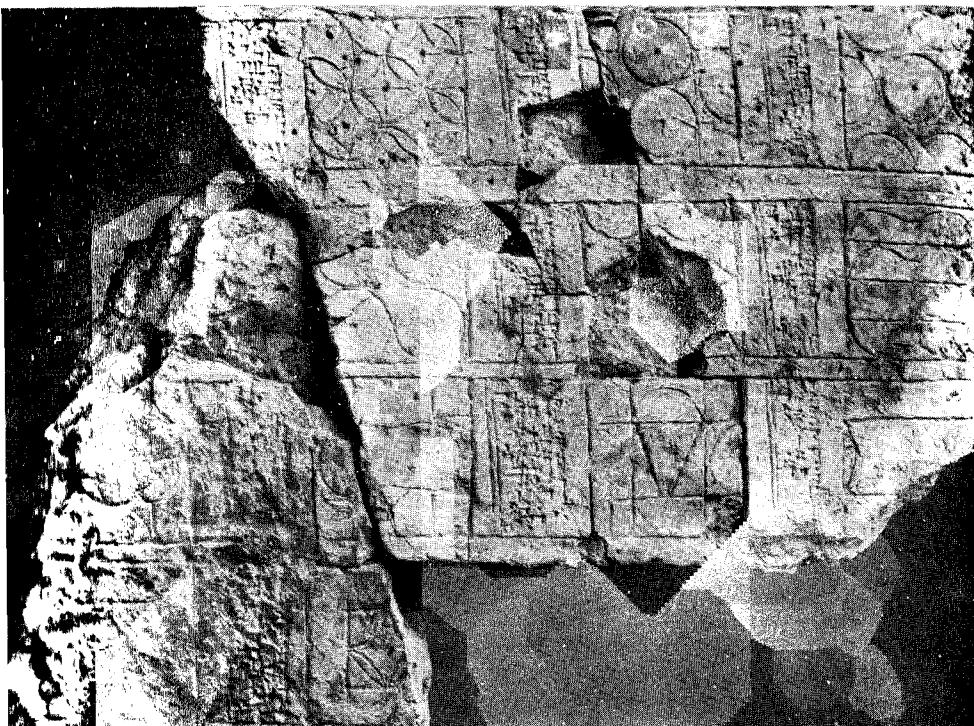
## Resumen del capítulo

1. Describir el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de dos rectas paralelas dadas.
2. Describir el conjunto de todos los puntos que son los centros de las circunferencias tangentes a una circunferencia dada en un punto dado de ésta.
3. Describir el conjunto de todos los puntos del espacio que están a una distancia fija de un punto dado.
4. En un plano  $E$ , se dan una recta y un punto que no está en la recta. Describáse el conjunto de todos los puntos de  $E$  que están a una distancia  $d$  de la recta dada y, también, a una distancia  $r$  del punto dado.
5. Describir el conjunto de todos los puntos que están a una distancia dada de un punto dado  $P$  y que, además, equidistan de  $P$  y de otro punto  $Q$ .
6. Hacer un esquema que represente cada uno de los siguientes conjuntos:
  - $\{(x, y) \mid x = -1\}$
  - $\{(x, y) \mid y = x\}$
  - $\{(x, y) \mid y = 2\}$
  - $\{(x, y) \mid y < x\}$
7. Hacer un esquema del conjunto de todos los puntos equidistantes de los puntos  $A(-5, 0)$  y  $B(3, 0)$  y representar dicho conjunto mediante una ecuación.
8. Hacer un esquema del conjunto de todos los puntos que distan 3 unidades de la gráfica de la ecuación  $y = 0$  y representar dicho conjunto mediante una ecuación. (No se permite el uso del signo  $\pm$ .)
9. Constrúyase un triángulo escaleno bastante grande. Luego, determinense, por construcción, el ortocentro, el centroide y el incentro del triángulo.
10. Construir un rombo, dado un ángulo y un segmento cuya longitud sea igual a la longitud del rombo.
11. Se da el  $\triangle ABC$  con vértices  $A(-4, 5)$ ,  $B(0, -3)$  y  $C(4, 6)$ .
  - Demuéstrese que el  $\triangle ABC$  es isósceles.
  - Determinense las coordenadas de su centroide.
12. Se da el  $\triangle PQR$  con vértices  $P(-4, 7)$ ,  $Q(8, 7)$  y  $R(8, 2)$ . Determinense las coordenadas de su ortocentro.



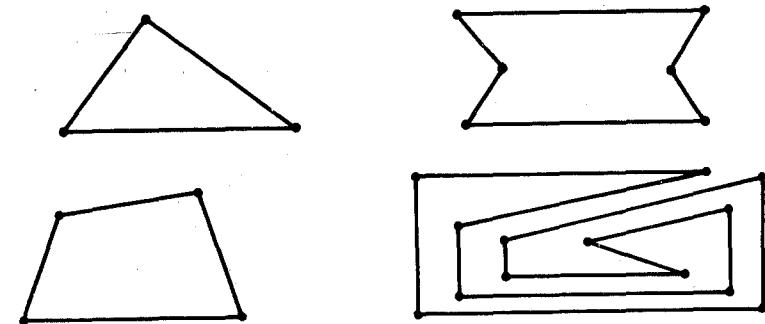
13. Se da el  $\triangle EFG$  con vértices  $E(-2, 0)$ ,  $F(4, 6)$  y  $G(10, 0)$ .
  - Determinense las coordenadas del circuncentro.
  - Escribáse la ecuación de la circunferencia circunscrita.
14. Determinar las coordenadas del centroide del triángulo cuyos vértices son  $A(-5, 0)$ ,  $B(9, 0)$ , y  $C(5, 8)$ .
15. Sea  $A$  el centro de una circunferencia con radio  $a$  y sea  $B$  el centro de una circunferencia con radio  $b$ ; ambas circunferencias están en el mismo plano. Si  $a + b > AB$ , ¿deberán intersecarse las circunferencias? ¿Por qué?
16. El  $\square ABCD$  es un trapecio con bases  $\overline{AB}$  y  $\overline{DC}$ . ¿En qué condiciones existirá un punto  $P$ , en el plano del trapecio, equidistante de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ?
17. Se dan dos rectas paralelas  $L_1$  y  $L_2$  y una secante  $T$ . Describáse el conjunto de todos los puntos equidistantes de  $L_1$ ,  $L_2$  y  $T$ .
18. Construir un paralelogramo, si se dan un lado, un ángulo agudo y la diagonal más larga.
19. Construir un triángulo rectángulo, si se dan un ángulo agudo y el radio de la circunferencia inscrita.
20. Se da un segmento cuya longitud es la suma de las longitudes de una diagonal y un lado de un cuadrado. Constrúyase el cuadrado.
21. Se da un segmento cuya longitud es la diferencia de las longitudes de una diagonal y un lado de un cuadrado. Constrúyase el cuadrado.

# 16 | Áreas de círculos y sectores

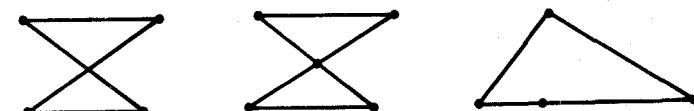


## 16-1. POLÍGONOS

Un polígono es una figura formada por la reunión de varios segmentos de manera que no se crucen y solamente se toquen en los extremos, así:



Pero no así:



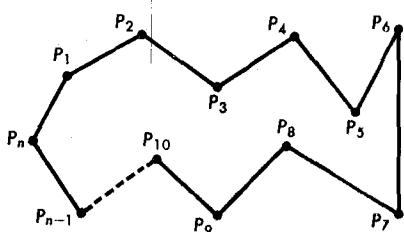
La idea representada por las figuras se puede enunciar de modo más preciso de la siguiente manera:

### Definiciones

Sean  $P_1, P_2, \dots, P_n$  una sucesión de  $n$  puntos distintos de un plano con  $n \geq 3$ . Supongamos que los  $n$  segmentos  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$  tienen las siguientes propiedades:

- (1) Ningún par de segmentos se intersecan, salvo en sus puntos extremos.
- (2) Ningún par de segmentos con un extremo común son colineales.

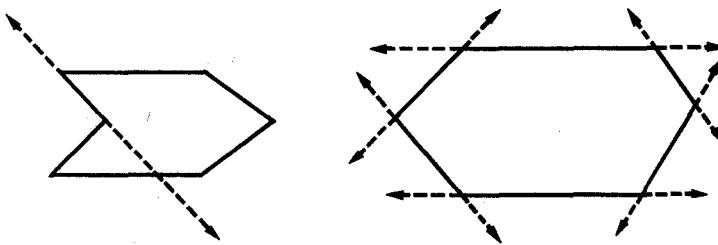
Entonces, la reunión de los  $n$  segmentos se llama *polígono*. Los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  son los *vértices* del polígono y los segmentos  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$  son los *lados*. Los *ángulos* del polígono son el  $\angle P_nP_1P_2$ , el  $\angle P_1P_2P_3$ , y así sucesivamente. Para abreviar, a menudo denotamos los ángulos por  $\angle P_1$ ,  $\angle P_2$ , etc. La suma de las longitudes de los lados se llama el *perímetro* del polígono.



Ahora, el alumno debe volver a examinar las siete figuras al principio de la sección y asegurarse de que ha entendido bien por qué nuestra definición de polígono admite las cuatro primeras figuras, pero rechaza las otras tres. (Recuérdese que los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tienen que ser todos distintos.)

Un polígono con  $n$  lados se llama un  $n$ -gono. Así, pues, podemos referirnos a los triángulos y cuadriláteros como 3-gonos y 4-gonos, respectivamente, aunque estos términos casi nunca se utilizan. Los 5-gonos se llaman *pentágonos*, los 6-gonos son *hexágonos*, los 8-gonos son *octógonos* y los 10-gonos son *décágonos*. Algunos de los otros  $n$ -gonos (para valores pequeños de  $n$ ) tienen también nombres especiales derivados del griego, pero éstos raras veces se utilizan.

Cada lado de un polígono está en una recta y cada recta, desde luego, separa al plano en dos semiplanos.



Puede ocurrir fácilmente (como en la figura anterior de la izquierda) que cada uno de estos semiplanos contenga puntos del polígono. Si esto *no* ocurre para ninguno de los lados del polígono (como en la figura de la derecha), entonces se dice que el polígono es *convexo*. Redactaremos esta idea en forma de definición.

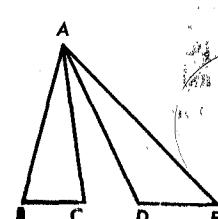
### Definición

Un polígono es *convexo*, si ningún par de sus puntos está a lados opuestos de una recta que contenga un lado del polígono.

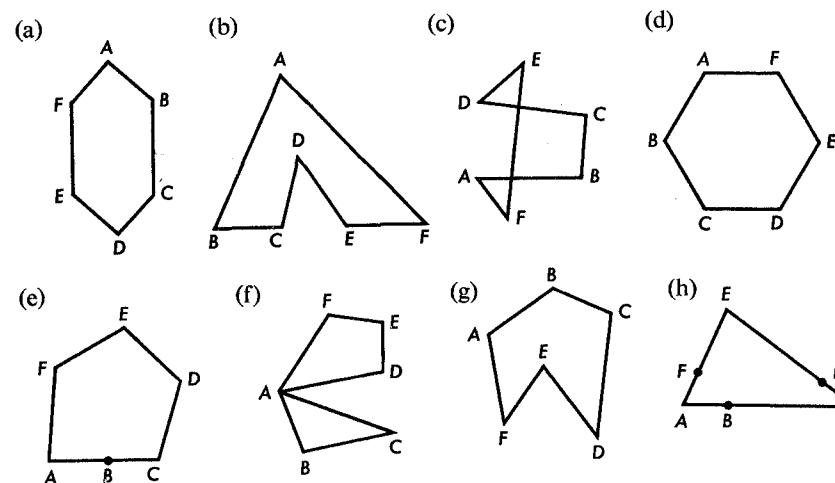
El empleo del término “convexo” es natural: si un polígono es convexo, entonces el polígono, reunido con su interior, forma un *conjunto convexo* en el sentido de la definición presentada en el Capítulo 3. Cuando hablamos del área de un polígono convexo, queremos decir el área de la región poligonal convexa correspondiente.

### Conjunto de problemas 16-1

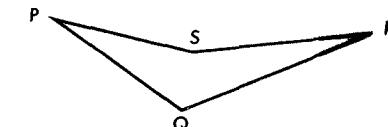
1. En esta figura, ningún par de segmentos se cortan, salvo en sus puntos extremos, y ningún par de segmentos con un extremo común son colineales. No obstante, la figura no es un polígono. ¿Por qué?



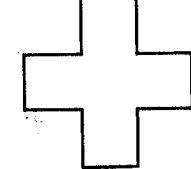
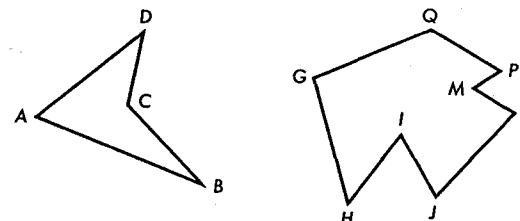
2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son hexágonos? ¿Cuáles son hexágonos convexos?



3. Dar una explicación precisa de por qué la figura de la derecha no es un polígono convexo.



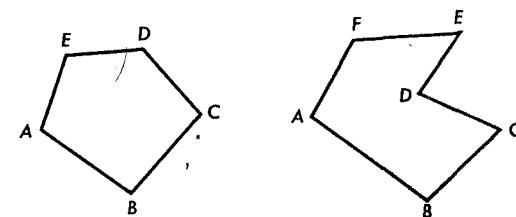
4. Nombrar los ángulos de cada polígono:



5. ¿Tiene que ser necesariamente un cuadrado, un polígono que tiene todos sus lados congruentes y cuyos ángulos son todos ángulos rectos?

6. Un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos de un polígono se llama una *diagonal* del polígono.

- (a) Nombrar todas las diagonales de cada uno de los siguientes polígonos:





Podemos construir  $n$ -gonos regulares con un número cualquiera de lados, mediante el siguiente método: Empezamos con una circunferencia, de centro  $Q$  y radio  $r$ . Primero, dividimos la circunferencia en  $n$  arcos congruentes, de manera que no se crucen y solamente se toquen en sus extremos. Entonces, la medida de cada uno de los arcos es  $360/n$ . (La figura de la derecha representa el caso  $n = 8$ .) Para cada arco, dibujamos la cuerda correspondiente. Así, se obtiene un polígono con vértices  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Es fácil ver que el polígono es convexo. Los lados son todos congruentes, porque los arcos lo son.

Si trazamos los radios desde  $Q$  a los vértices, obtenemos un conjunto de triángulos isósceles. En virtud del teorema LLL, todos esos triángulos son congruentes. Por tanto, todos los ángulos del polígono son congruentes. (La medida de cada ángulo es el doble de la medida de cada uno de los ángulos en la base de cada triángulo isósceles.) En consecuencia, el polígono es regular.

Es cierto que todo polígono regular puede construirse mediante este método. Es decir, todo polígono regular puede inscribirse en una circunferencia. No nos detendremos a demostrar este enunciado, porque no lo necesitaremos. Utilizaremos polígonos regulares solamente en el estudio de las circunferencias y todos los polígonos regulares que consideremos estarán construidos mediante el método que acabamos de explicar.

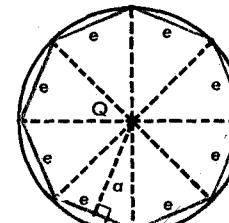
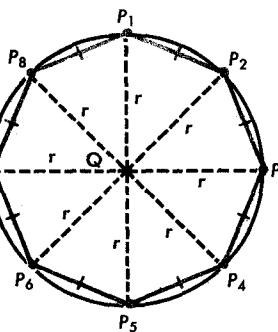
El centro  $Q$  de la circunferencia en la cual se inscribe un polígono se llama *centro* del polígono. Como todos los triángulos isósceles de la figura anterior son congruentes, tienen la misma base  $e$  y la misma altura  $a$ . El número  $a$  es la distancia del centro a cada uno de los lados.

### Definición

La distancia  $a$  desde el centro de un polígono regular a cada uno de los lados se llama *apotema* del polígono.

El perímetro del polígono se denota por  $l$ . Evidentemente,

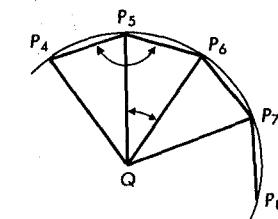
$$l = ne.$$



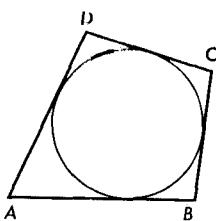
Es fácil calcular el área de la región formada por el polígono, reunido con su interior. El área de cada uno de los triángulos es  $\frac{1}{2}ae$ . Hay  $n$  triángulos. Por consiguiente, el área es  $A_n = n \cdot \frac{1}{2}ae = \frac{1}{2}al$ .

### Conjunto de problemas 16-2

1. Nombrar un cuadrilátero que sea equilátero, pero no regular, si hay alguno. Nombrar uno que sea equiángulo, pero no regular, si hay alguno.
2. Hágase un diagrama de un polígono cuyos ángulos sean todos ángulos rectos y cuyos lados sean todos congruentes, pero que no sea un polígono regular.
3. La figura de la derecha representa parte de un  $n$ -gono regular inscrito en una circunferencia con centro  $Q$ .
  - (a) Calcular  $m\angle P_5Q P_6$ .
  - (b) Calcular  $m\angle Q P_5 P_6 + m\angle Q P_6 P_5$ .
  - (c) ¿Por qué es  $\angle Q P_6 P_5 \cong \angle Q P_5 P_4$ ?
  - (d) ¿Por qué es  $m\angle P_4 P_5 P_6 = m\angle P_4 P_5 Q + m\angle Q P_5 P_6$ ?
  - (e) Verificar que  $m\angle P_4 P_5 P_6 = 180 - \frac{360}{n}$ .
4. Determinar las medidas de los ángulos de un polígono regular de 5 lados; de 9 lados; de 12 lados; de 15 lados; de 17 lados; de 24 lados. (Véase el problema 3.)
5. Determinar el número de lados que tiene un polígono regular, si la medida de un ángulo externo es 72; 45; 36; 24;  $17\frac{1}{7}$ .
6. Determinar el número de lados que tiene un polígono regular, si la medida de uno de sus ángulos es  $128\frac{4}{7}$ ; 140; 144; 160.
7. ¿Cómo se podría construir un octágono regular, utilizando solamente un compás y una regla sin marcas?
8. ¿Cómo se podría construir un hexágono regular, utilizando solamente un compás y una regla sin marcas?
9. El perímetro de un polígono regular es 48 y su apotema es 6. ¿Cuál es el área de la región poligonal correspondiente?
10. Determinar el área de un hexágono regular que tiene lado de 10 centímetros de largo.
11. La longitud de un lado de un hexágono regular inscrito en una circunferencia, es 4. Determinense el radio de la circunferencia y la apotema del hexágono.
12. Demostrar que el área de un hexágono regular de lado  $s$  puede expresarse mediante la fórmula  $\frac{3\sqrt{3}}{2}s^2$ .



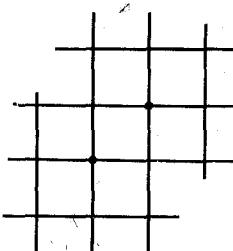
13. El  $\square ABCD$  es un cuadrilátero cada uno de cuyos lados es tangente a una circunferencia de diámetro 9. Si el perímetro del  $\square ABCD$  es 56, ¿cuánto es  $a_{\square ABCD}$ ?



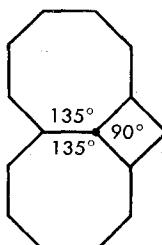
14. Determinar el área de un polígono regular de 9 lados, sabiendo que la longitud de uno de sus lados es 8. (Refiérase a las razones trigonométricas.)
- \* 15. Determinar el área de un polígono regular de 15 lados, sabiendo que la longitud de uno de sus lados es 4.
- \* 16. Demostrar que cada uno de los lados de un octágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1 tiene longitud igual a  $\sqrt{2} - \sqrt{2}$ .

### PROBLEMA OPTATIVO

Un problema que aparece corrientemente en los proyectos arquitectónicos es el de cubrir una superficie con regiones poligonales regulares. Por ejemplo, un plano se puede cubrir con regiones cuadradas congruentes, con un vértice común cada cuatro de ellas, como se indica en la figura.



- (a) ¿Cuántas regiones triangulares equiláteras tienen que colocarse alrededor de un vértice para cubrir un plano?
- (b) ¿Qué otras clases de regiones poligonales regulares pueden utilizarse para cubrir un plano? ¿Cuántas se necesitarán alrededor de cada vértice?
- (c) Dos octógonos regulares y un cuadrado pueden cubrir completamente la parte de un plano alrededor de un punto, si se disponen como se indica en la figura. ¿Qué otras combinaciones de tres regiones poligonales regulares (dos de ellas iguales) pueden hacer lo mismo? El alumno deberá encontrar otras dos combinaciones.



- (d) Averiguar si hay otras posibilidades de recubrimiento de un plano con regiones poligonales regulares. Una tabla de medidas de los ángulos de polígonos regulares puede servir de ayuda para obtener otras combinaciones posibles.

### 16-3. LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA. EL NÚMERO $\pi$

En esta sección y en la siguiente, consideraremos  $n$ -gonos regulares para diversos valores de  $n$ . Como es habitual, denotamos el lado, la apotema y el perímetro de un  $n$ -gono regular inscrito en una circunferencia de radio  $r$  por  $e$ ,  $a$  y  $l$ , respectivamente.

Sea  $C$  la longitud de una circunferencia. Parece razonable suponer que si queremos medir  $C$  aproximadamente, podemos hacerlo, inscribiendo un polígono regular de un gran número de lados y midiendo entonces el perímetro del polígono. Es decir, el perímetro  $l$  debe ser una buena aproximación de  $C$  cuando  $n$  es grande. Con otras palabras, una vez que decidimos cuán cerca de  $C$  queremos que esté  $l$ , podemos lograrlo con sólo tomar  $n$  suficientemente grande. Expresamos esto con símbolos, escribiendo

$$l \rightarrow C,$$

y decimos que  $l$  se aproxima a  $C$  como límite.

Sin embargo, no podemos demostrar esto, y la razón de ello es un tanto inesperada. Consiste en que, hasta ahora, no disponemos de una definición matemática de lo que significa la longitud de una circunferencia. (No podemos obtener la longitud de la circunferencia simplemente añadiendo las longitudes de ciertos segmentos, como hicimos para obtener el perímetro de un polígono, porque una circunferencia no contiene segmento alguno, ni aún segmentos muy pequeños. En efecto, el corolario 14-6.1 nos dice que ninguna circunferencia contiene tres puntos que estén alineados.)

Pero el remedio a esta dificultad es fácil. Tomamos el enunciado

$$l \rightarrow C$$

como definición de  $C$ .

### Definición

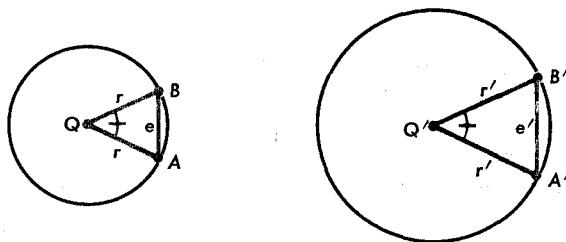
La longitud de una circunferencia es el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscritos.

Ahora, podemos definir el número  $\pi$ , del modo usual, como la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro. Pero, para estar seguros de que esta definición tiene sentido, necesitamos primero saber que la razón  $C/2r$  es la misma para todas las circunferencias, no importando sus tamaños. En efecto, esto es cierto.

### Teorema 16-1

La razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro es la misma para todas las circunferencias.

**Demostración:** Se dan una circunferencia con centro  $Q$  y radio  $r$  y otra con centro  $Q'$  y radio  $r'$ . En cada circunferencia, inscribimos un  $n$ -gono regular.



En la figura anterior, mostramos solamente un lado de cada  $n$ -gono con el triángulo isósceles correspondiente. Los dos ángulos centrales son congruentes, como indican las marcas, porque la medida de cada uno es  $360/n$ . También, los lados incluidos son proporcionales:  $r'/r = r'/r$ . Por el teorema de semejanza LAL,

$$\triangle BQA \sim \triangle B'Q'A'.$$

Por tanto,

$$\frac{e'}{r'} = \frac{e}{r}, \quad \frac{ne'}{r'} = \frac{ne}{r}, \quad \text{y} \quad \frac{l'}{r'} = \frac{l}{r},$$

donde  $l$  y  $l'$  son los perímetros de los dos  $n$ -gonos. Ahora bien,

$$l \rightarrow C \quad \text{y} \quad l' \rightarrow C',$$

por definición. En consecuencia,

$$\frac{l}{r} \rightarrow \frac{C}{r} \quad \text{y} \quad \frac{l'}{r'} \rightarrow \frac{C'}{r'}.$$

Puesto que  $\frac{l}{r}$  y  $\frac{l'}{r'}$  son iguales, sus límites son iguales. Así,

$$\frac{C}{r} = \frac{C'}{r'} \quad \text{y} \quad \frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'},$$

como queríamos demostrar.

La razón  $C/2r$  se denota por  $\pi$ . Como este número es el mismo para todas las circunferencias, la fórmula

$$C = 2\pi r$$

es válida para todas las circunferencias.

El número  $\pi$  no es racional y no puede calcularse exactamente mediante ninguno de

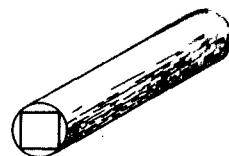
los métodos ordinarios del álgebra. Por otra parte, puede aproximarse con números racionales con la exactitud que se desee. Algunas aproximaciones útiles son:

$$3, \quad 3.14, \quad 3\frac{1}{7}, \quad 3.1416, \quad \frac{355}{113}, \quad 3.14159265358979$$

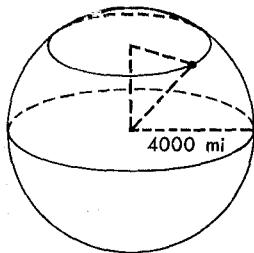
No es difícil convencernos, mediante mediciones reales, de que  $\pi$  es un poco mayor que 3. Pero, para obtener una aproximación más exacta, es necesario emplear técnicas matemáticas muy avanzadas.

### Conjunto de problemas 16-3

1. Un polígono regular se inscribe en una circunferencia; luego, se inscribe otro polígono regular con un lado más que el primero, y así sucesivamente, teniendo cada polígono un lado más que el anterior.
  - (a) ¿Cuál es el límite de la longitud de la apotema?
  - (b) ¿Cuál es el límite de la longitud de cada lado?
  - (c) ¿Cuál es el límite de la medida de un ángulo del polígono?
  - (d) ¿Cuál es el límite del perímetro del polígono?
2. El diámetro de una rueda de bicicleta es 70 centímetros. ¿Qué distancia recorre la bicicleta con cada vuelta de la rueda? (¿Qué aproximación de  $\pi$  hace más fácil el cálculo?)
3. ¿Qué aproximación de  $\pi$  es más exacta, 3.14 ó  $3\frac{1}{7}$ ?
4. La longitud de la circunferencia de un tronco es 62.8 pulgadas. ¿Cuál será la longitud del lado de una sección transversal de la mayor viga cuadrada que puede recortarse del tronco? (Utilícese 3.14 como valor aproximado de  $\pi$ .)
5. ¿Cuál es el radio de una circunferencia cuya longitud es  $\pi$ ?
6. Se va a construir una cerca de forma cuadrada para encerrar una piscina circular cuyo diámetro es 12 metros. Se requiere que la longitud total de la cerca sea el doble de la circunferencia de la piscina. ¿Cuál será la longitud de un lado de la cerca?
7. La longitud del lado de un cuadrado es 8 unidades. Calcúlese la longitud de la circunferencia inscrita y la de la circunferencia circunscrita.
8. La longitud de un lado de un triángulo equilátero es 12. ¿Cuál será la longitud de la circunferencia inscrita?; ¿y la de la circunferencia circunscrita?
9. La Tierra está a una distancia del Sol de 155,000,000 kilómetros, aproximadamente. La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es casi circular. ¿Qué distancia recorremos "en órbita" alrededor del Sol cada año? ¿Cuál será una buena aproximación de la velocidad de la Tierra en su órbita?



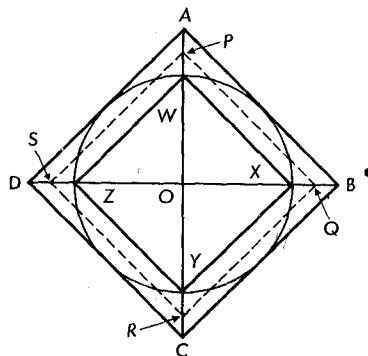
10. El radio de la Tierra es 4000 millas, aproximadamente. A medida que la Tierra gira, los cuerpos en su superficie se mueven constantemente a distintas velocidades con relación al eje de la Tierra, dependiendo de la latitud del lugar de cada cuerpo. ¿Cuál será la velocidad aproximada, en millas por hora, de un cuerpo que esté cerca del ecuador? ¿Cuál será la velocidad aproximada de un cuerpo que esté en una latitud de 45°N?



11. La longitud de un lado de un hexágono regular es 6. ¿Cuál será la longitud de la circunferencia circunscrita?; ¿y la de la circunferencia inscrita?

12. Los radios de tres circunferencias son 1 metro, 10 metros y 10,000 metros, respectivamente. El radio de cada circunferencia se aumenta 1 metro, de manera que los nuevos radios son 2, 11 y 10,001 metros, respectivamente. Determinese el aumento en la longitud de cada circunferencia debido a la variación del radio.

- \* 13. Se da la figura, en la que el  $\square ABCD$  es un cuadrado circunscrito a la circunferencia, el  $\square WXYZ$  es un cuadrado inscrito en la circunferencia y  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{BD}$  contienen las diagonales de ambos cuadrados. El  $\square PQRS$  es un cuadrado cuyos vértices son los puntos medios de  $\overline{AW}$ ,  $\overline{BX}$ ,  $\overline{CY}$  y  $\overline{DZ}$ . Determinese si el perímetro del  $\square PQRS$  es menor, igual o mayor que la longitud de la circunferencia. Tómese el radio de la circunferencia igual a 1 y justifíquese la respuesta mediante cálculos.



## 16-4. EL ÁREA DE UN CÍRCULO

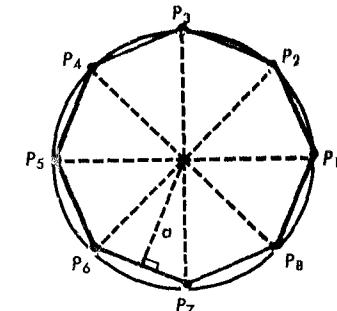
### Definición

Un *círculo* o una *región circular* es la reunión de una circunferencia y su interior.

Cuando hablamos del “área de un círculo”, queremos decir el área de la región circular correspondiente. (Éste es el mismo modo de abreviar que se utiliza cuando hablamos del “área de un triángulo”, queriendo decir el área de la región triangular correspondiente.) Ahora, obtendremos una fórmula para el área de un círculo.

Dada una circunferencia de radio  $r$ , inscribimos en ella un  $n$ -gono regular. Como se acostumbra, denotamos el área del  $n$ -gono por  $A_n$ , su perímetro por  $l$  y la apotema por  $a$ . En la sección 16-2, página 518, obtuvimos que

$$A_n = \frac{1}{2}al.$$



Esta fórmula contiene tres cantidades, cada una de las cuales depende de  $n$ . Son  $l$ ,  $a$  y  $A_n$ . Para obtener la fórmula para el área de un círculo, tenemos que hallar a qué límites se aproximan estas cantidades a medida que  $n$  crece indefinidamente.

(a) *¿Qué le sucede a  $A_n$ ?*  $A_n$  es siempre un poco menor que el área  $A$  del círculo, porque siempre hay algunos puntos que están dentro del círculo, pero fuera del  $n$ -gono regular. Sin embargo, la diferencia entre  $A_n$  y  $A$  es muy pequeña cuando  $n$  es muy grande, porque entonces la región poligonal cubre casi completamente el interior de la circunferencia. Así, es de esperar que

$$A_n \rightarrow A. \quad (1)$$

Pero lo mismo que en el caso de la longitud de una circunferencia, esto no puede demostrarse, puesto que no hemos dado todavía una definición del área de un círculo. Aquí, también, el remedio es fácil.

### Definición

El *área de un círculo* es el límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia correspondiente.

Así, pues,  $A_n \rightarrow A$ , por definición.

(b) *¿Qué le sucede a  $a$ ?* La apotema  $a$  es siempre un poco menor que  $r$ , puesto que un cateto de un triángulo rectángulo es más corto que la hipotenusa. Pero, la diferencia entre  $a$  y  $r$  es muy pequeña cuando  $n$  es muy grande. Así, pues,

$$a \rightarrow r. \quad (2)$$

(c) *¿Qué le sucede a  $l$ ?* Por definición de  $C$ , tenemos

$$l \rightarrow C. \quad (3)$$

Reuniendo los resultados (2) y (3), obtenemos

$$\frac{1}{2}al \rightarrow \frac{1}{2}rC.$$

Por tanto, como  $A_n = \frac{1}{2}al$ , tenemos

$$A_n \rightarrow \frac{1}{2}rC.$$

Pero, por (1), sabemos que  $A_n \rightarrow A$ ; en consecuencia,

$$A = \frac{1}{2}rC.$$

Como  $C = 2\pi r$ , esto nos da

$$A = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

Así, la fórmula familiar se ha convertido en un teorema.

### Teorema 16-2

El área de un círculo de radio  $r$  es  $\pi r^2$ .

### Conjunto de problemas 16-4

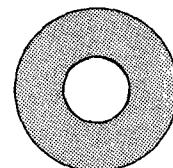
1. Determinar la longitud de la circunferencia y el área del círculo correspondiente, si el radio es 3; 5;  $\sqrt{2}$ ;  $\pi$ .

2. Determinar la longitud de la circunferencia y el área del círculo correspondiente, si el diámetro es 6; 9; 2;  $\pi\sqrt{12}$ .

3. Calcular el radio de un círculo cuya área es  $49\pi$ ;  $20\pi$ ; 25; 16;  $18\pi^3$ .

4. Calcular el área de un círculo para el cual la longitud de la circunferencia correspondiente es  $6\pi$ ;  $16\pi$ ; 12;  $2\pi$ .

5. Calcular el área de una cara de una arandela de hierro, si se sabe que su diámetro es  $1\frac{1}{4}$  centímetros y que el diámetro del agujero es  $\frac{1}{2}$  centímetro. (Utilícese  $3\frac{1}{7}$  como valor de  $\pi$ .)



6. Demostrar el siguiente teorema:

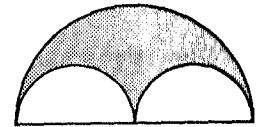
La razón de las áreas de dos círculos es igual al cuadrado de la razón de sus radios.

7. Los radios de dos círculos son 3 y 12, respectivamente. ¿Cuál es la razón de sus áreas?

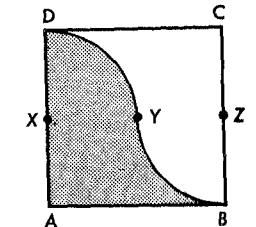
8. Las longitudes de las circunferencias correspondientes a dos círculos son 7 y  $4\pi$ . ¿Cuál es la razón de las áreas de los círculos?

9. La longitud de la circunferencia correspondiente a un círculo y el perímetro de un cuadrado son 20 unidades cada uno. ¿Cuál tendrá el área mayor, el círculo o el cuadrado? ¿Cuánto mayor?

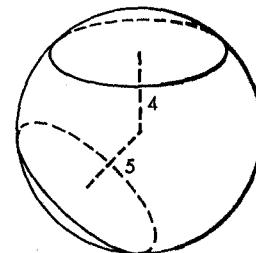
10. Dado un cuadrado con un lado de longitud 10, determíñese el área de la región limitada por las circunferencias inscrita y circunscrita.



11. En la figura de la derecha, el diámetro de cada semicircunferencia pequeña es igual al radio de la semicircunferencia grande. Si el radio de la semicircunferencia grande es 2, ¿cuál es el área de la región sombreada?



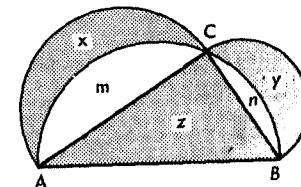
12. El  $\square ABCD$  es un cuadrado de lado  $s$ .  $X$  y  $Z$  son los puntos medios de  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente. Los centros de los arcos  $\widehat{DY}$  y  $\widehat{BY}$  son  $X$  y  $Z$ , respectivamente. Determíñese el área de la región sombreada.



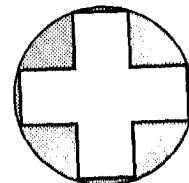
13. En una superficie esférica de radio 10 pulgadas, se determinan dos secciones mediante dos planos que están a 4 pulgadas y 5 pulgadas del centro. ¿Qué sección tendrá el área mayor? Calcúlese la razón de las áreas de las dos secciones.

14. Un anillo es una región determinada por dos circunferencias concéntricas. Calcúlese el área del anillo determinado por las circunferencias inscrita y circunscrita correspondientes a una región triangular equilátera cuyo lado tiene longitud 6.

15. Se dan dos circunferencias concéntricas y una cuerda de la circunferencia mayor, tangente a la circunferencia menor. Demuéstrese que el área del anillo determinado por las circunferencias es igual a un cuarto del producto de  $\pi$  y el cuadrado de la longitud de la cuerda.

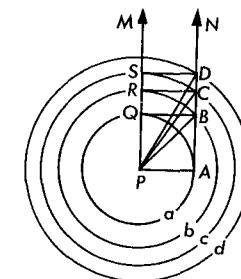


- \* 16. Las semicircunferencias trazadas en la figura tienen como diámetros los catetos del triángulo rectángulo  $\triangle ABC$ . Las áreas de las regiones son  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $m$  y  $n$ , como se indica. Demuéstrese que  $x + y = z$ .



- \* 17. El 12-gono que se muestra a la derecha, tiene 8 de sus vértices en una circunferencia. Todos sus lados son congruentes y, además, todos sus ángulos son rectos. Si se sabe que la longitud de cada lado es 4, determíñese el área de la parte de la región circular exterior al polígono.

18. Una circunferencia de longitud  $4\pi$  se inscribió en un rombo cuyo perímetro es 20. Calcúlese el área total de las regiones limitadas por la circunferencia y el rombo.
19. Un trapezo isósceles cuyas bases miden 2 y 6 centímetros, respectivamente, se circunscribe a una circunferencia. Determinese el área de la parte de la región del trapezo que está fuera de la circunferencia.
20. Un blanco en el cual se supone que un aficionado dé en su región central con tanta frecuencia como en cualquier región anular, se construye de la siguiente manera: Se toma como radio de la región central la distancia  $PA = r$  entre dos rayos paralelos  $\overrightarrow{PM}$  y  $\overrightarrow{AN}$ . La circunferencia con radio  $r$  y centro  $P$  interseca a  $\overrightarrow{PM}$  en  $Q$ . La perpendicular a  $\overrightarrow{PM}$  en  $Q$  corta a  $\overrightarrow{AN}$  en  $B$ . Entonces, se traza una circunferencia con radio  $PB = r_1$  y centro  $P$ . Este proceso se repite, trazando perpendiculares a  $R$  y  $S$  y circunferencias concéntricas con radios  $PC = r_2$  y  $PD = r_3$ . Desde luego, pueden construirse más anillos.



(a) Exprésense  $r_1, r_2, r_3$  en función de  $r$ .

(b) Muéstrese que las áreas de la región central y de los anillos, representadas por  $a, b, c$  y  $d$ , son iguales.

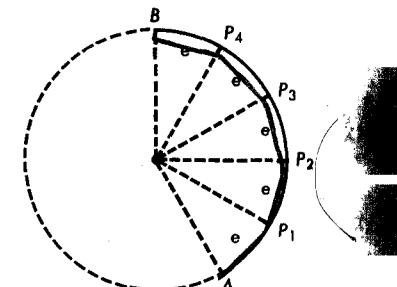
## 16-5. LONGITUDES DE ARCOS Y ÁREAS DE SECTORES

Para definir la longitud de un arco circular, utilizamos el mismo tipo de procedimiento que para definir la longitud de la circunferencia completa. Primero, dividimos el arco dado  $\widehat{AB}$  en  $n$  arcos congruentes que no se crucen y sólo se toquen en los extremos. Entonces, trazamos las cuerdas correspondientes. Como en el caso anterior, todas las cuerdas tienen la misma longitud  $e$ , y la suma de sus longitudes es

$$l = ne.$$

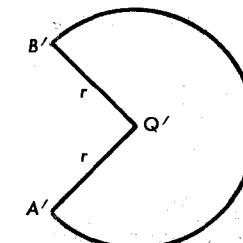
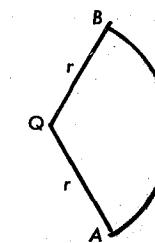
La longitud de  $\widehat{AB}$  se define como el límite de  $l$  a medida que  $n$  crece indefinidamente.

En el estudio que haremos ahora, convendrá considerar una circunferencia como un arco cuya medida es 360. Así, podremos considerar su longitud como la de un arco de medida 360.



## Teorema 16-3

Si dos arcos tienen radios iguales, entonces sus longitudes son proporcionales a sus medidas.



$$\frac{\text{longitud } \widehat{AB}}{m\widehat{AB}} = \frac{\text{longitud } \widehat{A'B'}}{m\widehat{A'B'}}.$$

En casos sencillos, es muy fácil ver que esto es cierto. Si duplicamos la medida de un arco, se duplicará la longitud; si se divide la medida por 7, se dividirá la longitud por 7; y así sucesivamente. Sin embargo, una demostración de este teorema es demasiado difícil para este curso. Por tanto, consideraremos el teorema como un nuevo postulado.

A base de este teorema, podemos calcular las longitudes de arcos.

## Teorema 16-4

Si un arco tiene medida  $q$  y radio  $r$ , entonces su longitud es

$$L = \frac{q}{180} \cdot \pi r.$$

**Demostración:** Sea  $C$  la longitud de una circunferencia de radio  $r$ . Por el teorema 16-3,

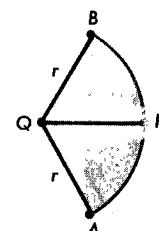
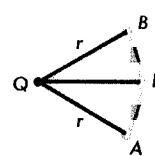
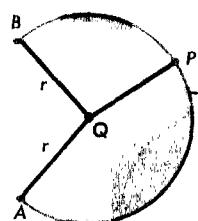
$$\frac{L}{q} = \frac{C}{360}.$$

Pero  $C = 2\pi r$ . Por consiguiente,

$$\frac{L}{q} = \frac{2\pi r}{360},$$

y

$$L = \frac{q}{180} \cdot \pi r.$$



### Definiciones

Sea  $\widehat{AB}$  un arco de una circunferencia con centro  $Q$  y radio  $r$ . La reunión de todos los segmentos  $\overline{QP}$ , donde  $P$  es un punto cualquiera de  $\widehat{AB}$ , se llama un *sector*.  $\widehat{AB}$  es el *arco* del sector y  $r$  es el *radio* del sector.

Definimos el área de un sector de una manera análoga a como definimos el área de un círculo. Utilizando el mismo tipo de demostración, obtenemos el siguiente teorema:

### Teorema 16-5

El área de un sector es la mitad del producto de su radio y la longitud de su arco.

Expresado en forma breve,

$$A = \frac{1}{2}rL.$$

Hay una manera fácil de recordar esta fórmula. El área de un sector de radio  $r$  deberá ser proporcional a la longitud de su arco. (En efecto, esto es cierto.) Cuando el arco es la circunferencia completa, el área es  $\pi r^2 = \frac{1}{2}Cr$ , donde  $C = 2\pi r$ . En consecuencia, para un sector con arco de longitud  $L$ , y de área  $A$ , tendremos

$$\frac{A}{L} = \frac{\frac{1}{2}Cr}{C} \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{2}rL.$$

Utilizando la fórmula para  $L$  del teorema 16-4, obtenemos el teorema siguiente:

### Teorema 16-6

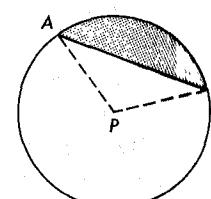
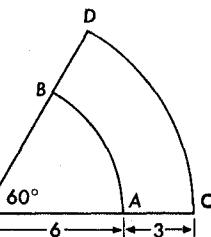
Si un sector tiene radio  $r$  y su arco tiene medida  $q$ , entonces su área es

$$A = \frac{q}{360} \cdot \pi r^2.$$

Obsérvese que para  $q = 360$ , el teorema dice que  $A = \pi r^2$ , como debe ser.

### Conjunto de problemas 16-5

- El radio de una circunferencia es 18. Calcúlese la longitud de un arco de  $60^\circ$ ; de  $90^\circ$ ; de  $120^\circ$ ; de  $150^\circ$ ; de  $180^\circ$ ; de  $270^\circ$ .
- ¿Cuál es el radio de una circunferencia, si la longitud de un arco de  $45^\circ$  es  $3\pi$ ?
- ¿Cuál es el radio de una circunferencia, si la longitud de un arco de  $72^\circ$  es  $4\pi$ ?
- Los arcos  $\widehat{AB}$  y  $\widehat{CD}$  son ambos de  $60^\circ$ , pero sus longitudes no son iguales.  $P$  es el centro de ambos arcos. Si  $PA = 6$  y  $AC = 3$ , ¿cuáles son las longitudes de  $\widehat{AB}$  y  $\widehat{CD}$ ?
- La longitud de un arco de  $60^\circ$  es de 1 centímetro. Determíñese el radio del arco y la longitud de su cuerda.
- Explíquese la diferencia entre el significado de la medida de un arco y la longitud del arco.
- Calcular el área de un sector de radio 10, cuyo arco es de  $90^\circ$ ; de  $72^\circ$ ; de  $180^\circ$ ; de  $216^\circ$ ; de  $324^\circ$ .
- El área de un sector de radio 2 es  $\pi$ . ¿Cuál es la medida del arco del sector?
- El área de un sector de radio 6 es  $15\pi$ . ¿Cuál es la longitud del arco del sector?
- El minutero de un reloj en la torre de un edificio público tiene 2 metros de largo. Determíñese la distancia que recorre la punta del minutero en 5 minutos. ¿Cuántos centímetros recorrerá la punta del minutero en 1 minuto?
- Al proyectar edificios muy altos, los ingenieros deben tener en cuenta un movimiento oscilatorio que es típico de todos los rascacielos. La altura del edificio Empire State hasta el piso 102 es 1250 pies. Si el edificio a esta altura describe un arco de  $\frac{1}{2}^\circ$ , ¿qué distancia recorre al moverse de un lado a otro?
- Un *segmento circular* es una región determinada por un arco de una circunferencia y la cuerda correspondiente. Describáse un método para calcular el área de un segmento circular.



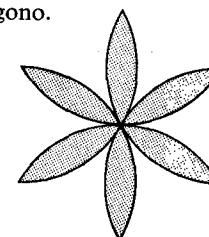
13. Determinar el área de un segmento circular, si se sabe que el radio,  $r$ , y la medida del arco,  $m\widehat{AB}$ , son los siguientes:

(a)  $r = 12$ ;  $m\widehat{AB} = 60$       (b)  $r = 6$ ;  $m\widehat{AB} = 120$

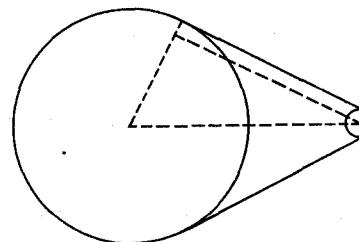
- \* 14. Determinar el área de un segmento circular, si se sabe que el radio,  $r$ , y la medida del arco,  $m\widehat{AB}$ , son los siguientes:

(a)  $r = 8$ ;  $m\widehat{AB} = 45$       (b)  $r = 10$ ;  $m\widehat{AB} = 30$

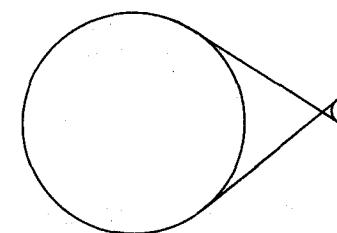
- \* 15. Un octógono regular se inscribió en una circunferencia de radio 6. Determíñese el área de la parte de la región circular que está en el exterior del octágono.



- \* 16. El radio de cada uno de los arcos circulares que forman la figura de seis pétalos es el mismo que el radio de la circunferencia que contiene las puntas exteriores de todos los pétalos. Si el radio es 1, ¿cuál es el área de la figura?



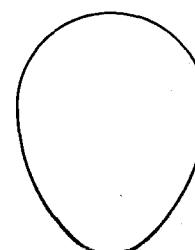
17. En la figura de la derecha, se representa una correa continua en torno a dos ruedas. Los radios de las ruedas son 3 centímetros y 15 centímetros, y la distancia entre sus centros es 24 centímetros. Calcúlese la longitud de la correa.



- \* 18. Una correa continua corre en torno a dos ruedas de manera que éstas giren en sentidos opuestos. Las ruedas tienen radios de 3 pulgadas y 9 pulgadas, y la distancia entre sus centros es 24 pulgadas. Determíñese la longitud de la correa.

### PROBLEMA OPTATIVO

Deducir una fórmula para determinar el área de un óvalo. Constrúyase un óvalo de la manera siguiente: Sean  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  diámetros perpendiculares de una circunferencia de radio  $r$ . Con  $A$  como centro y  $\overleftrightarrow{AB}$  como radio, trácese un arco desde  $B$  que interseque a  $\overleftrightarrow{AC}$  en  $G$ . Análogamente, con  $B$  como centro y  $\overleftrightarrow{AB}$  como radio, trácese  $\overleftrightarrow{AH}$  de manera que interseque a  $\overleftrightarrow{BC}$  en  $H$ . Finalmente, con  $C$  como centro y  $\overleftrightarrow{CG}$  como radio, trácese  $\overleftrightarrow{GH}$ . Determíñese el área del óvalo  $ADBGH$ .

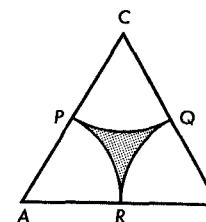


### Repaso del capítulo

1. ¿Es un polígono convexo un conjunto convexo?
2. Definir un polígono regular.
3. Un hexágono se circunscribió a una circunferencia de diámetro 10. Si el perímetro del hexágono es 28, ¿cuál es el área de la región hexagonal?
4. Comparar la apotema de un polígono regular y el radio de la circunferencia inscrita.
5. Comparar la apotema de un polígono regular y el radio de la circunferencia circunscrita. (Para justificar el resultado, puede suponerse que la longitud de una arista es  $e$ .)
6. Un polígono convexo tiene 13 lados. ¿Cuál es la suma de las medidas de sus 13 ángulos externos?
7. ¿Cuántos lados tendrá un polígono convexo, si la suma de las medidas de sus ángulos es 1080?
8. Determinar la medida de cada uno de los ángulos de un pentágono regular; de un hexágono regular; de un octágono regular; de un decágono regular.
9. ¿Cuál es la apotema de un polígono regular cuya área es 225 y cuyo perímetro es 60?
10. Si la longitud de una circunferencia es  $C$  y su radio es  $r$ , ¿cuál será el valor de  $C/r$ ?
11. ¿Cuál será el radio de una circunferencia, si su longitud es igual al área de la región circular correspondiente?
12. El área de un círculo es 6 veces la longitud de la circunferencia correspondiente. ¿Cuál es su radio?
13. Los radios de dos circunferencias concéntricas son 5 y 13. Determíñese el radio de un círculo cuya área sea igual al área del anillo determinado por las dos circunferencias dadas.
14. Si el radio de una circunferencia es 4 veces el radio de otra, ¿cuál será la razón de sus diámetros?; ¿de sus longitudes?; ¿y de las áreas de las regiones circulares correspondientes?
15. Las longitudes de dos circunferencias son  $6\pi$  y  $10\pi$ . ¿Cuál es la razón de las áreas de las regiones circulares correspondientes?
16. Comparar las áreas de un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia y de un triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia.
17. Demostrar que el área de un círculo puede expresarse mediante la fórmula  $\frac{1}{4}\pi d^2$  donde  $d$  es el diámetro del círculo.

18. ¿Pasarás más agua por tres tubos de 2 centímetros o por un tubo de 6 centímetros? Justifíquese la respuesta. (Un tubo se mide por su diámetro interior.)

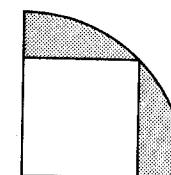
19. Se sabe que la longitud de un lado de un triángulo equilátero  $\triangle ABC$  es 6 y que  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son los puntos medios de sus lados. Los arcos  $\widehat{PQ}$ ,  $\widehat{PR}$  y  $\widehat{QR}$  tienen como centros los vértices del triángulo. Determinese el área y la longitud de la frontera de la región  $PQR$ .



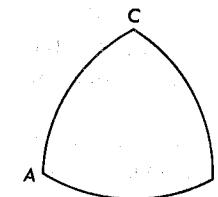
20. El área de un cuadrado es igual al área de un círculo de diámetro 2. ¿Cuál es la longitud de un lado del cuadrado?

- \* 21. El perímetro de un cuadrado es igual a la longitud de la circunferencia correspondiente a un círculo. ¿Cuál tendrá el área mayor, el cuadrado o el círculo? Determinese la razón del área del cuadrado al área del círculo.

- \* 22. En la figura, se muestra un cuadrado inscrito en un sector de  $90^\circ$  cuyo radio es  $r$ . Dedúzcase una fórmula para el área de la región sombreada.



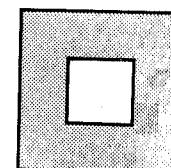
- \* 23. Cada uno de los vértices de la figura  $ABC$  es el centro del arco opuesto. La figura tiene la propiedad interesante de que cuando se hace rodar entre dos rectas paralelas, siempre tocará las dos rectas, como lo haría una circunferencia. Tómese  $r$  como radio de cada arco y dedúzcase una fórmula para el área de la figura  $ABC$  y otra para el perímetro de la figura  $ABC$ .



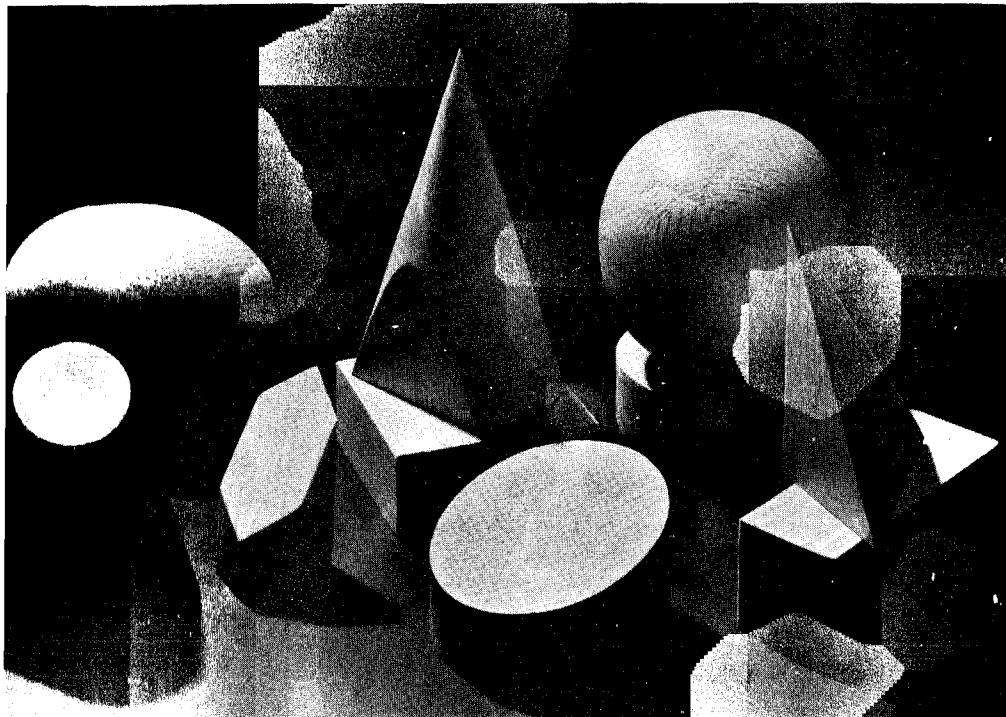
con lado de 10 centímetros de largo, aproximadamente. El agujero resultante será el agujero cuadrado de prueba. Ahora, en otro trozo de cartulina, constrúyase un triángulo equilátero cuyo lado sea de la misma longitud que el lado del agujero cuadrado. Con un compás, y tomando los vértices del triángulo como centros, trácese los arcos necesarios. Recórtense este triángulo de Reuleaux. El alumno hallará que el triángulo gira en el agujero, pero que siempre se mantendrá en contacto con cada lado del agujero cuadrado. El proyecto del taladro está ahora en manos del estudiante.

### PROBLEMA OPTATIVO

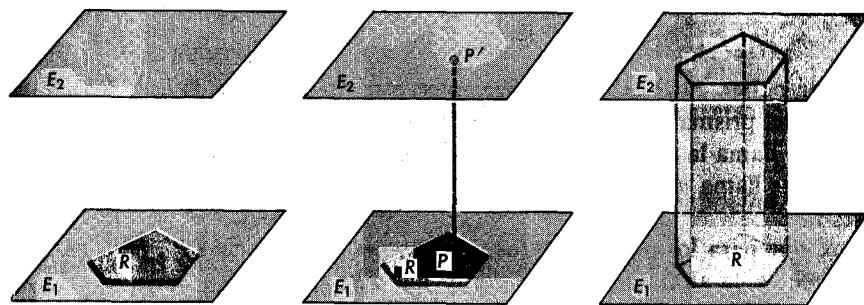
¿Ha visto el alumno alguna vez un taladro que haga un agujero cuadrado? Un taladro de este tipo se inventó en 1914. Es simplemente una modificación de la figura triangular indicada en el problema 23 anterior. La figura se conoce con el nombre de triángulo de Reuleaux, en honor de Franz Reuleaux (1829-1905), quien fue el primero que advirtió su propiedad de anchura constante. El alumno puede proyectar muy fácilmente un taladro que haga un agujero cuadrado. Empíécese de la manera siguiente: De un trozo de cartulina dura, recórtense un cuadrado



# 17 | Los cuerpos sólidos y sus volúmenes



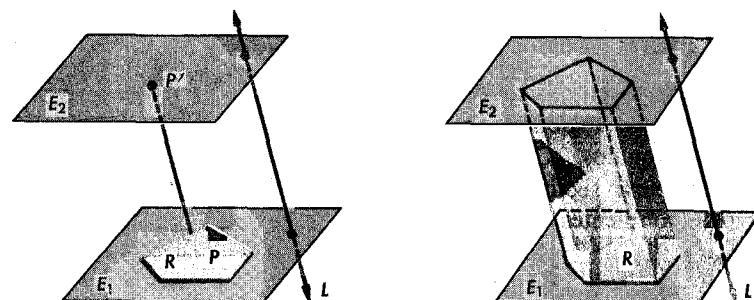
## 17-1. PRISMAS



En las figuras, la región dada,  $R$ , está en el plano  $E_1$ .

Por cada punto  $P$  de  $R$ , tracemos un segmento  $\overline{PP'}$ , perpendicular a  $E_1$ , que une el punto  $P$  con un punto  $P'$  del segundo plano. La reunión de todos estos segmentos se llama *prisma recto*. La región  $R$  se llama la *base inferior* o, simplemente, la *base*. Podemos considerar un prisma recto como el cuerpo sólido engendrado por la base al moverse verticalmente hacia arriba desde  $E_1$  a  $E_2$ .

Un cuerpo sólido como éste se llama *prisma recto*, porque los segmentos que trazamos son perpendiculares al plano de la base. Podemos formar prismas de otras clases, trazando los segmentos en una dirección fija cualquiera, que puede o no ser perpendicular al plano de la base. En la siguiente definición, consideraremos esta posibilidad:



### Definición

Sean  $E_1$  y  $E_2$  dos planos paralelos,  $R$  una región poligonal en  $E_1$  y  $L$  una recta que interseque a  $E_1$  y a  $E_2$ , pero no a  $R$ . Por cada punto  $P$  de  $R$ , sea  $\overline{PP'}$  un segmento paralelo a  $L$  y que una el punto  $P$  con un punto  $P'$  de  $E_2$ . La reunión de todos los segmentos  $\overline{PP'}$  se llama *prisma*.

(Obsérvese que en la definición anterior, no podemos permitir que  $L$  interseque a  $R$ , porque, entonces, ningún segmento que pase por el punto de intersección será paralelo a  $L$ .)

### Definiciones

La región poligonal  $R$  se llama la *base inferior* o, simplemente, la *base* del prisma. La parte del prisma que está en  $E_2$  se llama la *base superior*. La distancia entre  $E_1$  y  $E_2$  se llama la *altura* del prisma. Si  $L$  es perpendicular a  $E_1$  y  $E_2$ , entonces el prisma se llama *prisma recto*.

Obsérvese que para los prismas rectos, la altura es la distancia  $PP'$ , pero para los prismas no rectos, la altura es siempre menor que  $PP'$ .

Los prismas se clasifican según sus bases: un *prisma triangular* es uno cuya base es una región triangular, y así sucesivamente.

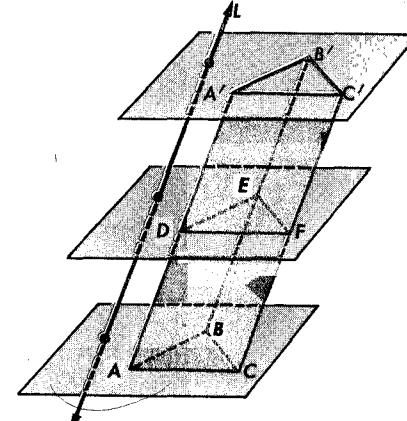
### Definición

Una *sección transversal* de un prisma es la intersección del prisma con un plano paralelo al plano de la base (con tal que la intersección no sea vacía).

### Teorema 17-1

Todas las secciones transversales de un prisma triangular son congruentes con la base.

Desde luego, las secciones transversales y la base son realmente regiones triangulares, más bien que triángulos. Cuando decimos que son congruentes, significamos que los triángulos correspondientes son congruentes.



**Demostración:** Como en la figura, sea la base la reunión del  $\triangle ABC$  y su interior, y sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  los puntos en que la sección transversal interseca a  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  y  $\overline{CC'}$ , respectivamente. Entonces,  $\overline{AD} \parallel \overline{FC}$ , porque estos dos segmentos son paralelos a  $L$ . En virtud del teorema 10-1,  $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ . Por tanto, el  $\square ADFC$  es un paralelogramo y, en consecuencia,  $DF = AC$ .

[Pregunta: El teorema 10-1 nos dice lo que sucede cuando dos planos paralelos son intersecados por un tercer plano. Aquí, los dos planos paralelos son los que contienen a los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ . ¿Cuál es el tercer plano?]

Exactamente de la misma manera, demostramos que  $DE = AB$  y  $EF = BC$ . Por el teorema LLL, tenemos que  $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ , como se quería verificar.

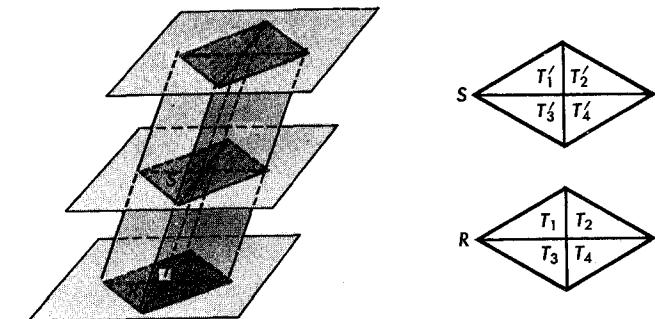
### Corolario 17-1.1

Las bases superior e inferior de un prisma triangular son congruentes.

Esto es evidente, pues la base superior es una sección transversal.

### Teorema 17-2. El teorema de la sección transversal del prisma

Todas las secciones transversales de un prisma tienen la misma área.

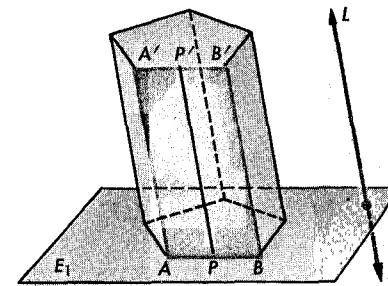


**Demostración:** Sean  $R$  la base y  $S$  una sección transversal. Entonces, el área de  $R$  es la suma de las áreas de un conjunto finito de regiones triangulares. El área de  $S$  es la suma de las áreas de las regiones triangulares correspondientes en  $S$ . Como los triángulos congruentes tienen la misma área, la suma es la misma para  $R$  y para  $S$ .

### Corolario 17-2.1

Las bases de un prisma tienen la misma área.

Esto es así, porque la base superior es una sección transversal.



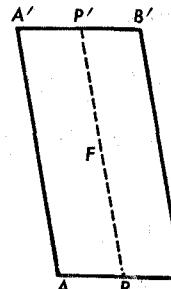
La mayoría de las veces, consideraremos prismas cuyas bases son regiones poligonales convexas. Por una *región poligonal convexa*, entendemos la reunión de un polígono convexo y su interior. En tales casos, podemos hablar de una *arista* o de un *vértice* de la base.

La figura anterior nos recuerda la definición de un prisma. En la figura,  $A$  y  $B$  son

vértices de la base y  $\overline{AB}$  es una arista de la base. Los segmentos  $\overline{AA'}$  y  $\overline{BB'}$  se llaman *aristas laterales* del prisma. La región paralelográfica determinada por el  $\square AA'B'B$  se llama una *cara lateral* del prisma. Enunciaremos esto de modo más preciso:

### Definición

Si  $A$  es un vértice de la base de un prisma y  $A'$  es el punto correspondiente de la base superior, entonces  $\overline{AA'}$  es una *arista lateral* del prisma. Si  $\overline{AB}$  es una arista de la base y  $F$  es la reunión de todos los segmentos  $\overline{PP'}$  para los cuales  $P$  está en  $\overline{AB}$  y  $P'$  es el punto correspondiente a  $P$  en la base superior, entonces  $F$  es una *cara lateral* del prisma.



### Teorema 17-3

Las caras laterales de un prisma son regiones paralelográficas.

Para demostrar este teorema, necesitamos saber que  $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$  y que  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ . Justifíquese esto.

### Corolario 17-3.1

Las caras laterales de un prisma recto son regiones rectangulares.

La demostración se deja al alumno. (Sabemos que  $L \perp E_1$  y que  $\overline{AA'} \parallel L$ .)

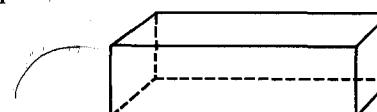
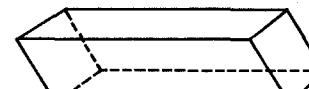
### Definiciones

La reunión de las caras laterales de un prisma se llama su *superficie lateral*. La reunión de las caras laterales y las dos bases se llama su *superficie total*.

### Definiciones

Un *paralelepípedo* es un prisma cuya base es una región paralelográfica.

Un *paralelepípedo rectangular* es un prisma rectangular recto.

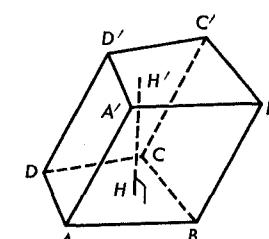
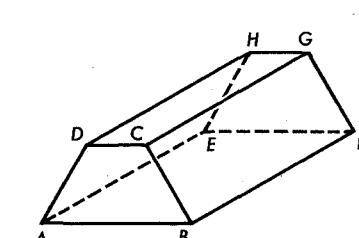
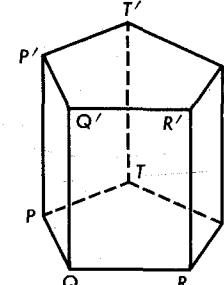


Así, pues, todas las caras (laterales, superior e inferior) de un paralelepípedo son regiones paralelográficas y todas las caras de un paralelepípedo rectangular son regiones rectangulares.

### Definición

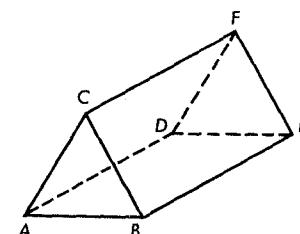
Un *cubo* es un paralelepípedo rectangular cuyas aristas son todas congruentes.

### Conjunto de problemas 17-1

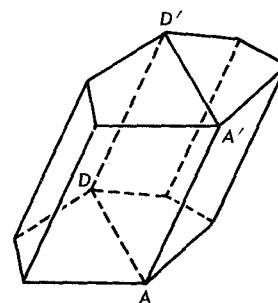
- (a) El prisma representado a la derecha se llama un prisma \_\_\_\_\_.  

  - (b) La región  $ABCD$  se llama \_\_\_\_\_.  
  - (c)  $\overline{AA'}$  se llama \_\_\_\_\_.  
  - (d)  $\overline{HH'}$  se llama \_\_\_\_\_.  
  - (e) Si  $\overline{AA'}$  fuera perpendicular al plano de la base, entonces el prisma se llamaría \_\_\_\_\_.  
  - (f) La región paralelográfica  $BB'C'C$  se llama \_\_\_\_\_.  
  - (g) La reunión de las caras laterales se llama \_\_\_\_\_.  
  - (h) Si el  $\square ABCD$  fuera un paralelogramo, el prisma se llamaría \_\_\_\_\_.
- 
- La figura de la izquierda, a continuación, representa un prisma recto que descansa sobre una de sus caras laterales. Sus bases son regiones trapezoidales. Las longitudes de las aristas paralelas de la base son 4 y 9, las longitudes de las aristas no paralelas son 5 y 6, y  $BF = 12$ . Determinese el área de la superficie lateral del prisma.  


  - La altura del prisma pentagonal recto representado por la figura anterior de la derecha es 8 y las longitudes de las aristas de la base son 2, 5, 7, 7 y  $8\frac{1}{2}$ . Determinese el área de la superficie lateral del prisma.
  - Un prisma recto tiene una arista lateral de longitud 3 y el perímetro de su base es 34. ¿Cuál es el área de su superficie lateral?
  - Demuéstrese que el área,  $S$ , de la superficie lateral de un prisma recto viene dada por la fórmula  $S = hl$ , donde  $h$  es la altura del prisma y  $l$  es el perímetro de la base.
  - Determinar la altura de un prisma recto para el cual el área de la superficie lateral es 143 y el perímetro de la base es 13.

7. Si una cara lateral de un prisma es un rectángulo, ¿se podrá deducir que todas las caras laterales son rectángulos?

8. Las bases del prisma representado a la derecha son triángulos equiláteros y sus caras laterales son regiones rectangulares. Si se sabe que la longitud de una arista de la base es 6 y la altura del prisma es 10, calcúlese el área de la superficie total del prisma.



9. Demostrar que dos aristas laterales no consecutivas cualesquiera de un prisma son coplanares y que la intersección con el prisma del plano determinado por ellas es una región paralelográfica. (Primeramente, exprérese el enunciado anterior utilizando la notación de la figura.)



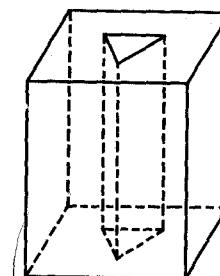
10. ¿Cuál es el área de la superficie lateral de un cubo con arista de longitud 5? ¿Cuál es el área de su superficie total?

11. Las aristas de una sección transversal de un prisma triangular tienen longitudes 3, 6 y  $3\sqrt{3}$ . ¿Cuáles son las longitudes de las aristas de otra sección transversal? ¿Qué figura geométrica es? ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? Calcúlese el área de una sección transversal del prisma.

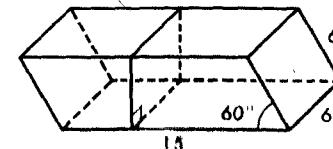
12. La longitud de la diagonal de un cubo es  $16\sqrt{3}$ . Determíñese el área de su superficie total.

13. Las dimensiones de un paralelepípedo rectangular son 4, 7 y 12. Calcúlese el área de su superficie total.

14. Las dimensiones de la base de un paralelepípedo rectangular son 5 y 8, y su altura es 12. Un agujero que va desde la base superior hasta la base inferior, tiene la forma de un prisma triangular recto, cuyas bases son triángulos equiláteros con aristas de longitud 3. Determíñese el área de la superficie total de la figura.

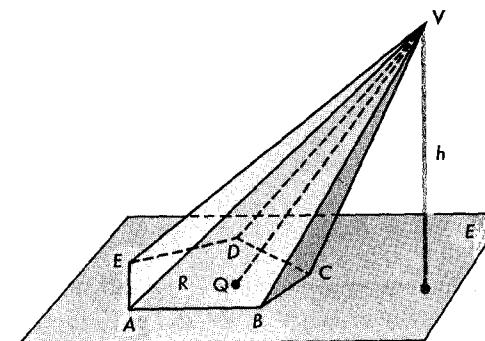


15. La base de un paralelepípedo es una región rectangular de dimensiones 6 por 15. Las caras extremas son regiones cuadradas que forman un ángulo de  $60^\circ$  con la base. Un plano perpendicular a la arista más larga de la base interseca al paralelepípedo según una región rectangular. Determíñese el área de la superficie total.



## 17-2. PIRÁMIDES

El cuerpo sólido representado a continuación es una pirámide con base  $R$  y vértice  $V$ :



La pirámide es la reunión de todos los segmentos  $\overline{VQ}$ , donde  $Q$  es un punto cualquiera de la base.

### Definiciones

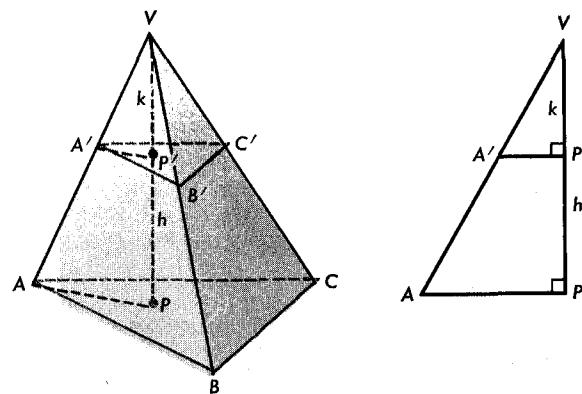
Se dan una región poligonal  $R$  en un plano  $E$  y un punto  $V$  que no está en  $E$ . La **pirámide con base  $R$  y vértice  $V$**  es la reunión de todos los segmentos  $\overline{VQ}$  para los cuales  $Q$  pertenece a  $R$ . La **altura** de la pirámide es la distancia (perpendicular) desde  $V$  a  $E$ .

Las secciones transversales se definen de la misma manera que en el caso de los prismas. Es decir, una **sección transversal** de una **pirámide** es la intersección de la pirámide con un plano paralelo al plano de la base (con tal que, como antes, el plano realmente interseque a la pirámide).

A medida que el plano de dicha sección transversal se mueve hacia arriba desde la base hasta el vértice, es evidente que el área de la sección transversal disminuye constantemente, hasta tomar el valor cero en el vértice. En el teorema siguiente, obtenemos una fórmula que nos dice exactamente *cómo* varía la sección transversal cuando la base es triangular:

### Teorema 17-4

Toda sección transversal de una pirámide triangular, entre la base y el vértice, es una región triangular semejante a la base. Si  $h$  es la altura y  $k$  es la distancia del vértice a la sección transversal, entonces el área de la sección transversal es igual a  $k^2/h^2$  multiplicado por el área de la base.



La notación usada en la demostración es la que se indica en la figura. La base es la región determinada por el  $\triangle ABC$ . El triángulo  $\triangle A'B'C'$  es el triángulo correspondiente en la sección transversal.  $\overline{VP}$  es el segmento perpendicular desde  $V$  al plano de la base, con  $VP = h$ ;  $\overline{VP'}$  es el segmento perpendicular desde  $V$  al plano de la sección transversal, con  $VP' = k$ . La figura de la derecha presenta los triángulos  $\triangle VAP$  y  $\triangle VA'P'$  en su propio plano. Obsérvese que el  $\angle P$  y el  $\angle P'$  (es decir, el  $\angle VP'A'$ ) son realmente ángulos rectos, porque  $\overleftrightarrow{VP}$  es perpendicular a los dos planos paralelos al plano de la base.

**Demostración:** Los pasos principales son los siguientes:

$$(1) \quad \triangle VA'P' \sim \triangle VAP.$$

Como los ángulos  $\angle P$  y  $\angle P'$  son ángulos rectos y  $\angle V \cong \angle V$ , la semejanza se deduce del corolario AA.

$$(2) \quad \frac{VA'}{VA} = \frac{k}{h},$$

porque éstas son las longitudes de lados correspondientes.

Exactamente de la misma manera, utilizando los triángulos  $\triangle VP'B'$  y  $\triangle VPB$ , podemos demostrar que

$$(3) \quad \frac{VB'}{VB} = \frac{k}{h}.$$

Por el teorema de semejanza LAL, obtenemos

$$(4) \quad \triangle VA'B' \sim \triangle VAB.$$

Por tanto,

$$(5) \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{k}{h}.$$

Aquí, no hay nada especial acerca de  $\overline{AB}$  en la base y  $\overline{A'B'}$  en la sección transversal; las aristas  $\overline{BC}$  y  $\overline{B'C'}$  están relacionadas de la misma manera. Por consiguiente, tenemos

$$(6) \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{k}{h}$$

y

$$(7) \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{k}{h}.$$

Del teorema de semejanza LLL, se deduce que

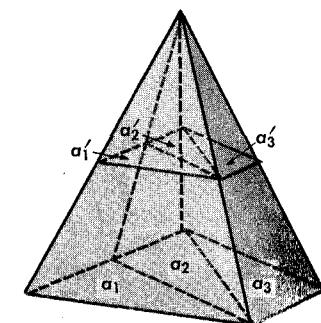
$$(8) \quad \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC.$$

Esto demuestra la primera parte del teorema. La otra parte se puede deducir ahora del teorema 12-9, pues la razón de cada par de lados correspondientes es  $k/h$ .

No es solamente en el caso de las pirámides triangulares que las áreas de las secciones transversales se comportan de esta manera; cualquiera que sea la forma de la base, la razón es siempre  $k^2/h^2$ , como anteriormente.

### Teorema 17-5

En toda pirámide, la razón del área de una sección transversal al área de la base es  $k^2/h^2$ , donde  $h$  es la altura de la pirámide y  $k$  es la distancia del vértice al plano de la sección transversal.



**Demostración:** Descomponemos la base en regiones triangulares más pequeñas  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , como en la definición de una región poligonal. Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  las áreas de esas regiones. En la figura, se presenta el caso  $n = 3$ . Sean  $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$  las áreas de las regiones triangulares correspondientes en la sección transversal. Entonces, el área de la base es

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

y el área de la sección transversal es

Por el teorema anterior,

$$a'_1 = \frac{k^2}{h^2} a_1, \quad a'_2 = \frac{k^2}{h^2} a_2, \dots, \quad a'_n = \frac{k^2}{h^2} a_n.$$

En consecuencia,

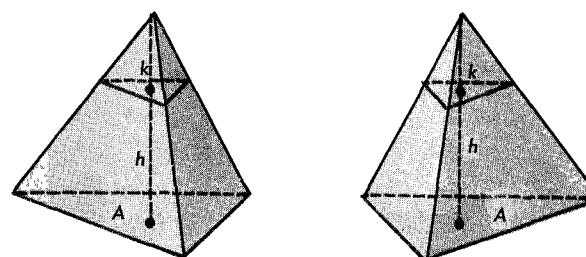
$$A_k = \frac{k^2}{h^2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{k^2}{h^2} A,$$

como se quería demostrar.

Este teorema, a su vez, nos permite demostrar el siguiente:

#### Teorema 17-6. El teorema de la sección transversal de la pirámide

Si dos pirámides tienen la misma altura y el área de sus bases es la misma, entonces las secciones transversales equidistantes de los vértices tienen la misma área.

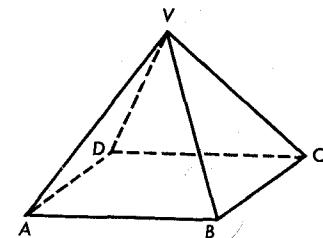


En la figura, presentamos pirámides triangulares, para mayor facilidad. Pero esto no implica restricción alguna en la demostración, ni tampoco en la generalidad del teorema.

**Demarcación:** Como se indica en la figura, sea  $A$  el área de la base de cada pirámide,  $h$  la altura de cada una, y  $k$  la distancia entre cada sección transversal y el vértice correspondiente. Entonces, las áreas de las secciones transversales son las mismas, pues cada una es igual a  $(k^2/h^2)A$ .

#### Conjunto de problemas 17-2

- Como en el caso de los prismas, las pirámides se clasifican según las formas de sus bases. A la derecha, se presenta un dibujo de una pirámide rectangular. Dibújense algunas pirámides triangulares y pirámides cuadradas.



- ¿Cuál es otro nombre para una pirámide triangular? (Véase el capítulo 3.)
- Redactense definiciones formales de *arista lateral* y *cara lateral* de una pirámide.

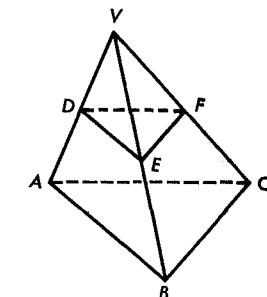
- En la pirámide  $V-ABC$ , el  $\triangle ABC$  es equilátero. Un plano paralelo a la base interseca a las aristas laterales en  $D$ ,  $E$  y  $F$ , de manera que  $VE = \frac{1}{2}EB$ .

(a) ¿Cuánto es  $\frac{DV}{AV}$ ?

- (b) ¿Qué puede decirse acerca de los triángulos  $\triangle DEV$  y  $\triangle ABV$ ?; y acerca de los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ ?

(c) ¿Cuánto es  $\frac{DE}{AB}$ ?

- (d) Si  $BC = 6$ , calcúlese  $a\triangle DEF$ .

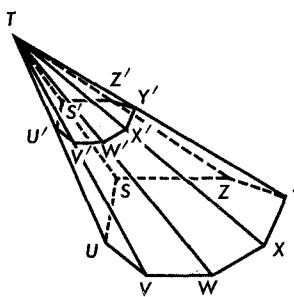
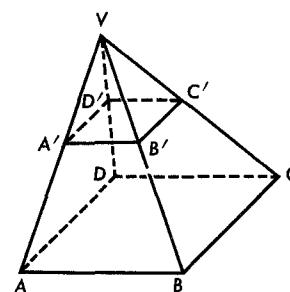


- La altura de una pirámide cuadrada es 10 y la longitud de un lado de la base es 15. Determinese el área de una sección transversal que dista 6 unidades del vértice.

- El área de la base de una pirámide pentagonal es 72 centímetros cuadrados. La altura de la pirámide es 12 centímetros. ¿Cuál es el área de una sección transversal que dista 4 centímetros de la base?

- Se da una pirámide cuya base tiene un área de 180 pulgadas cuadradas. Una sección transversal cuya área es 108 pulgadas cuadradas dista 9 pulgadas del vértice. Determinese la altura de la pirámide.

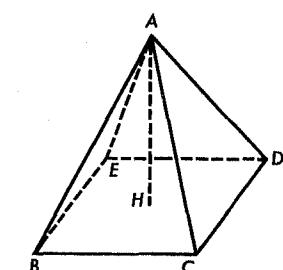
8.



Las dos pirámides representadas aquí (la de la izquierda, una pirámide cuadrada), tienen alturas iguales. Sus bases son coplanares y las secciones transversales también lo son. Si  $AB = 2\sqrt{6}$ ,  $A'B' = 3\sqrt{2}$  y el área de la región poligonal  $SUVWXYZ$  es 24, determine el área de la sección transversal de la pirámide de la derecha.

- Una pirámide cuya base es un polígono regular y cuyo vértice equidista de cada uno de los vértices de la base, se llama *pirámide regular*.

Demuéstrese que la altura desde el vértice de una pirámide regular a su base interseca a ésta en su circuncentro (es decir, en un punto equidistante de cada uno de los vértices de la base).



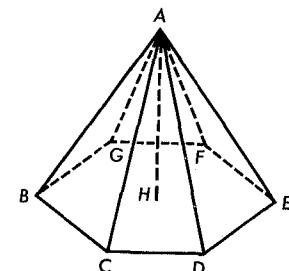
10. Una arista de la base de una pirámide cuadrada regular tiene 10 centímetros de largo y la altura de la pirámide es 12 centímetros. Determinese el área de la superficie lateral de la pirámide.

11. Demostrar que las caras laterales de una pirámide regular están limitadas por triángulos isósceles congruentes.

12. La altura de cada una de las caras laterales de una pirámide regular se llama la *altura oblicua* o *altura inclinada* de la pirámide. Verifíquese que el área de la superficie lateral es la mitad del producto de la altura oblicua y el perímetro de la base.

13. Determinar el área de la superficie total de una pirámide regular cuya altura es 15 y cuya base es un cuadrado con lado de longitud 16.

14. Determinar el área de la superficie total de una pirámide hexagonal regular, si la longitud de una arista de la base es 8 y la altura de la pirámide es 12.



15. Se da una pirámide triangular  $ABCD$  cualquiera. Describáse verbalmente un plano cuya intersección con la pirámide sea una región paralelográfica.

### PROBLEMA OPTATIVO

Se da un tetraedro regular (una pirámide triangular) con una arista de longitud 8. Determinese el área de una sección transversal que contenga el punto de concurrencia de las cuatro alturas de la pirámide.

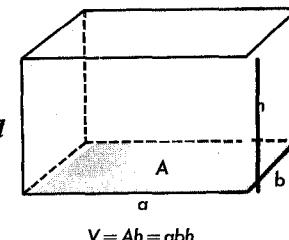
### 17-3. VOLÚMENES DE PRISMAS Y PIRÁMIDES. EL PRINCIPIO DE CAVALIERI

Ahora, aprenderemos cómo hallar los volúmenes de varios cuerpos sólidos. Este proceso emplea varias de las ideas que utilizamos al determinar áreas de regiones poligonales. Sin embargo, nuestro estudio será más informal que el del Capítulo 11 y no incluirá un conjunto completo de postulados adecuados para justificar todo lo que hagamos en cada etapa. No obstante, enunciaremos los dos postulados principales que utilizaremos para obtener respuestas numéricas.

El alumno recordará que en el Capítulo 11, tomamos la fórmula para el área de un cuadrado,  $A = e^2$ , como postulado y, luego, utilizamos un artificio para obtener la fórmula del área de un rectángulo,  $A = bh$ . Para el volumen de un cuerpo sólido, nuestro artificio no funciona y, por consiguiente, utilizamos un postulado de la unidad más fuerte:

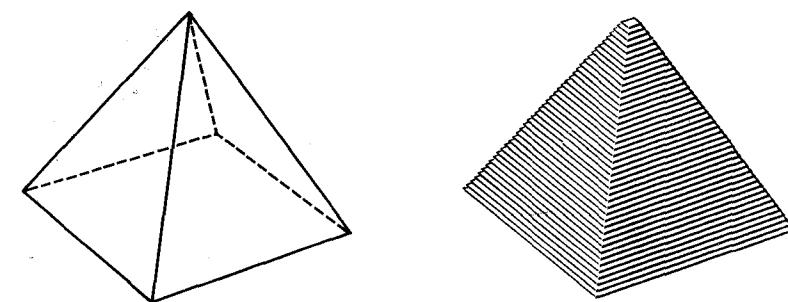
**POSTULADO 23.** El postulado de la unidad

*El volumen de un paralelepípedo rectangular es el producto de la altura y el área de la base.*



Desde luego, cualquier cara de un paralelepípedo rectangular puede considerarse como base. Siempre obtenemos la misma respuesta para el volumen, porque, en cada caso,  $Ah$  es el producto de las longitudes de tres aristas con un extremo común.

Para comprender lo que sucede en el siguiente postulado, pensemos primero en un modelo real. Podemos hacer un modelo aproximado de una pirámide de base cuadrada, formando un montón de tarjetas cuadradas, recortadas del tamaño adecuado:

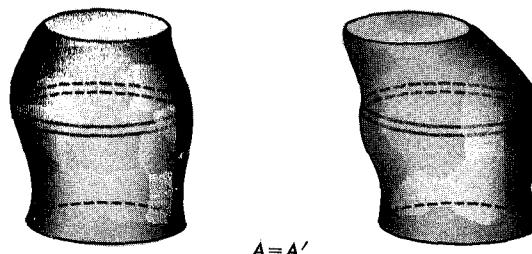


La figura de la izquierda representa la pirámide exacta y la de la derecha es el modelo aproximado construido con tarjetas.

Ahora, supongamos que taladraremos un agujero en el modelo, desde el vértice hasta la base, e insertamos una varilla delgada de modo que atraviese todas las tarjetas. Podemos, entonces, inclinar la varilla en cualquier dirección que deseemos, manteniendo fijo su extremo de apoyo en la base. Entonces, la forma del modelo cambia, pero su volumen no. La razón de esto es que su volumen es sencillamente el volumen total de las tarjetas, y este volumen total no varía cuando las tarjetas se deslizan unas sobre otras.

El mismo principio se aplica de una manera más general. Supongamos que tenemos dos cuerpos sólidos con bases en el mismo plano. Consideraremos éste como el plano

horizontal. Si todas las secciones transversales de los dos cuerpos sólidos y al mismo nivel, tienen la misma área, entonces los dos cuerpos sólidos tienen el mismo volumen.



Esto es cierto por la siguiente razón: Hagamos un modelo con tarjetas de cada uno de los sólidos. Entonces, cada tarjeta en el primero tiene exactamente el mismo volumen que la tarjeta correspondiente en el segundo modelo. Utilizando tarjetas muy delgadas, podemos hacer modelos que son aproximaciones muy buenas de los cuerpos sólidos dados. En efecto, podemos hacer las aproximaciones tan buenas como queramos, utilizando tarjetas suficientemente delgadas. Por tanto, los volúmenes de los dos cuerpos sólidos originales son iguales.

El principio implicado aquí se llama *Principio de Cavalieri*. No lo hemos demostrado; simplemente, hemos explicado por qué es plausible. Por consiguiente, lo enunciamos en forma de postulado:

#### POSTULADO 24. Principio de Cavalieri

*Se dan dos cuerpos sólidos y un plano. Supongamos que todo plano paralelo al plano dado que interseca a uno de los dos cuerpos, interseca también al otro y da secciones transversales con áreas iguales. Entonces, los cuerpos tienen el mismo volumen.*

El principio de Cavalieri es la clave de los cálculos de volúmenes, como veremos pronto.

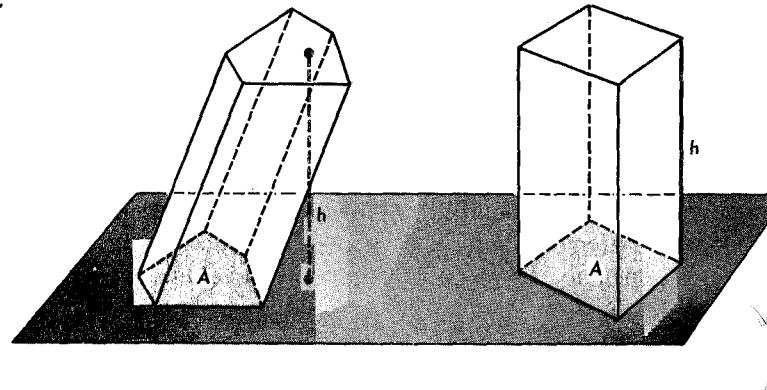


Figura para el teorema 17-7

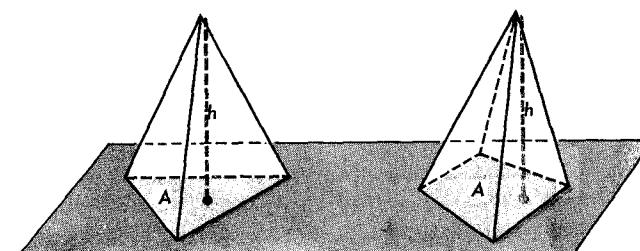
#### Teorema 17-7

El volumen de un prisma cualquiera es el producto de la altura y el área de la base.

**Demostración:** Sean  $h$  y  $A$  la altura y el área de la base del prisma dado. Considerese un paralelepípedo rectangular con la misma altura  $h$  y la misma área  $A$  de la base y con ésta en el mismo plano que la del prisma dado. Sabemos, por el teorema de la sección transversal del prisma, que todas las secciones transversales para ambos prismas tienen la misma área. Por el principio de Cavalieri, esto significa que los prismas tienen el mismo volumen. En virtud del postulado 23, el volumen del paralelepípedo rectangular es  $Ah$ , de donde se deduce la validez del teorema.

#### Teorema 17-8

Si dos pirámides tienen la misma altura y sus bases la misma área, siendo éstas coplanarias, entonces tienen el mismo volumen.

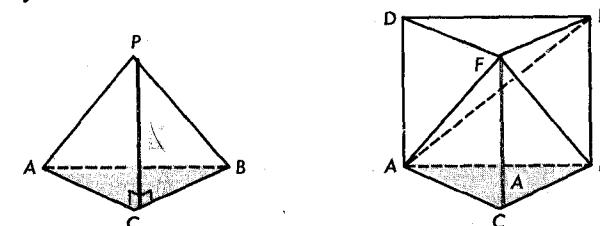


**Demostración:** Por el teorema de la sección transversal de la pirámide, las secciones transversales correspondientes de las dos pirámides tienen la misma área. En virtud del principio de Cavalieri, esto significa que los volúmenes son iguales.

#### Teorema 17-9

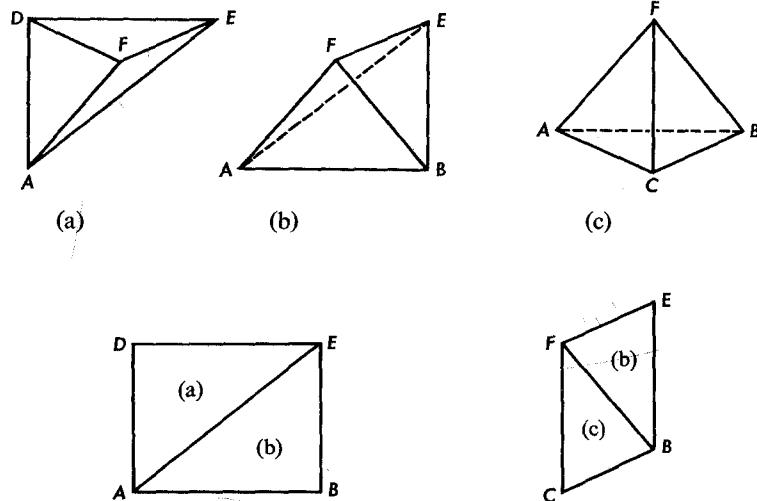
El volumen de una pirámide triangular es un tercio del producto de su altura y el área de la base.

**Demostración:** Dada una pirámide triangular, formamos un prisma triangular con las mismas base y altura.



(Podemos utilizar un prisma triangular *recto*, como en la figura; esto no restringe la validez del teorema.)

Ahora, descomponemos el prisma en tres pirámides, según muestra la figura de la derecha al final de la página anterior. Denotamos las pirámides por el nombre de sus vértices en cualquier orden. Así, las tres pirámides nuevas son  $ADEF$ ,  $ABEF$  y  $AFBC$ . Dibujadas separadamente, se ven de esta manera:



(1)  $ADEF$  y  $ABEF$  tienen el mismo volumen.

**Demostración:** Podemos considerar  $F$  como vértice de cada una de las pirámides  $ADEF$  y  $ABEF$ . Entonces, sus bases son las regiones triangulares determinadas por los triángulos  $\triangle ADE$  y  $\triangle ABE$ . Como estos triángulos son congruentes, sabemos que  $ADEF$  y  $ABEF$  tienen la misma área de la base y, también, la misma altura, porque la altura de cada una de ellas es la distancia de  $F$  al plano que contiene sus bases. Por tanto, tienen el mismo volumen.

(2)  $ABEF$  y  $AFBC$  tienen el mismo volumen.

**Demostración:** Podemos considerar  $A$  como vértice de cada una de las pirámides  $ABEF$  y  $AFBC$ . Entonces, sus bases son las regiones triangulares determinadas por los triángulos  $\triangle BEF$  y  $\triangle FBC$ . Como estos triángulos son congruentes, sabemos que  $ABEF$  y  $AFBC$  tienen la misma área de la base y, también, la misma altura, porque la altura de cada una de ellas es la distancia de  $A$  al plano que contiene sus bases. En consecuencia, tienen el mismo volumen.

(3)  $AFBC$  y la pirámide original  $PABC$  tienen el mismo volumen.

(La demostración es evidente, pues tienen la misma base y la misma altura.)

Ya casi hemos terminado. Sean  $a$  el área del  $\triangle ABC$  y  $h$  la altura de  $PABC$ . Entonces, el volumen del prisma es  $ah$ . Si  $V$  es el volumen de cada una de las pirámides, tenemos  $3V = ah$ . Por consiguiente,

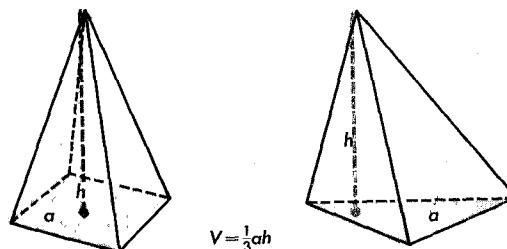
$$V = \frac{1}{3}ah,$$

como se quería demostrar.

El mismo resultado es válido para las pirámides, en general.

### Teorema 17-10

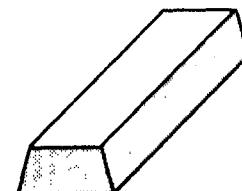
El volumen de una pirámide es un tercio del producto de su altura y el área de la base.



**Demostración:** Se da una pirámide de altura  $h$  y área de la base  $a$ . Tómense una pirámide triangular de la misma altura y la misma área de base, con ésta en el mismo plano. Por el teorema de la sección transversal de la pirámide, las secciones transversales al mismo nivel tienen la misma área. Por tanto, en virtud del principio de Cavalieri, las dos pirámides tienen el mismo volumen. Luego, el volumen de cada una de ellas es  $\frac{1}{3}ah$ , como queríamos demostrar.

### Conjunto de problemas 17-3

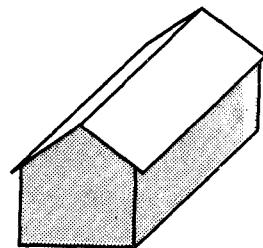
1. La altura de un paralelepípedo rectangular es 7 centímetros y las dimensiones de la base son 4 centímetros y 5 centímetros. Determíñese su volumen.
2. Un recipiente rectangular, de 1 pie por 1 pie por 1 pie, se llenó con agua. Si 1 galón de líquido tiene un volumen de 231 pulgadas cúbicas, ¿cuántos galones de agua caben en el recipiente?
3. A ciertas barras de plata se les da forma de prisma recto cuya base (un extremo de la barra) es un trapecio. Las longitudes de las bases del trapecio son 7 centímetros y 10 centímetros. La altura de la barra es 5 centímetros y su longitud es 30 centímetros. Si la plata pesa  $10\frac{1}{2}$  gramos por centímetro cúbico, ¿cuánto pesará una barra?



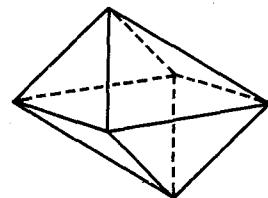
4. Al introducirse un trozo de metal en un tanque rectangular, lleno de agua, de dimensiones 50 centímetros por 37 centímetros, el nivel del agua subió 1 centímetro. ¿Cuál es el volumen del trozo de metal?



5. Para calcular el costo de abastecimiento de aire acondicionado a una estructura que se proyecta construir, un contratista tiene que determinar el volumen de aire contenido en un edificio rectangular como el que se representa en la figura. El edificio tiene 130 pies de largo y 42 pies de ancho. A ambos lados del edificio, los aleros están situados a  $9\frac{1}{2}$  pies de altura y el punto más alto del techo está a 15 pies del piso. Determinese el volumen del edificio.

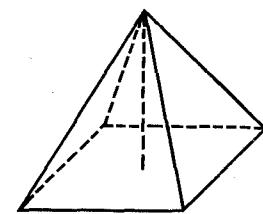


6. Un prisma rectangular recto tiene una altura de 18 centímetros y una base que mide 6 centímetros por 8 centímetros. El plano determinado por una diagonal de la base y un vértice de la base superior forma una pirámide con las caras del prisma. Determinese el volumen de la pirámide.



7. Determinar el volumen de una pirámide cuadrada regular cuya altura es 12 y cuya base tiene una arista de longitud 12. Determinese, también, el área de su superficie lateral.

8. Deducir una fórmula para el volumen de una pirámide cuadrada regular cuyas caras laterales son triángulos equiláteros de lado s.



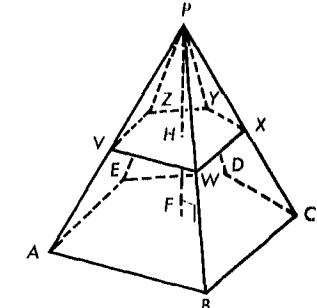
9. Si dos pirámides cuadradas regulares cuyas caras laterales son triángulos equiláteros se colocan de manera que sus bases coincidan, se forma un cuerpo sólido de 8 lados llamado *octaedro regular*. Demuéstrese que el volumen,  $V$ , de un octaedro regular con arista de longitud  $e$ , viene dado por la fórmula  $V = \frac{1}{3}\sqrt{2}e^3$ .

10. Calcular el volumen y el área de la superficie total de un octaedro regular cuya arista tiene longitud 3.

11. Demostrar que el volumen de un octaedro regular viene dado por la fórmula  $V = \frac{1}{6}d_1d_2d_3$ , donde  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  son las longitudes de sus diagonales.

12. Una sección transversal de una pirámide determina una pequeña pirámide cuyo volumen es 2 y cuya altura es 1. El volumen de la pirámide grande es 54. ¿Cuál es su altura?

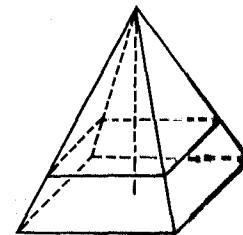
13. La pirámide  $P-ABCDE$  es pentagonal y el área de su base es 64. La altura  $PF$  es 12.  $V$ ,  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son los puntos medios de las caras laterales, como se indica en la figura. Determinese el área de la sección transversal  $VWXYZ$ . (¿Por qué es una sección transversal?) Determinese el volumen de la pirámide pequeña. ¿Cuál es la razón de los volúmenes de las dos pirámides?



14. La parte de una pirámide limitada por la base, una sección transversal y las regiones trapezoidales de las caras laterales, se llama *tronco de pirámide* o *pirámide truncada*. En la figura para el problema 13, los vértices del tronco son  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . Determinese el volumen de este tronco.

- \* 15. El área de la base de una pirámide es 45 y el área de una sección transversal es 20. Si la altura de la pirámide es 6, ¿a qué distancia de la sección transversal está el vértice? ¿Cuál es la razón de los volúmenes de las dos pirámides?

- \* 16. Un plano paralelo a la base de una pirámide cuadrada regular interseca a la altura en un punto a tres cuartos de la distancia del vértice a la base. La altura de la pirámide es 16 y la longitud de una arista de la base es 24. Determinese el área de la superficie lateral del tronco y el volumen del mismo.



### PROBLEMA OPTATIVO

Verificar que el volumen de un tronco viene dado por la fórmula

$$V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'}),$$

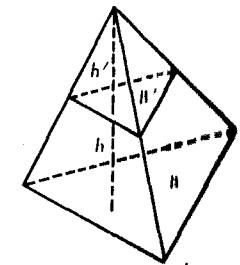
donde  $B$  y  $B'$  son las áreas de las bases y  $h$  es la altura del tronco.

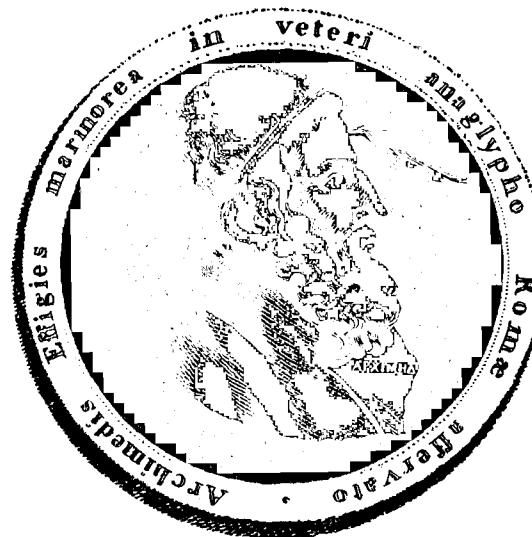
*Sugerencia:* Sea  $h'$  la altura de la pirámide pequeña. Obténganse los volúmenes de las dos pirámides. Obsérvese que

$$\frac{h + h'}{h'} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}},$$

de manera que

$$\frac{h}{h'} = \frac{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}{\sqrt{B'}} \quad \text{y} \quad h' = \frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}.$$





ARQUÍMEDES (287-212 a. de J.C.)

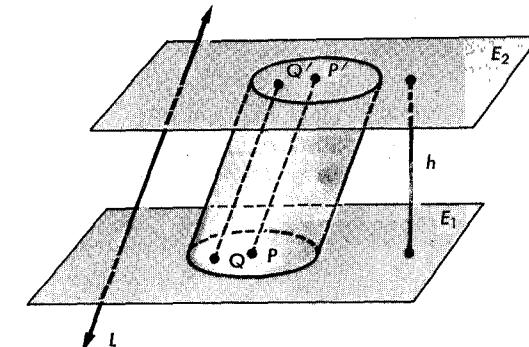
A Arquímedes se le considera generalmente como el más grande de los matemáticos de la antigüedad y como uno de los tres o cuatro más grandes de todos los tiempos. Fue el primero en determinar el volumen de una región esférica. Hizo un cálculo muy aproximado de  $\pi$ . Los métodos que desarrolló para resolver problemas referentes a áreas y volúmenes lo colocaron muchos siglos por delante de su tiempo. Podía calcular el área de regiones limitadas por curvas muy complicadas y sus logros en este tipo de geometría no pudieron igualarse en mil ochocientos años. El próximo paso importante de avance en el cálculo de áreas y volúmenes fue el descubrimiento del cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz, en el siglo XVII.

A diferencia de la mayoría de los matemáticos griegos, Arquímedes se interesó en las aplicaciones de la matemática. Dice una leyenda que cuando los romanos atacaban su ciudad natal de Siracusa, en Sicilia, él jugó un papel importante en la defensa de la ciudad, aterrorizando a los invasores con armas que él mismo inventaba. Se dice que bombardeó los barcos romanos con grandes piedras, lanzadas con las catapultas más grandes que jamás se habían visto. También, se dice que incendió la flota romana, utilizando espejos para concentrar los rayos del Sol sobre los barcos. Al convertirse el ataque en sitio, Arquímedes no pudo servir más de ayuda y volvió a su estudio y a sus trabajos de matemáticas.

Murió en su trabajo. Cuando los romanos finalmente capturaron a Siracusa, un soldado lo encontró en su casa dibujando figuras geométricas en la arena del piso. "No estropee mis círculos", dijo Arquímedes. Éstas resultaron ser sus últimas palabras. El general romano había dado órdenes de que no debía hacerse daño a Arquímedes, pero nadie sabe si el soldado conocía o le importaba quién era su víctima.

## 17-4. CILINDROS Y CONOS

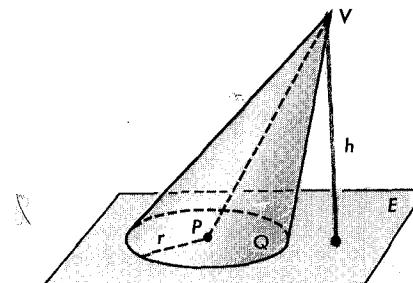
Si el alumno recuerda cómo formamos un prisma con una región poligonal dada como base, verá que el mismo procedimiento se aplica igualmente con bases que no son regiones poligonales. Supongamos, por ejemplo, que empezamos con dos planos paralelos  $E_1$  y  $E_2$ , como antes, pero que utilizamos una región circular en  $E_1$  como base.



De igual modo que anteriormente, utilizamos una recta  $L$ , que interseca a  $E_1$  y a  $E_2$ , pero no a la base, y formamos la reunión de todos los segmentos  $QQ'$ , donde  $Q$  está en la base,  $Q'$  está en  $E_2$  y  $QQ' \parallel L$ . El cuerpo sólido resultante se llama *cilindro circular*. No hay necesidad de repetir las definiciones de la altura, secciones transversales, etc., porque son exactamente las mismas que las correspondientes para los prismas. Si  $L \perp E_1$ , entonces el cilindro se llama *cilindro recto*.

Desde luego, pueden obtenerse otras clases de cilindros, utilizando otras figuras como bases. Sin embargo, los cilindros circulares son los únicos que estudiaremos en este libro.

Análogamente, el esquema que utilizamos para formar una pirámide puede utilizarse también, cuando la base no es una región poligonal. Si tomamos una región circular como base, el cuerpo sólido resultante se llama *cono circular*.



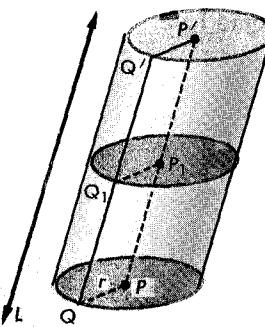
Utilizando la definición de una pirámide como modelo, el alumno no deberá tener dificultades al redactar la definición de cono circular.

Los teoremas siguientes acerca de cilindros y conos son análogos a los teoremas correspondientes acerca de prismas y pirámides. Sus demostraciones son también parecidas, pues la forma de la base no tiene gran importancia. Por tanto, omitiremos los detalles.

### Teorema 17-11

Toda sección transversal de un cilindro circular es una región circular congruente con la base.

La demostración se basa en que  $P_1Q_1 = PQ = r$ ; esto es cierto, porque  $\overline{PQ}$  y  $\overline{P_1Q_1}$  son lados opuestos del paralelogramo  $\square QQ_1P_1P$ .



### Teorema 17-12

Toda sección transversal de un cilindro circular tiene la misma área que la base.

El teorema siguiente es un poco más difícil:

### Teorema 17-13

Se dan un cono de altura  $h$  y una sección transversal formada por un plano a una distancia  $k$  del vértice. El área de la sección transversal es igual a  $k^2/h^2$  multiplicado por el área de la base.

Utilizando la notación de la figura de la página siguiente, los pasos principales de la demostración son los siguientes:

$$(1) \quad \triangle VPT \sim \triangle VP'T',$$

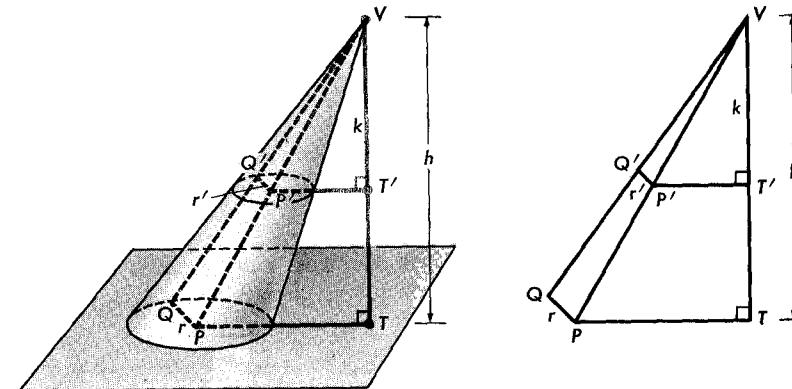
$$(2) \quad \frac{VP'}{VP} = \frac{VT'}{VT} = \frac{k}{h},$$

$$(3) \quad \triangle VP'Q' \sim \triangle VPQ,$$

$$(4) \quad \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{VP'}{VP} = \frac{k}{h} \quad \text{y} \quad P'Q' = \frac{k}{h} PQ.$$

Así, pues, si  $Q$  está en la circunferencia con centro  $P$  y radio  $r$  de la base, entonces  $Q'$  está en la circunferencia con centro  $P'$  y radio

$$r' = \frac{k}{h} PQ = \frac{k}{h} r$$



en la sección transversal. Por consiguiente, la sección transversal es una región circular de radio  $r'$  y su área es

$$\pi \frac{k^2}{h^2} r^2.$$

Esto es igual a  $k^2/h^2$  por el área de la base.

Ahora, podemos calcular los volúmenes de cilindros y conos, utilizando el principio de Cavalieri del mismo modo que lo hicimos para los prismas y las pirámides.

### Teorema 17-14

El volumen de un cilindro circular es el producto de su altura y el área de la base.

La demostración es análoga a la del teorema 17-7.

### Teorema 17-15

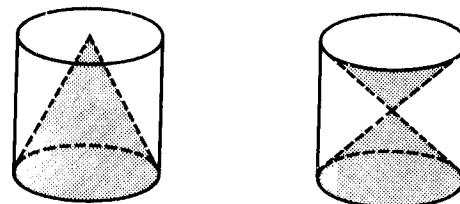
El volumen de un cono circular es un tercio del producto de su altura y el área de la base.

La demostración es análoga a la del teorema 17-10.

### Conjunto de problemas 17-4

- La base de un cilindro es una región circular de diámetro 8. La altura del cilindro es, también, 8. ¿Cuál es el volumen del cilindro?
- Un canal de desagüe es una lámina cilíndrica de 50 centímetros de largo. Los diámetros interno y externo son 9 y 12 centímetros, respectivamente. Determinese el volumen de yeso necesario para construir el canal. (Utilícese  $3\frac{1}{7}$  como valor de  $\pi$ .)

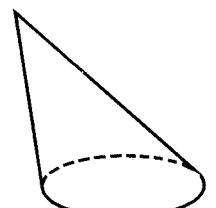
3.



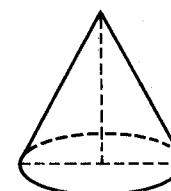
Los dos cilindros de la figura anterior son idénticos. Compárese el volumen del cono inscrito en el cilindro de la izquierda con los volúmenes de los conos (la figura que representa un reloj de arena) inscritos en el cilindro de la derecha.

4. ¿Cuál deberá ser la longitud de un tubo cuyo diámetro interno mide 1 pulgada para poder contener un galón de agua? (El volumen de un galón es 231 pulgadas cúbicas. Utilícese  $3\frac{1}{7}$  como valor de  $\pi$ .)

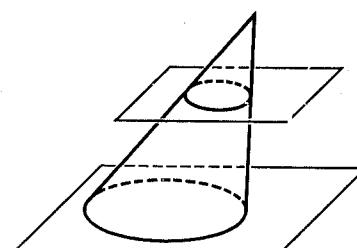
5. Determinar el volumen de un cono circular cuya altura es 12 y cuya base tiene un radio igual a 3.2.



6. La figura de la derecha representa un *cono circular recto*. Deslíñase un cono circular recto. Determinese su altura, si el volumen es  $48\pi$  y el diámetro de la base es 8.



7. Un estanque cónico tiene  $10\frac{1}{2}$  pies de hondo y su borde superior circular tiene un radio de 5 pies. ¿Cuántos galones de líquido podrá contener? (En 1 pie cúbico, caben 7.48 galones.)



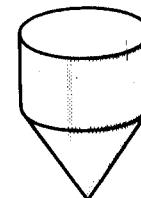
8. La altura de un cono es 9. Un plano paralelo al plano de la base interseca al cono, determinando un cono pequeño en la parte superior. La distancia entre los planos es 5.

- (a) ¿Cuál es la razón de las alturas de los conos?  
 (b) ¿Cuál es la razón de los radios de las bases?  
 (c) ¿Cuál es la razón de las áreas de las bases?  
 (d) ¿Cuál es la razón de los volúmenes de los conos?

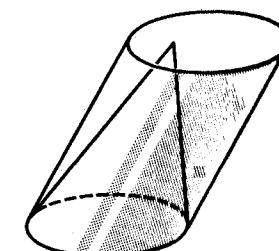
9. La altura de un cono es 5 centímetros. Un plano a 2 centímetros del vértice del cono es paralelo a la base del cono. Si el volumen del cono más pequeño es 24 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen del cono más grande?

10. Una pirámide cuadrada se inscribió en un cono circular, de manera que tengan el mismo vértice y la base de la pirámide quede inscrita en la base del cono. La altura común es 18 y la longitud de un lado del cuadrado es 15. Determinese el volumen de cada cuerpo sólido.

11. Un arcón tiene la forma de la figura de la derecha. El radio del borde superior circular es 7 pies. La altura del arcón completo es 26 pies y la altura de la sección cónica es 12 pies. Determinese la capacidad del arcón.

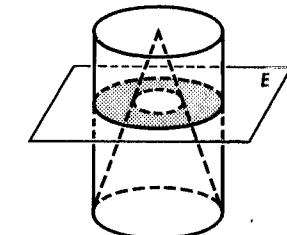


12. Dentro de una superficie cilíndrica, hay una superficie cónica. La base del cono coincide con la base del cilindro y el vértice del cono está en la base superior del cilindro. Escríbese una fórmula para el volumen del espacio limitado por las dos superficies y la base superior, en términos de  $r$ , el radio de la base, y  $h$ , la altura del cilindro.

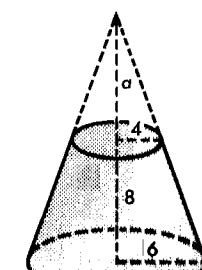


- \* 13. Un plano corta a la figura del problema 12 a mitad de camino entre las bases y es paralelo a ellas. Hágase un esquema de una vista desde arriba de la intersección. Si el radio del cilindro es 4, ¿cuál será el área de la intersección del plano con el espacio entre las dos superficies?

14. En la figura de la derecha, la superficie cónica circular recta está inscrita en el cilindro circular recto. El plano  $E$  es paralelo a la base del cilindro y está situado 14 centímetros por encima de la base. La altura del cono es 21 centímetros y el radio de la base es 6 centímetros. Determinese el área de la intersección del plano  $E$  con el espacio entre las dos superficies.



- \* 15. Un tronco de un cono tiene de altura 8 y los radios de sus bases superior e inferior son 4 y 6, respectivamente. ¿Cuál es el volumen del tronco? (Véase el problema 14 del Conjunto de problemas 17-3.)



## 17-5. EL VOLUMEN Y EL ÁREA DE LA SUPERFICIE DE UNA ESFERA

Por volumen de una esfera, entendemos el volumen del cuerpo sólido que es la reunión de la superficie esférica y su interior.

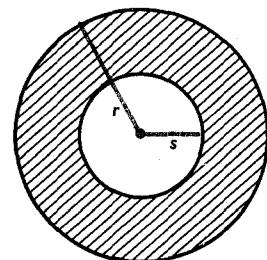
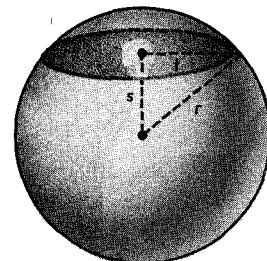
Hasta ahora, para calcular volúmenes, nuestro mejor instrumento ha sido el principio de Cavalieri. Para utilizar este principio en el problema de la esfera, necesitaremos encontrar otro cuerpo sólido con las mismas áreas de secciones transversales en todos los niveles. Por tanto, nuestro primer paso debe ser determinar las áreas de las secciones transversales de la esfera. Esto es fácil. Dada una esfera de radio  $r$ , las secciones transversales son regiones circulares. Si la sección transversal está a una distancia  $s$  del centro y su radio es  $t$ , entonces, sabemos, en virtud del teorema de Pitágoras, que

$$t^2 = r^2 - s^2.$$

Por consiguiente, el área de la sección a la distancia  $s$  es

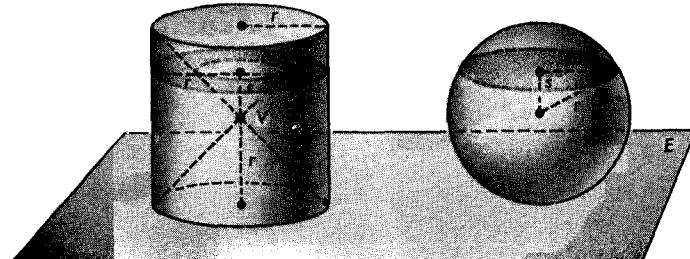
$$\begin{aligned} A_s &= \pi t^2 \\ &= \pi(r^2 - s^2) \\ &= \pi r^2 - \pi s^2. \end{aligned}$$

Esta última fórmula tiene un significado geométrico: es el área de la región anular que está dentro de una circunferencia de radio  $r$  y fuera de una circunferencia de radio  $s$ , como se indica a la derecha. Este tipo de figura se llama *anillo*.



$$A = \pi r^2 - \pi s^2.$$

Ahora, formaremos un cuerpo sólido que tiene por secciones transversales regiones como la indicada:



Tomamos un plano horizontal  $E$ , tangente a la esfera. En este plano, tomamos una región circular de radio  $r$ . Utilizando ésta como base, formamos un cilindro circular recto de altura  $2r$ . Sea  $V$  el punto medio del eje del cilindro, es decir, del segmento vertical que une los centros de las bases. Formamos dos conos con vértice  $V$  y con la tapa y el fondo del cilindro como bases.

El cuerpo sólido que está dentro del cilindro y fuera de los conos es precisamente del tipo que buscamos: cada una de sus secciones transversales es un anillo y la sección transversal a la distancia  $s$  de  $V$  tiene por área  $\pi(r^2 - s^2)$ . En consecuencia, el volumen de este cuerpo sólido es igual al volumen de la esfera.

Pero el volumen del nuevo cuerpo sólido es fácil de calcular; es igual al volumen del cilindro menos los volúmenes de los conos. Esto da

$$\begin{aligned} \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 r \\ = 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 \\ = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

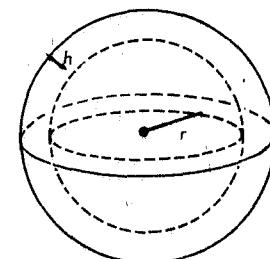
Así, pues, hemos demostrado el siguiente teorema:

### Teorema 17-16

El volumen de una esfera de radio  $r$  es  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

Hay un artificio que nos permite utilizar este resultado para calcular el área de la superficie de la esfera. Dada una esfera de radio  $r$ , formamos una esfera un poco mayor, de radio  $r + h$ . El cuerpo sólido que está entre las dos superficies esféricas correspondientes se llama *cáscara* o *cápsula esférica*, y su aspecto es el de la figura de la derecha. Sean  $A$  el área de la superficie de la esfera y  $V$  el volumen de la cáscara esférica. Entonces,  $V$  es  $Ah$ , aproximadamente, y, si  $h$  es pequeño, la aproximación es buena. (Por ejemplo, si tuviéramos una bola corriente y la pintáramos con una capa muy delgada de pintura, digamos de una centésima de un centímetro de espesor, entonces, el volumen total de la pintura sería alrededor de  $\frac{1}{100}A$ .) Así,  $V/h$  es aproximadamente  $A$ , cuando  $h$  es pequeño. A medida que  $h \rightarrow 0$ , tenemos

$$\frac{V}{h} \rightarrow A.$$



Pero, podemos calcular  $V/h$  exactamente y ver a qué se approxima a medida que  $h \rightarrow 0$ . Obsérvese que  $V$  es la diferencia de los volúmenes de las dos esferas.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \\
 &= \frac{4}{3}\pi[(r+h)^3 - r^3] \\
 &= \frac{4}{3}\pi[r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3 - r^3] \\
 &= \frac{4}{3}\pi[3r^2h + 3rh^2 + h^3].
 \end{aligned}$$

[El alumno deberá comprobar que  $(r+h)^3$  es realmente igual a  $r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3$ .] En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{h} &= \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3rh + h^2) \\
 &= 4\pi r^2 + h(4\pi r + \frac{4}{3}\pi h).
 \end{aligned}$$

A medida que  $h \rightarrow 0$ , el segundo término completo se aproxima a cero. Por consiguiente,

$$\frac{V}{h} \rightarrow 4\pi r^2.$$

Como sabemos también que

$$\frac{V}{h} \rightarrow A,$$

se deduce que

$$A = 4\pi r^2.$$

Así, pues, hemos demostrado el siguiente teorema:

### Teorema 17-17

El área de la superficie de una esfera de radio  $r$  es

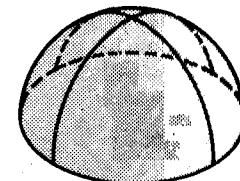
$$A = 4\pi r^2.$$

Obsérvese la propiedad interesante de que el área de la superficie de una esfera es exactamente cuatro veces el área de la sección transversal que pasa por el centro.

### Conjunto de problemas 17-5

- Determinar el área de la superficie y el volumen de una esfera cuyo radio es 4.
- Para una esfera de diámetro 4, ¿cuál es mayor, el área de su superficie o su volumen?
- Para una esfera de diámetro 10, ¿cuál es mayor, el área de su superficie o su volumen?
- ¿Cuál será el diámetro de una esfera tal que su volumen sea igual a su área de superficie?

- Un tanque esférico tiene un radio de 7 pies. ¿Cuántos galones puede contener? (Utilícese  $\pi = 3\frac{1}{7}$ .)
- Un cono de helado tiene  $12\frac{1}{2}$  centímetros de hondo y 5 centímetros de diámetro superior. Se echan en él dos cucharadas semiesféricas, también de diámetro 5 centímetros. Si el helado se derrite dentro del cono, ¿lo rebasará?

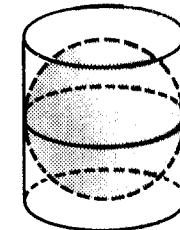


- Un almacén grande tiene la forma de un hemisferio. Si se necesitan 13 galones de pintura para cubrir el piso, ¿cuántos galones se necesitarán para pintar el exterior del almacén?

- Los volúmenes de una esfera y un cilindro circular son iguales y el diámetro de la esfera es igual al diámetro de una base del cilindro. Determíñese la altura del cilindro en términos del diámetro de la esfera.

- El diámetro de cierta esfera es igual al radio de una segunda esfera.
  - ¿Cuál es la razón de sus radios?
  - ¿Cuál es la razón de sus áreas de superficie?
  - ¿Cuál es la razón de sus volúmenes?

- El diámetro de una esfera es un tercio del radio de otra. Contéstense las preguntas del problema 9 con relación a estas esferas.

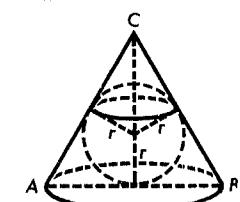


- Arquímedes (287-212 a. de J. C.) demostró que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro circular recto más pequeño que puede contenerla. Verifíquese esto.

- El diámetro de la Luna es, aproximadamente, un cuarto del diámetro de la Tierra. Compárense los volúmenes de la Luna y la Tierra.

- Alrededor de tres cuartas partes de la superficie de la Tierra está cubierta de agua. ¿Cuántos millones de kilómetros cuadrados de la superficie de la Tierra constituyen terreno seco? (Utilícese 12,800 kilómetros como diámetro de la Tierra y 3.14 como valor aproximado de  $\pi$ .)

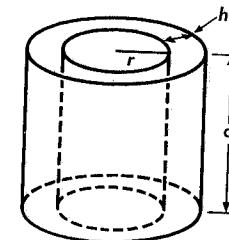
- En la figura, la esfera está inscrita en un cono circular recto.  $\overline{AB}$  es un diámetro de la base y  $C$  es el vértice del cono. El  $\triangle ABC$  es equilátero. Determíñese el volumen del cono en términos de  $r$ , el radio de la esfera.



15. El volumen de una esfera es la mitad del volumen de otra. ¿Cuál es la razón de sus radios?

16. El ingeniero municipal, quien mide 6 pies de alto, marchaba a inspeccionar el nuevo tanque esférico de agua. Cuando se colocó en un lugar a 18 pies del punto de contacto del tanque con el suelo, su cabeza tocaba el tanque. Sabiendo que la ciudad gastaba 10,000 galones de agua por hora, inmediatamente calculó cuántas horas podría durar un tanque lleno. ¿Cómo lo hizo y cuál fue el resultado?

17. Utilizando el método mediante el cual se dedujo la fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera (teorema 17-17), verifíquese que el área de la superficie lateral de un cilindro circular recto es  $2\pi r a$ , donde  $r$  es el radio de una base y  $a$  es la altura.



### PROBLEMA OPTATIVO

Una esfera y un cilindro circular recto tienen volúmenes iguales. El radio de la esfera es igual al radio de la base del cilindro. Compárese el área de la superficie de la esfera con el área de la superficie total del cilindro.

### Rapso del capítulo

1. Sin referirse al capítulo, trátese de escribir e identificar todas las fórmulas para áreas y volúmenes estudiadas en el mismo.

2. Completar cada uno de los siguientes enunciados con los términos apropiados:

(a) Las bases de todo prisma son \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.

(b) Las caras laterales de un prisma son regiones \_\_\_\_\_.

(c) La superficie lateral de un prisma es la \_\_\_\_\_ de las \_\_\_\_\_ del prisma.

(d) Si la base de un prisma es un paralelogramo, el prisma se llama \_\_\_\_\_.

(e) Si dos pirámides triangulares tienen bases congruentes, los volúmenes de las pirámides son proporcionales a sus \_\_\_\_\_.

3. Completar cada uno de los siguientes enunciados con los términos apropiados:

(a) En un prisma recto, cada arista lateral es \_\_\_\_\_ a la base.

(b) Una sección transversal de una pirámide es la \_\_\_\_\_ de la pirámide y un plano \_\_\_\_\_ a la base.

- (c) Las áreas de dos secciones transversales de una pirámide son proporcionales a las \_\_\_\_\_ de sus \_\_\_\_\_ al vértice de la \_\_\_\_\_.

- (d) Si un cono y un cilindro tienen bases congruentes y alturas iguales, el volumen del cilindro es \_\_\_\_\_ el volumen del cono.

- (e) Los volúmenes de dos esferas son proporcionales a los \_\_\_\_\_ de sus radios y las áreas de sus superficies son proporcionales a los \_\_\_\_\_ de sus radios.

4. La base de un prisma recto es una región hexagonal regular. Una arista de la base mide 2 centímetros de largo y una arista lateral del prisma mide 7 centímetros de largo. Determíñese el área de la superficie lateral del prisma. Determíñese el área de una sección transversal que dista 5 pulgadas de la base y es paralela a ésta.

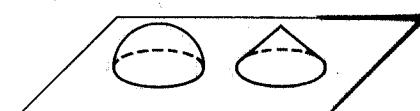
5. En un estante de un colmado, hay dos tarros de la misma marca de mermelada de fresa. El tarro más alto tiene doble altura del otro, pero su diámetro es la mitad del diámetro del más bajo. El tarro más alto cuesta 23 centavos y el otro 43 centavos. ¿Cuál es la mejor compra?



6. ¿Cuál es el volumen de un cono, si su altura es 6 y el diámetro de la base es 10?

7. El volumen de una pirámide cuadrada es 384 pulgadas cúbicas y su altura es 8 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de una arista de la base? ¿Cuál es el área de la superficie lateral de la pirámide? (Supóngase que la proyección del vértice es el centro de la base.)

8. Las bases de un hemisferio y un cono son círculos congruentes y coplanarios. Un plano que pasa por el vértice del cono es paralelo al plano de las bases y tangente al hemisferio. ¿Cuál es la razón del volumen del cono al volumen del hemisferio?



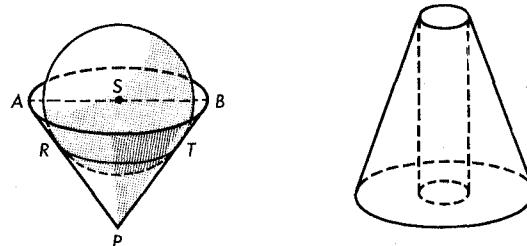
9. La base de un tetraedro es un triángulo cuyos lados tienen longitudes 10, 24 y 26. La altura del tetraedro es 20. Determíñese el área de una sección transversal cuya distancia de ésta es 15.

10. Dado que el diámetro de una esfera es 18, determiníñense su volumen y su área de superficie.

11. El volumen de un cono es 400 centímetros cúbicos y el radio de la base es 5 centímetros. Determíñese su altura.

12. Una bola esférica cuyo radio es 8 centímetros tiene un hueco central esférico de radio 5 centímetros. ¿Cuál es el volumen de la cáscara o cápsula esférica?

13. Demostrar que el volumen de una esfera viene dado por la fórmula  $\frac{4}{3}\pi d^3$ , donde  $d$  es el diámetro.
14. El volumen de una pirámide cuya altura es 12 pulgadas, es 432 pulgadas cúbicas. Determíñese el área de la sección transversal 3 pulgadas por encima de la base.
15. Se dan dos conos. La altura del primero es la mitad de la altura del segundo y el radio de la base del primero es la mitad del radio de la base del segundo. Compárense sus volúmenes.
16. Una esfera se inscribe en un cilindro circular recto, de manera que sea tangente a ambas bases. ¿Cuál es la razón del volumen de la esfera al volumen del cilindro?
17. Un recipiente cilíndrico de radio 12 centímetros y altura 25 centímetros, se llenó con agua. En el recipiente con agua, se introdujo una bola con un diámetro de 20 centímetros y, después, se sacó. ¿Qué volumen de agua quedó en el recipiente?
- \* 18. Un paralelepípedo rectangular cuya base mide 12 por 20 se inscribió en una esfera de diámetro 25. Determíñese el volumen de la parte de la esfera que sobresale del paralelepípedo.
- \* 19. La base de un cono circular recto tiene un diámetro de 12 pulgadas y la altura del cono es 12 pulgadas. El cono se llenó con agua. Una bola se introdujo en el cono hasta que quedó ajustada. Exactamente la mitad de la bola quedaba fuera del agua. ¿Cuánta agua quedó en el cono, después de sacar la bola?



- \* 20. La altura de un cono circular recto es 15 y el radio de la base es 8. Se taladró un agujero cilíndrico de diámetro 4 en el cono, a lo largo de su eje, resultando un cuerpo sólido como el que se muestra en la figura anterior de la derecha. ¿Cuál es el volumen de ese cuerpo sólido?

### PROBLEMA OPTATIVO

Se da un rectángulo  $\square ABCD$ .  $\overline{PQ}$  es un segmento que no está en el plano del  $\square ABCD$ , tal que  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ . Trácese los segmentos  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PD}$ ,  $\overline{QB}$  y  $\overline{QC}$ . La longitud de un segmento perpendicular desde un punto cualquiera de  $\overline{PQ}$  al plano del  $\square ABCD$  es  $h$ . Sean  $AD = a$ ,  $AB = b$  y  $PQ = c$ . Demuéstrese que el volumen del cuerpo sólido  $ABCDPQ$  es igual a

$$\frac{1}{6}ah(2b + c).$$

## Índice alfabético

---

•

•

•

•

## Índice alfabético

---

- agudo, ángulo, 87  
alineados, 57  
alternos internos, ángulos, 232  
altura  
    de un prisma, 538  
    de un triángulo, 206  
    de una pirámide, 543  
ángulo(s), 75  
    agudo, 87  
    alternos internos, 232  
    bisectriz de un, 132  
    central, 439  
    complementarios, 87  
    comprendido, 115  
    congruencia de, 88, 112  
    consecutivos de un cuadrilátero, 246  
    correspondientes, 236  
    de un cuadrilátero, 144  
    de un polígono, 513  
    de un triángulo, 76  
    diedro, 276  
    diedro recto, 277  
    diedros opuestos por el vértice, 276  
    en el vértice de un triángulo isósceles, 135  
    en la base de un triángulo isósceles, 135  
    exterior de un, 76  
    externo, 187  
    inscrito, 442  
    interior de, 76  
    internos no contiguos, 188  
    lados de un, 75  
    medida de un, 82  
    obtuso, 87  
    opuestos de un cuadrilátero, 246  
    opuestos por el vértice, 91  
    orientados, 80  
    rectilíneo de un ángulo diedro, 276  
    recto, 87  
    suplementarios, 83  
    vértice de un, 75  
anillo, 562  
Apolo, 506  
apotema, 518  
arco(s)  
    congruentes, 448  
    de un sector, 530  
    de una circunferencia, 438  
    longitud de un, 528  
    mayor, 439  
    medida en grados de un, 440  
    menor, 439  
área de  
    un círculo, 524  
    un paralelogramo, 301  
    un polígono convexo, 514  
    un rectángulo, 295  
    un sector, 530  
    un trapecio, 300  
    un triángulo, 299  
    una región poligonal, 293  
arista de  
    un ángulo diedro, 276  
    un semiplano, 64  
    una pirámide, 56  
Arquímedes, 556  
base de  
    un prisma, 537, 538  
    un trapecio, 259  
    un triángulo isósceles, 135  
    una pirámide, 543  
Birkhoff, George David, 93  
bisecar un segmento, 45  
bisectriz de un ángulo, 132  
bisectriz de un ángulo de un triángulo, 145  
Bolyai, János, 289  
borde, 64  
cara de  
    un ángulo diedro, 276  
    un semiespacio, 65

cateo, 167  
 central, ángulo, 439  
 centro de  
     un polígono regular, 518  
     una circunferencia, 421  
     una superficie esférica, 421  
 centroide, 490  
 cilindro, 557  
     circular, 557  
     recto, 557  
     volumen de un, 559  
 circular  
     cilindro, 557  
     cono, 557  
     región, 524  
 circuncentro, 503  
 circunferencia(s), 421  
     circunscrita a un triángulo, 502  
     congruentes, 430  
     exterior de una, 425  
     inscrita en un triángulo, 502  
     interior de una, 425  
     longitud de una, 521  
     máxima, 423  
     radio de una, 422  
     tangentes, 427  
 circunscrito (a), 445  
 colineales, 57  
 cometa, 253  
 complementarios, ángulos, 87  
 complemento, 91  
 comprendido  
     ángulo, 115  
     lado, 115  
 concéntricas  
     circunferencias, 421  
     superficies esféricas, 421  
 concurrentes, 481  
 congruencia de  
     ángulos, 88, 112  
     arcos, 448  
     circunferencias, 430  
 segmentos, 112  
 triángulos, 105, 113  
 congruencia identidad, 107, 112  
 conjunto(s), 15  
 auxiliares, 169  
 convexo, 63  
 iguales, 15

intersección de, 15  
 nulo, 17  
 reunión de, 16  
 vacío, 17  
 cono, 557  
     circular, 557  
     circular recto, 560  
 construcciones con regla y compás, 491  
 convexo(s)  
     conjuntos, 63  
     cuadriláteros, 246  
     polígono, 514  
 coordenada, 35  
 coordenada  $x$ , 373  
 coordenada  $y$ , 373  
 coplanario, 57  
 corolario AA, 337  
 correspondencia ALA, 119  
 correspondencia entre triángulos, 105  
 correspondencia LAL, 119  
 correspondencia LLL, 119  
 correspondientes, ángulos, 236  
 coseno, 353  
 cotangente, 365  
 cuadrado, 144, 251  
     área de un, 294  
 cuadrante, 373  
 cuadratura del círculo, 506  
 cuadrilátero(s), 144, 245  
     alabeado, 280  
     cíclico, 484  
     diagonal de un, 246  
 cuerda de  
     una circunferencia, 421  
     una superficie esférica, 422  
 decágono, 514  
 demostración indirecta, 153  
 Descartes, René, 371, 377  
 desigualdad del triángulo, 200  
 desigualdades, 22  
 diagonal de un cuadrilátero, 246  
 diámetro, 422  
 diedro, ángulo, 276  
     ángulo rectilíneo de un, 276  
     arista de un, 276  
     cara de un, 276  
     medida de un, 277  
     recto, 277

distancia, 31  
     de un punto a un plano, 224  
     de un punto a una circunferencia, 478  
     entre dos rectas paralelas, 247  
     entre una recta y un punto fuera de ella, 200  
     fórmula de la, 393  
     postulado de la, 31  
 duplicación del cubo, 505  
 Einstein, Albert, 289  
 eje  $x$ , 371, 372  
 eje  $y$ , 372  
 elemento de un conjunto, 15  
*Elementos*, 11, 231, 492  
 enteros, 21  
 entre, 39  
 equilátero, triángulo, 135  
 equivalencia, relación de, 118  
 Eratóstenes, 261, 262  
 esfera, 562  
 espacio, 55  
 Euclides, 11  
 Euler, Leonhard, 68, 70, 298  
 exágono, 514  
 existencia, 159  
 exterior de  
     un ángulo, 76  
     un ángulo diedro, 276  
     un triángulo, 77  
     una circunferencia, 425  
 exteriormente, tangente, 427  
 externo, ángulo, 187  
 extremo(s) de  
     un arco, 439  
     un rayo, 42  
     un segmento, 41  
 forma de ordenada en el origen y pendiente, 413  
 forma de punto y pendiente, 412  
 fórmula de la distancia, 393  
 fórmula del punto medio, 397  
 Gauss, C. F., 289  
 geometría (origen del término), 262  
 geometría cartesiana, 371  
 geometría hiperbólica, 243  
 gráfica de una condición, 408

Gran pirámide de Gizeh, 3  
 hexágono, 514  
 hipótesis, 95, 167  
 igualdad  
     propiedad aditiva de la, 24  
     propiedad multiplicativa de la, 24  
     propiedad con respecto a la sustracción de la, 24  
 incentro, 503  
 inscrito, 442  
 interceptar, 256, 443  
 interior de  
     un ángulo, 76  
     un ángulo diedro, 276  
     un triángulo, 77  
     una circunferencia, 425  
 interiormente tangente, 427  
 interpolación, 360  
 intersecar, 15  
 intersección, 15  
 isósceles  
     trapezio, 251  
     triángulo, 135  
 Königsberg, 68  
 lado(s)  
     comprendido, 115  
     consecutivos de un cuadrilátero, 246  
     de un ángulo, 75  
     de un ángulo diedro, 276  
     de un cuadrilátero, 144  
     de un polígono, 513  
     de un triángulo, 76  
     opuestos de un cuadrilátero, 246  
     opuestos de una recta, 64  
 Leibniz, 556  
 Lobachevsky, N. I., 289  
 longitud de  
     un arco circular, 528  
     un segmento, 42  
     una circunferencia, 521  
 media geométrica, 323  
 mediana de  
     un trapezio, 259  
     un triángulo, 145, 489  
 mediatrix, 163

e inferior de un, 536, 537  
 e superior de un, 537  
 a lateral de un, 540  
 to, 537  
 singular, 538  
 lema de la trisección del ángulo, 505  
 lemas de construcción imposibles de  
 lemas de construcción  
 antigüedad, 504  
 iedad aditiva de la, 23  
 iedad aditiva de 1/1, 23, 24, 186  
 iedad multiplicativa, 23, 24, 186  
 iedad de la igualdad con respecto a la  
 sustracción, 24  
 iorción, 323  
 iorcional, 322  
 icción  
 e un conjunto de puntos sobre un plano, 283  
 e un punto sobre un plano, 281  
 e una recta sobre un punto, 282  
 e concurrencia, 48  
 e contacto, 425  
 e tangencia, 425  
 ito medio, 45  
 órmula del, 397  
 ito y pendiente, 412  
 ionales, números, 71  
 lio de  
 un sector, 530, 422  
 una circunferencia, 422  
 una superficie esférica, 422  
 iz cuadrada, 23  
 existencia de la, 13  
 yo(s), 42  
 opuestos, 43  
 zones trigonométricas, 353  
 ales, números, 22  
 cíproco, 198  
 del teorema de la paralela, 204  
 cta(s), 9  
 alabeadas, 229  
 horizontal, 383  
 paralelas, 229  
 vertical, 383  
 ectángulo, 144, 251  
 área de un, 295

triángulo, 167  
 recto  
     ángulo, 87  
     ángulo diedro, 277  
     cilindro, 557  
     cono circular, 560  
     prisma, 537  
 región  
     circular, 524  
     poligonal, 291  
     poligonal convexa, 539  
     triangular, 291  
 regular (es)  
     octaedro, 554  
     pirámide, 547  
     polígonos, 517  
 relación de equivalencia, 118  
 relación de ordenación, 23  
 reunión de dos conjuntos, 16  
 rombo, 251  
 "sea", 169  
 secante, 231, 365  
     a una circunferencia, 421  
     a una superficie esférica, 422  
 sección transversal de  
     un cilindro, 558  
     un cono, 558  
     un prisma, 538  
     una pirámide, 543  
 sector, 530  
     arco de un, 530  
     radio de un, 530  
 segmento(s), 10, 41  
     circular, 531  
     congruentes, 112  
     mediatriz de un, 163  
 segundo teorema de mínima distancia, 224  
 semejanza, 327  
 semicircunferencia, 439  
 semiespacio, 65  
     cara de un, 65  
 semiplano, 64  
     arista de un, 64  
 seno, 353  
 si, uso de la palabra en definiciones, 39  
 sistema de coordenadas  
     en un plano, 374  
     en una recta, 35

medida de  
     un ángulo, 82  
     un ángulo diedro, 277  
     un arco en grados, 440  
 menor que  
     para ángulos, 185  
     para segmentos, 185  
 miembro de un conjunto, 15  
 Newton, Isaac, 556  
 números  
     enteros, 21  
     racionales, 21  
     reales, 22  
 obtuso, ángulo, 87  
 octaedro regular, 554  
 octógono, 514  
 opuestos  
     por el vértice, ángulos, 91  
     rayos, 43  
 oráculo de Delfos, 506  
 ordenación, relación de, 23  
 ordenada en el origen y pendiente, forma de, 413  
 orientados, ángulos, 80  
 origen, 372  
 ortocentro, 484  
 par lineal, 83  
 par ordenado, 373  
 paralelogramo, 247  
 paralelos (as)  
     planos, 269  
     rectas, 229  
     rectas y planos, 269  
 pendiente  
     de un segmento, 383  
     de una recta no vertical, 386  
 pentágono, 514  
 perímetro, 513  
 perpendiculares  
     planos, 277  
     recta y plano, 213  
     rectas, 87  
 pertenecer a, 15  
 pi ( $\pi$ ), 521  
 pirámide, 543  
     altura de una, 543

base de una, 543  
 regular, 547  
 vértice de una, 543  
 volumen de una, 553

Pitágoras, 307  
 plano(s), 10  
     paralelos, 269  
     perpendiculares, 277  
 polígono, 513  
     ángulos de un, 513  
     apotema de un, 518  
     convexo, 514  
     inscrito, 518  
     lados de un, 513  
     perímetro de un, 513  
     regular, 517  
     vértices de un, 513  
 postulado(s), 8, 153  
 postulado ALA, 120, 174  
 postulado de colocación de la regla, 38  
 postulado de la adición de ángulos, 82  
 postulado de la adición de áreas, 294  
 postulado de la congruencia de triángulos, 293  
 postulado de la congruencia de triángulos, 119  
 postulado de la construcción del ángulo, 82, 171  
 postulado de la distancia, 31  
 postulado de la medida de ángulos, 82  
 postulado de la recta, 41, 57, 157, 170  
 postulado de la regla, 34  
 postulado de la unidad de área, 294  
 postulado de la unidad de volumen, 549  
 postulado de las paralelas, 231, 238, 243  
 postulado de separación del espacio, 65  
 postulado de separación del plano, 64  
 postulado del plano, 60, 157, 170  
 postulado del suplemento, 83  
 postulado LAL, 119  
 postulado LLL, 120  
 potencia de un punto con respecto a una circunferencia, 455  
 primer teorema de mínima distancia, 200  
 principio de Cavalieri, 550  
 prisma, 537  
     altura de un, 538  
     arista lateral de un, 540

- subconjunto, 15  
 superficie esférica, 421  
 suplementarios, ángulos, 83  
 suplemento, 90  
 tangente(s), 354  
     a una circunferencia, 425  
     circunferencias, 427  
     común externa, 459  
     común interna, 459  
     exteriormente, 427  
     interiormente, 427  
     segmento, 453  
 teorema, 8  
 teorema AIP, 233  
 teorema de caracterización, 163, 475  
 teorema de Desargues, 281  
 teorema de la semejanza AAA, 336  
 teorema de la semejanza LAL, 342  
 teorema de la semejanza LLL, 343  
 teorema de la adición de arcos, 441  
 teorema de concurrencia de las alturas, 483  
 teorema de concurrencia de las bisectrices  
     de los ángulos de un triángulo, 487  
 teorema de concurrencia de las medianas,  
     489  
 teorema de concurrencia de las mediatrices,  
     482  
 teorema de la charnela, 203  
 teorema de la hipotenusa y el cateto, 193  
 teorema de la mediatrix, 163  
 teorema de la sección transversal de la  
     pirámide, 546  
 teorema de la sección transversal del prisma,  
     539  
 teorema de las dos circunferencias, 493  
 teorema de localización de puntos, 44, 170  
 teorema de los ángulos opuestos por el  
     vértice, 92  
 teorema de Pitágoras, 306, 311, 349, 352  
 teorema del ángulo externo, 188  
 teorema del plano bisecante perpendicular,  
     220  
 teorema del triángulo isósceles, 134  
 teorema del triángulo rectángulo isósceles,  
     312  
 teorema del triángulo 30-60-90, 254  
 teorema fundamental de la proporcionalidad,  
     330  
 teorema LAA, 192  
 teorema PAI, 238  
 términos no definidos, 8, 9, 153  
 topología, 69  
 transitividad, 32, 185  
 trapecio, 247  
     área de un, 300  
     isósceles, 251  
 triángulo(s), 76  
     altura de un, 206  
     área de un, 299  
     bisectriz de un ángulo de un, 145  
     centroide de un, 490  
     circunscrito a una circunferencia, 502  
     congruentes, 105, 113  
     de Reuleaux, 534  
     desigualdad del, 200  
     equilátero, 135  
     escaleno, 135  
     exterior de un, 77  
     inscrito en una circunferencia, 502  
     interior de un, 77  
     isósceles, 135  
     lados de un, 76  
     mediana de un, 145, 489  
     rectángulo, 167  
     semejantes, 327  
     vértices de un, 76  
 tricotomía, 23, 185  
 trigonometría, 80, 353  
 unicidad, 159  
 valor absoluto, 26  
 vértice de  
     un ángulo, 75  
     un cuadrilátero, 144  
     un polígono, 513  
     un triángulo, 76  
 una pirámide, 543  
 volumen  
     de un cilindro circular, 559  
     de un cono circular, 559  
     de una esfera, 563  
     de una pirámide, 553