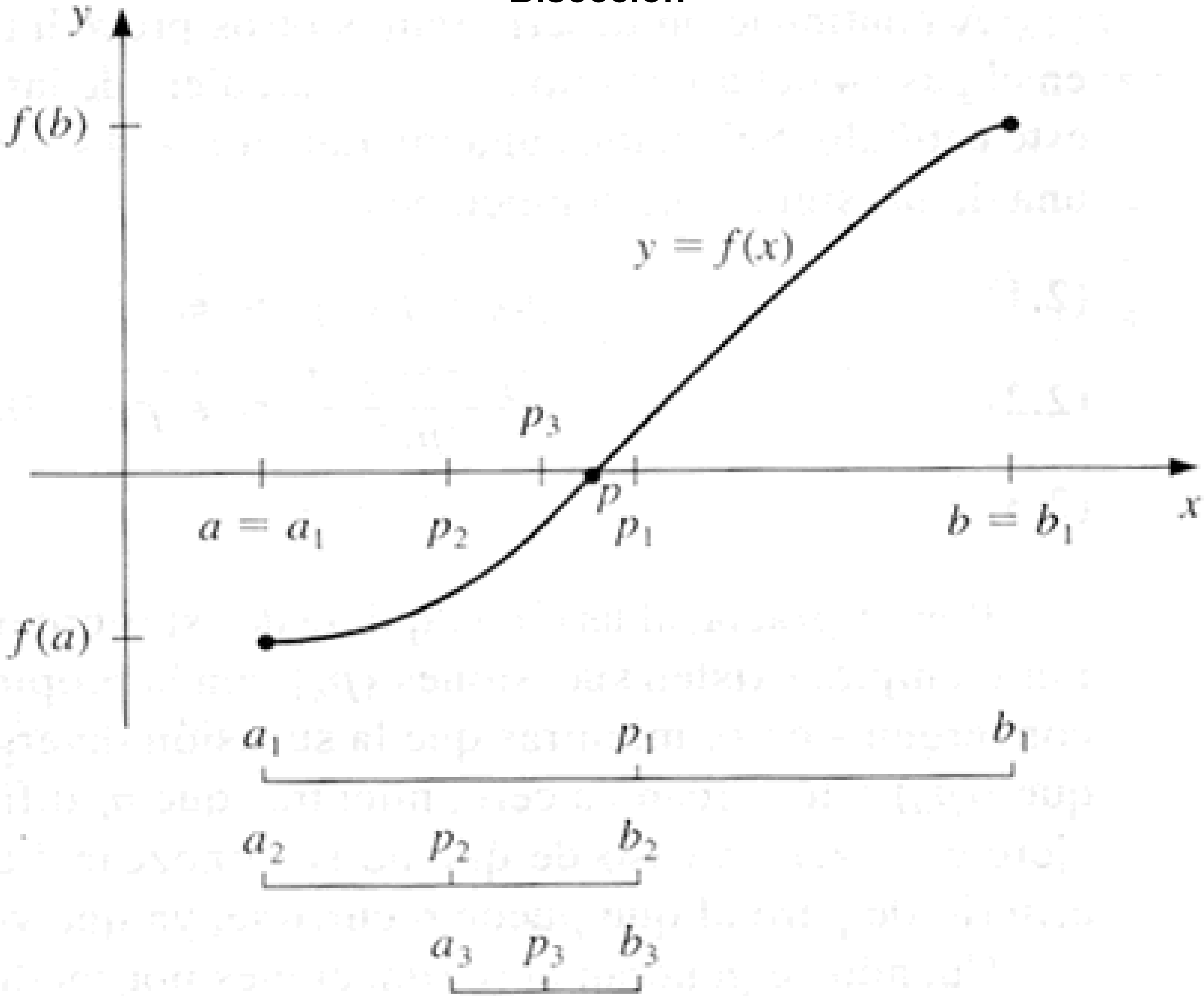
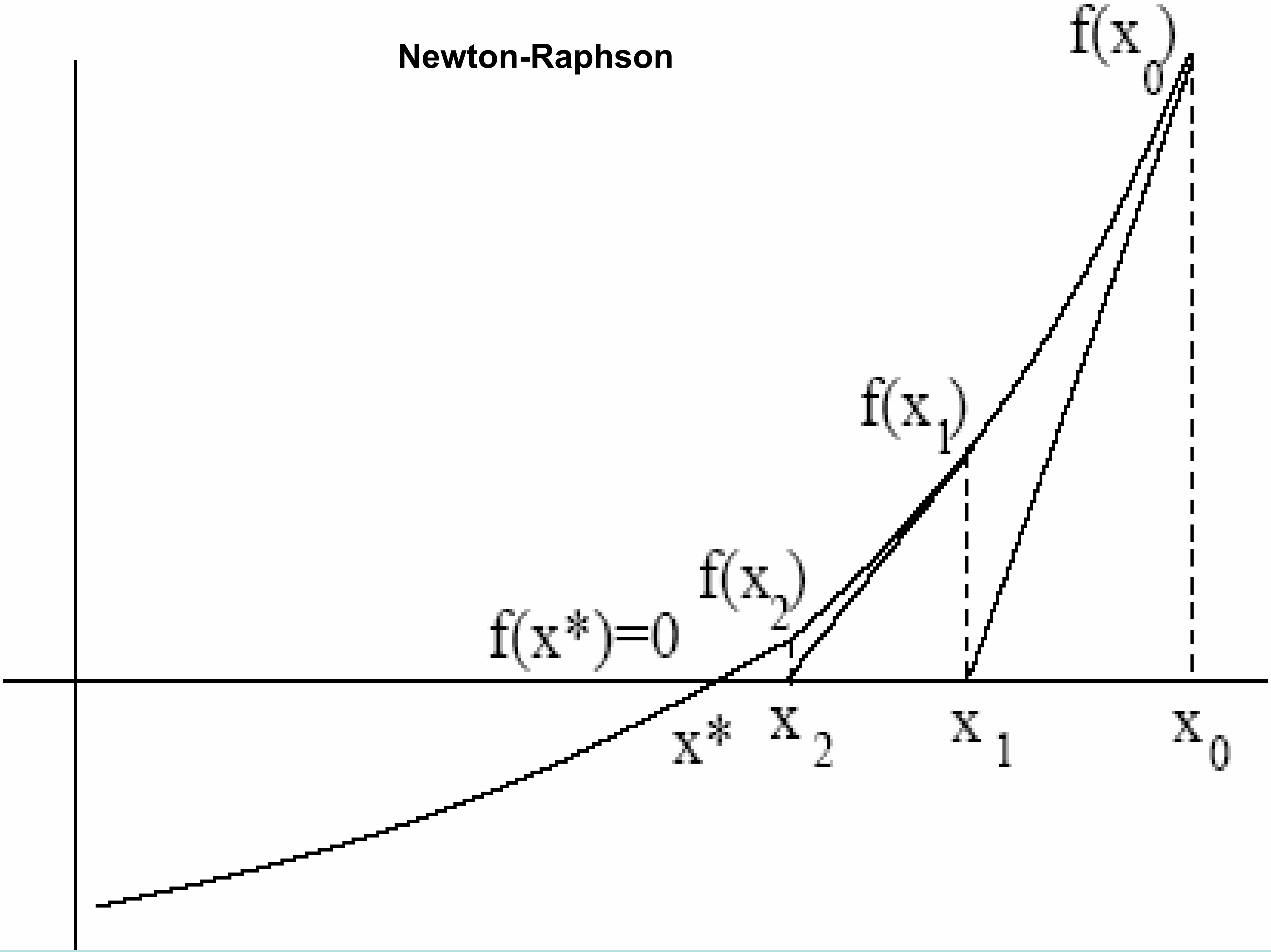
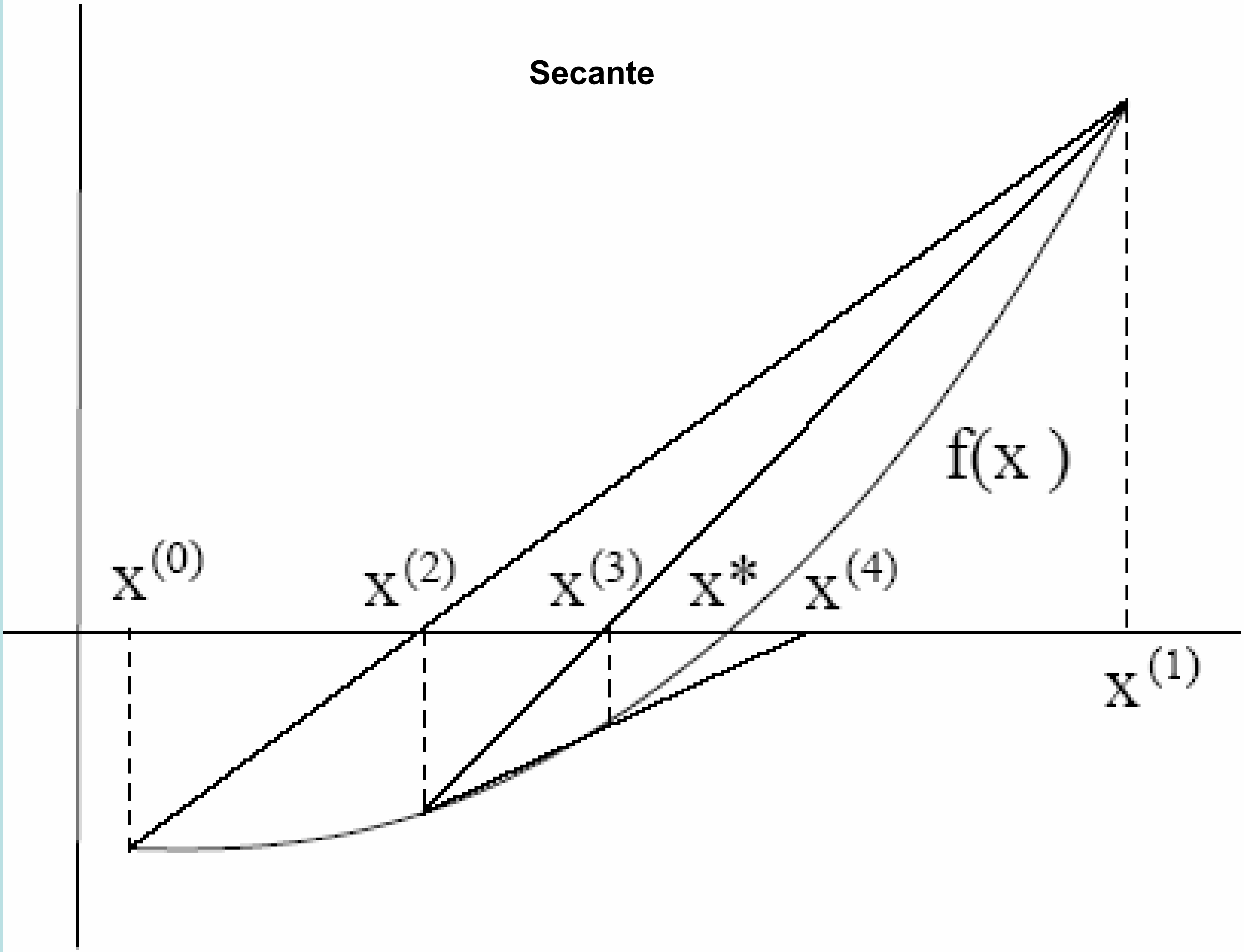
Bisección

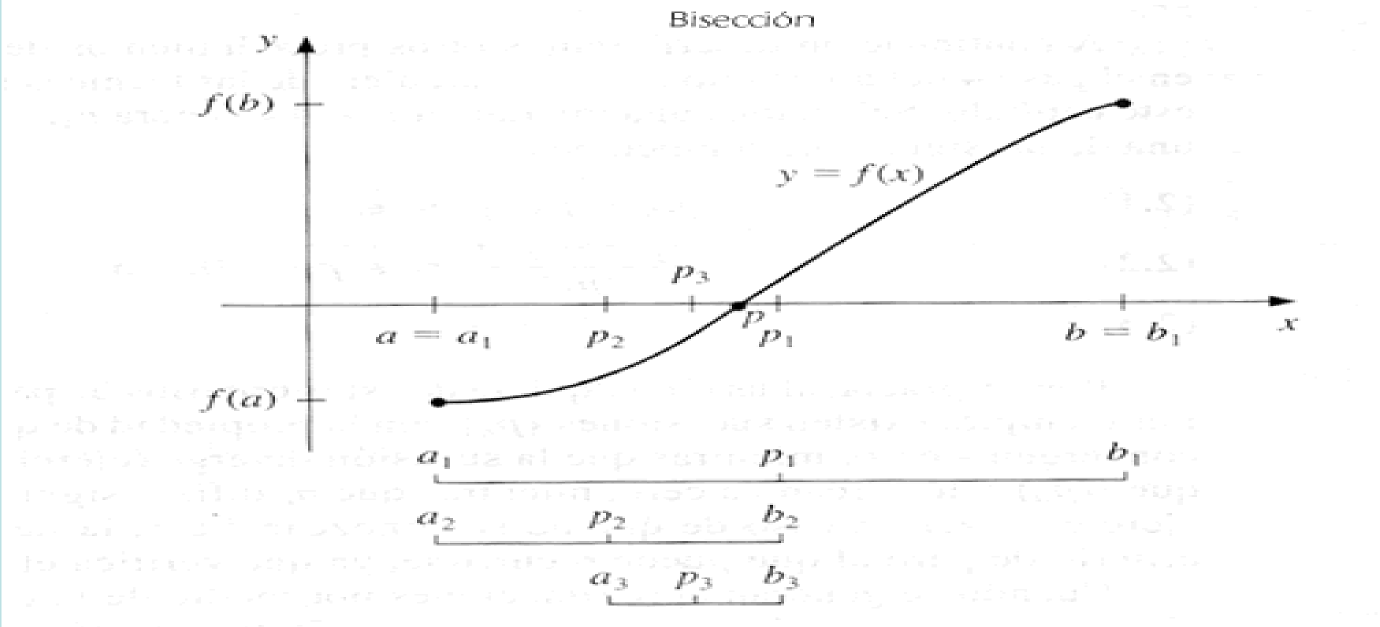


Newton-Raphson

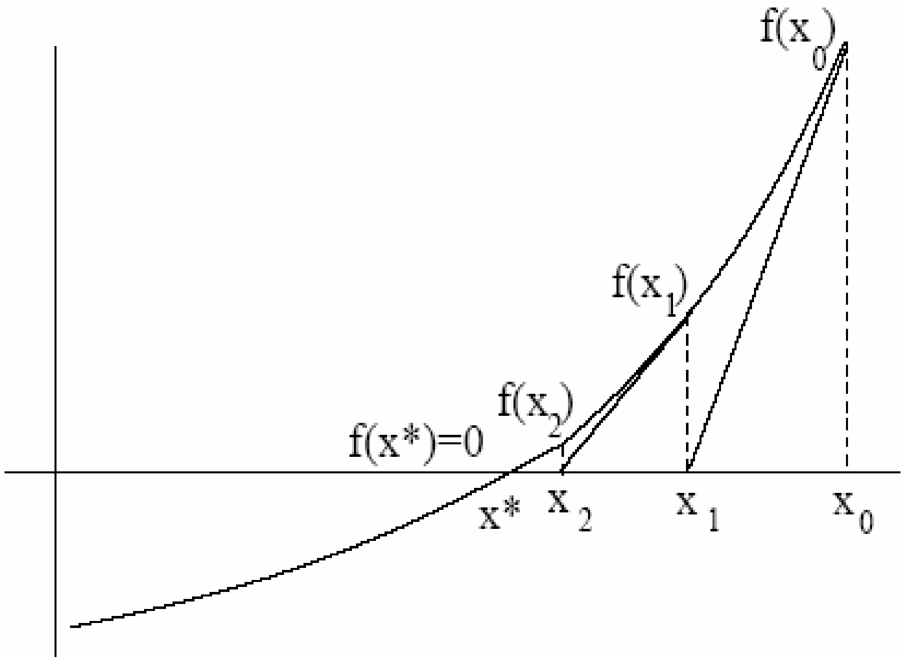


Secante

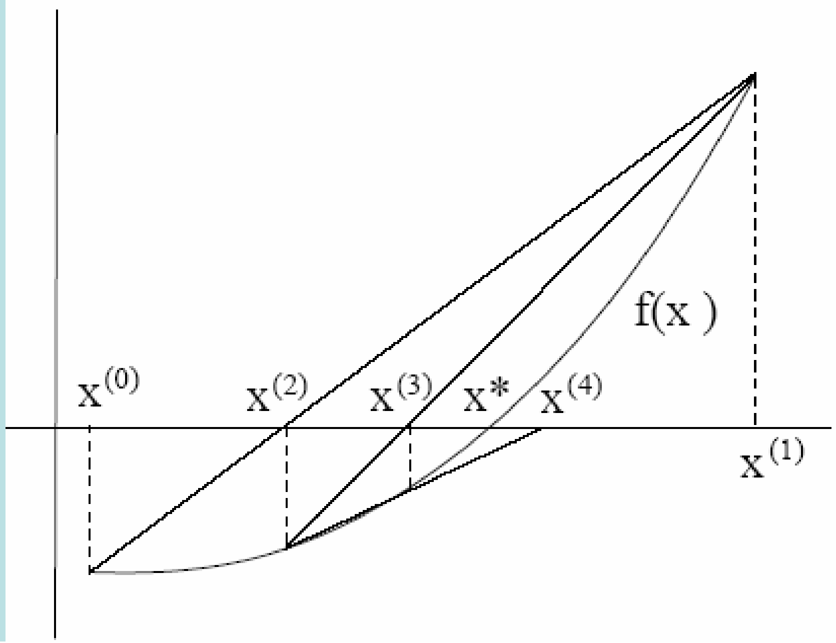




Bisección
y
f(b)
y = f(x)
p₃
a = a₁
p₂
p
p₁
b = b₁
x
f(a)
a₁
p₁
b₁
a₂
p₂
b₂
a₃
p₃
b₃



f(x0)
f(x1)
f(x2)
f(x*)=0
x*
x 2
x 1
x 0



f(x)
x(0)
x(2)
x(3)
x*
x(4)
x(1)

UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA

DECANATO DE POSTGRADO

Maestría en Matemática

Mención Educación Matemática

- Material digital para la Asignatura:

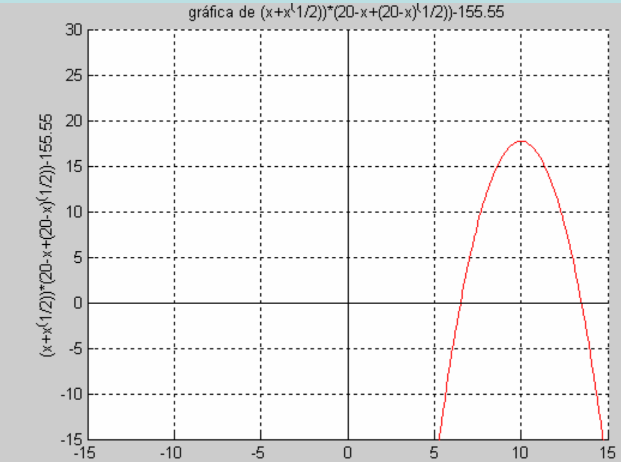
MÉTODOS NUMÉRICOS

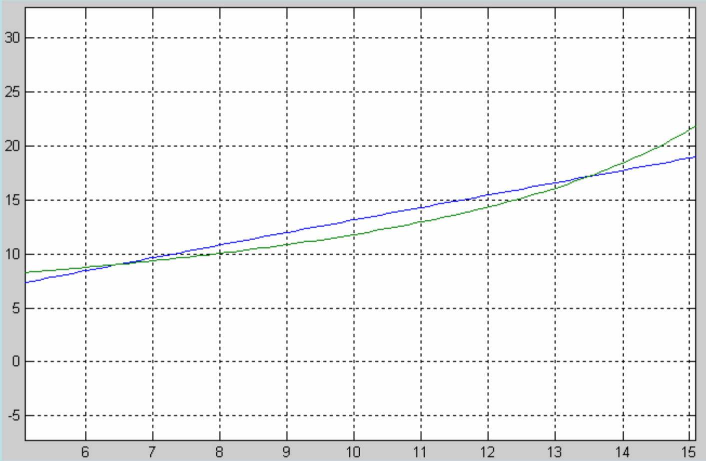
Preparado por: Miguel Vera

San Cristóbal, Marzo de 2005

- REDES CONCEPTUALES PREVIAS
  - Manejar adecuadamente las DEFINICIONES de:
    - LÍMITE, CONTINUIDAD Y DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES.
    - SUCESIONES CONVERGENTES Y DIVERGENTES.
    - INTEGRAL DE RIEMANN.
    - SERIES DE TAYLOR Y DE MaCLAURIN.
    - TEORÍA DE ERRORES Y TÉCNICAS DE REDONDEO.
  - Ejemplificar los siguientes TEOREMAS:
    - EL QUE RELACIONA LA DIFERENCIABILIDAD Y LA CONTINUIDAD
    - DE ROLLE
    - DEL VALOR MEDIO
    - DEL VALOR INTERMEDIO

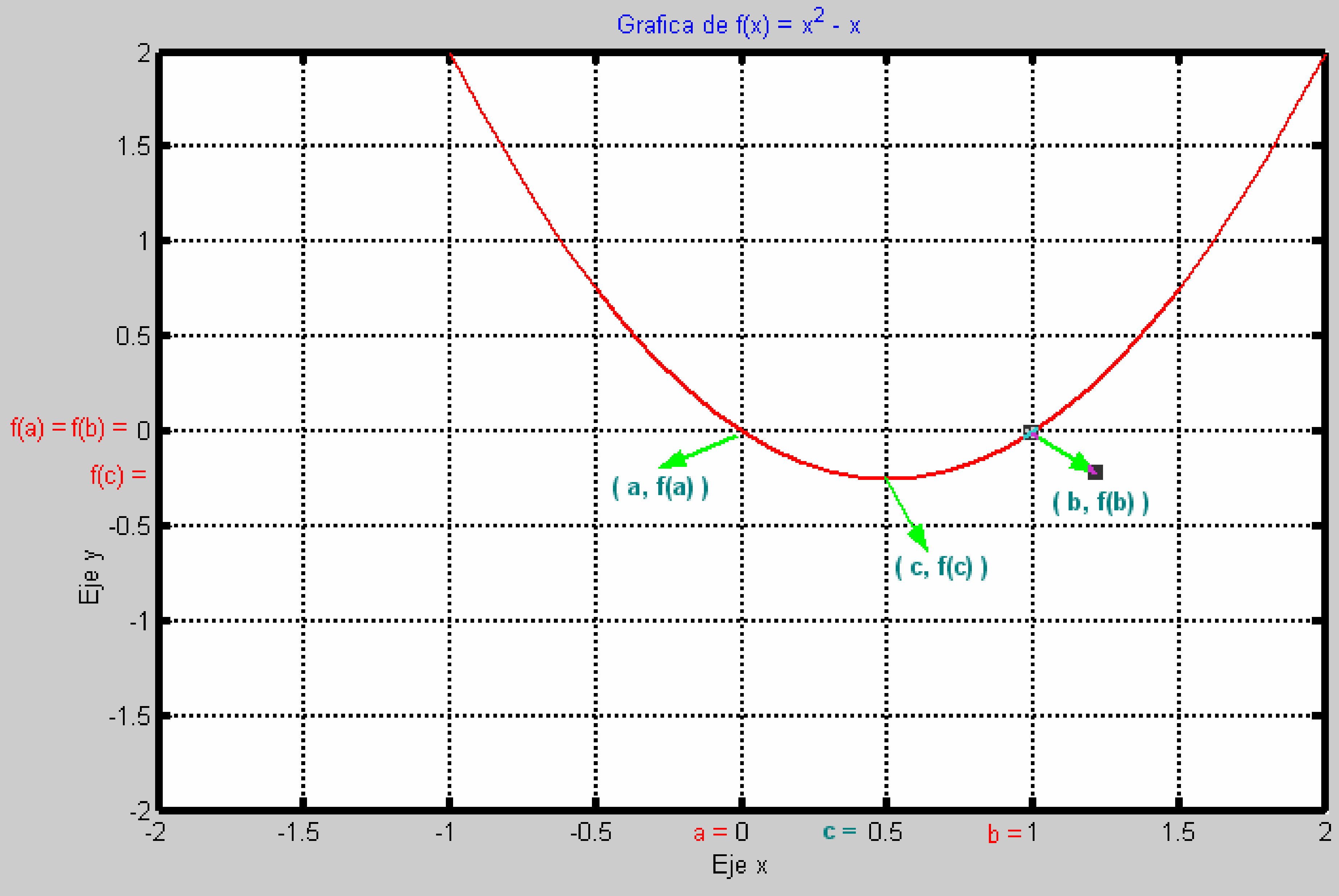
- Preliminares
    - » ¿¿??





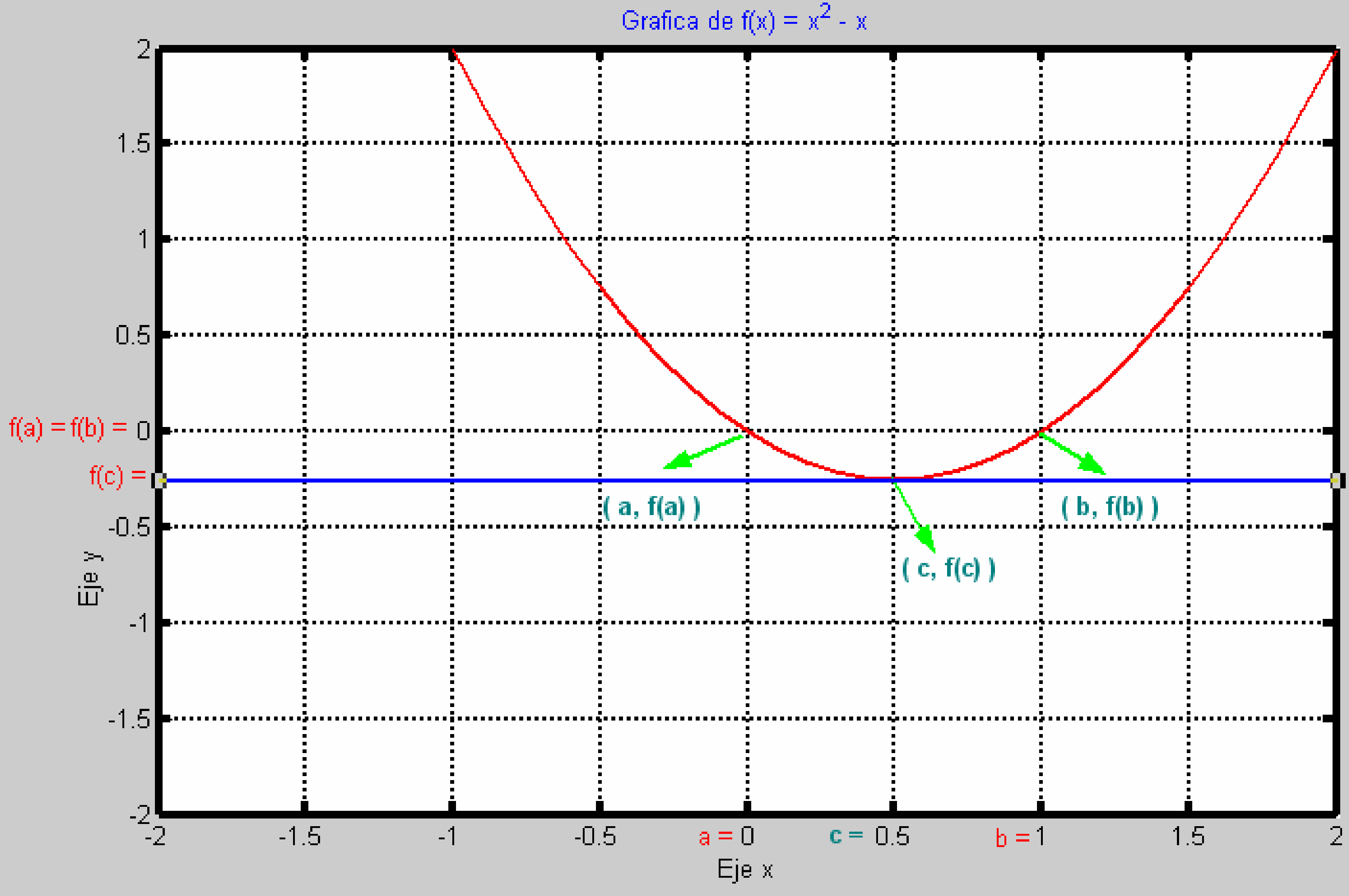
• Preliminares

» Teorema de ROLLE



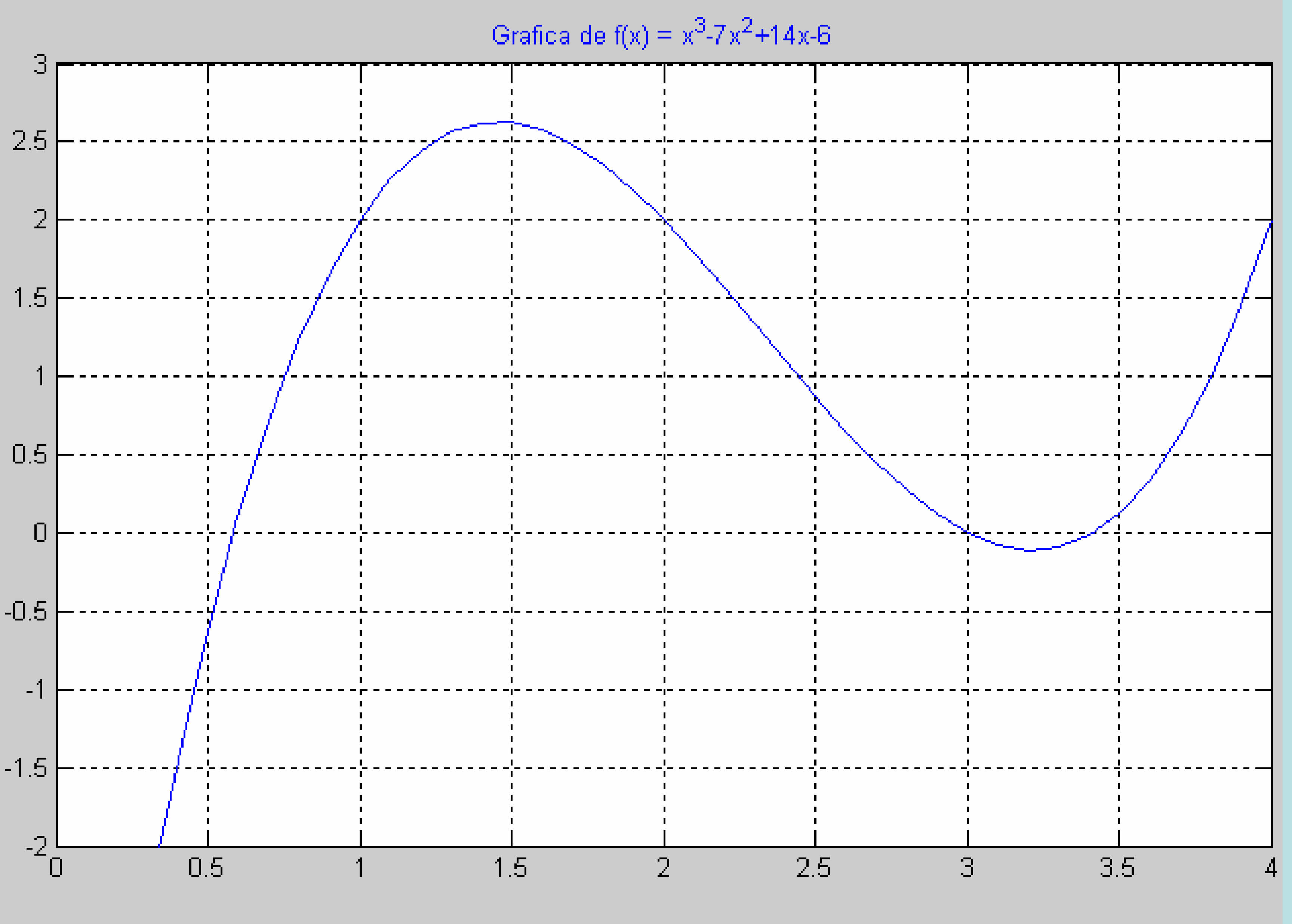
• Preliminares

» **Teorema de ROLLE**



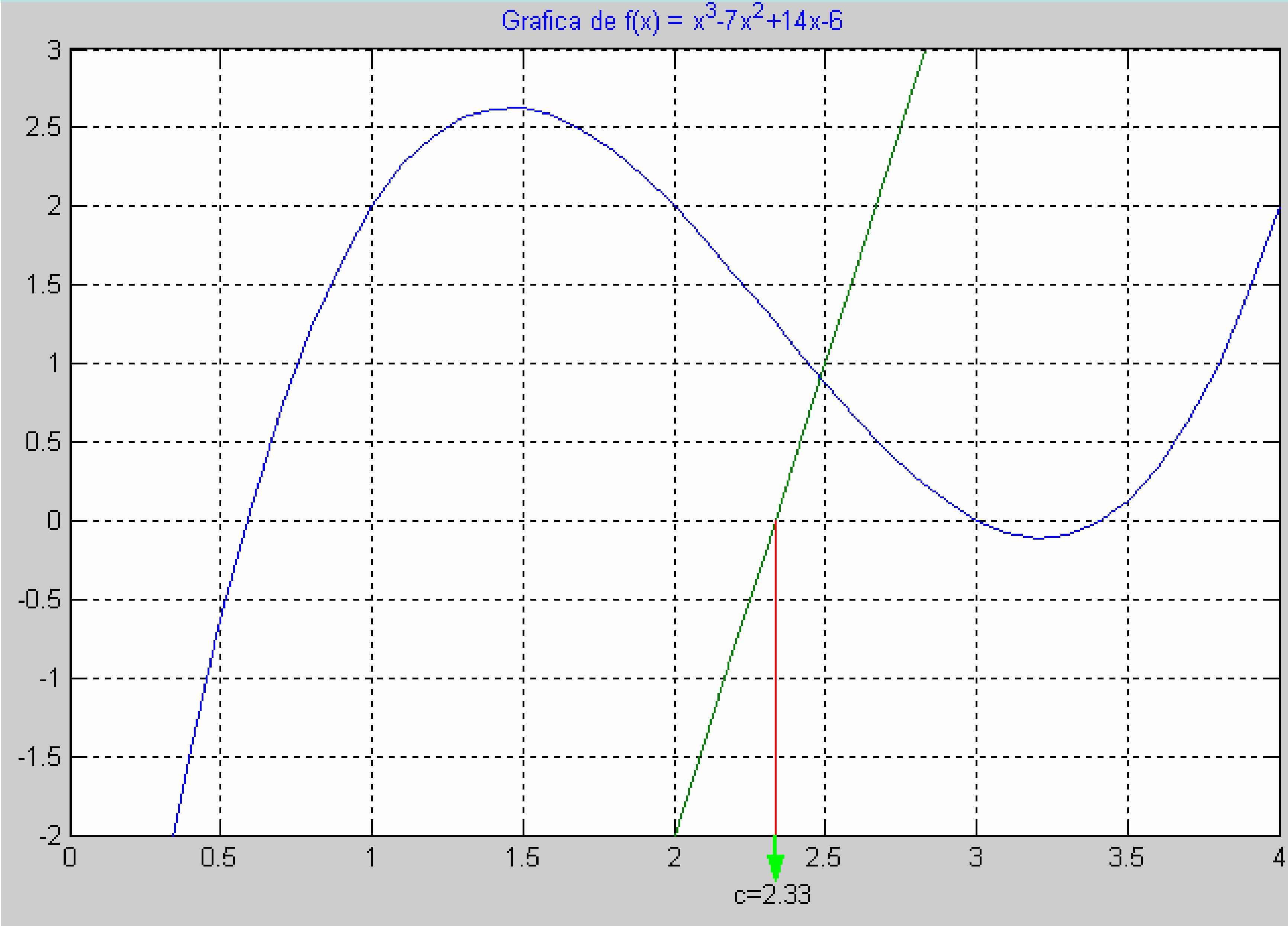
- Preliminares

» **Teorema de ROLLE Generalizado**



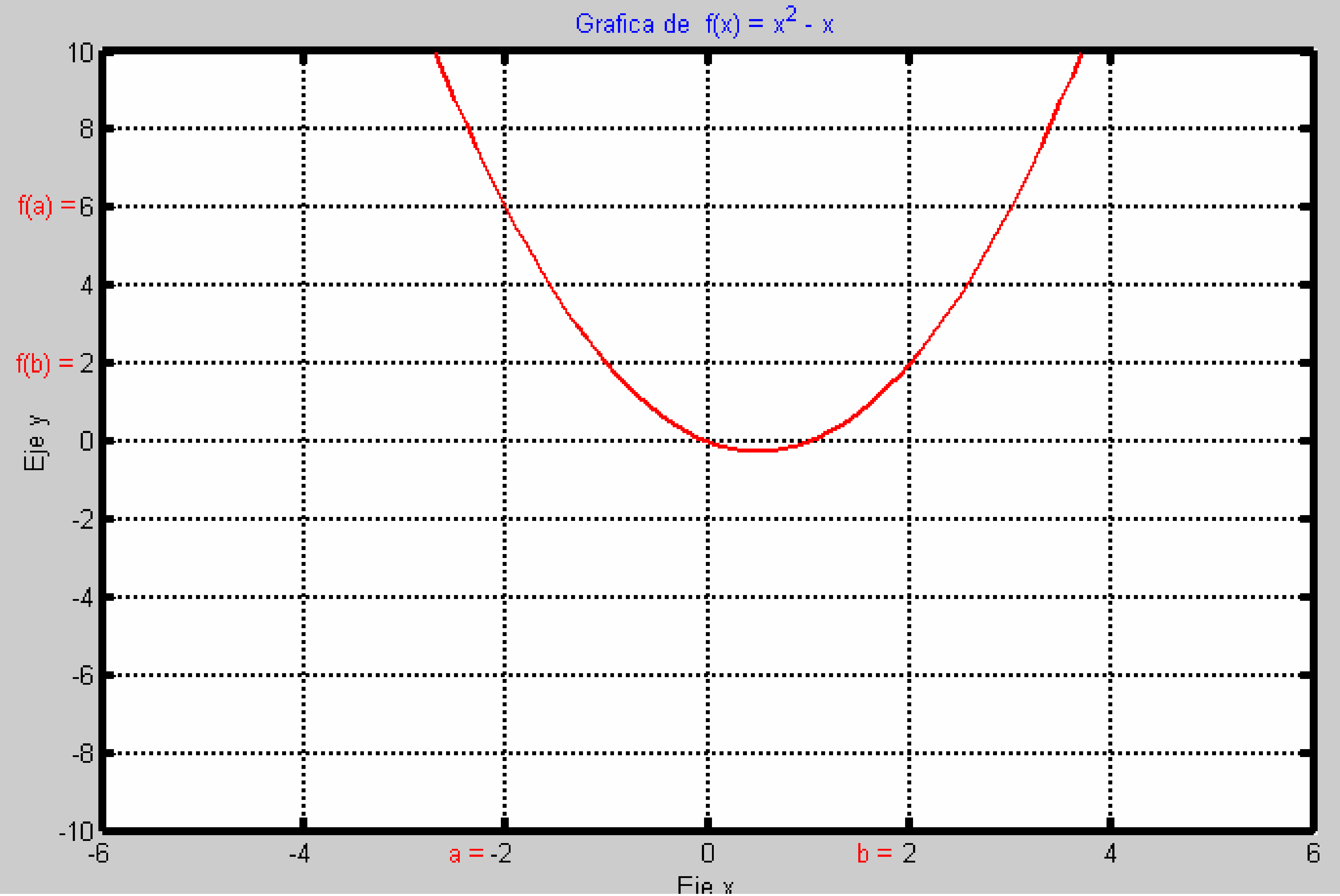
- Preliminares

» **Teorema de ROLLE Generalizado**



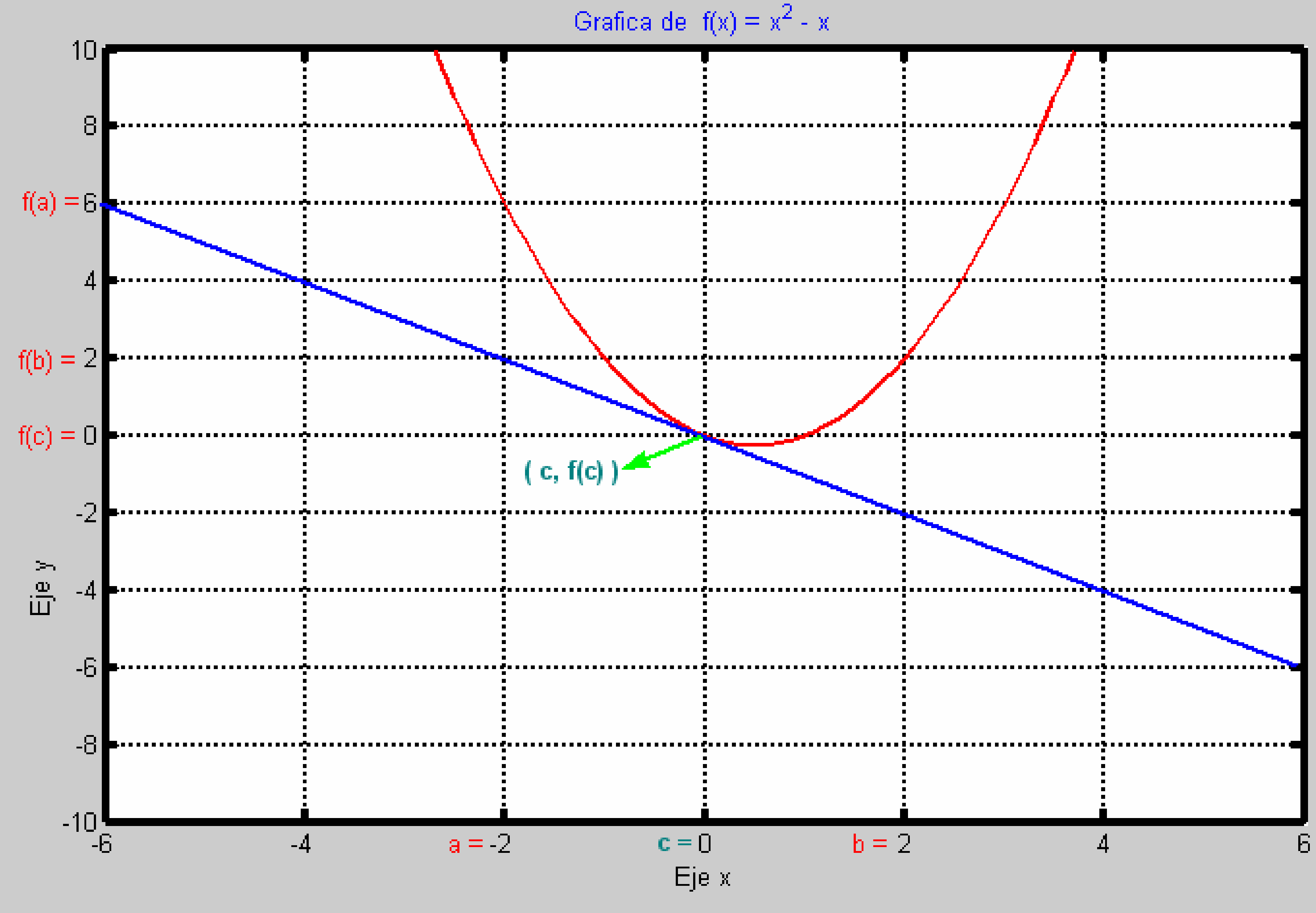
- Preliminares

» **Teorema del Valor Medio**



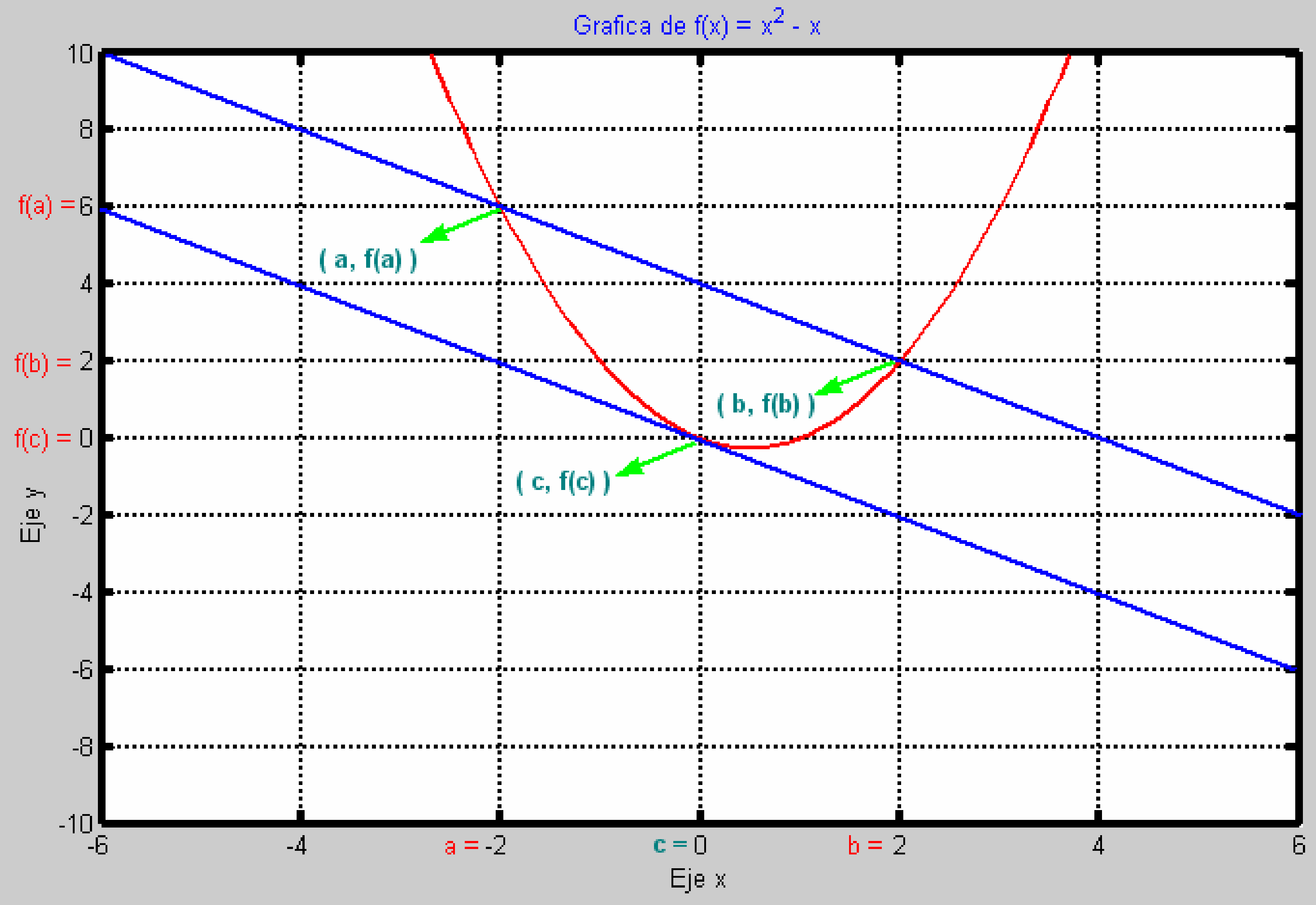
• Preliminares

» **Teorema del Valor Medio**



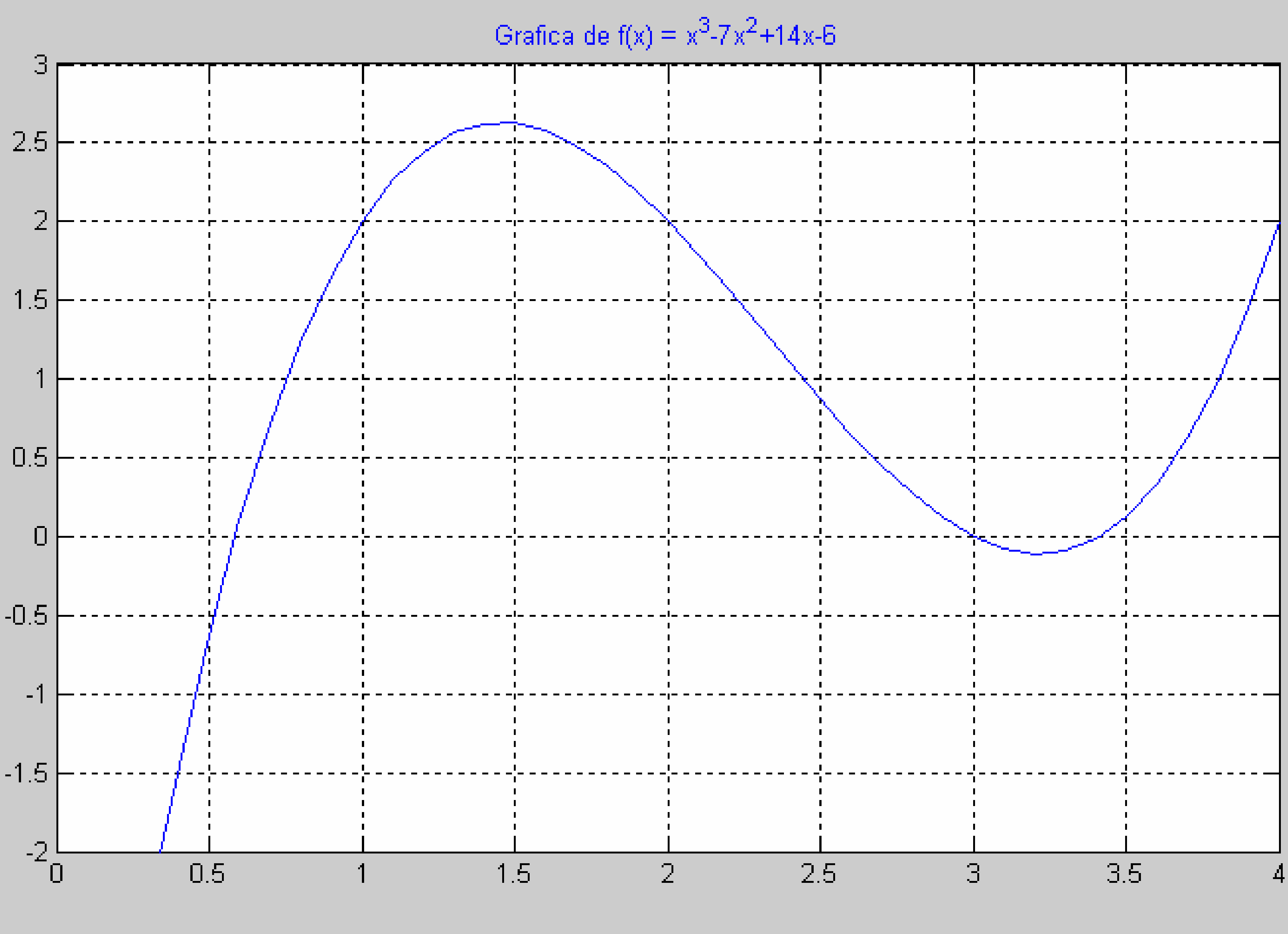
- Preliminares

» **Teorema del Valor Medio**



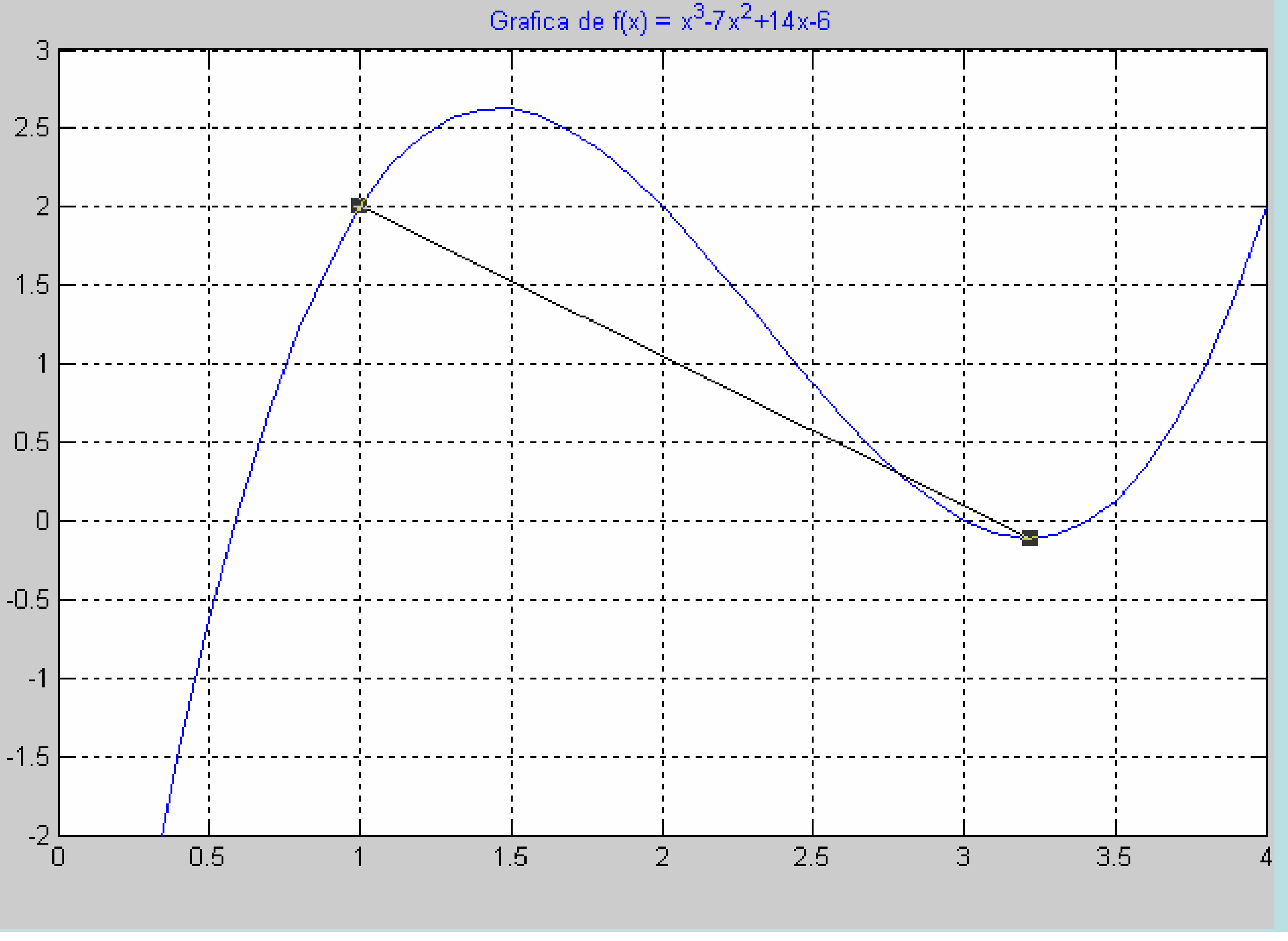
• Preliminares

» Teorema del VALOR INTERMEDIO

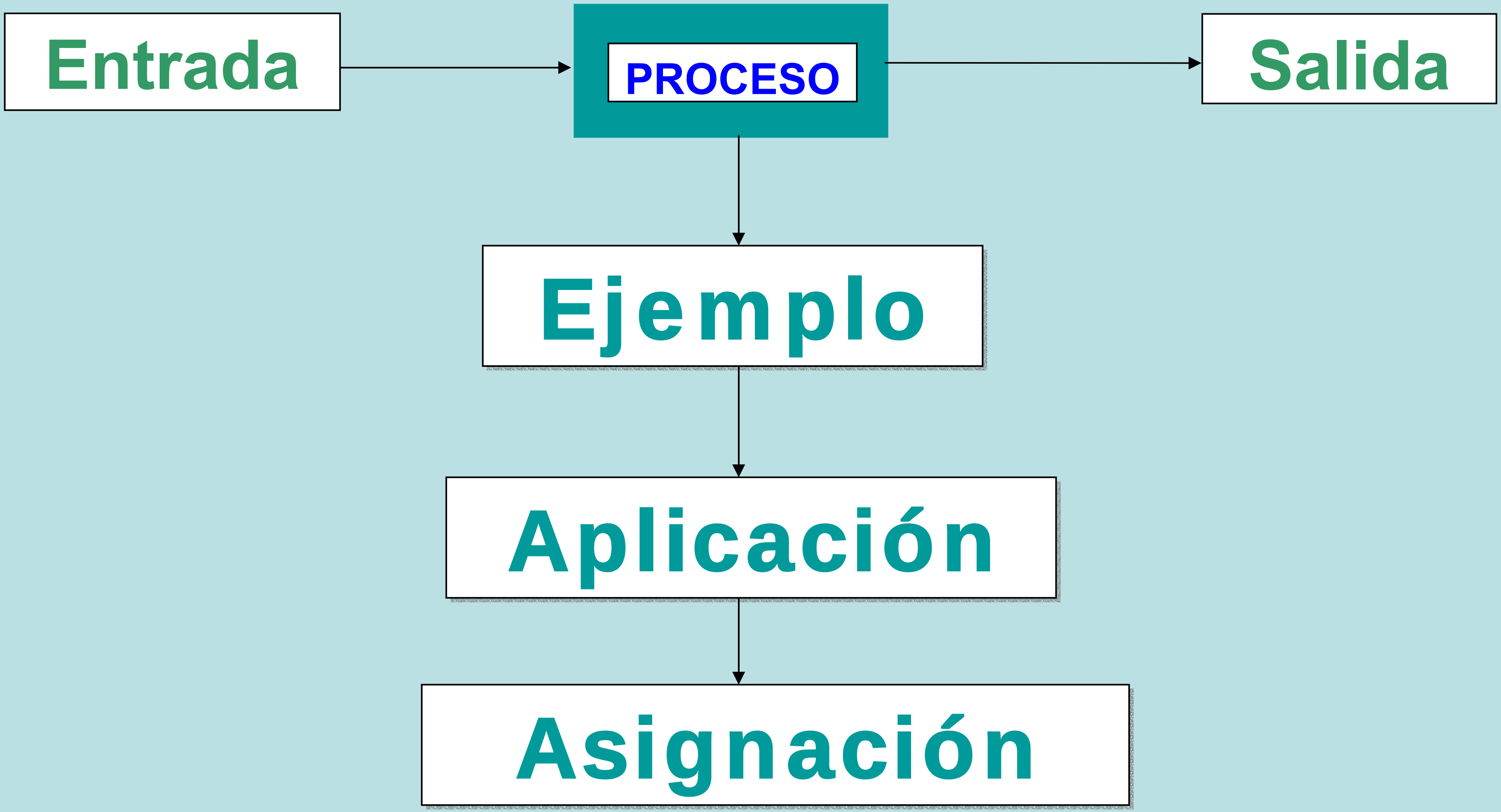


• Preliminares

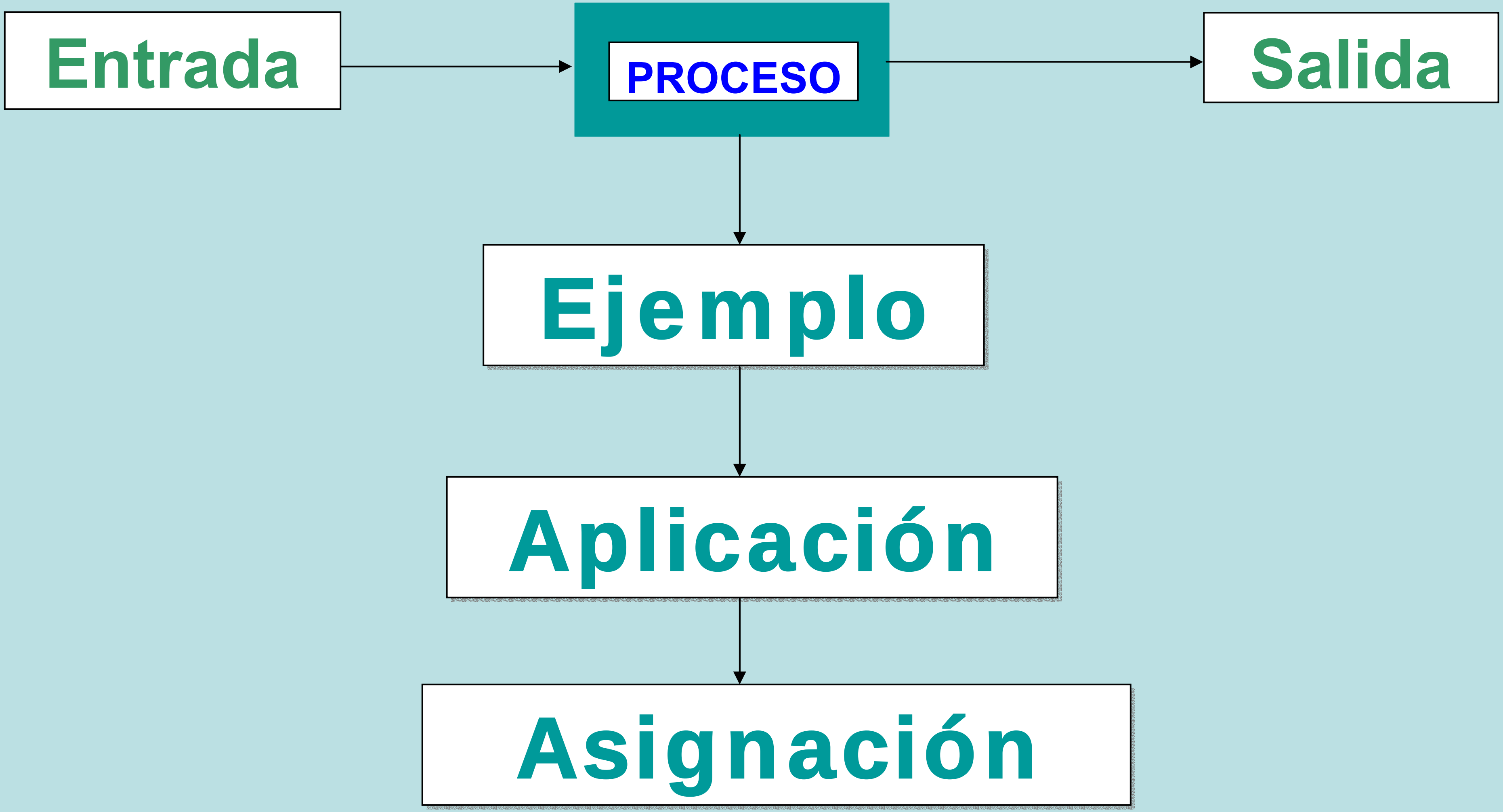
» Teorema del VALOR INTERMEDIO



Estructura General para Cualquier Método Numérico



Método de Bisección



Método de BISECCIÓN

Entrada

- Una " f " contínua y un Intervalo de Trabajo: [a,b]
- Número máximo de Iteraciones (I)
- Error o Tolerancia (ε)

Para hallar el número máximo de Iteraciones, se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\frac{b-a}{2^I} \leq \varepsilon$$

Método de BISECCIÓN

Entrada → **PROCESO**

Una " f " contínua y un Intervalo de Trabajo: [a,b]

Número máximo de Iteraciones (I)

Error o Tolerancia (ε)

Para hallar el número máximo de Iteraciones, se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\frac{b-a}{2^I} \leq \varepsilon$$

PROCESO

Se realiza aplicando el siguiente algoritmo:

i) $A_i \leftarrow a$ y $B_i \leftarrow b$

ii) Sea i=1

iii) Calcule $f(A_1)$ y $f(B_1)$

iv) Si $f(A_1)^* f(B_1) \leq 0$, ir a v); *o.w* : Fin del proceso (*¡Ver Salida M1!*)

v) Si $i \leq I$, calcule p_i usando: $P_i = \dfrac{A_i + B_i}{2}$, determine $f(P_i)$ y
Si I=1 ir a vii);o.w calcule f(Ai) y vaya al paso vi)

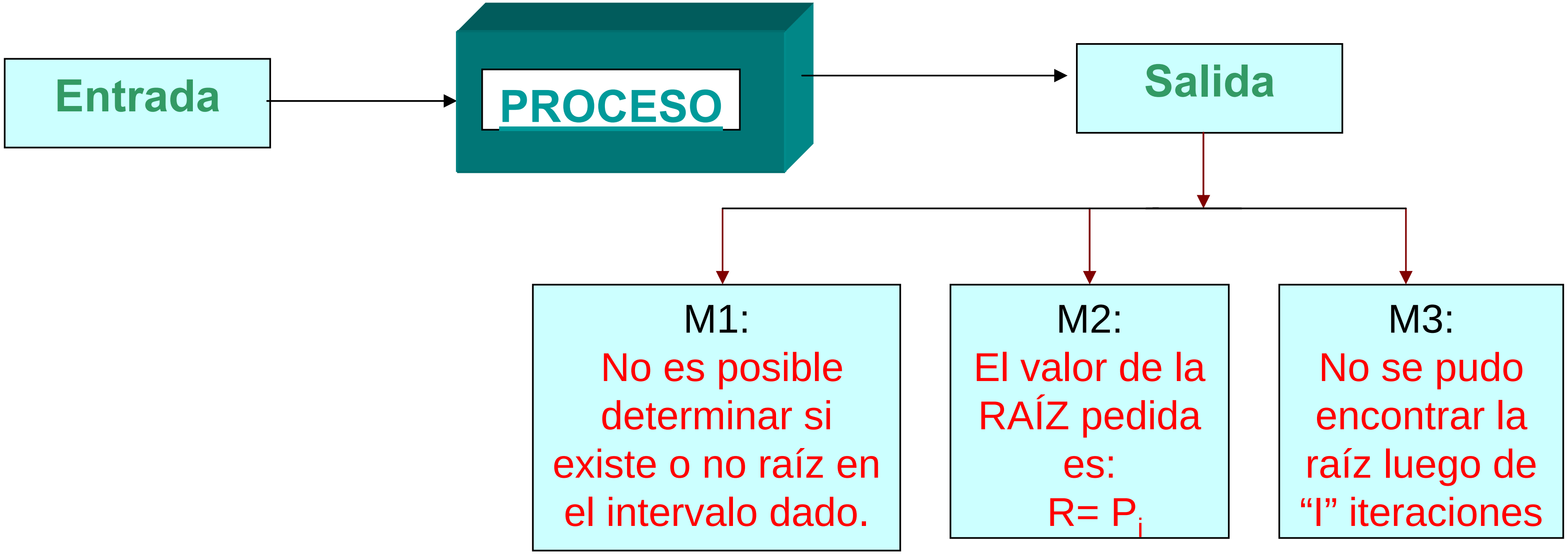
vi) Si $\dfrac{|P_i - P_{i-1}|}{|P_i|} > \varepsilon$; $|P_i| \neq 0$, vaya al paso vii); o.w: Fin del Proceso (*¡Ver Salida M2!*)

vii) Si $f(A_i)^* f(P_i) > 0$, $A_{i+1} = P_i$ y $B_{i+1} = B_i$; o.w. $A_{i+1} = A_i$ y $B_{i+1} = P_i$

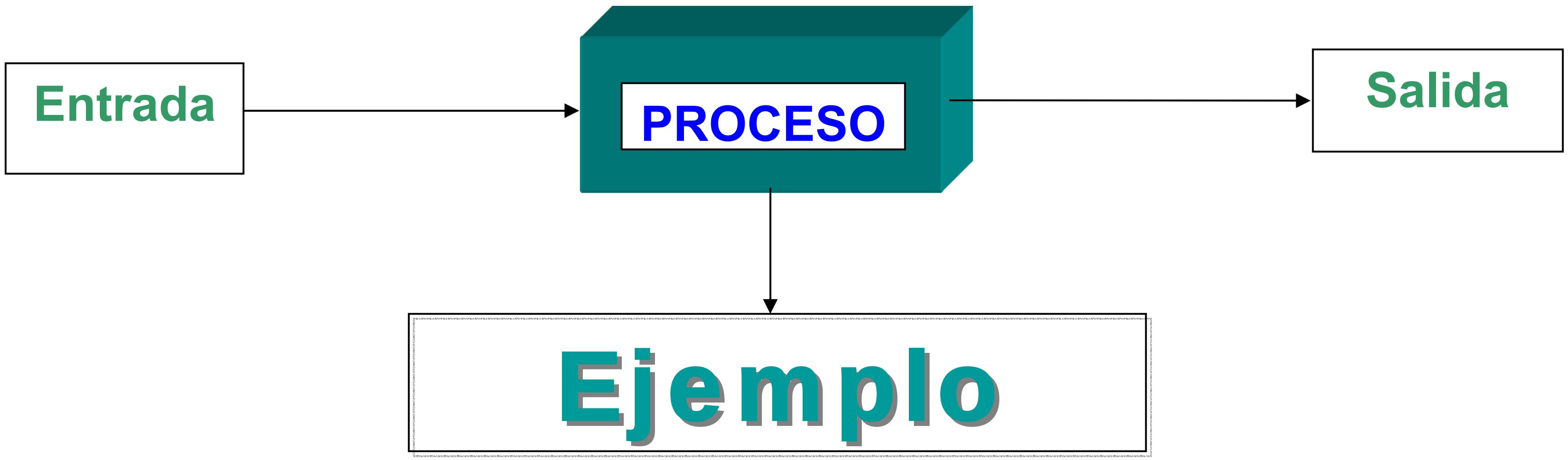
viii) Sea i = i+1, ir a v)

ix) Fin del proceso (*¡Ver Salida M3!*)

Método de Bisección



Método de Bisección



Ejemplo

Texto: Análisis Numérico; Autor: R. Burden; Ejercicios 2.1:

1) Aplique Bisección para encontrar soluciones, con un error de 0.01, siendo $f(x)= x^3-7x^2+14x-6$, en b.-[1,3.2]. d.-[5,10]. **Datos: a =1; b =3.2; ε =0.01.**

Solución: El número de iteraciones se calcula con: $I = \dfrac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}$

Para este ej. I =7.78, que debe redondearse a 8 iteraciones

I	Ai	Bi	Pi	f(Pi)	f(Ai)	f(Pi)*f(Ai)	Error
1	1	3.2	2.1	1.791	2	3.582	

i) $A_i \leftarrow$ **1** y $B_i \leftarrow$ **3.2**; ii) Sea i=1

iii) $f(A_1)$=? y $f(B_1)$=?. **Aquí: f(1)=2 y f(3.2)=-0.112**

iv) Si $f(A_1)*f(B_1) \leq 0$, ir a v); **Aquí: f(1)* f(3.2)= 2*(-0.112) = - 0.224**

v) Si $i \leq I$, calcule p_i usando: $P_i = \dfrac{A_i + B_i}{2}$, determine $f(P_i)$ y Si I=1 ir a vii); o.w calcule f(Ai) y vaya al paso vi)

Aquí 1<8; P_1 = 2.1 y $f(P_1)$ =1.791.

Ejemplo

Texto: Análisis Numérico; Autor: R Burden; Ejercicios 2.1:

1) Aplique Bisección para encontrar soluciones, con un error de 0.01, siendo $f(x)= x^3-7x^2+14x-6$, en a.[0,1]; b.[1,3.2]; c.[3.2,4]; d.[5,10]

I	Ai	Bi	Pi	f(Pi)	f(Ai)	f(Pi)*f(Ai)	Error
1	1	3.2	2.1	1.791	2	3.582	
2	2.1	3.2	2.65	0.552125	1.791	0.988856	0.55

v) Si $i \leq I$, calcule p_i usando: $P_i = \frac{A_i + B_i}{2}$, determine $f(P_i)$ y Si I=1 ir a vii); o.w calcule $f(A_i)$ y vaya al paso vi)

vi) Si $\frac{|P_i - P_{i-1}|}{|P_i|} > \varepsilon; |P_i| \neq 0$, vaya al paso vii); o.w. STOP (¡Ver Salida M2!)

vii) Si $f(A_i)* f(P_i) > 0$, $A_{i+1}= P_i$ y $B_{i+1}= B_i$; o.w. $A_{i+1}= A_i$ y $B_{i+1}= P_i$

viii) Sea $i = i+1$, ir a v)

ix) STOP (¡Ver Salida M3!)

Ejemplo

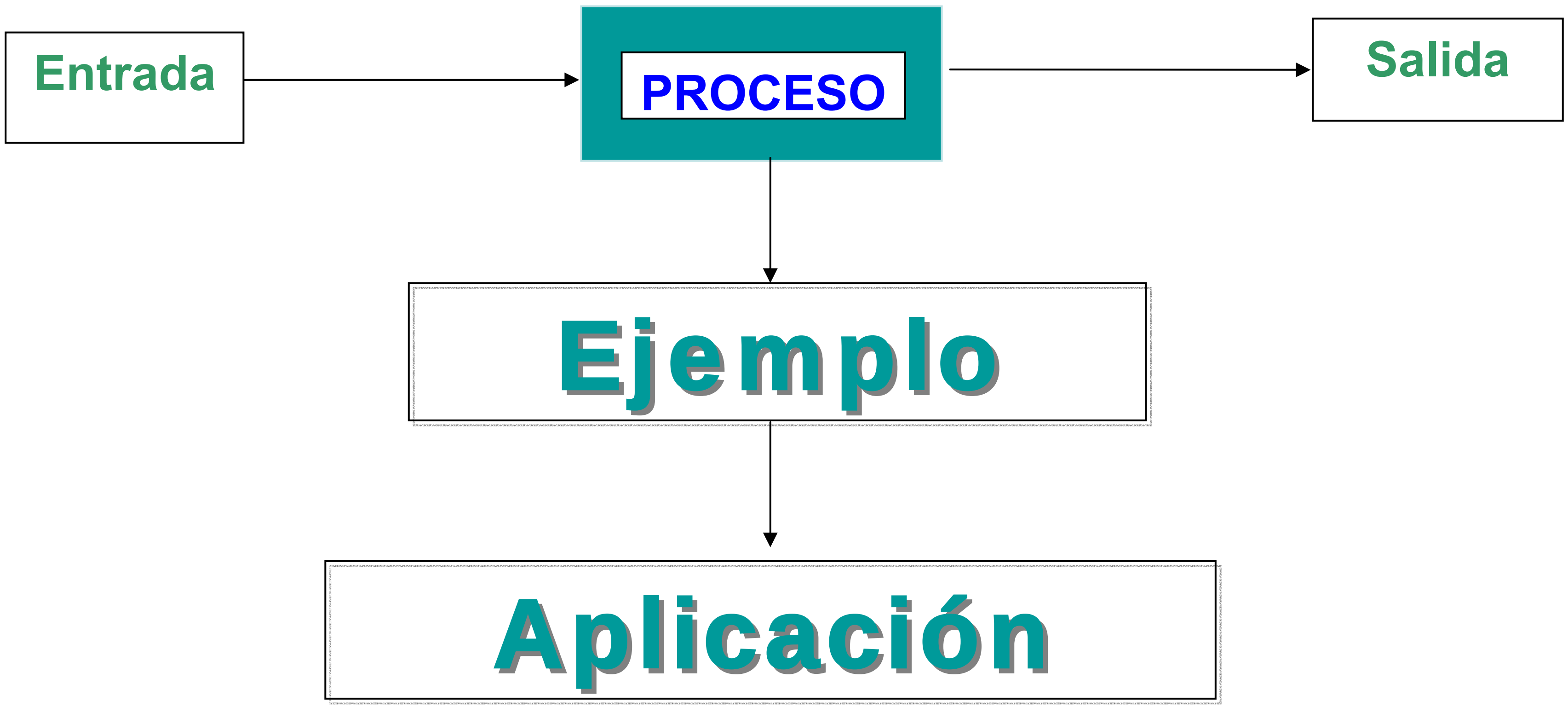
Texto: Análisis Numérico; Autor: R Burden; Ejercicios 2.1:

1) Aplique Bisección para encontrar soluciones, con un error de 0.01, siendo $f(x)= x^3-7x^2+14x-6$, en a.[0,1]; b.[1,3.2]; c.[3.2,4]; d.[5,10]

I	Ai	Bi	Pi	f(Pi)	f(Ai)	f(Pi)*f(Ai)	Error
1	1	3.2	2.1	1.791	2	3.582	
2	2.1	3.2	2.65	0.552125	1.791	0.988856	0.55
3	2.65	3.2	2.925	0.0858281	0.552125	0.0473879	0.275
4	2.925	3.2	3.0625	-0.0544434	0.0858281	-0.00467277	0.1375
5	2.925	3.0625	2.99375	0.00632788	0.0858281	0.00054311	0.06875
6	2.99375	3.0625	3.02813	-0.0265207	0.00632788	-0.00016782	0.034375
7	2.99375	3.02813	3.01094	-0.0106969	0.00632788	-6.76889e-005	0.0171875
8	2.99375	3.01094	3.00234	-0.00233275	0.00632788	-1.47614e-005	0.00859375

La raíz es: 3.0023

Método de Bisección



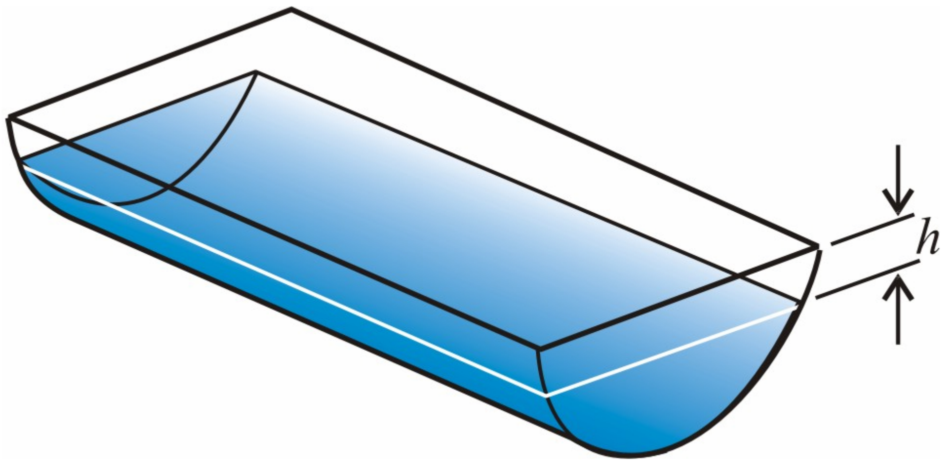
Aplicación

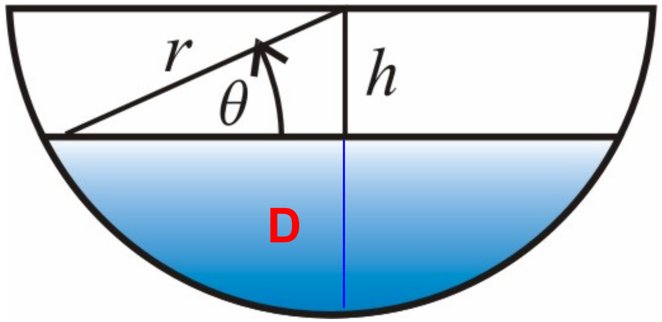
Texto: Análisis Numérico; Autor: R. Burden; Ejercicios 2.1:

15. Una artesa de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r (ver figuras). Cuando se llena con agua hasta una distancia h desde la parte superior, el volumen V de agua es:

$$V=L[0.5\pi r^2 - r^2 \arcsen(h/r) - h(r^2 - h^2)^{1/2}]$$

Suponga que L=10 pies, r=1 pie y que V=12.4 pies^3. Encuentre la profundidad (D) del agua en la artesa dentro de 0.01 pie.





Solución

Al aplicar Bisección se obtiene la siguiente tabla de valores, con un error de 0.01

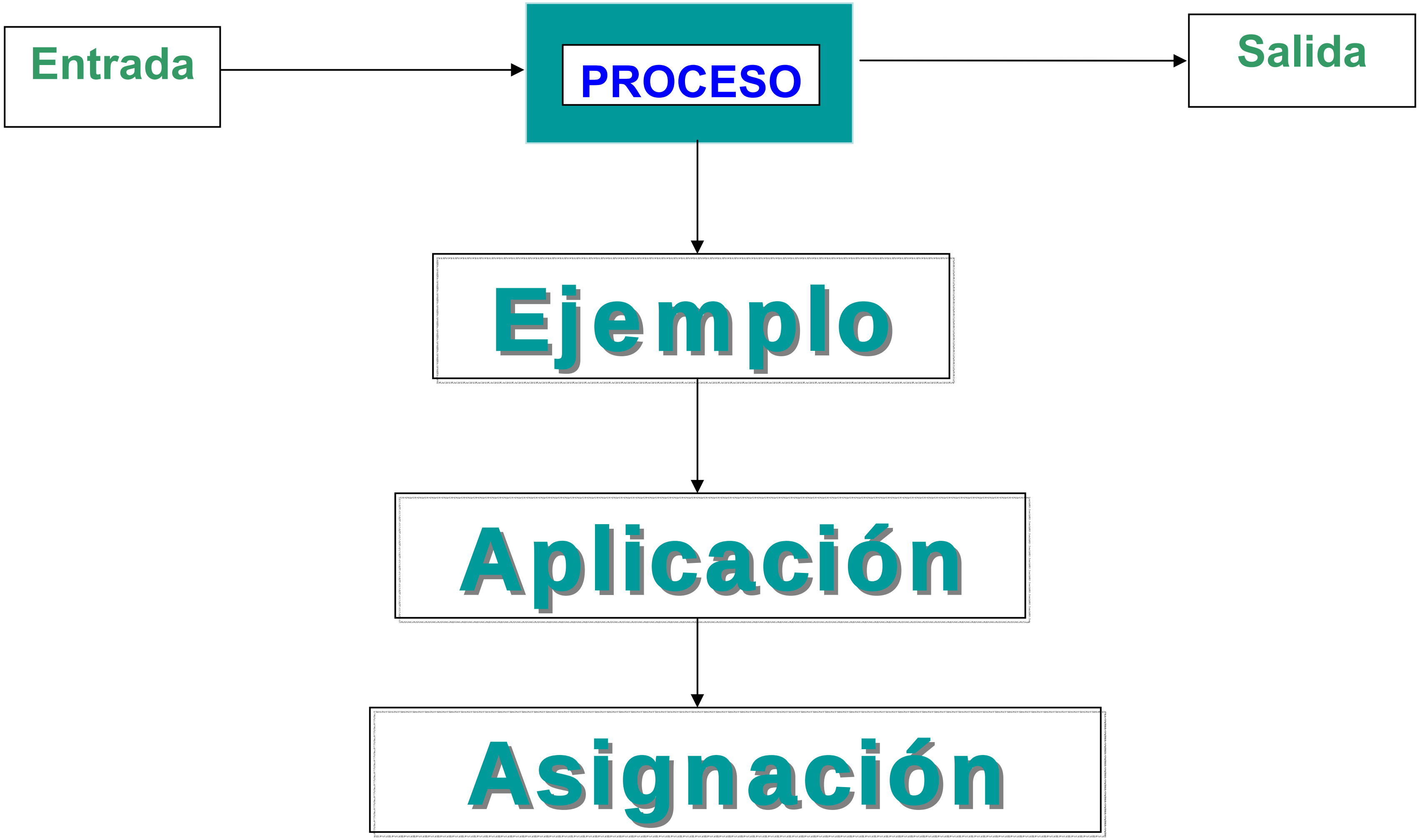
I	Ai	Bi	Pi	f(Pi)	f(Ai)	f(Pi)*f(Ai)	Error
1	0	1	0.5	-0.626611	0.33	-0.206782	
2	0	0.5	0.25	-0.164742	0.33	-0.0543648	0.25
3	0	0.25	0.125	0.0806526	0.33	0.0266154	0.125
4	0.125	0.25	0.1875	-0.042791	0.0806526	-0.0034512	0.0625
5	0.125	0.1875	0.15625	0.0187763	0.0806526	0.00151435	0.03125
6	0.15625	0.1875	0.171875	-0.01205	0.0187763	-0.000226253	0.015625
7	0.15625	0.171875	0.164063	0.003353	0.0187763	6.29568e-005	0.0078125

La solución se obtiene aplicando profundidad (D) = r-Pi.

Aquí se ve que P_7 = 0.164063, por tanto:

$$D = 1 - 0.1641 = 0.8359$$

Método de Bisección



Asignación

1.- a) Investigar 2 expresiones matemáticas, **<u>no vistas en clase</u>**, que sirvan como Criterio de "parada" para el método de Bisección.

Nota: Los métodos numéricos se usan para calcular respuestas aproximadas, por tanto el criterio f(Pi)=0, no se debe considerar.

b) Modifique el algoritmo desarrollado en clase, usando los criterios :b.1) investigados; b.2) del error absoluto; b.3) $\left|f(p_i)\right| < \varepsilon$

c) Resuelva el ejercicio 1, sesión 2.1, del Burden, compare los resultados aplicando los 5 criterios y establezca cual es el mejor.

2.- Suponga que le piden hallar por Bisección las raíces de un polinomio de **grado impar**, de la forma $\mathbf{x^{2n-1}-(2n-1)x+1}$, pero no se conocen los intervalos de trabajo. Construya un método gráfico **manual** que le permita establecer dichos intervalos. ¿Será posible extrapolar este método para otro tipo de funciones?. ¿Qué se puede afirmar respecto al número de raíces **Reales** que poseen los mencionados polinomios?. Justifique sus respuestas.

3.- RESOLVER **TODOS** LOS **EJERCICIOS 2.1** DEL **BURDEN**.
Sugerencia: Estudie detalladamente las páginas:41-46

Método de Newton-Raphson

Entrada

PROCESO

Salida

Ejemplo

Aplicación

N-R modificado o Método de la Secante

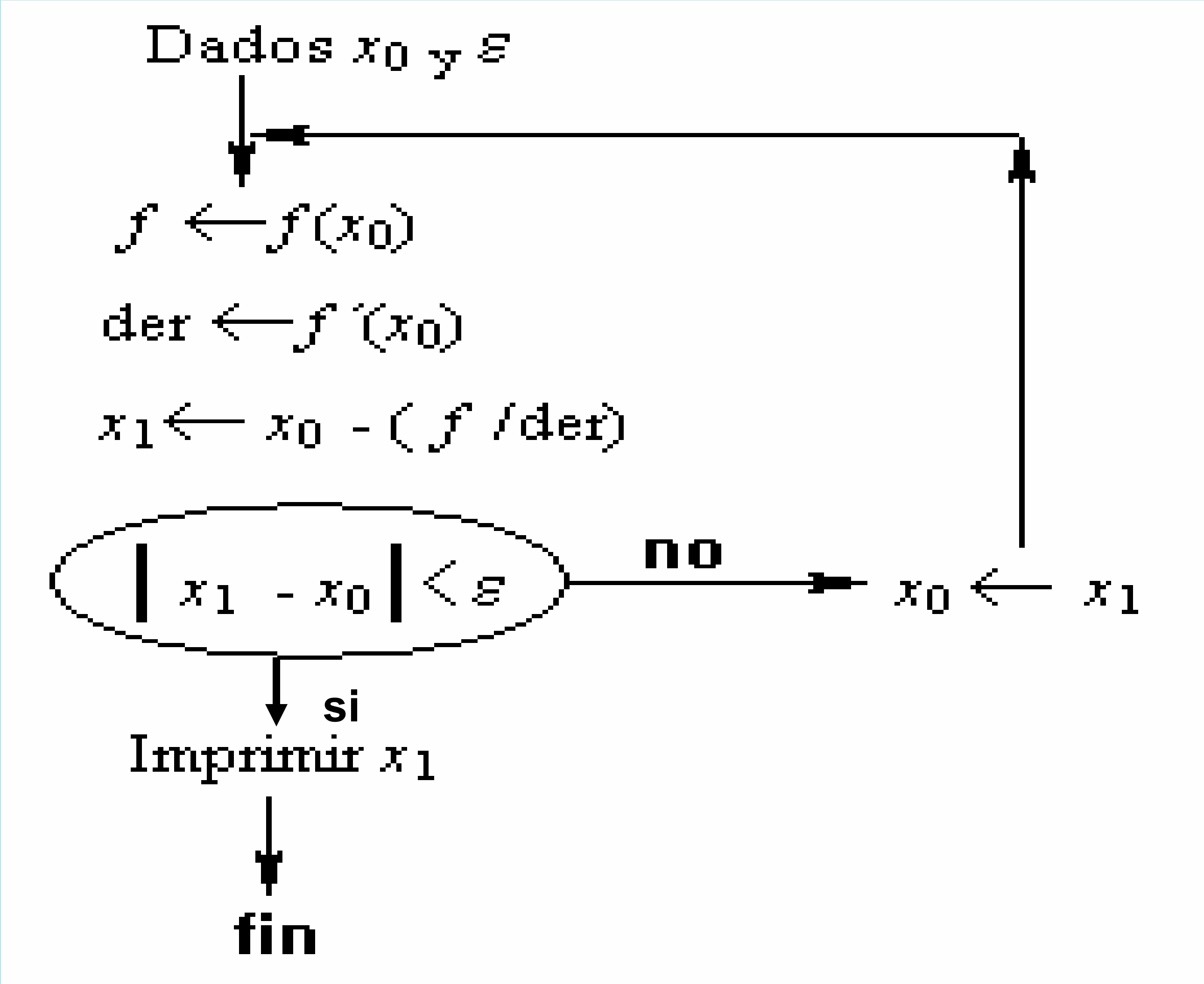
Asignación

Método de Newton-Raphson

Entrada

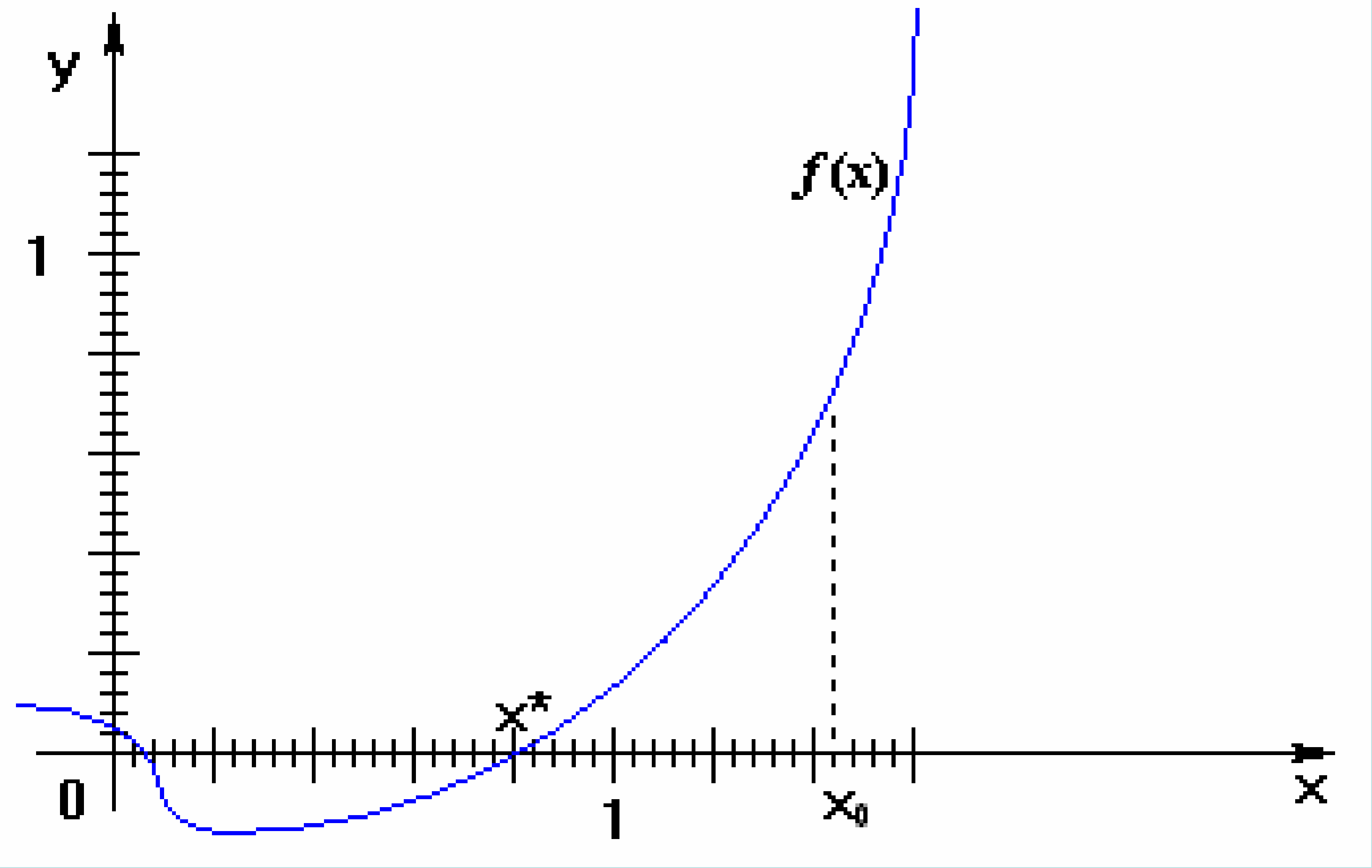
- $f \in C^2[a, b]$
- Un [a,b] o una aproximación inicial a la raíz X_o
- Error o Tolerancia (ε)
- Número máximo de Iteraciones (I)

PROCESO

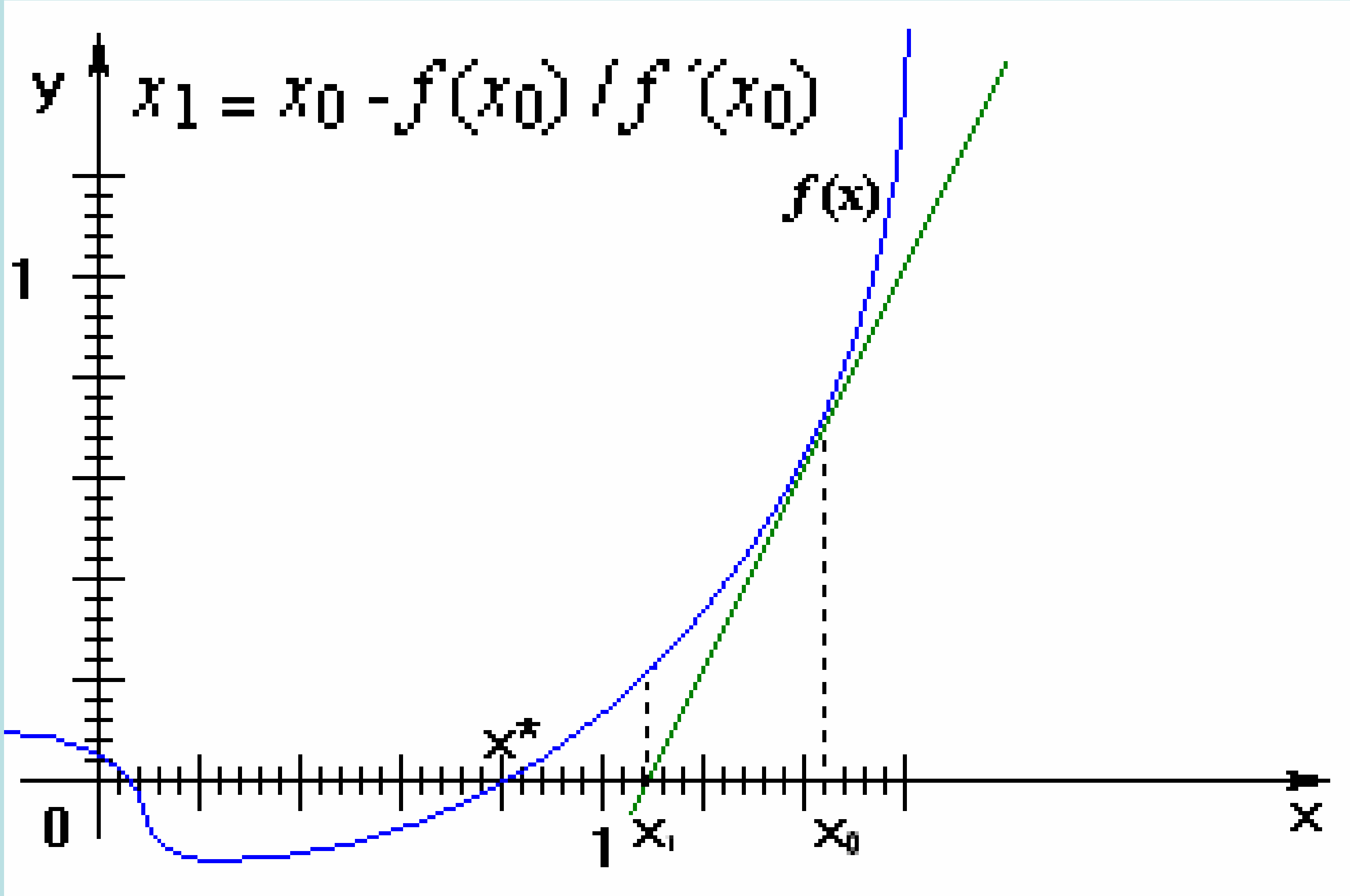


I N E F I C I E N T E: ¡ M O D I F I C A R !

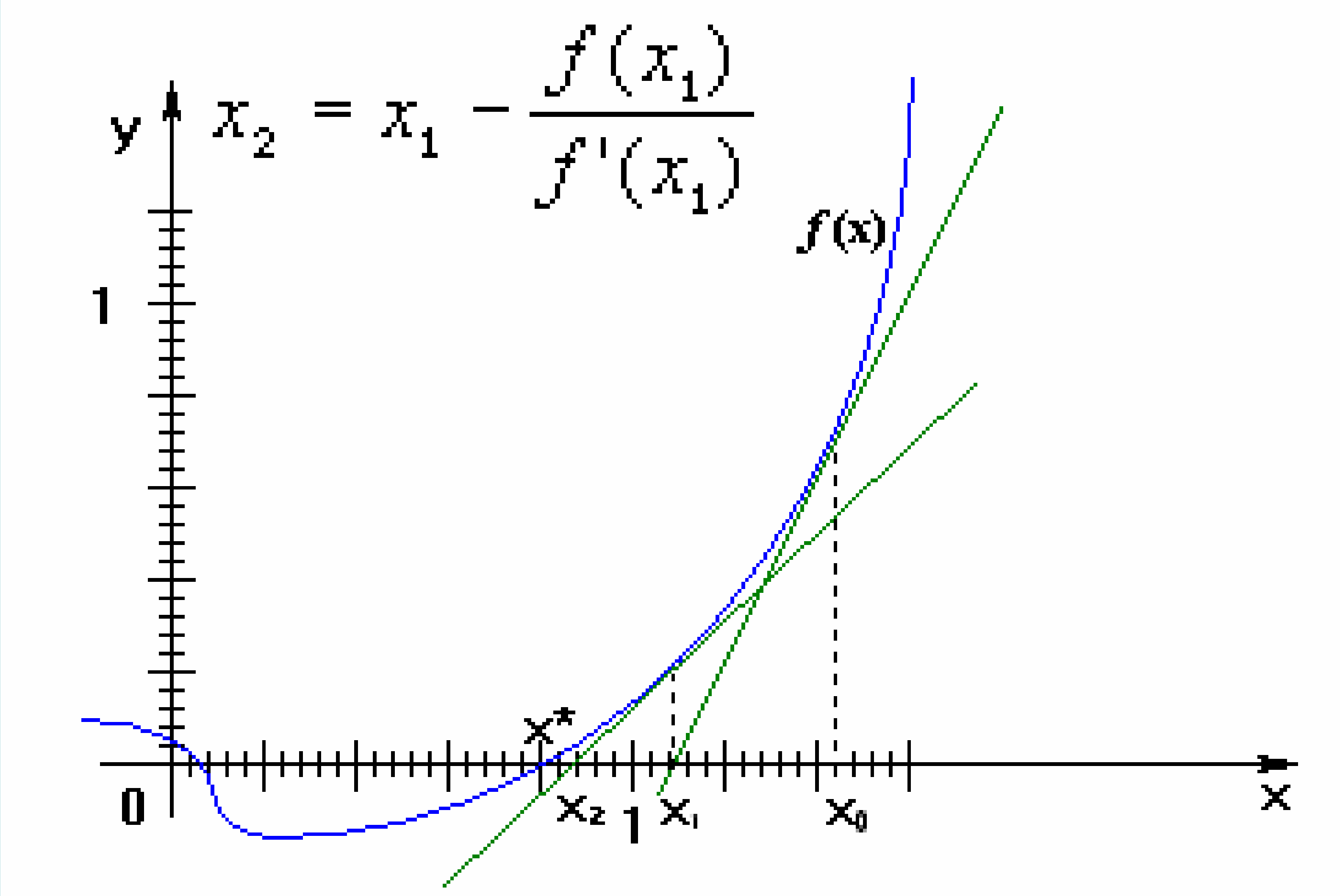
Método de Newton-Raphson



Método de Newton-Raphson



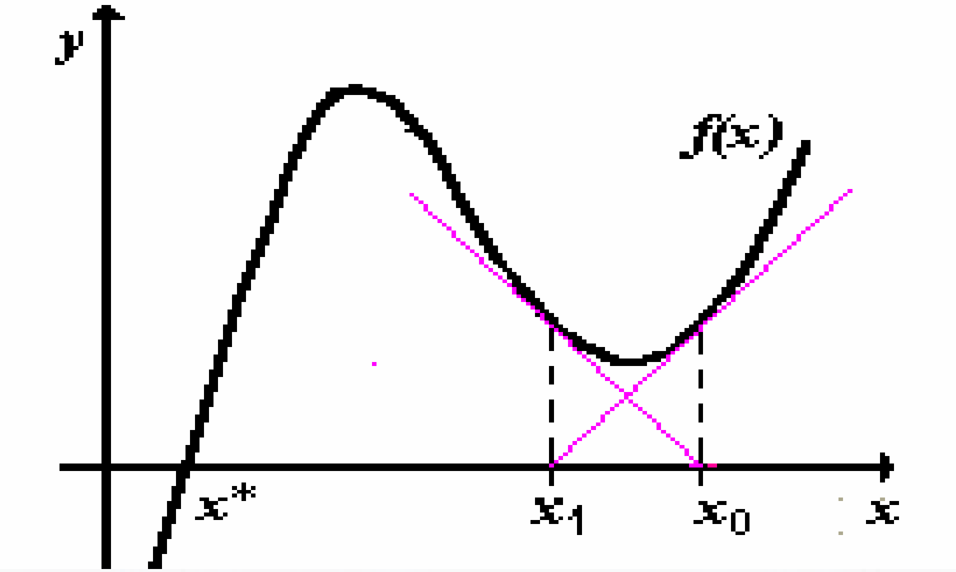
Método de Newton-Raphson

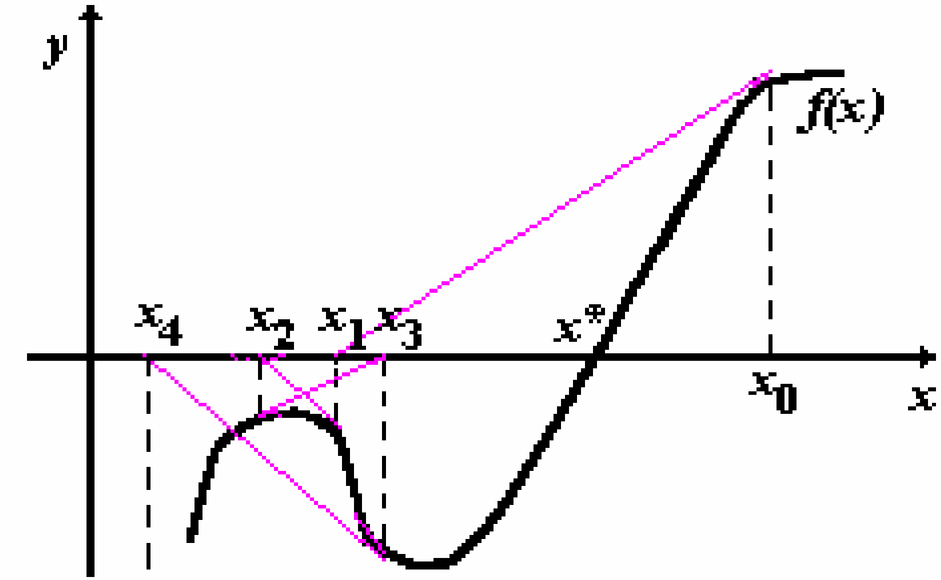


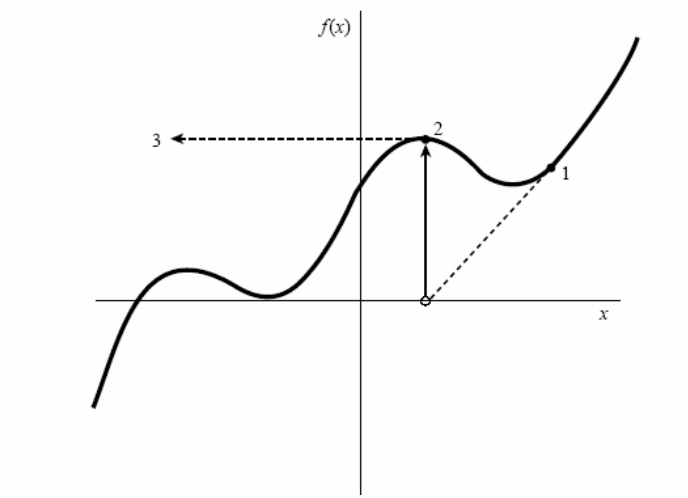
Método de Newton-Raphson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

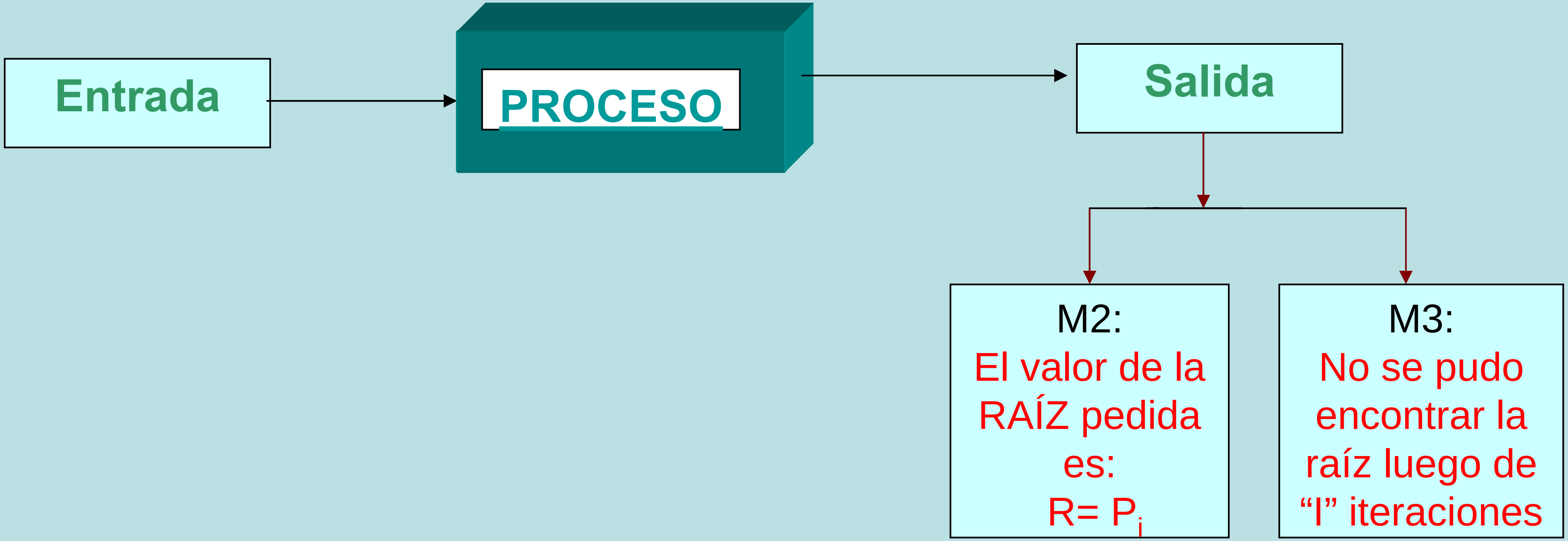
Método de Newton-Raphson
Inconvenientes



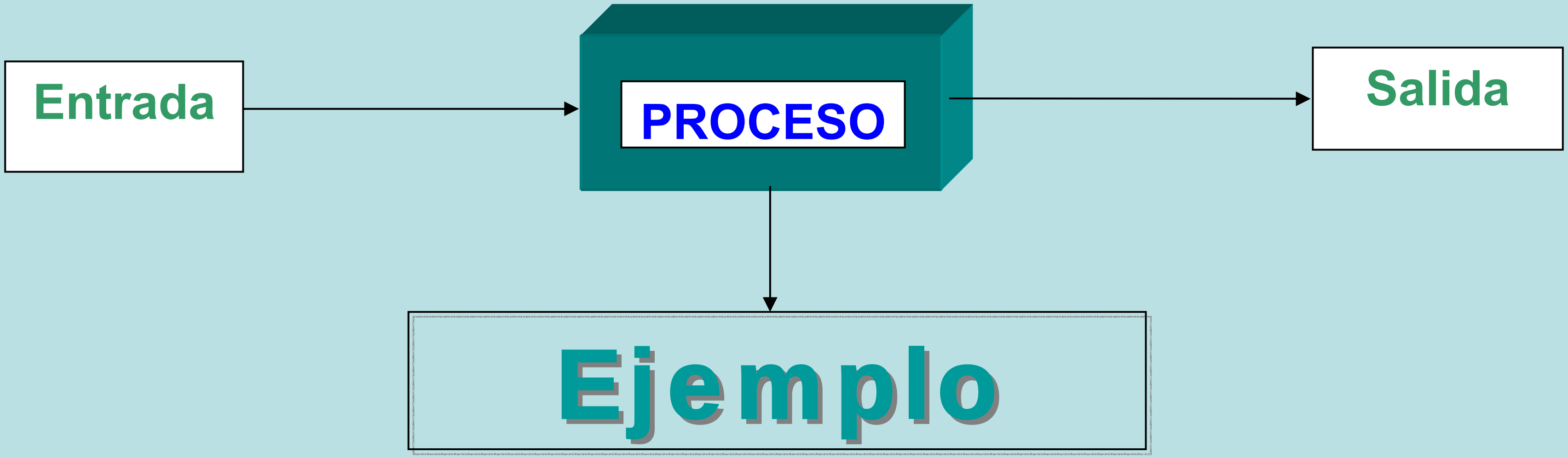




Método de Newton-Raphson



Método de Newton-Raphson



Ejemplo

Texto: Análisis Numérico; Autor: R Burden; Ejercicios 2.1:

1) Aplique Newton para encontrar soluciones, con un error de 0.000001, siendo $f(x)= x^3-7x^2+14x-6$, en a.[0,1]; b.[1,3.2]; c.[3.2,4]; d.[5,10]

I	X(i-1)	Xi	f(X(i-1))	f´(X(i-1))	Error
1	2.1	2.92535	1.791	-2.17	0.282136
2	2.92535	2.99195	0.0853849	-1.2819	0.0222624
3	2.99195	2.99988	0.00817517	-1.03199	0.00264069
4	2.99988	3	0.00012449	-1.0005	4.14762e-005
5	3	3	3.09611e-008	-1	1.03204e-008

$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$

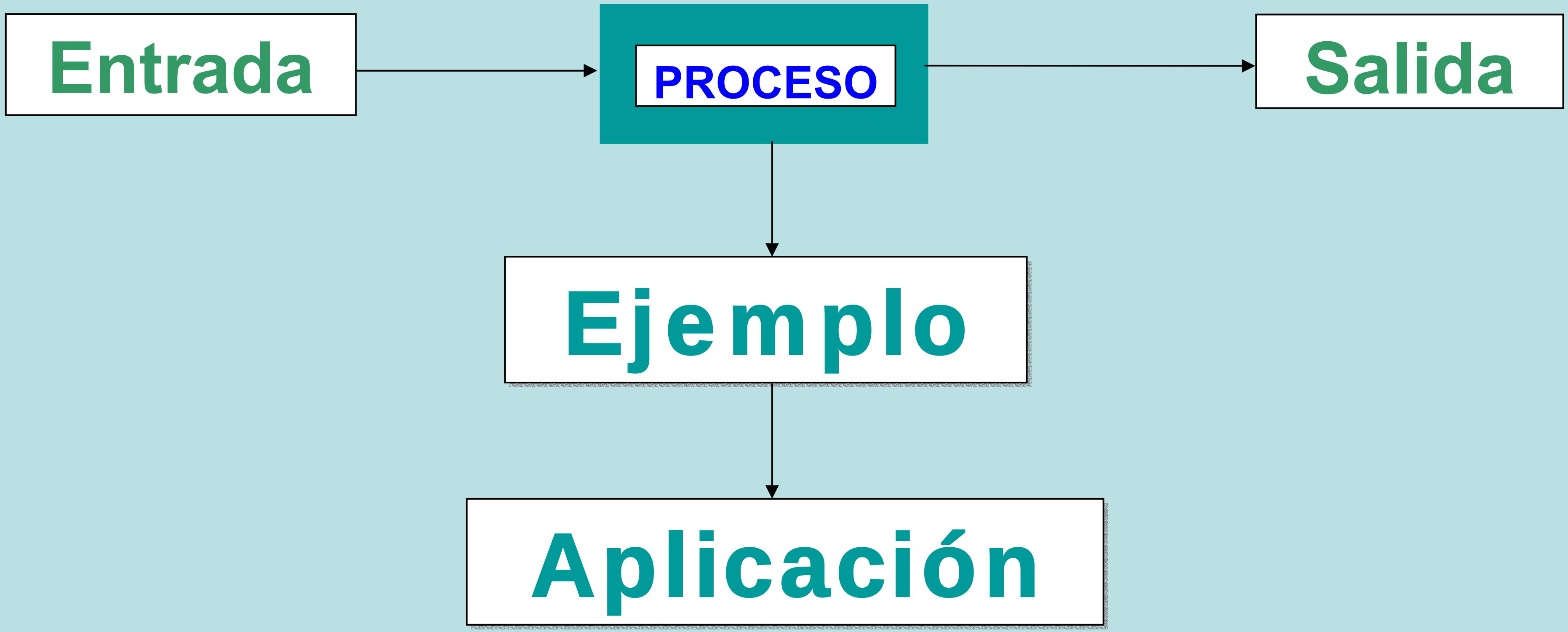
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

La raíz es: 3.0000

Aquí, $x_0=2.1$; $f(x_0)=1.791$ y $f'(x_0)=-2.17$, por tanto $x_1=2.92535$

I	X(i-1)	Xi	f(X(i-1))	f´(X(i-1))	Error
1	3.0023	2.99999	-0.00228941	-0.990784	0.000770237
2	2.99999	3	1.07032e-005	-1.00004	3.56758e-006
3	3	3	2.29086e-010	-1	7.6362e-011

Método de Newton - Raphson



Aplicación

Texto: Análisis Numérico; Autor: R. Burden; Ejercicios 2.3:

19. Los problemas relacionados con la cantidad de dinero requerida para pagar una hipoteca en un periodo fijo (n), involucran la fórmula: $A = [1 - (1 + i)^{-n}]*(p/i)$

Donde: A = monto de hipoteca; p = cuota; i = tasa de interés

Suponga que se necesita una hipoteca a 30 años para una casa, por $75000 y que el deudor puede pagar a lo sumo $625 al mes. ¿Cuál es la tasa de interés máxima que el deudor puede pagar?

Solución: **Basta con homogenizar los datos, sustituirlos en la ecuación dada y aplicar el método de N-R, con una aproximación inicial de 0.05. Así i = 0.0930734, es decir, i = 9.31%**

I	X[i-1]	Xi	f[X[i-1]]	f´[X[i-1]]	Error
1	0.05	0.0806588	40293.4	-1.31425e+006	0.380105
2	0.0806588	0.0919611	8911.23	-788449	0.122902
3	0.0919611	0.0930642	731.965	-663508	0.0118539
4	0.0930642	0.0930734	5.9744	-652715	9.83434e-005

Método de Newton-Raphson

Entrada → **PROCESO** → Salida

Ejemplo

Aplicación

N-R modificado o Método de la Secante

N-R modificado o Método de la Secante

Una de las formas de obtener la fórmula recursiva esencial para el método de la Secante, es reemplazar $f'(x_i)$ por una expresión aproximadamente equivalente, en:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}} \quad \textbf{Ec.1}$$

Para ello, basta considerar la expresión matemática de la $f'(x_i)$ Así:

$$f'(x_i) = \lim_{x_i \to x_{i-1}} \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Si $|x_i - x_{i-1}| <<< 0$, se puede escribir:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad \textbf{Ec.2}$$

Sustituyendo 2 en 1, se obtiene:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\left[\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}\right]$$

Método de Newton-Raphson

Entrada

PROCESO

Salida

Ejemplo

Aplicación

N-R modificado o Método de la Secante

Asignación

Asignación

1.- Investigue la expresión matemática para la condición de convergencia del método de **N-R**. ¿Será útil en la práctica?. Determine el valor de la razón de convergencia para el método de la **Secante**. Establezca diferencias entre convergencia: **Lineal**, **Superlineal** y **Cuadrática**. Indique las condiciones para que se produzca cada una de ellas.

2.- Analizar los ceros de multiplicidad par e impar y determinar las consecuencias que tienen sobre los métodos numéricos vistos. ¿Cuál es la multiplicidad de las raíces de los polinomios de **grado impar**, de la forma $x^{2n-1}-(2n-1)x + 2n-2$, $n>1$?.

3.- Prepare una clase para enseñar el método de la **Secante**, utilizando como modelo la **estructura general de cualquier método numérico**. Indique, los inconvenientes de dicho método.

4.- Si una función f presenta un "**Polo**" , ¿Cuál es su consecuencia, desde el punto de vista numérico, si se busca un **cero** de f ?

5.- RESOLVER **TODOS** LOS **EJERCICIOS** **2.3** DEL **BURDEN**.
Sugerencia: Estudie detalladamente las páginas:59-66

Nota: No considere el método de la Falsa Posición