UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

GUÍA DE ESTUDIO DE

CÁLCULO 20
Y
MATEMÁTICAS II

F. Mejías, A. Montilla, J. Romano y W. Zuleta

Trujillo, 2013

INTRODUCCIÓN

Cálculo es una disciplina matemática muy antigua que se desarolló a partir de la investigación de dos problemas: hallar la recta tangente a una curva en un punto dado y determinar el área de la región limitada por líneas curvas.

Históricamente, el segundo de estos problemas fue atacado primero por los antiguos griegos, especialemente Eudoxio y Arquímedes, obteniendo resultados no triviales. El primero fue resuelto hacia el siglo XVII, principalmente con los trabajos de Newton y Leibniz, una vez que se había obtenido el desarrollo considerable en los métodos de Geometría Analítica. Sin embargo estos dos científicos hicieron mucho más: descubrieron que existe una relación muy profunda entre ambos problemas.

El problema de la recta tangente se resuelve mediante la *derivada*, y el conjunto de técnicas, métodos y teorías relacionadas con ella se conoce como Cálculo Diferencial. Por otro lado, el problema de las áreas se resuelve con la *integral* y de alli se deriva el nombre de Cálculo Integral.

Este curso consiste en el estudio de las técnicas más elementales del Cálculo para funciones de una variable real y sus aplicaciones a la geometría, la ciencia y la ingeniería. La *Guía* está dividida en capítulos, cada uno de los cuales contiene los elementos teóricos de un tema y una sección de ejercicios asociada. La mayoría de los ejercicios provienen de los libros de Apostol, Demidovich y Spivak sobre la materia; pero existen muchas fuentes adicionales disponibles que pueden ser consultadas.

Universidad de Los Andes
Núcleo Universitario "Rafael Rangel"
Trujillo, 17 de Octubre de 2013

FERNANDO MEJÍAS
JOSÉ ROMANO
WILFREDO ZULETA

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 LÍMITES Y CONTINUIDAD

Este capítulo contiene el material básico acerca de límites y funciones continuas que el estudiante debe tener a mano para abordar los conceptos de derivada e integral, cuya exploración constituye el punto principal de este curso.

DEFINICIÓN 1 Sea f una función y $a \in \mathbb{R}$, decimos que f tiende al *límite* l cuando x tiende a a si los valores de $f(x)$ están muy cerca de los valores de l cuando x está muy cerca de a, $x \neq a$.

NOTACIÓN $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Decimos que f tiende al límite l cuando x tiende a a *por la derecha* si los valores de $f(x)$ están muy cerca de los valores de l cuando x está muy cerca de a, $x > a$.

NOTACIÓN $\lim_{x \to a+} f(x) = l$.

Decimos que f tiende al límite l cuando x tiende a a *por la izquierda* si los valores de $f(x)$ están muy cerca de los valores de l cuando x está muy cerca de a, $x < a$.

NOTACIÓN $\lim_{x \to a-} f(x) = l$.

NOTA 1 Tenemos que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y vale l si y sólo si

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = l.$$

TEOREMA 1 (1) $\lim_{x \to a} (c) = c$, (c constante),

(2) $\lim_{x \to a} x = a$,

(3) $\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} (f)(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$,

(4) $\lim_{x \to a} (cf)(x) = c \cdot \lim_{x \to a} (f)(x)$, ($c$ constante),

(5) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$, $n \in \mathbb{N}$,

(6) $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

TEOREMA 2 Supongamos que existe un intervalo abierto I tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I$ y que

$$\lim_{x \to a} g(x) = l.$$

Decimos que la función f tiende al *límite l cuando x tiende a infinito* si los valores de $f(x)$ están muy cerca de los valores de l cuando los valores de x son muy grandes.

NOTACIÓN $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$

Decimos que la función f tiende al *límite l cuando x tiende a menos infinito* si los valores de $f(x)$ están muy cerca de los valores de l cuando los valores de x son muy grandes en valor abosoluto y negativos.

NOTACIÓN $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l.$

Decimos que la función f tiende a *infinito* cuando x tiende a a si los valores de $f(x)$ son muy grandes cuando x está muy cerca de a, $x \neq a$.

NOTACIÓN $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$

Decimos que la función f tiende a *menos infinito* cuando x tiende a a si los valores de $f(x)$ son muy grandes en valor absoluto y negativos cuando x está muy cerca de a, $x \neq a$.

NOTACIÓN $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$

EJEMPLO 3 Algunos límites notables:

(1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

(2) $\lim_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ y $\lim_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty.$

(3) $e = \lim_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{v \to 0} (1 + v)^{1/v}.$

(4) Si $f(x) \to 1$ y $g(x) \to +\infty$, cuando $x \to a$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} [f(x) - 1] \cdot g(x)}.$$

TEOREMA 4 Supongamos que $f(x) \to k \neq 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$. Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \Lambda,$$

donde Λ está determinado así: (1) Si $k > 0$ y $g(x) \to 0$ con valores positivos, entonces $\Lambda = +\infty$,

(2) Si $k > 0$ y $g(x) \to 0$ con valores negativos, entonces $\Lambda = -\infty$,

(3) Si $k < 0$ y $g(x) \to 0$ con valores positivos, entonces $\Lambda = -\infty$,

(4) Si $k < 0$ y $g(x) \to 0$ con valores negativos, entonces $\Lambda = +\infty$.

DEFINICIÓN 2 Decimos que f es **continua** en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

o equivalentemente

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a).$$

Si f no es continua en a decimos que es **discontinua**.

TEOREMA 5 Supongamos que f y g son continuas en a. Entonces:
(1) $f + g$ es continua en a,
(2) $f \cdot g$ es continua en a.
(3) Además, si $g(a) \neq 0$, entonces $1/g$ es continua en a.

TEOREMA 6 Supongamos que g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.

TEOREMA 7 Supongamos que f es continua y que $\lim_{x \to a} g(x)$ existe, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

LEMA 8 (LEMA DE CONSERVACIÓN DEL SIGNO) Supongamos que f es continua en a y que $f(a) > 0$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in (a-\delta, a+\delta).$$

COROLARIO 9 Supongamos que f es continua en a y que $f(a) < 0$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in (a-\delta, a+\delta).$$

DEFINICIÓN 3 Decimos que f es continua en a *por la derecha* si

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a),$$

y que f es continua en a *por la izquierda* si

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a).$$

Decimos que f es **continua sobre el intervalo abierto** (a, b) si f es continua en todos los puntos de (a, b).

Decimos que f es **continua sobre el intervalo cerrado** $[a,b]$ si f es continua sobre (a,b), continua en a por la derecha y continua en b por la izquierda.

TEOREMA 10 (TEOREMA DE BOLZANO) Supongamos que f es continua sobre $[a,b]$, que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Entonces existe un $x \in (a,b)$ tal que

$$f(x) = 0.$$

COROLARIO 11 (TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS) Supongamos que f es continua sobre $[a,b]$, que $f(a) < c < f(b)$. Entonces existe un $x \in (a,b)$ tal que

$$f(x) = c.$$

TEOREMA 12 Supongamos que f es continua sobre $[a,b]$. Entonces existe un $y \in [a,b]$ tal que

$$f(y) \geq f(x) \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

COROLARIO 13 Supongamos que f es continua sobre $[a,b]$. Entonces existe un $y \in [a,b]$ tal que

$$f(y) \leq f(x) \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

PROBLEMAS

1 Calcular los siguientes límites.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$.

(2) $\displaystyle\lim_{y\to 5} \frac{y^2-5y+10}{y^2-25}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{x^2-(c+1)x+c}{x^3-c^3}$.

(6) $\displaystyle\lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{1-z}-\frac{3}{1-z^3}\right)$.

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

(8) $\displaystyle\lim_{y\to 64} \frac{\sqrt{y}-8}{\sqrt[3]{y}-4}$.

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

(10) $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t^2}-2\sqrt[3]{t}+1}{(t-1)^2}$.

(11) $\displaystyle\lim_{u\to 7} \frac{2-\sqrt{u-3}}{u^2-49}$.

(12) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 8} \frac{8-\alpha}{\sqrt[3]{\alpha}-2}$.

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$.

(14) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

2 Calcular.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$. *Indicación:* Este es muy fácil, el viejo artificio de multiplicar y dividir por el mismo número hará todo el trabajo.

(4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x}$.

(5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}$.

(6) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{\operatorname{sen} 3\pi x}$. *Indicación:* Este *no* es un caso particular del Problema 2(3).

(7) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

(8) $\lim_{x\to \alpha} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \alpha}{x-\alpha}$.

(9) $\lim_{x\to \alpha} \dfrac{\cos x - \cos \alpha}{x-\alpha}$.

(10) $\lim_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$.

(11) $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x}$.

(12) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

(13) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{1-\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\pi - x}$.

(14) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$.

(15) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$.

(16) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$. *Indicación:* Considere aplicar el “cambio de variable” $\alpha = \operatorname{arcsen} x$.

(17) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$. *Indicación:* Haga los artificios algebraicos necesarios para transformar el problema en dos, uno de los cuales será muy parecido al Problema 2(16).

(18) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$.

(19) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} 2x}{x + \operatorname{sen} 3x}$.

(20) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos \dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

(21) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

(22) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$.

(23) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 2x}{x + x^2}$.

(24) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$. *Indicación:* Este problema es muy fácil si se nota que $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

(25) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2-1)^3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)^3$.

3 Calcular los siguientes límites.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x^2+1}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{10^3x}{x^2-25}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$.

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n-4}{\sqrt{n^4+1}}$.

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt[3]{n}}$.

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$.

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

4 Calcular los siguientes límites.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{3-x}\right)^x$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)^{x+1}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.

(4) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\frac{y^2-2y+3}{y^2-3y+2}\right)^{\frac{\operatorname{sen} y}{y}}$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

(7) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

(8) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

(9) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

(10) $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$.

5 Calcular los siguientes límites.

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+10x)}{x}$.

(2) $\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$.

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.

(4) $\lim_{y\to 0}\dfrac{\cos y}{y^2}$.

(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

(6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $a>0$.

(7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

6 Calcular los siguientes límites laterales.

(1) $\lim_{x\to 0+}\dfrac{|x|}{x}$.

(2) $\lim_{x\to 0-}\dfrac{|x|}{x}$.

(3) $\lim_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x$, donde $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ -1, & \text{si } x<0.\end{cases}$

7 Calcular los siguientes límites.

(1) $\lim_{x\to 0+}\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $\lim_{x\to 0-}\dfrac{1}{x^2}$.

(3) $\lim_{x\to 1-}\dfrac{x}{1-x^3}$.

(4) $\lim_{x\to 0+}\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

(5) $\lim_{x\to 0+}\operatorname{tg} x$.

(6) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x+1}{\ln x}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x+1}{\ln x}$.

8 En cada uno de los siguientes casos calcular el límite (no haga muchas consideraciones sobre el valor de x)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

(1) $f(x) = c$ (constante).

(2) $f(x) = x$.

(3) $f(x) = x^2$.

(4) $f(x) = x^3$.

(5) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(6) $f(x) = \sqrt{x}$.

(7) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(8) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(9) $f(x) = \log x$.

(10) $f(x) = e^x$.

(11) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(12) $f(x) = \cos x$.

(13) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

9 Analizar la continuidad de las siguientes funciones.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

(2) $g(x) = \sqrt{x-1}$.

(3) $h(x) = \sqrt{1-x}$.

(4) $i(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

(5) $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

(6) $k(x) = |x|$.

(7) $\alpha(x) = \operatorname{tg} x$.

(8) $\beta(x) = \operatorname{sgn} x$.

(9) $\theta(x) = [x]$ (mayor entero).

CAPÍTULO 2 DERIVADAS

Existe una palabra que ha sido olvidada pero que es en realidad la mejor denominación para aquel flujo del tiempo detenido por Newton como un obturador: *Fluxiones* fue el nombre dado por Newton a lo que hoy solemos llamar (según Leibniz) el cálculo diferencial. Considerarlo meramente una técnica más avanzada sería perder su contenido real. En él, la matemática se convierte en una forma dinámica de pensamiento, lo cual constituye un gran paso mental en el ascenso del hombre.

JACOB BRONOWSKI

DEFINICIÓN 1 Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **derivable en** a, si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

El valor del límite se denomina la **derivada** de f y se denota por $f'(a)$.
Decimos que f es **derivable** si es derivable en cada punto de su dominio.
La **función derivada** de f, denotada por f' es aquella definida cuyo valor en x es $f'(x)$ en cada punto x donde f es derivable.

DEFINICIÓN 2 La **derivada de** f **en** a**, por la izquierda** $f'_-(a)$ y la **derivada de** f **en** a**, por la derecha** $f'_+(a)$ se definen por

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{y} \quad f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

f es derivable en a si y sólo si $f'_-(a) = f'_+(a)$.

DEFINICIÓN 3 Si f' es derivable en a, la **segunda derivada** de f en a es $f''(a) = (f')'(a) = f^{(2)}(a)$. En general:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f, \\ f^{(1)} &= f', \\ f^{(k+1)} &= (f^{(k)})'. \end{aligned}$$

NOTACIÓN DE LEIBNIZ La derivada f' se suele denotar por $\dfrac{df}{dx}$ y su valor en a, es decir $f'(a)$ se denota por

$$\frac{df}{dx}(a) \quad \text{o} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}.$$

Análogamente

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{d^2 f}{dx^2}, \\ f''' &= \frac{d^3 f}{dx^3}, \\ &\vdots \\ f^{(n)} &= \frac{d^n f}{dx^n}. \end{aligned}$$

TEOREMA 1 Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

NOTA 1 El recíproco del Teorema 1 no es cierto, por ejemplo considerar $f(x) = |x|$ con $a = 0$.

NOTA 2 Existe una función f que es continua sobre $\mathbb{R}$, pero no es derivable en ningún punto.

TEOREMA 2 (1) Si f es una función constante, $f(x) = c$, entonces

$$f'(a) = 0 \quad \text{para todo } a.$$

(2) Si f es la función identidad, $f(x) = x$, entonces

$$f'(a) = 1 \quad \text{para todo } a.$$

(3) Si $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(a) = na^{n-1} \quad \text{para todo } a.$$

TEOREMA 3 Supongamos que f y g son derivables en a. Entonces:
(1) $f \pm g$ es derivable en a y

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(2) $f \cdot g$ es derivable en a y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(3) Si cf (c constante) es derivable en a y

$$(cf)'(a) = cf'(a).$$

(4) Además, si $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

TEOREMA 4 (LA REGLA DE LA CADENA) Si g es derivable en a y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en a y

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

TEOREMA 5 (LA FÓRMULA DE LEBINIZ) Si $f^{(n)}(a)$ y $g^{(n)}(a)$ existen, entonces:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a) \cdot g^{(k)}(a).$$

TEOREMA 6 Si f es una función inyectiva continua definida sobre un intervalo, y derivable en $f^{-1}(b)$, con derivada $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en b, y

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

TABLA DE DERIVADAS Esta es la tabla básica de derivadas necesaria para resolver todos los problemas sugeridos en esta guía.

$f(x)$	$f'(x)$
c (constante)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x},\ x > 0$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$a^x \log a$
$\log x = \ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\dfrac{1}{x \log a}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$
$\csc x$	$-\csc x \operatorname{ctg} x$
$\sec x$	$\sec x \operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\csc^2 x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

PROBLEMAS

1 Si $f(x) = 3 + x - x^3$, calcular

(1) $f'(0)$.

(2) $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

(3) $f'(1)$.

(4) $f'(-1)$.

(5) $f'(\pi)$.

2 Dos funciones f y g tienen primera y segunda derivada en 0 y satisfacen las relaciones

$$f(0) = \frac{2}{g(0)}, \quad f'(0) = 2g'(0) = 4g(0), \quad g''(0) = 5f''(0) = 6f(0)-3.$$

(1) Si $h(x) = f(x)/g(x)$, calcular $h'(0)$.

(2) Si $k(x) = f(x)g(x)\operatorname{sen} x$, calcular $k'(0)$.

(3) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

3 En cada uno de los siguientes casos determinar la derivada $f'(x)$. En cada caso se sobreentiende que x toma los valores para los cuales $f(x)$ tiene sentido.

(1) $f(x) = \cos 2x - 2\operatorname{sen} x$.

(2) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

(3) $f(x) = (2-x^2)\cos x^2 + 2x\operatorname{sen} x^3$.

(4) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^3 x)\cdot\cos(\operatorname{sen}^2 x)$.

(5) $f(x) = \operatorname{sen}^n x\cdot\cos nx$.

(6) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$.

(7) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \sec\dfrac{x}{2}$.

(8) $f(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$.

(9) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

(10) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

(11) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$.

(12) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

4 Como ejercicio de entranamiento hallar $f'(x)$ para cada una de las funciones siguientes. [No preocuparse por el dominio de f ni f'; obténgase sólo una fórmula para $f'(x)$ que da la solución correcta cuando tiene sentido.]

(1) $f(x) = \operatorname{sen}(x+x^2)$.

(2) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x^2$.

(3) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$.

(4) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.

(5) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

(6) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{x}$.

(7) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$.

(8) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen} x))$.

5 Halar $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones f. El autor del libro de donde fue tomado este ejercicio afirma que para preparar la sección de soluciones tardó veinte minutos en resolverlo y que al estudiante no debería tomarle mucho más.

(1) $f(x) = \operatorname{sen}((x+1)^2(x+2))$.

(2) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 + \operatorname{sen} x)$.

(3) $f(x) = \operatorname{sen}^2((x + \operatorname{sen} x)^2)$.

(4) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$.

(5) $f(x) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)$.

(6) $f(x) = (\cos x)^{31^2}$.

(7) $f(x) = \operatorname{sen}^2 \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x^2$.

(8) $f(x) = \operatorname{sen}^3(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x))$.

(9) $f(x) = (x + \operatorname{sen}^5 x)^6$.

(10) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))))$.

(11) $f(x) = \operatorname{sen}((\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^7)$.

(12) $f(x) = (((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^5$.

(13) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen} x^2))$.

(14) $f(x) = \operatorname{sen}(6\cos(6\operatorname{sen}(6\cos 6x)))$.

(15) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$.

(16) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x + \operatorname{sen} x}}$.

(17) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$.

(18) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)}\right)$.

6 En cada uno de los siguientes casos y representa una función $y = f(x)$. Hallar $y' = f'(x)$.

(1) $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y = \arccos \sqrt{x}$.

(3) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

(4) $y = x^2 10^x$.

(5) $y = \operatorname{arcsen} e^x$.

(6) $y = \ln \arccos x$.

(7) $y = \ln(1 - x^2)$.

(8) $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$.

(9) $y = \operatorname{arcsen} x^2 - \arccos x^2$.

(10) $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

7 En cada uno de los siguientes casos hallar y'.

(1) $y = (\sqrt{x})^{\operatorname{sen} x}$.

(2) $y = \ln^x x$.

(3) $y = x^2 10^x$.

(4) $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

(5) $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$.

8 Demostrar que la función $y = xe^{-x}$ satisface la ecuación $xy' = (1 - x)y$.

9 Demostrar que la función $x(t) = \dfrac{1}{1 + t + \log t}$ satisface la ecuación $tx' = x(x \log t - 1)$.

10 Demostrar que la función $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ satisface la ecuación

$$x \frac{dy}{dx} = (1 - x^2)y.$$

11 Para cada una de las siguientes funciones f, hallar $f'(f(x))$ [*no* $(f \circ f)'(x)$].

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$.

(2) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(3) $f'(x) = x^2$.

(4) $f(x + 3) = 17$.

12 Para cada una de las siguientes funciones f, hallar $f(f'(x))$.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(2) $f(x) = x^2$.

(3) $f'(x) = 17$.

(4) $f(x+3) = 17x$.

13 Existe un polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $p(0) = p(1) = -2$, $p'(0) = -1$ y $p''(0) = 10$. Calcular a, b, c y d.

14 En los siguientes casos hallar una función g tal que $g' = f$.

(1) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$.

(2) $f(x) = \dfrac{b_2}{x^2} + \dfrac{b_3}{x^3} + \cdots + \dfrac{b_m}{x^m}$.

15 Supongamos que $f(x) = x^3$.

(1) ¿Cuál es el valor de $f'(9)$, $f'(25)$, $f'(36)$.

(2) ¿Cuál es el valor de $f'(3^2)$, $f'(5^2)$, $f'(6^2)$.

(3) ¿Cuál es el valor de $f'(a^2)$, $f'(x^2)$.

16 Hallar $f''(x)$

(1) $f(x) = x^3$.

(2) $f(x) = x^5$.

(3) $f'(x) = x^4$.

(4) $f(x+3) = x^5$.

17 En cada uno de los siguientes casos hallar $f'(x)$.

(1) $f(x) = (x+3)^5$.

(2) $f(x+3) = x^5$.

(3) $f(x+3) = (x+5)^7$.

18 Hallar $f'(x)$ si $f(x) = g(t+x)$ y si $f(t) = g(t+x)$. Las soluciones *no* son las mismas.

19 En cada uno de los siguientes casos, aplicar la fórmula de Leibniz para hallar la derivada indicada.

(1) $\alpha(x) = \operatorname{sen} x \cos(2x)$, hallar $\alpha^{(7)}(\pi)$.

(2) $\beta(x) = e^x \log x$, hallar $\beta^{(4)}(1)$.

(3) $\phi(x) = x^5\sqrt{x}$, hallar $\phi^{(5)}(4)$.

20 Hallar la derivada $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones $y = y(x)$. Hallar también $x'(y) - \dfrac{dx}{dy}$, donde $x = x(y)$.

(1) $2x - 5y + \pi = 0$.

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(3) $x^3 + y^3 = a^3$.

(4) $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$.

(5) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

(6) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

(7) $\operatorname{tg} y = xy$.

(8) $\operatorname{arctg}(x + y) = x$.

(9) $e^y = x + y$.

(10) $\log x + e^{-x/y} = k$.

(11) $x^y = y^x$.

(12) $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = \operatorname{sen}(x + y)$.

21 Escribir las siguientes igualdades utilizando la notación f' para df/dx.

(1) $\dfrac{d[f(x) + g(x)]}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{dg(x)}{dx}$.

(2) $\dfrac{d[cf(x)]}{dx} = c\dfrac{df(x)}{dx}$.

(3) $\dfrac{d[f(x) \cdot g(x)]}{dx} = \dfrac{df}{dx}\, g(x) + f(x)\, \dfrac{dg}{dx}$.

(4) $\dfrac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x$.

(5) $\left.\dfrac{d[\operatorname{sen} x]}{dx}\right|_{x=\pi} = -1$.

(6) $\dfrac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1}$.

(7) $\dfrac{d(t^n)}{dx} = 0$.

(8) $\dfrac{d(t^n + x^n)}{dx} = nx^{n-1}$.

(9) $\dfrac{d}{dy}(\log y) = \dfrac{1}{y}$.

(10) $\dfrac{d(e^x)}{dx}(0) = e^0$.

CAPÍTULO 3 APLICACIONES DE LA DERIVADA (PARTE 1)

La matemática del movimiento instantáneo fue inventada por dos mentes superiores de fines del siglo XVII: Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz. Actualmente nos resulta tan familiar, que consideramos el tiempo como un elemento natural en la descripción de la naturaleza; pero esto no siempre fue así. Fueron ellos low que aportaron el concepto de tangente, el concepto de aceleración, el concepto de pendiente, el concepto de infinetismal, de diferencial.

JACOB BRONOWSKI

APLICACIONES GEOMÉTRICAS: RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL

DEFINICIÓN 1 Si f es una función derivable en a, la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)$ es aquella que pasa por dicho punto y tiene pendiente $f'(a)$; por lo tanto su ecuación es

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

La **recta normal** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)$ es aquella que pasa por dicho punto y es perpendicular a la recta tangente, así, si $f'(a) \neq 0$, entonces la ecuación de la recta normal es

$$y = \frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

y si $f'(a) = 0$, entonces tenemos

$$y = a.$$

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS

DEFINICIÓN 2 Si f es una función con derivada de orden n en el punto $x = a$, el **polinomio de Taylor** $T_{f,n,a}$ de grado n, para f, centrado en a está dado por:

$$\begin{aligned} T_{f,n,a}(x)(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

El **resto** $R_{f,n,a}$ de orden n viene dado por la igualdad

$$R_{f,n,a}(x) = f(x) - T_{f,n,a}(x).$$

TEOREMA 1 Si f y g tienen derivada de orden n en a, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} T_{cf,n,a}(x) &= cT_{f,n,a}(x), \\ T_{f+g,n,a}(x) &= T_{f,n,a}(x) + T_{g,n,a}(x), \\ T'_{f,n,a}(-x) &= T_{f',n-1,a}(x). \end{aligned}$$

APLICACIONES FÍSICAS: MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS

Supongamos que una partícula se mueve en una trayectoria rectilínea y que su posición en un instante de tiempo t, con respecto a un sistema de referencia que se supone en reposo es $s(t)$. La **velocidad promedio** $\bar{v}$ de la partícula en el intervalo $[t, t+h]$ es

$$\bar{v} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h},$$

mientras que la **velocidad instantánea** v en t es

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Análogamente, la **aceleración** a de la partícula es

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

COEFICIENTES DE VARIACIÓN LIGADOS

Supongamos que $y = y(x)$ y $z = z(y)$, es decir $z(x) = z(y(x)) = z \circ y(x)$, entonces de acuerdo con la regla de la cadena tenemos:

$$z'(x) = z'(y(x)) \cdot y'(x).$$

Utilizando la notación de Leibniz tenemos

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad z'(v(x)) = z'(y) = \frac{dz}{dy} \quad \text{y} \quad z'(x) = \frac{dz}{dx},$$

por tanto la regla de la cadena se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Esta expresión es muy útil para el tratamiento de ciertos problemas donde geométricos y físicos donde se encuentran relacionadas las tasas de variación de algunas variables.

EJEMPLO 2 Supongamos que el radio r de un disco circular crece a razón de 3cm/seg, se desea determinar la tasa de variación del área del disco cuando $r = 2$cm. Tenemos que la tasa de variación del radio con respecto al tiempo $dr/dt =$ 3cm/seg y que el área A del círculo viene dada por $A = A(r) = \pi r^2$. Queremos hallar la tasa de variación dA/dt del área con respecto al tiempo. Aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot 3[\text{cm}^2/\text{seg}] = 6\pi r[\text{cm}^2/\text{seg}].$$

En particular, si $r = 2$ tenemos

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=2} = 12\pi\,\text{cm}^2/\text{seg}.$$

CURVAS PARAMETRIZADAS

DEFINICIÓN 3 Una **curva parametrizada** en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. En el contexto de este curso siempre consideramos $n = 2$ o $n = 3$; en el primer caso, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ decimos que representa una **curva plana** mientras que en el segundo $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ representa una **curva en el espacio**, y escribimos

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{y} \quad \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

respectivamente, para cada valor del *parámetro* $t \in [a, b]$.

DEFINICIÓN 4 Si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una curva plana con $t \in [a, b]$ y las funciones x e y son derivables, decimos que α es una **curva suave** en cuyo caso definimos $\alpha'(t) = d\alpha/dt$ por:

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = (x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right).$$

El *vector* $\alpha'(t)$ es denominado la **velocidad** de α en el instante t y su módulo $\|\alpha'(t)\|$ es conocido como la **rapidez**.
Si existen las derivadas $x''(t)$ e $y''(t)$, entonces al vector

$$\alpha''(t) = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = (x''(t), y''(t)) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

se le denomina la **aceleración** de α.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ son dos curvas planas suaves y $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$a\alpha = (a\alpha_1, a\alpha_2) \quad \text{y} \quad \alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$$

también son curvas planas y tenemos:

$$(a\alpha)'(t) = a\alpha'(t) \quad \text{y} \quad (\alpha + \beta)'(t) = \alpha'(t) + \beta'(t).$$

Consideraciones análogas pueden hacerse para curvas en el espacio.

Notemos además que si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e $y = y(x)$ tenemos

$$\alpha(t) = (x(t), y(x(t))).$$

Aplicando la regla de la cadena, como $y(t) = y \circ x(t)$ nos queda

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

es decir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

PROBLEMAS

1 Demostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar los puntos de tangencia. ¿Vuelve a cortar la curva esa tangente?

2 Si $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$, encontrar todos los puntos x en los que la pendiente tiene el valor

(1) 0.

(2) -1.

(3) 2.

3 Sea $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ para todo x. Hallar todos los puntos x para los cuales la gráfica de f en $(x, f(x))$ tiene pendiente cero.

4 Sea $f(x) = x^2 + ax + b$ para todo x. Hallar los valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 4)$.

5 Hallar valores de las constantes a, b y c para los cuales las gráficas de los dos polinomios $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ se corten en el punto $(1, 2)$ y tengan la misma tangente en dicho punto.

6 Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ en el punto $(-2, 5)$.

7 Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $(1, 0)$.

8 ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$.

9 En cada uno de los siguientes casos comprobar que el polinomio de Taylor de la función dada es el que se indica.

(1) $f(x) = e^x$, $T_{f,n,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

(2) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $T_{f,2n-1,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$.

(3) $f(x) = \cos x$, $T_{f,2n,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

(4) $f(x) = \log(1 + x)$, $T_{f,n,1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{k}}{k}$.

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $T_{f,n,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

(6) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $T_{f,n,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$.

10 La ley de movimiento de un punto sobre el eje horizontal es $x = 3t - t^2$ (x medido en centímetros y t en segundos). Hallar la velocidad del movimiento de dicho punto para los instantes

(1) $t_0 = 0$.

(2) $t_1 = 1$.

(3) $t_2 = 2$.

11 Sobre el eje horizontal se mueven dos puntos A y B, cuyas leyes de movimiento son, respectivamente:

$$x = 100 + 5t \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2}t^2,$$

donde $t \geq 0$. ¿Con qué velocidad se alejarán estos puntos, el uno del otro, en el momento de su encuentro (x está dado en centímetros y t en segundos)?.

12 La ley que describe el movimiento de una partícula, lanzada en el plano vertical xy, formando un ángulo α con el eje horizontal, con una velocidad inicial v_0, sometida solamente a la atracción gravitatoria (en particular, sin considerar la resistencia del aire) viene dada por las fórmulas:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \operatorname{sen}\alpha - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

donde t representa el tiempo y g es la acelereación de gravedad ($g = 9,8\text{m/seg}^2$ cerca de la superficie de la tierra). Hallar la trayectoria de la partícula, su alcance y el tiempo de vuelo. Determinar también el valor de la velocidad de la partícula en cualquier instante t.

13 Calcular la derivada $y' = dy/dx$ de las siguientes funciones y, dadas en forma paramétrica:

(1) $x = 2t - 1$, $y = t^3$.

(2) $x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$.

(3) $x = \dfrac{2at}{1+t^2}$, $y = \dfrac{a(1-t^2}{1+t^2}$, ($a$ constante).

(4) $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t$, $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t$, ($a$ constante).

(5) $x = a\cos^2 t$, $y = b\operatorname{sen}^2 t$, ($a$ y b constantes).

(6) $x = e^{-t}$, $y = e^{2t}$.

(7) $x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \operatorname{arcsen}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

(8) $x = a\left(\log \operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t - \operatorname{sen} t\right)$, $y = a(\operatorname{sen} t + \cos t)$, ($a$ constante).

14 En cada uno de los siguientes casos calcular la derivada $y' = dy/dx$ de las funciones y, dadas en forma paramétrica, en el valor indicado de t.

(1) $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t = \pi/2$, (a constante).

(2) $x = t \log t$, $y = \log t/t$, $t = 1$.

(3) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $t = \pi/4$.

15 Demostrar que la función y, dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$$

satisface la ecuación diferencial

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

16 Una partícula se mueve sobre la hipérbola $y = 100/x$ de tal forma que su abscisa x aumenta uniformemente con la velocidad de una unidad por segundo. ¿Con qué velocidad varía su ordenada, cuando la partícula pase por el punto $(5, 2)$?

17 ¿En qué punto de la parábola $y^2 = 18x$ la ordenada crece dos veces más de prisa que la abscisa?

18 Cada arista de un cubo se dilata a razón de 1 cm/seg. ¿Cuál es la razón de variación del volumen cuando la longitud de cada arista es 10 cm?

19 El radio de una esfera crece uniformemente con una velocidad de 2 cm/seg ¿A qué velocidad crecerán el área de la superficie de dicha esfera y su volumen, cuando el radio es 10 cm?

20 Uno de los lados de un rectángulo tiene medida constante $a = 10$cm, mientras que el otro, b, es variable y aumenta con una velocidad constante de 4 cm/seg. ¿A qué velocidad varían el perímetro, la diagonal y el área del rectángulo, en el instante en que $b = 25$cm?

21 Un avión se desplaza en vuelo horizontal a 10 Km de altura (en este problema se asume que la tierra es llana.) La ruta de vuelo pasa por encima de un punto A del suelo. La distancia entre el avión y A disminuye a razón de 5 Km/min en el instante en que esta distancia es 20 Km. Calcular la velocidad del avión en Km/hora.

22 Un barco navega paralelamente a una costa recta, a una velocidad de 30 Km/hora y a una distancia de 10 Km. ¿Cuál es la velocidad de aproximación a un faro que está ubicado en la costa en el momento en que la distancia entre ellos es 20 Km?

23 Un recipiente tiene forma de cono circular recto. La altura es 10 m y el radio de la base es 4 m. Se introduce agua en el recipiente a una velocidad constante de 5 m^3/min. ¿Con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del agua es 5 m?

(1) el vértice del cono está hacia arriba?

(2) el vértice del cono está hacia abajo?

24 El agua entra a un tanque hemisférico de 10 m de radio (la parte plana hacia arriba). En determinado instante, sea h la altura del agua medida desde el fondo, r el radio de la superficie libre del agua, y V el volumen del agua en el tanque. Calcular dV/dh en el momento en que $h = 5$ m. Si el agua entra a razón de $5\sqrt{3}m^3/seg$, calcular dr/dt, el coeficiente de variación de r en el instante t en que $h = 5$ m.

CAPÍTULO 4 APLICACIONES DE LA DERIVADA (PARTE 2)

Si alguna vez alguien le formula una pregunta de apariencia teórica sobre Cálculo y usted no sabe la respuesta, intente decir "Esto se deduce del Teorema del Valor Medio" y acertará el 90% del tiempo (el otro 10% del tiempo puede terminar luciendo bastante estúpido).

MICHAEL SPIVAK

DEFINICIÓN 1 Un **punto crítico** de una función f es un número c tal que

$$f'(c) = 0.$$

El número $f(c)$ se denomina **valor crítico**.

TEOREMA 1 Supongamos que f está definida sobre un intervalo (a, b). Si c es un punto máximo [mínimo] de f sobre (a, b) y f es derivable en x, entonces c es un punto crítico de f.

NOTA 1 Observemos que el recíproco del Teorema 1 no es cierto, por ejemplo consideremos la función definida por $f(x) = x^3$ sobre $(-1, 1)$. Evidentemente $f'(0) = 0$ pero 0 no es un punto máximo ni punto mínimo para f.

DEFINICIÓN 2 Sea A un conjunto contenido en el dominio de una función f. Decimos que un punto $a \in A$ es un **punto máximo [mínimo] relativo** de f sobre A si existe un $\delta > 0$ tal que a es un punto máximo [mínimo] f sobre $A \cap (a - \delta, a + \delta)$.
Un punto que sea máximo o mínimo (relativo) de f se denomina **extremo (relativo)** de f

TEOREMA 2 Si c es un punto máximo [mínimo] relativo de f y f es derivable en c, entonces c es un punto crítico de f.

TEOREMA 3 (TEOREMA DE ROLLE) Supongamos que f es continua sobre $[a, b]$, derivable sobre (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$.

TEOREMA 4 (TEOREMA DEL VALOR MEDIO) Si f es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b), entonces existe un

$x \in (a, b)$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

COROLARIO 5 Supongamos que f está definida sobre un intervalo y $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, entonces f es constante sobre el intervalo.

NOTA 2 Observemos que la hipótesis del Corolario 5 se refieren a un intervalo, de no ser así no se tiene el resultado. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = [x]$ definida sobre $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Claramente $f' = 0$ en el dominio de f, pero f no es constante.

COROLARIO 6 Supongamos que f y g están definidas sobre un intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe un número c tal que $f = g + c$ sobre el intervalo.

DEFINICIÓN 3 Decimos que una función f es **creciente** sobre un intervalo si $f(x) < f(y)$ para todos x e y del intervalo, con $x < y$.
Decimos que una función f es **decreciente** sobre un intervalo si $f(x) > f(y)$ para todos x e y del intervalo, con $x < y$.

COROLARIO 7 Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente sobre el intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es decreciente sobre el intervalo.

TEOREMA 8 Supongamos que $f'(a) = 0$. Si existe un intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ tal que

1. f es creciente sobre $(a-\delta, a)$ y decreciente sobre $(a, a+\delta)$, entonces a es un punto máximo relativo para f;

2. f es decreciente sobre $(a-\delta, a)$ y creciente sobre $(a, a+\delta)$, entonces a es un punto mínimo relativo para f.

TEOREMA 9 (CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA) Supongamos que $f'(a) = 0$. Si existe un intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ tal que

1. $f' > 0$ sobre $(a - \delta, a)$ y $f' < 0$ sobre $(a, a + \delta)$, entonces a es un punto máximo relativo para f;

2. $f' < 0$ sobre $(a - \delta, a)$ y $f' > 0$ sobre $(a, a + \delta)$, entonces a es un punto mínimo relativo para f.

TEOREMA 10 (CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA) Supongamos que $f'(a) = 0$.

1. Si $f''(a) > 0$, entonces a es un punto mínimo local para f;
2. Si $f''(a) < 0$, entonces a es un punto máximo local para f.

DEFINICIÓN 4 Una función f es **convexa** sobre un intervalo I si para todos $a, x, b \in I$, con $a < x < b$ se cumple

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Decimos que una función f es **cóncava** sobre un intervalo I si para todos $a, x, b \in I$, con $a < x < b$ se cumple

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si f es convexa (cńcava) en el intervalo $(a, b]$ y cóncava (convexa) sobre el intervalo $[b, c)$, decimos que c es un **punto de inflexión**.

NOTA 3 Geométricamente, si f es convexa (cóncava) sobre el intervalo I, tenemos que para todos $a, b \in I$, la cuerda que conecta los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ está por encima (debajo) de la gráfica de f.

NOTA 4 Si f es una función derivable y convexa (cóncava) sobre el intervalo I, entonces la recta tangente a f en cualquier punto de I se encuentra por debajo (encima) de la gráfica de f (excepto en el punto de tangencia).

TEOREMA 11 Supongamos que f es una función tal que f'' existe en un intervalo I.

1. Si $f'' > 0$ sobre I, entonces f es convexa sobre I;
2. Si $f'' < 0$ sobre I, entonces f es cóncava sobre I.

TEOREMA 12 (REGLA DE L'HÔPITAL) Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ y que $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ existe. Entonces $\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$ existe y

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

PROBLEMAS

1 En cada uno de los siguientes casos hacer el estudio de la función dada (determinar dominio, puntos críticos, extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, convexidad y concavidad) y hacer un bosquejo de la gráfica.

(1) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1.$

(2) $f(x) = x^5 + x + 1.$

(3) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2.$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}.$

(5) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}.$

(6) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}.$

(7) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}.$

(8) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}.$

(9) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}.$

(10) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}.$

2 Escribir un número cualquiera α como la suma de dos números m y n, de tal forma que el producto $m \cdot n$ sea el máximo posible.

3 Demostrar que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

4 Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el de menor perímetro es el cuadrado.

5 Un granjero tiene ℓ metros de alambre para cercar un terreno de pasto, de forma rectangular, adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones darán el área máxima al terreno cercado?

6 Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo V, hallar el de menor superficie (incluyendo las tapas).

7 Demostrar que la suma de un número positivo y su recíproco es por lo menos 2.

8 Hallar el trapecio de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo de radio r, con una de sus bases apoyada sobre el diámetro.

9 ¿Cómo debe doblarse un trozo de alambre de longitud ℓ, para formar un rectágulo cuya área sea la máxima posible?

10 Demostrar que entre todos los cuadrados inscritos en un cuadrado de lado ℓ, el de área mínima tiene lado de longitud $\frac{1}{2}\sqrt{2}\ell$.

11 Una ventana tiene forma de rectángulo terminado en un semicírculo cuyo diámetro es igual a la base del rectángulo. La porción rectangular ha de ser de cristal transparente y la parte circular ha de ser de cristales de color que admite sólo la mitad de l luz por metro cuadrado que el cristal transparente. El perímetro total de la ventana ha de tener una longitud fija P. Hallar, en función de P, las dimensiones de la ventana que dejar pasar la mayor cantidad posible de luz.

12 ¿Cúal de los cilindros de volumen dado tiene menor superficie total?

13 Inscribir en una esfera dada un cilindro de volumen máximo.

14 Inscribir en una esfera dada un cilindro que tenga la mayor superficie lateral posible.

15 Un recipiente abierto está formado por un cilindro, terminado en su parte inferior en una semiesfera (el espesor de sus paredes es constante). ¿Qué dimensiones deberá tener dicho recipiente para que, sin variar su capacidad, se gaste en hacerlo la menor cantidad de material?

CAPÍTULO 5 INTEGRALES

El origen del Cálculo integral se remonta a más de 2000 años, cuando los griegos intentaban resolver el problema del área ideando el procedimiento que llamaron *método de exhaución*... Este método fue usado satisfactoriamente por Arquímedes (287–212 A.C.) para hallar fórmulas exactas de las áreas del círculo y otras figuras especiales.
Desde Arquímedes, el desarrollo del método de exhaución tuvo que esperar casi 18 siglos, hasta que el uso de símbolos y técnicas algebraicas se hizo preciso...

TOM APOSTOL

DEFINICIÓN 1 Sea $a < b$. Una **partición** del intervalo $[a, b]$ es un subconjunto finito P de $[a, b]$, tal que $a, b \in P$.
Generalmente escribimos los elementos de P como una sucesión $t_0, t_1, \dots, t_n$ con

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

DEFINICIÓN 2 Si f una función acotada y positiva sobre $[a, b]$ y P una partición del intervalo. Para cada subintervalo tomamos $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y consideramos la suma

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1)(t_1 - t_0) + f(x_2)(t_2 - t_1) + \cdots + f(x_n)(t_n - t_{n-1}) \\ &= f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n \end{aligned}$$

o, con la "notación sigma"

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

Denotando por $\|P\|$ al mayor de los valores Δx_i, decimos que f es **integrable sobre** de $[a, b]$ si existe el límite

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_n$$

cuyo valor denominamos la **integral de** f **sobre** $[a, b]$ y lo denotamos por $\int_a^b f(x)\,dx$ o $\int_a^b f$, es decir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

EJEMPLO 1 Sea f la función identidad, es decir $f(x) = x$ sobre $[a, b]$. Entonces f es integrable y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

EJEMPLO 2 Sea f la función cuadrática sobre $[a, b]$, es decir $f(x) = x^2$. Entonces f es integrable y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

TEOREMA 3 Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

TEOREMA 4 Supongamos que $a < c < b$. Entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si f es integrable sobre $[a, c]$ y f es integrable sobre $[c, b]$. En cualquier caso se cumple

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

NOTA 1 Adoptamos los convenios $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ y, si $a < b$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

TEOREMA 5 Si f, g es integrable sobre $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

TEOREMA 6 Si f es integrable sobre $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces cf es integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

TEOREMA 7 Si f es integrable sobre $[a, b]$ y F, está definida sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

entonces F es continua sobre $[a, b]$.

TEOREMA 8 (PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO) Supongamos que f es integrable sobre $[a, b]$ y F, está definida sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y

$$F'(c) = f(c).$$

TEOREMA 9 (SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO) Supongamos que f es integrable sobre $[a, b]$ y g es una función tal que $F' = f$ sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Si F es una función tal que $F' = f$, decimos que F es una **primitiva**, o **antiderivada** o **integral (indefida)** de f y se denota por $\int f(x)\, dx$.

Finalmente tenemos el siguiente teorema que es muy útil para calcular de integrales.

TEOREMA 10 (FÓRMULA DE SUSTITUCIÓN) Si f y g' son continuas, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g',$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx.$$

PROBLEMAS

1 Definir $\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$. Usar las propiedades elementales de la integral para calcular las siguientes en función de π.

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx.$

2 Demostrar que si f es integrable sobre $[0,a]$, entonces

(a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$ si f es una función par.

(b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$ si f es una función impar.

3 Una función s definida sobre $[a,b]$ se denomina **función escalonada** si existe una $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$ tal que $s = s_i$ es constante sobre cada subintervalo (t_{i-1}, t_i). En este caso, la definición de integral coincide con la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} s_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= s_1(t_1-t_0) + s_2(t_2-t_1) + \cdot + s_n(t_n - t_{n-1}).\end{aligned}$$

Entonces tenemos que si s y r son funciones escalonadas sobre $[a,b]$, entonces $s+r$ también es una función escalonada. Sin utilizar el Teorema 5, demostrar que

$$\int_a^b (s+r) = \int_a^b s + \int_a^b r.$$

4 Calcular el valor de cada una de las integrales siguientes. Recuerde que $[x]$ denota la parte entera de x.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} [x]\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} [x+\tfrac{1}{2}]\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{3} ([x]+[x+\tfrac{1}{2}])\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2[x]\,dx.$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{3} [2x]\, dx.$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^{3} [-x]\, dx.$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{9} [\sqrt{x}]\, dx.$

5 Suponiendo que f y $|f|$ son integrables sobre $[a,b]$, demostrar que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Mostrar mediante un ejemplo que no siempre se cumple la igualdad.

6 Utilizar la fórmula de sustitución para demostrar que si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)x)\, dx.$$

7 Hallar

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x) g(y)\, dy \right) dx$$

en términos de $\displaystyle\int_a^b f$ e $\displaystyle\int_c^d g$. *Indicación:* detectar una cierta constante en un contexto determinado.

8 Hallar la derivada F' de las siguientes funciones.

(a) $\displaystyle F(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\, dt.$

(b) $\displaystyle F(x) = \int_3^{\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\, dt\right)} \frac{1}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^6 t}\, dt$

(c) $\displaystyle F(x) = \int_{15}^{x} \left(\int_8^y \frac{1}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt \right) dy.$

(d) $\displaystyle F(x) = \int_x^b \frac{1}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$

(e) $\displaystyle F(x) = \int_a^b \frac{x}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$

9 Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \displaystyle\int_0^x x f(t)\, dt$. [La solución *no* es $x f(x)$; se debe practicar una manipulación evidente con la integral antes de tratar de hallar F'].

10 Supongamos que f es continua.

(a) Demostrar que si ϕ es derivable y

$$F(x) = \int_a^{\phi(x)} f(t)\,dt,$$

entonces

$$F'(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x).$$

(b) Demostrar que si ϕ y ψ son derivables y

$$F(x) = \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(t)\,dt,$$

entonces

$$F'(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) - f(\psi(x)) \cdot \psi'(x).$$

CAPÍTULO 6 ANTIDERIVADAS

Unas cuantas palabras deberían también decirse en defensa del proceso de integración en términos elementales, el cual es considerado por muchos matemáticos como un arte (mientras que el de derivación es solamente destreza)...

MICHAEL SPIVAK

Si F es una función tal que $F' = f$, decimos que F es una **primitiva**, o **antiderivada** o **integral (indefinida)** de f y se denota por $\int f(x)\,dx$.
En base a nuestra tabla de derivadas, tenemos la siguiente tabla de integrales:

$$\int a\,dx = ax$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = \cos x$$

$$\int \cos x\,dx = -\operatorname{sen} x$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x$$

Además tenemos las siguientes fórmulas

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$$
$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

SUSTITUCIÓN SENCILLA Sean f y g dos funciones, entonces

$$\int f(u)\,du = \int f(g(x))g'(x)\,dx.$$

INTEGRACIÓN POR PARTES Sean f y g dos funciones, entonces

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Escribiendo $u = f(x)$, $du = f'(x)\,dx$, $v = g(x)$ y $dv = g'(x)\,dx$, la fórmula anterior se expresa de la siguiente forma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN Aplicando el método de integración por partes obtenemos las siguientes igualdades

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx,$$
$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx,$$
$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx.$$

SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA Se aplica en algunos cuando el integrando involucra una expresión de tipo $f(x) = R(a^2 \pm x^2)$. Por ejemplo, si se tiene una integral del tipo

$$\int R(a^2 - x^2)\,dx,$$

Se aplica el cambio $x = a\operatorname{sen}\theta$, $dx = a\cos\theta$ y entonces escribimos

$$\int R(a^2 - x^2)\,dx = a\int R(\theta)\cos\theta\,d\theta.$$

En el caso en que el integrando sea una expresión $f(x) = R(a^2 + x^2)$, se aplica el cambio $x = a \operatorname{tg} \theta$, $dx = a \sec^2 \theta$ y entonces nos queda

$$\int R(a^2 + x^2)\, dx = a \int R(\theta) \sec^2 \theta \, d\theta.$$

FUNCIONES RACIONALES Éste no es realmente un método de integración, sino un procedimiento para expresar de forma simple cierto tipo de funciones. Una **función racional** f es aquella de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P y Q son dos polinomios

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

con $a_n, b_m \neq 0$. Si $n < m$ decimos que f es una *función racional propia* y en caso contrario que es *impropia*.

Si f es una función racional propia, el procedimiento consiste en factorizar el polinomio Q de la forma

$$Q(x) = (x - r_1)^{k_1} \cdots (x - r_j)^{k_j} \cdot (x^2 + p_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_i)^{l_i}$$

donde los factores cuadráticos son irreducibles. Entonces f se escribe como una una suma de fracciones de tal manera que al factor $(x - r_1)^{k_1}$ corresponde

$$\frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{(x - r_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x - r_1)^{k_1}}$$

y así sucesivamente; similarmente, al factor $(x^2 + p_1)^{l_1}$ corresponde

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + p_1)^2} + \cdots + \frac{B_{l_1} x + C_{l_1}}{(x^2 + p_1)^{l_1}},$$

donde los coeficientes A, B y C deben ser determinados.

Si f es una funcón racional impropia procedemos a desarrollar la división P/Q, obteniendo el cociente $K(x)$ y el residuo $R(x)$, así

$$P(x) = C(x) + Q(x) R(x),$$

lo cual es equivalente a la expresión conocida como *algoritmo de la división de Euclides*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{K(x)}{Q(x)} + R(x),$$

donde K/Q es una función racional propia.

PROBLEMAS

1 En cada uno de los siguientes casos calcular la integral indicada (todos deben ser extremadamente fáciles).

(1) $\displaystyle\int (5x^3 + 1)\, dx.$

(2) $\displaystyle\int (4x^4 - 12x)\, dx.$

(3) $\displaystyle\int (x+1)(x^3-2)\, dx.$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^4 + x - 3}{x^3}\, dx.$

(5) $\displaystyle\int (1+\sqrt{x})^2\, dx.$

(6) $\displaystyle\int \sqrt{2x} + \sqrt{\tfrac{1}{2}x}\, dx.$

(7) $\displaystyle\int \frac{5x^{1/3} + x}{x^2}\, dx.$

(8) $\displaystyle\int \left(x^{4/3} - 5\cos x\right)\, dx.$

(9) $\displaystyle\int x^{1+\pi}\, dx.$

(10) $\displaystyle\int \cos^{13^2} y\, dx.$

2 Este problema contiene algunas integrales que requieren algo más que simples manipulaciones algebraicas y, en consecuencia, ponen a prueba su habilidad para descubrir artificios algebraicos, más que su comprensión del proceso de integración.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{e^{4x}}\, dx.$

(4) $\displaystyle\int \frac{a^x}{b^x}\, dx.$

(5) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx.$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2}.$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{2x - x^2}\, dx.$

(9) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x + \pi)\, dx.$

(10) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\, dx.$

3 Las siguientes integraciones involucran sustituciones simples, la mayor parte de las cuales usted debería poder desarrollar mentalmente.

(1) $\displaystyle\int e^x \cos e^x\, dx.$

(2) $\displaystyle\int x e^{-x^2}\, dx.$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\, dx.$

(4) $\displaystyle\int e^{e^x} e^x\, dx.$

(5) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}\, dx.$

(6) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$

(7) $\displaystyle\int \log(\cos x) \operatorname{tg} x\, dx.$

(8) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x \log x}\, dx.$

(9) $\displaystyle\int \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\cos x}\, dx.$

(10) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x e^{\cos x}\, dx.$

4 Integración por partes.

(1) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx.$

(2) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\, dx.$

(3) $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx.$

(4) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx.$

(5) $\displaystyle\int \log^3 x\, dx.$

(6) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x}\, dx.$

(7) $\displaystyle\int \sec^3 x\, dx.$

(8) $\displaystyle\int x\log^2 x\,dx.$

(9) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx.$

(10) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx.$

5 Integración por partes (¡Bono extra!).

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx.$

(2) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

(3) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx.$

(4) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx.$

(5) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx.$

(6) $\displaystyle\int x^3\log x\,dx.$

(7) $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx.$

(8) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx.$

(9) $\displaystyle\int x\operatorname{arcsen} x\,dx.$

(10) $\displaystyle\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

6 Hallar las siguientes integrales.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Indicación:* considere $x=\operatorname{sen}\alpha$.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. *Indicación:* considere $x=2\operatorname{sen}\alpha$.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. *Indicación:* considere $x=\operatorname{tg}\alpha$.

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

(9) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

(10) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$.

7 Hallar las siguientes integrales.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)}$.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^3}$.

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-2)^2}$.

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

(8) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}\,dx$.

(9) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$.

(10) $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$.

8 Miscelánea (sin restricciones). Este problema contiene ejercicios que se resuelven con técnicas variadas y proporcionan práctica adicional (para quien la necesite y pueda soportar). [Spivak, p. 530].

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$.

(2) $\displaystyle\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1}\,dx$.

(3) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

(4) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

(5) $\displaystyle\int \cos(\log x)\,dx$.

(6) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx$.

(7) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

(8) $\displaystyle\int \frac{\log^2 x}{x^2}\,dx.$

(9) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

(10) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} 3x\,dx.$

(11) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}^2 x\,dx.$

(12) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\,dx.$

(13) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx.$

(14) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$

(15) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx.$

(16) $\displaystyle\int \sec^3 x \operatorname{tg} x\,dx.$

(17) $\displaystyle\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

(18) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$

(19) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{x+1}\,dx.$

(20) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\sqrt{x}\,dx.$

9 Expresar $\displaystyle\int \log(\log x)\,dx$ en términos de $\displaystyle\int (\log x)^{-1}\,dx.$

10 Expresar $\displaystyle\int x^2 e^{-x^2}\,dx$ en términos de $\displaystyle\int e^{-x^2}\,dx.$

CAPÍTULO 7

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Mediante el cálculo de las áreas de polígonos, este método ("el método exhaustivo") permite el cálculo de π con tanta aproximación como se desee; Arquímedes lo utilizó para demostrar que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \ldots$

MICHAEL SPIVAK

CÁLCULO DE ÁREAS

Si f es una función continua, no negativa sobre $[a, b]$ tenemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$

representa el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, el eje horizontal, y las rectas $x = a$ y $x = b$.
Si f es una función continua, negativa sobre $[a, b]$ tenemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A,$$

donde A es el área de la región del plano limitada por la gráfica de $|f|$, el eje horizontal, y las rectas $x = a$ y $x = b$. En este caso suele decirse que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es el "área con signo" de la región original.
Supongamos f es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$, que f es no negativa en $[a, c], [d, b] \subset [a, b]$ y que f es negativa en $[c, d]$. Entonces el área A de la religión limitada por la gráfica de f, el eje horizontal, y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx.$$

Si f y g son dos funciones continuas sobre $[a, b]$, tales que $f \geq g$, entonces el área A de la región del plano limitada por la gráfica de f, la gráfica de g, y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN: EL MÉTODO DE LOS DISCOS

Si f es una función continua, no negativa sobre $[a, b]$, se denomina **sólido de revolución** a la figura geométrica que se genera al girar la gráfica de f alrededor del eje y. El **volumen** V de dicha figura está dado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN: EL MÉTODO DE LAS CONCHAS

Si f es una función continua, no negativa sobre $[a, b]$, $a > 0$, y consideramos la figura que se genera al girar la gráfica de f alrededor del eje y tenemos que el **volumen** V de dicha figura está dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Si f es una función continua, no negativa sobre $[a, b]$, consideremos la superficie generada por la gráfica de f cuando ésta gira alrededor del eje x. El área de esta superficie está dada por

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

LONGITUD DE ARCO

Si f es una función continua sobre $[a, b]$, tenemos que la **longitud** L de la gráfica de f es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

APLICACIONES FÍSICAS: TRABAJO MECÁNICO

Si una partícula se desplaza sobre un segmento de línea recta $[a, b]$ bajo la acción de una fuerza f paralela a dicho segmento, orientada en el mismo sentido del desplazamiento y con valor $f(x)$ en cada punto $x \in [a, b]$, tenemos que el **trabajo mecánico** W, realizado por dicha fuerza está dado por:

$$W = \int_a^b f(x)\, dx.$$

PROBLEMAS

1 En cada uno de los siguientes casos hallar la longitud del arco determinado por la gráfica de la indicada.

(a) $f(x) = x$, $x \in [1, 2]$.
(b) $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$.
(c) $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$.

2 Demostrar que la longitud de una circunferencia de radio R es $2\pi R$.

3 Demostrar que el área de un círculo de radio R es πR^2.

4 Hallar el área de la región limitada por el eje x y la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ sobre $[0, \pi]$.

5 Hallar el área de la región limitada por el eje x y la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ sobre $[0, \pi]$.

6 Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ sobre $[0, \pi/2]$.

7 Hallar el volumen de una esfera de radio R.

8 (a) Hallar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x el área delimitada por las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.
(b) Hallar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la misma región alrededor del eje y.

9 Hallar el volumen del "toro" que se obtiene al hacer girar la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ $(a > r)$ alrededor del eje y.

10 Hallar el volumen del "elipsoide de revolución" que se produce al girar la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ alrededor del eje x.

11 Se abre un agujero cilíndrico de radio a, a través del centro de una esfera de radio $2a$. Hallar el volumen del sólido restante.

12 (a) Demostrar que el área de una esfera de radio R es $4\pi R^2$.
(b) Considerar la porción de superficie de una semiesfera de radio R, que resulta de quitar de ésta un casquete de altura h. Demostrar que el área de la porción indicada es $2\pi R(R - h)$.

13 (a) Hallar el área del toro del Problema 3.
(b) Hallar el área del elipsoide del Problema 4.

14 Una partícula de masa $m = 1$Kg colocada al extremo de un resorte fijo a una pared se mueve sobre un plano horizontal (sin roce). Calcular el trabajo mecánico realizado por el resorte cuando la partícula se desplaza desde 1cm a 5cm de la posición de equilibrio. *Indicación:* aplicar la Ley de Hooke.