UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEL TACHIRA
DEPARTAMENTO DE PEDAGOGIA
CATEDRA: INFORME Y DIVULGACIÓN

APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA A LA ECONOMÍA

Realizado por:
Keila Loana Moncada Araque
C.I. No. 14.022.389
5to. Año Educación Matemática
Asesor: Lic. Miguel Vera
Prof.: Samuel López

San Cristóbal, Mayo de 2002

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

- ✓ A Dios todopoderoso por permitirme ver cumplido un sueño y por su compañía todos diaria.

- ✓ A mis familiares especialmente a mis padrea por su apoyo y colaboración para realizar esta meta.

- ✓ Al tutor **Prof Miguel Vera**, por su apoyo, paciencia y colaboración invaluable en mi carrera en la realización de la tesis.

  Dios lo bendiga.

A todos los que de una u otra manera colaboraron en la realización de este trabajo.

MUCHAS GRACIAS.

RESUMEN

El presente trabajo titulado **Aplicación de la matemática a la economía** es una elaboración bibliográfica que desarrolla contenidos matemáticos de manera general y se enfoca en mostrar su aplicación económica de manera detallada, mediante explicaciones teóricas y con ejemplos prácticos.

El trabajo se ve reforzado con la presentación de su Software Educativo, el cual de manera clara y sencilla pero a la vez atractiva presenta parte del contenido de dicho material, con el propósito de mostrarlo de una manera diferente y de acuerdo a los gustos y motivación del interesado lo estudiará de la forma que más le motive y le agrade.

Para la presentación del trabajo, se ha dividido en cinco capítulos. El PRIMERO titulado **El Problema**, se presenta una descripción detallada de la finalidad, importancia, motivación, justificación, objetivos y antecedentes del desarrollo de esta trabajo; EL SEGUNDO titulado **Marco Teórico**, contempla las bases pedagógicas, psicológicas, sociológicas y legales que sustentan el por qué y el cómo de la realización de la propuesta; EL TERCERO titulado **Marco Metodológico**, presenta la forma y la metodología utilizada para el desarrollo del trabajo; EL CUARTO titulado **Desarrollo de la Propuesta**, presenta lo que deseó abordar: el contenido matemático y su aplicación a la economía. Para ello se dividió en cinco secciones que presentan contenidos sobre *ecuaciones, funciones, límites y continuidad, derivación e integración.* Cada uno de ellos organizados con una sección introductoria formada por el aspecto meramente matemático, luego la aplicación económica del contenido y luego una serie de problemas propuestos; EL QUINTO titulado **Software Educativo** es la presentación impresa del software educativo que refuerza el trabajo.

Se presentan los contenidos con gran cantidad de ejemplos teóricos y prácticos para su mayor comprensión, además de la posibilidad de encontrar la solución de algunos de los problemas propuestas al final de trabajo.

En fin se busca mostrar de manera amena y comprensible la matemática, para contribuir al proceso de cambio de la mentalidad y actitud negativa de la sociedad y en especial del estudiante hacia esta importante ciencia, aportando una clara muestra de la necesidad de su existencia y estudio, dado que es indispensable para el desarrollo de todos los ámbitos de la vida social y en este caso de un campo tan importante y de tan cotidiano estudio como lo es La Economía.

Se presenta con el propósito de que el docente encuentre y tenga a la mano un material que le permita revisar y orientar su práctica educativa en busca de que el alumno obtenga un aprendizaje significativo y contextualizado, además de cambiar la ideología actual de la total abstracción e inaplicabilidad de la matemática.

Pero además de ser utilizado por el docente para su actuación profesional, también está diseñado para que el estudiante lo consulte y profundice el contenido impartido en clase (si se le imparte en clase), y de lo contrario su sencillez permite que lo estudie de manera autónoma e independiente.

En fin se espera que el presenta trabajo fruto de un esfuerzo conjunto entre el autor y el tutor recoja sus frutos al contribuir a la formación intelectual del ciudadano.

INTRODUCCIÓN

El trabajo **Aplicación de la Matemática a la Economía** es la culminación de una meta personal, además de una contribución para el enriquecimiento de la práctica educativa y valoración de la matemática, al mostrar su necesidad y aplicación en la sociedad.

Es una meta personal, pues como estudiante de Contaduría Pública en la Universidad Nacional Abierta (U.N.A) el estudio de la matemática, no se basó en el sólo cálculo matemático, sino en un abordaje profundo y detallado de su aplicación en la economía hecho éste que causó gran curiosidad por ahondar en este tema, y más aún dar a conocer a todos, y en especial a aquellos que consideran a la matemática como netamente abstracta y sin más aplicación que para efectuar operaciones, que la MATEMÁTICA es la ciencia más importante, pues en ella se basan las demás ciencias como la medicina, la biología, y en este caso especial, la Economía.

Es una contribución hacia el enriquecimiento de la práctica educativa de la matemática, pues coloca a la disposición tanto del docente como del alumno, un material diferente y de fácil utilización para complementar y mostrar la aplicación real y práctica de esos contenidos matemáticos que el estudiante considera inaplicables más allá de un cuaderno, al efectuar cálculos.

Además, como futura Docente de matemática, durante el proceso de formación se insistió de sobremanera en cambiar, en modificar aquellos aspectos de la enseñanza que se considerara necesario para mejorar la calidad y aprendizaje significativo del estudiante. Y este trabajo contribuye a este cambio por su carácter de aplicación de la matemática y por la utilización adecuada de la tecnología en la educación.

En fin elaborar este trabajo es la muestra de que se existe y se está formando una generación de educadores de calidad y en busca de la calidad del proceso educativo.

CAPITULO I

El Problema

1.- TITULO:

Aplicación de la Matemática a la Economía

2.- PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA:

La política, el desarrollo económico y social de un país se percibe estrechamente relacionado con la Educación, por cuanto, son los hombres capacitados por ésta quienes alcanzan las metas que permiten calificar una nación como desarrollada.

Es evidente que el recurso humano capacitado es el eje central y el capital básico de la nación, el cual crea el progreso, siempre y cuando esté apto para ello. Además de ser el ente productor, el individuo se convierte en beneficiario, consumidor, ciudadano y en fin desempeña diversos roles dentro de la sociedad.

Para poder desenvolverse activamente en los ámbitos mencionados, el hombre debe estar muy bien preparado y capacitado, es decir, el individuo debe haber recibido una educación orientada a la producción y contextualización de los contenidos, los cuales deben incluir todos los aspectos que formen al individuo como un ser integral. Y así lo confirma MEDINA RIVIL, Antonio: "A medida que la sociedad actual postindustrial e informatizada adquiere mayores índices de desarrollo, requiere de sus miembros más elevados niveles de especialización, y para contraste y cumplimiento, se hace imprescindible una preparación global e intensa de aquellos para responder a la incesante transformación de la actividad laboral, económica, científica y tecnológica". Pág. 59.

Esto confirma la necesidad de una formación auténtica y estable de los profesionales del futuro, donde los individuos sean capaces de contribuir activamente en el proceso de evolución y desarrollo social.

Pero no es nada nuevo que uno de los conocimientos más importantes y sin el cual ningún individuo podría vivir activamente en sociedad es la matemática; pues es considerada como un excepcional ejercicio para el desarrollo de la mente, “una gimnasia del cerebro”, como acostumbraba a definirla Bertrand Russell, y todo esto por su alto nivel de abstracción.

Además de esto, por su aplicación, la matemática aumenta su importancia al ser una ciencia auxiliar fundamental de otras disciplinas. Por esto, toda persona debe poseer aunque sea un mínimo de conocimiento de la matemática y su contenido; aspecto éste muy difícil de encontrar actualmente, pues el docente contrariamente de enseñar a valorar este conocimiento, mediante una motivación al estudio de la matemática, se ha dedicado a crear en el estudiante un temor innecesario hacia la materia, dado que se la presenta como algo irreal, sin antecedentes y además sin aplicación y utilización en la vida, excepto de las operaciones matemáticas básicas; por lo que el individuo considera innecesario profundizar en el conocimiento matemático.

Por este poco interés en la matemática , el estudiante no está consciente de que en cualquier aspecto de la vida social en el que piense desenvolverse necesitará un buen dominio de esta ciencia para alcanzar sus metas y propósitos.

Si la enseñanza de la matemática que reciba el estudiante es vaga, abstracta y descontextualizada, jamás se apropiará del conocimiento y tendrá problemas para concretar y resolver las situaciones que se le presenten. Por lo cual teniendo clara la poca contextualización que se hace del conocimiento matemático en las actuales aulas de clase, es necesario comenzar a demostrarle tanto a algunos docentes como al estudiante en qué puede usar la matemática que conoce y más aún, por qué debe seguirla estudiando.

Para lograr contextualizar los contenidos matemáticos en el aula, se hace necesario enseñarle al estudiante el uso y la necesidad de la matemática en muchas disciplinas con las cuales él se identifica.

El individuo desde muy temprana edad se relaciona con muchos aspectos de la sociedad, pero uno de los más comunes e importantes es con el aspecto económico, pues no existe la persona que no tome en cuenta el factor monetario en su vida cotidiana, desde la simple compra de bienes hasta el manejo económico más complejo.

Las personas administran su dinero y su vida en general, con el presente trabajo "Aplicación de la matemática a la Economía" se persigue básicamente demostrar la aplicación de la matemática y el cálculo matemático en los aspectos y contenidos económicos, ya que son de uso cotidiano, además de concientizar al estudiante de la utilización de la matemática en la vida.

3.- OBJETIVOS.

3.1 OBJETIVO GENERAL:

Dar a conocer la utilización y aplicación de los conceptos y operaciones matemáticas en problemas relativos a Economía.

3.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Presentar al estudiante la aplicabilidad de la matemática a la realidad.
- Presentar de manera más ilustrativa y demostrativa la aplicabilidad de la matemática en el área de la Economía.

4.- JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA:

Los Estudiantes de la carrera de Educación, mención matemática, frecuentemente se preguntan ¿Para qué aprender tanto cálculo? , ¿Qué utilización práctica tiene la derivada?, por ejemplo, preguntas a las que no es fácil encontrar una respuesta que no sea más complicada que la misma pregunta.

A los docentes también les ocurre, que los estudiantes les preguntan ¿En qué pueden utilizar ellos los contenidos matemáticos que les imparten?, y de igual manera no es fácil darles una respuesta clara y convincente. Todas estas situaciones llaman la atención de cualquier investigador, aún más de alguno que conozca los aspectos fundamentales de la matemática, y ocasiona una búsqueda de la aplicación de los contenidos matemáticos y del cálculo en la cotidianidad, tanto para su propio aprendizaje (docente) como para darlo a conocer a sus estudiantes.

En muchas ocasiones el docente no le presenta al estudiante problemas de aplicación de la matemática no porque no quiera, sino porque ni siquiera él mismo los conoce.

Con el presente trabajo se espera sirva de herramienta para mejorar la calidad de la enseñanza de la matemática, facilitándole material al docente para impartir dichos conocimientos, y a su vez sirva para demostrarle al estudiante la gran utilidad de la matemática, motivándole a estudiarle, además de servirle como consulta en sus estudios.

En la búsqueda de esa aplicación de la matemática en la vida, se puede encontrar fácilmente a la Economía como campo de aplicación de la misma. Por ser estudiante de la Contaduría Pública en la Universidad Nacional Abierta (U.N.A), en los estudios de matemática se dedica gran parte de los contenidos matemáticos a su aplicación en la Economía.

Al profundizar en dichos contenidos, es fácil, encontrar aplicación de la matemática a la economía y más aún, se presentan los contenidos de manera que se facilita su utilización para demostrarle a los estudiantes una de las tantas aplicaciones de la matemática como lo es en el campo económico.

Además de los objetivos planteados con este trabajo, se espera que el mismo motive el desarrollo de futuros proyectos del estudio de la aplicación de la matemática a otras ramas del conocimiento.

El desarrollo del presente trabajo, es de gran importancia en el plano personal, para el perfeccionamiento de los conocimientos matemáticos, pero sobre todo para poder dar solución y respuesta a las interrogantes de la utilización del conocimiento matemático en la vida, pues esto contribuirá a una mayor motivación por parte del estudiante al estudio de la matemática, ya que es muy bien sabido que aprendemos con mayor facilidad , rapidez y con alta probabilidad de lograr aprendizajes significativos, cuando asociamos y aplicamos lo que nos imparten, y así lo afirma: SANCHEZ HIDALGO, Efraín (1969) "Mediante las percepciones, adquiere el individuo conciencia del mundo de los objetos y sucesos que lo rodean... El maestro debe proporcionar oportunidades de práctica para que el alumno descubra los procedimientos y desarrolle su capacidad para responder rápida y exactamente cuando sea necesario". Pág. 508-509.

La tarea del docente no radica sólo en dar a conocer los contenidos, sino asegurarse de que el alumno aprenda y para ello debe buscar la manera de hacerle más fácil su aprendizaje. Si se conoce que de manera asociativa y práctica el alumno aprende más eficazmente, entonces el docente debe enseñarle utilizando recursos enfocados a esta manera. Por todo esto se presenta este trabajo, para que el docente lo use como herramienta de enseñanza y en la misma medida, para que el estudiante lo use en su proceso de aprendizaje.

Además, la intención de este trabajo está dirigida a producir un material que no se quede en el simple cumplimiento de un requisito académico, sino que se elaboren textos de consulta, materiales que colaboren y que le sirvan al docente o al alumno y hasta a ambos a la vez, en su respectiva participación en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es decir, se busca elaborar trabajos que sean utilizados frecuentemente, en el caso de la presente producción, éste podrá ser utilizado por el docente de grados superiores a la segunda etapa de Educación Básica, pues se presentarán ejemplos de aplicación de la matemática desde esos niveles hasta el cálculo avanzado, para que lo use demostrándole al estudiante unos casos de aplicación de la matemática (a la economía en este caso).

También podrá ser utilizado por el estudiante de Educación Media, diversificada y Profesional de acuerdo a sus necesidades.

5.- LIMITACIONES:

En la realización de cualquier trabajo es muy común tener que afrontar y superar obstáculos y dificultades para llegar a su culminación, estas limitaciones son de órdenes muy variados: económicos, teóricos, de tiempo, etc.

El presente trabajo no podía escapar de esta situación y la principal limitación y dificultad es la de adecuar el contenido teórico de la aplicación de la matemática a la Economía a un contexto educativo, es decir, existen muchos materiales de la matemática aplicada a las ciencias económicas pero la intención del presente trabajo no es hacer la misma presentación del contenido que en ellos, la idea es presentar la información de una manera más didáctica y desde los niveles más bajos del contenido matemático, hasta los más complejos, de manera que el docente encuentre ejemplos sencillos de la aplicación de la matemática en problemas económicos y los utilice en su práctica educativa.

Además del docente, que el alumno encuentre en el presente trabajo los contenidos de manera clara y sencilla y con ejemplos de cada tema, es decir, que le sirva en su proceso de aprendizaje.

Por lo tanto la principal limitación se encuentra en la elaboración de problemas sencillos para cada núcleo temático.

CAPITULO II

Marco Teórico

- **Antecedentes:**

En la mayoría de las ocasiones, lo ideal es realizar un trabajo nuevo, que no existan otros con la misma temática, pues lo hace más novedoso y de difícil ejecución, pero también es cierto que no es menos importante mejorar trabajos ya existentes y hacerlos más adecuados al punto de vista del investigador.

Si bien es cierto que son muchas las publicaciones de matemática financiera o matemática aplicada para Administradores, que existen en la actualidad, su enfoque no es el mismo que se le dará en el presente trabajo.

Los trabajo existentes de Matemática Financiera son dirigidos a enseñar Cálculo Matemático y muy poco a la aplicación de la matemática a las Finanzas, aspecto éste que diferencia el presente trabajo de dichas publicaciones.

Sin embargo con ideas similares, se encuentra de antecedente al presente trabajo, los Módulos Instruccionales de Matemática para Estudiantes de la U.N.A. y los Módulos Instruccionales para la Enseñanza del Cálculo Diferencial dirigida para Estudiantes de Administración realizado por VERA, Miguel.

- **Bases Teóricas:**

A. Bases Pedagógicas:

***1.- Ideas Pedagógicas de la Enseñanza*:**

Es muy importante para el educador definir claramente la educación y la enseñanza, distinguiendo con precisión los conceptos, pues no siempre se educa mediante la enseñanza sistemática, así como no sólo mediante ella se educa.

La Educación, como sabemos, es una palabra que corresponde tanto al proceso de educar como al resultado de ese proceso. Enfocar la educación como resultado es analizar los fines del proceso educativo.

Para algunos educar es desarrollar lo innato; es favorecer la realización de las potencialidades contenidas en el joven, ser que es sometido al proceso educativo. Es hacer aflorar las tendencias y desarrollar las aptitudes.

Al vivir nos educamos. El medio exterior nos va presentando, día a día, situaciones-estímulo que, percibidas por nosotros, asimiladas y reelaboradas, van paulatinamente alterando, para bien, nuestras ideas, sentimientos y acciones. Por el contrario, ese mismo ambiente puede también presentarnos situaciones-estímulo negativas, que se transforman, dentro de nosotros, en experiencias "deseducativas", llevándonos a formular falsas ideas, estructurando prejuicios, impulsándonos a actuar en forma poco constructiva o hasta destructiva, o también dando origen, en nuestra sensibilidad, a sentimientos y emociones que perjudican el desarrollo armónico de nuestro ser o nuestra adaptación eficiente a los medios físicos, social y cultural.

Esas experiencias, educativas o no, pueden provenir de las personas más diversas y de las situaciones más variadas. Una conversación, un libro, una película, una obra de teatro, una noticia en la prensa, una carta, o un programa de televisión pueden tener ese efecto, modificarnos. Sin embargo, como el medio social desea que aprendamos ciertas ideas, que dominemos algunas técnicas y que estructuremos determinadas actitudes para desempeñar bien nuestros papeles en los diversos grupos a los que pertenecemos – grupo familiar, profesional, religioso, político, etc. – surge entonces la enseñanza, o sea, el esfuerzo educativo deliberado, consciente y sistematizado. Es tradicional, pues, distinguir la educación sistemática de la educación asistemática; la enseñanza escolar esta relacionada con la primera categoría, o sea, con las experiencias adquiridas sistemáticamente.

Contrariamente a la educación, - que tiene siempre, carácter positivo – la enseñanza puede referirse a experiencias positivas como negativas. Tanto se puede enseñar a ser buen hijo, un profesional competente, un fiel cumplidor de sus deberes y derechos, como se puede, por medio de la enseñanza, reparar un hábil falsificador, un eficaz tramposo, un excelente carterista, etc.,. Hasta a veces la intención de quien enseña es buena, pero su ineficiencia técnica puede provocar un aprendizaje erróneo.

Cuando se divulgaron los trabajos de los fisiólogos en el campo de los reflejos condicionados, los educadores consideraron la enseñanza como una técnica capaz de

formar una serie de condicionamientos, una cadena de reflejos condicionados. De ahí que la expresión “enseñar es formar hábitos”.

Posteriormente, surgió la definición: “enseñar es distinguir y dirigir técnicamente el aprendizaje”. Esta posición, aceptada casi unánimemente por quienes se dedican a los estudios pedagógicos, pone de relieve el hecho de que el proceso de enseñar tiene, como corolario obligatorio , el de aprender.

Siendo ciencia aplicada, la técnica nos dice que, para enseñar, es necesario conocer las ciencias de la educación y saber emplear sus conclusiones en el momento oportuno y en las condiciones adecuadas. Pero siendo la enseñanza una tarea compleja y llena de matices profundamente dependiente de la naturaleza de la materia que se ha de enseñar y, sobre todo, altamente subordinada a las peculiaridades personales del que aprende, es también un arte, pues exige inspiración y alta creatividad. Cada clase, cada sesión de estudio, cada tarea que se propone el alumno, debe tener ese toque artístico, esa inspiración creadora para realizar, de hecho, el ideal estético y creativo de una auténtica obra de arte.

De todo lo anteriormente expuesto se describen ciertos principios que deben guiar al docente para obtener un aprendizaje auténtico:

- Debe facilitar la comprensión total inicial, incentivando y orientando al alumno.
- Para facilitar la comprensión total, debe presentar, el Estímulo en forma adecuada (con claridad, precisión, simplicidad, etc.).
- Si el aprendizaje es complejo, debe descomponerlo en sus elementos.
- Para fijar la relación Estímulo-reacción, debe hacer que el alumno repita la respuesta correcta.
- Si la respuesta es incorrecta, debe presentar nuevamente el estímulo de otra manera, para facilitar su comprensión.

2.- Precursores de la enseñanza-aprendizaje:

Para el desarrollo de cualquier trabajo dirigido a la enseñanza hay que tomar en cuenta los aspectos e ideas que grandes pensadores dedicados a mejorar la enseñanza, luego de sus grandes estudios, han establecido como guía para lograr una educación efectiva. Por

todo esto se deben tener presentes las ideas de COMENIO, quien afirmaba que el objeto y fin de la educación, es hacer que los seres humanos se parezcan a Cristo. Esto implica preparación para la vida, y no sólo para una profesión. Esto implica además, una correspondencia entre la acción y el ideal; la virtud es el corazón del proceso educativo. Y para el logro de dicha idea, propone su método pedagógico el cual puede resumirse en nueve principios básicos: 1.- La naturaleza actúa en el momento oportuno; 2.- La naturaleza prepara el material, antes de empezar a darle forma; 3.-La naturaleza elige un sujeto apropiado para actuar sobre él o lo somete primero a un tratamiento adecuado para convertirlo en tal; 4.- La naturaleza no es confusa en sus operaciones, sino que, al progresar, pasa distintamente de un punto a otro, 5.- En todas las operaciones de la naturaleza, el desarrollo viene desde adentro, 6.- En sus procesos formativos, la naturaleza comienza por lo universal y termina por lo particular. 7.- La naturaleza no salta, sino que avanza paso a paso. 8.- Si la naturaleza comienza algo no lo abandona hasta haber completado la operación y 9.- La naturaleza evita cuidadosamente los obstáculos y las cosas que pueden causar daños.

En el estudio sobre los pensamientos educativos de grandes pedagogos, no se pueden olvidar las espectaculares tendencias de ROUSSEAU, para quien el principio y el fin de la educación no era el adulto, sino el niño, éste tenía sus propios interese y vivía en su propio mundo, y sus valores eran completamente distintos de los de los adultos. La sociedad se había equivocado al considerar absolutos los patrones educacionales. Estos eran sólo postulados, más importante que la sociedad era el individuo, cuya integridad se debía salvaguardar. Rosseau como muchos pensadores progresistas que lo siguieron, creía que, en educación, se debe comenzar por el presente. La escuela no es una preparación para la vida; es la práctica de la vida. Se debe, sobre todo, proteger al niño de los vicios de las sociedades, a fin de que sus virtudes puedan desarrollarse.

Otro pensador cuyos aportes hay que tomar en cuenta en cualquier estudio pedagógico es Johann H. Pestalozzi, cuyos ideales pedagógicos se basan en su filosofía social. Al igual que Comenio y Kant, tenía tendencias utopistas: quería crear una sociedad realmente ética, en la que se adorara a Dios se reconociera la moral y se estimulara el espíritu creador del hombre.

Una de las ideas más importantes del pensamiento de Pestalozzi era la importancia de las situaciones concretas, pues opinaba que lo que se ve se recuerda más vivamente que lo que se oye. Por eso, en la enseñanza del lenguaje, comenzaba con objetos, como manzanas y árboles. Estaba seguro de que el conocimiento pasaba de lo concreto a lo abstracto. Hizo también, varias innovaciones: usó pizarras y lápices y enseñó las letras del alfabeto por medio de tarjetas. Además, en lugar de enseñar a un alumno por vez, organizó clases específicas. Pestalozzi enseñaba que debemos encarar la educación desde el punto de vista de la integración: la cabeza, la mano y el corazón deben desarrollarse en armonía. La educación general es más importante que la educación específica, pues todos enfrentamos la vida en su complejidad.

La importante idea de que la mente tiene tres funciones: sabe, siente y quiere, se le debe a otro pedagogo cuyos aportes también hay que tomar en cuenta y es Johann Fr. Herbart. Según él la voluntad no es una facultad aparte; es el deseo subyacente en nuestros procesos mentales y en nuestras reacciones emocionales.

Otro aporte muy importante en el presente estudio, son las ideas de Jhon Dewey, para quien la preocupación radicaba en el alejamiento de los métodos pedagógicos de los requerimientos de los métodos científicos. Esta razón lo lleva a concebir una Escuela-laboratorio donde todo gire alrededor de construcciones que involucren la experiencia, entendida a la vez como el ensayar y el saber, como la prueba y el conocimiento.

La experiencia educativa es una reconstrucción constante de aquello que el niño hace y su estructura a partir de lo que vive. Esto lleva a la reconstrucción permanente del proceso educativo. Un buen programa educativo está relacionado con las preocupaciones y con las experiencias personales del niño. Por tal razón, no existe jerarquía en los estudios. Cada experiencia es nueva. Además de que ninguna instrucción puede separar el saber del hacer, y éste el sentido de su énfasis en el trabajo manual. La escuela es una comunidad oficiosa, donde el orden y la disciplina se desarrollan a partir del trabajo que el niño realiza.

Es importante destacar además las ideas de María Montessori, pues el método Montessori otorga un papel primordial a la educación de los sentidos, para cada uno de los cuales hay un material específico y una actividad motriz, este es un método de investigación y de trabajo donde el niño actúa con libertad y le permite crear un medio

adecuado para experimentar, actuar, trabajar, asimilar y nutrir su espíritu. Este método de aproximación al mundo es válido para los conocimientos.

El punto de vista pedagógico es muy importante a la hora de guiar la realización de un trabajo dirigido a la enseñanza, pero no en grado menor el aspecto científico también debe ser tomado en cuenta, para ello es necesario abordar las teorías conductuales y cognoscitivas del aprendizaje.

Entre las teorías ***conductuales*** encontramos al condicionamiento clásico de Pavlov-Watson, donde se condiciona el reflejo condicionado como la unidad básica del aprendizaje. Se considera que el aprendizaje consiste en la asociación o apareamiento de un estímulo condicionado (EC) y un estímulo incondicionado (EI), en forma repetida y sucesiva, hasta que el EC por sí solo llega a provocar o evocar la misma respuesta.

Continuando con las teorías conductuales se presenta la Teoría Conexionista del Aprendizaje de Thorndike. Para éste el aprendizaje era fundamentalmente una cuestión de resolución de problemas. Considera que la forma más característica de aprendizaje ocurre a través de un proceso de ensayo y error, o como lo denominó más tarde, un proceso de selección y conexión. Establece una serie de Leyes sobre el aprendizaje: la primera que denomina Ley del Efecto, según la cual, cuando se establece una conexión entre una situación y una respuesta, las fuerza de dicha conexión aumenta o se debilita según el efecto gratificador o perturbador de la misma. Una segunda ley denominada Ley del ejercicio, la que se refiere al fortalecimiento de las conexiones mediante la práctica (ley del uso) y al debilitamiento de las conexiones, cuando la práctica se interrumpe. La tercera ley se denomina Ley de Disposición o Aprestamiento, de acuerdo con la cual todo aprendizaje se relaciona con una actitud, o disposición del organismo. Las actitudes o disposiciones humanas generalmente están enmarcadas dentro de las características de la cultura a la cual pertenece el individuo. La actitud o disposición determina no sólo lo que hará la persona, sino qué es lo que le producirá satisfacción o fastidio.

Continuando con la Teoría conductual del aprendizaje del Condicionamiento Operante de Skinner, quien considera que hay dos tipos de conducta que se corresponden con dos tipos de aprendizaje, de la siguiente manera: la conducta respondiente ocasiona un aprendizaje por condicionamiento clásico y una conducta operante ocasiona un aprendizaje por condicionamiento operante.

La conducta respondiente, conducta refleja o conducta de reacción, abarca todas las respuestas de los seres humanos u organismos animales que don determinados por la acción de los estímulos.

Por conducta operante se entiende todo aquello que hacemos para producir un cambio en nuestro mundo exterior. Es una conducta emitida por el sujeto y controlada por sus efectos o consecuencias, que constituyen factores reforzadores.

El aprendizaje por condicionamiento clásico, se fundamenta en el concepto de conducta respondiente y consiste en un proceso de asociación a través del cual, un estímulo antes neutral adquiere el poder de suscitar una respuesta que originalmente era causada por otro estímulo.

El condicionamiento operante se concibe el aprendizaje como producto de las consecuencias de las conductas emitidas por el organismo, podemos observar que el sujeto que aprende es considerado un agente activo que opera sobre el ambiente, promoviendo efectos sobre su mundo exterior.

Entrando ahora en las teorías ***Cognoscitivas*** del aprendizaje encontramos la teoría del procesamiento de la información cuyo punto más sobresaliente es el grado en que los alumnos se consideran procesadores activos de la información en la medida en que el individuo sea capaz de evaluar críticamente la información, y de pensar y comprender contenidos nuevos, integrará más fácilmente esa información en las estructuras de conocimiento ya existentes y podrán aplicarla a situaciones nuevas. Según esta teoría en la resolución de problemas se cumplen los siguientes pasos:

- Entender el problema con precisión.
- Identificar claramente la meta que conducirá a la solución.
- Identificar las condiciones o datos del problema.
- Diseñar un plan operativo que lleve a la solución.

Esta importante teoría tiene las siguientes implicaciones pedagógicas: - El docente deberá tener presente que la percepción, el aprendizaje y la memoria constituyen un continuo de procesamiento, unificado por los principios internos que operan en el sujeto. – La atención relaciona la percepción con la acción y con las necesidades y motivos de que aprende. – Las características ambientales se constituyen en factores que faciliten o retardan el desarrollo cognitivo del niño.

Encontrando ahora otra teoría cognitiva importante como lo es la del Aprendizaje significativo de Ausubel, según la cual existen distintos tipos de aprendizaje como Memorístico o por repetición, significativo, por recepción y por descubrimiento.

Continuando con la teoría del aprendizaje Conceptual y por descubrimiento de Bruner, para quien el ser humano desde el inicio de su desarrollo, comienza a formarse representaciones sobre sus acciones y sus experiencias. Por lo que aparece el aprendizaje por descubrimiento que consiste en la transformación de hechos o experiencias, de manera que se va más allá de la información recibida. En este aprendizaje el estudiante tiene que evaluar toda la información que le viene del ambiente, sin limitarse a repetir lo que le es dado.

3.- Enseñanza Individualizada:

La enseñanza individualizada se pude definir como el tipo o especie de instrucción que atiende las necesidades de cada estudiante desde el nivel en que se encuentra y propicia su desarrollo libre de presiones, de competencias y tutelares continuos, contribuyendo a la adquisición, por parte del alumno, de un sentido de independencia mediante la evaluación.

Se basa fundamentalmente en una concepción de la educación como proceso de separación individual, mediante el cual "... se intenta que el sujeto vaya desarrollando, y haciendo efectivas sus propias posibilidades, que vaya disminuyendo o neutralizando sus propias limitaciones y que vaya descubriendo los tipos de actividad y relaciones más acordes con sus características propias".

La enseñanza individualizada se apoya en la comprensión de los intereses y necesidades de cada grupo de alumnos como ente bio-psico-social para ofrecer contenidos y experiencias de aprendizaje adecuadas a las singularidades del mismo.

La pedagogía moderna y dentro de ella la Enseñanza, pretende combatir y superar esa concepción anticuada del alumno medio, bueno o malo que no toma en cuenta las diferencias individuales en aptitud, rendimiento, intereses y emotividad, que demandan un trato distinto para cada alumno, tomando en cuenta que ... " cada uno de los alumno es algo peculiar y característico, con una cualidades que, a pesar de ser posesión común, de todos, se apartan de una norma ideal en grano matiz haciendo patente la condición humana de

constituir cada uno de un microcosmo un pequeño y gran universo de capacidad y potencialidades variado y desemejante respecto a los otros".

La enseñanza individualizada cumple con los principios básicos de:

- **Libertad**

Se sedimenta en la autonomía de las personas y gracias a ésta el hombre supera la coacción del mundo que lo rodea. Sin la libertad sería imposible hablar de la verdadera individualidad, ya que su ausencia obligaría a seguir unos pasos estereotipados.

- **Acción**

Una verdadera educación requiere una actividad y si nos concretamos al campo de la instrucción el asunto aparece más claro. Para ello hay que partir del aprendizaje y no de la enseñanza, ya que el primero está en el campo de los objetivos y la segunda en el terreno de los medios.

Es preciso en el sistema de hilvanación, que promueve los intereses del alumno. Se ha dicho que la motivación encuentra su máxima especificación en el interés y no hay que olvidar que la motivación es la causa formal del aprendizaje.

El principio de la acción nos lleva a un sistema en el que el sujeto debe conocer los objetivos que se persiguen ya que no puede andar ciego, sin saber a dónde va, los objetivos son los productos de aprendizaje del alumno y de los únicos que por sí solo dan significado al planteamiento y a la selección del materia.

- **Responsabilidad.**

Una vez que el alumno ha hecho uso de su libertad y ha elegido el trabajo adecuado a su individualidad, está obligado a responder de aquella elección, y más aún a compensarla si la actividad desarrollada no ha conseguido los objetivos que libremente se eligieron.

El sujeto que se instruye mediante un trabajo individualizado, debe conocer el significado de la actividad independiente y la autodisciplina para poder responsabilizarse de aquella parte de la realidad que les incumbe.

4.- Enseñanza Programada:

La enseñanza programada es un método pedagógico y sistemático que se apoya en bases experimentales. Este método se caracteriza por las siguientes notas:

- La búsqueda del orden de presentación eficaz.
- La adaptación al ritmo del alumno.
- La corrección inmediata y punto por punto de lo adquirido.

Es necesario evitar confundir enseñanza programada y enseñanza automada. Es el programa lo que enseña no la máquina. La calidad del buen programa no se revela hasta después de un largo uso. La máquina por el contrario, empezando por el simple manual programado, provoca, siempre una reacción de curiosidad, suscitando comportamientos afectivos, permite una demostración inmediata y también la inevitable y deliciosa deserciones de la cultura, la tolerancia, el valor humano del profesor, etc.

5.- Enseñanza Asistida por computador:

La instrucción asistida por ordenador es una herramienta que permite al alumno resolver ciertos problemas, que requieren potencia de cálculo, adquirir cierto dominio de una técnica de programación.

En una clase escolar, el maestro decide qué tema enseñar, lo presenta a los alumnos (esperamos que requiriendo de su participación, elevando la motivación, presentando ejemplos adecuados y utilizando todas las técnicas didácticas con las que su oficio y experiencia le han provisto). La etapa siguiente es asignar ejercicios y actividades para que los alumnos practiquen el conocimiento presentado.

La enseñanza asistida por el computador tiene los siguientes objetivos:

1. Facilitar al estudiante herramientas que sirvan no solamente para verificar o fortalecer conceptos aprendidos, sino también como vehículo de adquisición de la información, suficientemente flexible y adaptable en la medida de lo posible, al nivel inicial y los progresos del estudiante.

2. Estimular el intercambio de información entre alumnos que trabajan de manera independiente en ordenadores, relacionados entre sí.
3. Analizar los medios de evaluación de los progresos del alumno, bien en forma asistida por el profesor, o bien de manera relativa.

La escuela tradicional se basa en la mayoría de los casos, en suposiciones como: La escuela es el entorno donde los alumnos aprenden; Los maestros transmiten el conocimiento a los alumno; Esta transmisión se realiza en paralelo para grupos, de alumnos estructurados en clases relativamente homogéneas.

La enseñanza asistida por el computador sostiene que: El aprendizaje puede realizarse en la escuela, la casa, la empresa y en cualquier otro ambiente socialmente adecuado; El maestro debe transformarse en un administrador de recursos educativos (uno de los cuales, y muy importante es el maestro mismo) debe facilitar los procesos de aprendizajes del alumno; Cada alumno progresará de acuerdo a un programa individual de estudios, definido de acuerdo a su potencial, a su nivel, a sus inclinaciones y a las posibilidades y necesidades de la sociedad.

6.- Didáctica de la Matemática:

Una perspectiva teórica que propone el desarrollo, de una rama del conocimiento relativamente autónoma, designada como Didáctica de 1as matemáticas. Esta propuesta tuvo su origen a raíz de la actividad desplegada básicamente por matemáticos, En los Institutos de Investigación sobre la enseñanza de las matemáticas (IREM) creados en Francia luego de la reforma Educativa de fines de los años 60, con la que se impuso la enseñanza de la matemática moderna.

El objeto de estudio de la Didáctica de matemáticas es la situación didáctica definida por Brousseau corno...

“Un conjunto de relaciones establecidas explicita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constituciones.

El objeto fundamental de la didáctica de Las matemáticas es averiguar como funcionan las situaciones didácticas es decir, cuales de las características de cada situación de aprendizaje resultan determinantes para la evoluci6n del comportamiento de los alumnos y, subsecuentemente, de sus conocimientos. Esto no significa que s6lo interese analizar situaciones didácticas exitosas. Incluso si una situación didáctica fracasa en su prcp6sito de enseñar algo, su análisis puede constituir un aporte a la didáctica, si permite identificar los aspectos de la situaci6n que resultaron determinantes de su fracaso.

Se plantea entonces al docente la elección de una estrategia de aprendizaje. Esta elecci6n (que cada uno hace al menos implícitamente) está influida por numerosas variables:

El punto de vista del docente sobre la disciplina enseñada (¿qué es la matemática?, ¿Que es hacer matemática?), su punto de vista sobre los objetivos generales de la enseñanza y sobre aquellos específicos de la matemática, su punto de vista sobre los alumnos (sus posibilidades, sus expectativas), la imagen que el docente se hace de las demandas de la institución (explícitas, implícitas o supuestas), de la demanda social o también de la de los padres.

Muy esquemáticamente se describirán tres modelos de referencia:

1. EL MODELO LLAMADO “NORMATIVO” (Centrado en el contenido):

Se trata de aportar, de comunicar un saber a los alumnos. La pedagogía es entonces el arte de comunicar, de hacer pasar un saber.

- El maestro muestra las nociones, las introduce, provee los ejemplos.
- El alumno, en primer lugar, aprende, escucha, debe estar atento; luego imita, se entrena, se ejercita, y al final aplica.
- El saber ya está acabado, ya construido.

Se reconocen allí los métodos a veces llamados dogmáticos (de la regla a 1as aplicaciones) o mayeúticos (preguntas/respuesta).

2. EL MODELO LLAMADO “INICIATIVO” (Centrado en el alumno)

Al principio se le preguntaba al alumno sobre sus intereses, sus motivaciones, sus

propias necesidades ,su entorno.

- El maestro escucha al alumno, suscita su curiosidad le ayuda a utilizar fuentes de información, responde a sus demandas, lo remite a herramientas de aprendizaje (fichas), busca una mejor motivación (medio: cálculo vivo de Freinet, centros de interés de Decroly].
- El alumno busca, organiza, luego estudia, aprende (a menudo de manera próxima a lo que es la enseñanza programada).
- E1 saber está ligado a las necesidades de la vida, del entorno (la estructura propia de este saber pasa a un segundo plano).

Se reconocen allí las diferentes corrientes llamadas "métodos activos".

3. EL MODELO LLAMADO "APROXIMATIVO" (CENTRADO EN LA CONSTRUCCIÓN DEL SABER POR EL ALUMNO):

Se propone partir de "modelos", de concepciones existentes en el alumno y "ponerlas a prueba" para mejorarlas, modificarlas o construir nuevas.

- El maestro propone y organiza una serie de .situaciones con distintos obstáculos (variables didácticas dentro de estas situaciones), organiza las diferentes fases (investigación, formulación, validación, institucio-nalización).
- Organiza la comunicación de la clase, propone en el momento adecuado los elementos convencionales del saber, (notaciones, terminología).
- El alumno ensaya, busca, propone soluciones, las confronta con las de sus compañeros, las define o las discute.
- E1 saber es considerado con su lógica propia.

Notemos que ningún docente utiliza exclusivamente, uno de los modelos; que el acto pedagógico en toda su complejidad, utiliza elementos de cada uno de los modelos..., pero que, a pesar de todo, cada uno hace una elección, consciente o no y de manera

privilegiada, de uno de ellos.

Agreguemos que el estudio de estos modelos provee una buena herramienta de análisis de las situaciones didácticas y de reflexión para los docentes en formación.

7.- Contextualización y Aplicabilidad del contenido:

Pedagógicamente, ya son varios los pensadores que concuerdan en el hecho de que son de gran ayuda las situaciones concretas y la aplicación cotidiana de los contenidos para el logro de una aprendizaje efectivo y significativo, así lo afirmaba Pestalozzi "las situaciones concretas son de gran importancia, pues lo que se ve, se recuerda más vivamente que lo que se oye". Igualmente afirmaba que el conocimiento pasaba de lo concreto a lo abstracto.

Así mismo, se encuentra la ideología de Jhon Dewey, quien proponía una Escuela-laboratorio donde todo sean construcciones que involucren la experiencia, pues consideraba que la experiencia educativa es una reconstrucción constante de aquello que el alumno hace y se estructura a partir de lo que vive. Por esto para enseñar se debe empezar con una experiencia del estudiante y dirigir esa experiencia hacia la construcción del conocimiento deseado.

También se encuentra en esta ideología las propuestas de Thorndike con la Teoría Conexionista, pues en ella identifica el aprendizaje por ensayo y error, la ley del efecto o conexión de algo vivido con el conocimiento, lo que confirma que si el conocimiento está asociado con situaciones experimentables por el estudiante se fijarán con mayor facilidad.

8.- La aplicación de la matemática en el campo económico:

Desde el comienzo de la Historia, los avances culturales y científicos han dependido del uso de símbolos. A medida que avanza el conocimiento en una disciplina, los símbolos utilizados se hacen cada vez más abstractos.

Cuando los conceptos a que se refieren los símbolos representas conceptos

esencialmente cuantitativos es cuando las ciencias matemática resultan útiles, y de hecho indispensables, para analizar sus relaciones. En las matemáticas, las definiciones o axiomas y los supuestos se establecen con precisión en forma simbólica, y el análisis se realiza por deducción a fin de obtener conclusiones. En las matemáticas aplicadas difieren de las matemáticas puras en un aspecto muy importante: en la matemática pura los símbolos representan conceptos abstractos cuyas propiedades se fijan por definición, mientras que en la matemática aplicada muchos símbolos corresponden a variables que se observan en el mundo real; las propiedades de tales variables tienen que determinarse por observación y no por definición abstracta, y luego enunciarse en forma matemática.

Dado que la Economía trata de conceptos que son de naturaleza esencialmente cuantitativa, por ejemplo: precio, costo, escalas de salarios, inversiones, ingresos y utilidades, gran parte del análisis económico es ineludiblemente matemático. Las matemáticas proporcionan una estructura sistemática lógica dentro de la cual pueden estudiarse las relaciones cuantitativas.

Las matemáticas hacen que el economista sea preciso al definir variables pertinentes, al plantear con claridad las hipótesis formuladas, al establecer lógicamente el desarrollo del análisis, y al considerar un número de variables mayor del que sería posible expresar verbalmente. El análisis matemático toma las definiciones y supuestos tal como se dan, y obtiene las conclusiones que se desprenden lógicamente de ellos. Por lo tanto, el análisis matemático es por naturaleza lógico y no empírico, y puede considerarse responsable de las conclusiones sólo en cuanto a su validez lógica, dadas las definiciones y supuestos en que se basan aquellas, y no en cuanto a su exactitud empírica.

La matemática en la economía es una de las partes más útiles e interesantes de la matemática aplicada, sobre todo en los tiempos actuales, cuando todo mundo aspira a lograr con su dinero, el máximo de beneficios como comprador, y óptimos rendimientos como inversionista. Esto demanda cada vez más un mayor número de profesionales y de personas que sean capaces de efectuar cálculo financieros, para llevar a cabo operaciones económicas con seguridad y propiedad para obtener buenos resultados.

Es tanto que el estudio y aplicación de la matemática a las finanzas, se reduce a algo tan simple como disponer y saber utilizar los medios y elementos necesarios para trasladar en el tiempo y de manera simbólica, las cantidades de dinero que intervienen en cualquier

operación de carácter financiero.

La matemática en las finanzas es una ciencia de aplicación inmediata, en el sentido de que las personas que la estudian encuentran una fácil relación entre los modelos matemáticos en que se basa y el mundo en que tales personas viven. La mayoría de ellas compran autos, una casa u otro tipo de artículo a plazos, solicitan créditos, contratan pólizas de seguro, etc. Asimismo, eluden la depreciación de sus ahorros invirtiendo, en fin son muchas las operaciones económicas que en las personas realizan cotidianamente y en gran cantidad de ocasiones sin conciencia de la operación financiera que efectúa.

De igual manera son la mayoría de los estudiantes los que realizan cálculos matemáticos de manera mecánica y sin saber en qué los pueden aplicar y utilizar, situación ésta que reduce la motivación de su parte para adquirir dichos conocimientos. Es por esto que la aplicación de la matemática en la economía se hace necesaria para el desarrollo de la vida social del estudiante.

BASES PSCOLÓGICAS:

1.-El Aprendizaje:

Es el proceso que complementa la maduración. Comprende todos aquellos cambios o modificaciones de conducta relativamente permanentes, que son producto de la experiencia, el adiestramiento o la práctica.

Es el proceso en virtud del cual una actividad se origina o se cambia a través de la reacción a una situación encontrada.

Es el proceso por el que se adquiere la capacidad, de modificar favorablemente las tendencias de reacción debido a la experiencia previa, particularmente la construcción de una nueva serie de reacciones motoras completamente coordinadas.

Desde el punto de vista educativo, el aprendizaje, debe conducir a:

- Adquisición de nuevas formas de conducta socialmente deseables.
- Eliminación de conductas no favorables pare el individuo o la sociedad.
- Sustitución de conductas.
- Mejoramiento o afirmación de la conducta deseable.

2.- Importancia del Aprendizaje para el hombre.

El aprendizaje es un proceso de gran importancia para el hombre y por consiguiente para la sociedad, en la cual éste se desarrolla ya que el aprendizaje es el que permite al hombre interiorizar todas aquellas conductas que le permiten vivir en la sociedad.

También es de mucha importancia para el hombre ya que a través de éste el individuo puede adquirir destrezas y conocimientos en determinadas áreas que son lo que le permite subsistir.

Sin el aprendizaje el hombre no tendría ningún tipo de educación y cultura, no podría vivir en sociedad, ya que para lograr y adquirir todas estas cosas el hombre debe aprender e interiorizar ciertas conductas y hábitos, que sean socialmente aceptados para poder convivir con las demás personas de su especie.

Si no existiera el aprendizaje el hombre actuaría, por instinto y tarde o temprano llegaría a la extinción de la especie humana.

3.- Tipos de Aprendizaje:

Para plantear los tipos de aprendizaje, los estudiaremos desde dos puntos de vista:

a. POR LAS CONDICIONES PRESENTES EN EL APRENDIZAJE.

1. Por condicionamiento Clásico: En este tipo de aprendizaje se busca una rápida respuesta basada principalmente en el estímulo, donde el aprendizaje no está relacionado en ningún momento con el comportamiento del individuo, las respuestas son involuntarias, pues este aprendizaje actúa a través del Sistema Nervioso Autónomo.

2. Por Condicionamiento Operante:: En este aprendizaje, la respuesta es voluntaria del individuo, también en este aprendizaje son de Fundamental importancia para el logro de una respuesta, factores como la recompensa o el castigo.

3. Aprendizaje por Observación: Este aprendizaje se presenta cuando existe una identificación con lo que se va a aprender, pues aparece cuando el individuo aprende a imitar a través de la experiencia los problemas de la realidad.

4.- Aprendizaje por Habituación: Es la Forma más simple de aprendizaje, pues surge cuando el individuo o animal repite gran cantidad de veces algo

impuesto, logrando al final hacerlo algo normal y cotidiano.

5. Aprendizaje Serial: Es un aprendizaje que afecta a los comportamientos seriales motores, es decir, cuando se logre coordinar las secuencias motoras para llegar a realizar una habilidad específica.

b. POR LA FORMA EN QUE SE DA EL APRENDIZAJE:

1. Aprendizaje Motor: Las actividades motrices desempeñan un papel muy importante en la vida del individuo. Vivir exige cierto grado indispensable de rapidez, precisión y coordinación de los movimientos. Tal vez por ser tan obvio, el desarrollo motor no ha recibido en la escuela la atención que merece, siendo esto más notable en el nivel de los grados elementales.

2. Aprendizaje Intuitivo: Es un tipo especial de aprendizaje, el cual es precedido por un período de observación y exploración del ambiente (especialmente es de los animales.

3. Aprendizaje Asociativo: Mucho de lo que el ser humano aprende se debe a su capacidad para memorizar, si repentinamente olvidáramos todas 1as asociaciones que hemos establecido en la vida, perderíamos nuestra condición de seres humanos. Memorizar es uno de los requisitos básicos en la vida del hombre.

El aprendizaje asociativo está íntimamente relacionado con el desarrollo de las percepciones, las cuales pueden definirse como sensaciones a las que se les, ha -adscrito un significado. De este modo cuando el niño oye cierto ruido, sabe que alguien está martillando, o cuando toca algo, puede decir que es tela, o cuando huele fruta puede reconocer que es un mango, etc.

4. Aprendizaje de Ocasión: Es un aprendizaje realizado de modo casual, sin salir del propio medio, es decir; sin esfuerzo o atención especial, o sin intención de aprender.

5. Aprendizaje Conceptual: La adquisición de conceptos y generalizaciones constituye una parte considerable del aprendizaje del hombre. El aprendizaje conceptual es un medio valioso de organizar la experiencia el proceso de desarrollar conceptos y generalizaciones, se extiende a lo largo de toda la vida.

E1 rasgo más notable del aprendizaje de conceptos y generalizaciones es su

acentuada dependencia de lo verbal. Elemento principal de dicho aprendizaje, tanto en su logro como en su aplicación, es la palabra. Empero, debe recordarse que existen ideas y generalizaciones que no son verbales. Éstas existen no sólo antes de surgir el lenguaje, sino en todas las etapas de la vida del individuo.

6. Aprendizaje en Masa: Es la memorización de series verbales relativamente largas, o formación de un hábito motor complicado, mediante la repetición ininterrumpida.

7. Aprendizaje Asociativo: En esta categoría incluimos todos aquellos aprendizajes que dependen en gran parte de la apreciación subjetiva del individuo, tal como intereses, actitudes, ideales, gustos, preferencias, apreciación estética, etc. La característica principal del aprendizaje apreciativo es la influencia notable de los factores emocionales.

8. Aprendizaje Global y por Partes: El aprendizaje logrado mediante dos métodos para recordar material o aprender hábitos, ya sea por repetición de todo el material o acto o ya sea por repetición de alguna parte hasta que se ha aprendido, procediendo luego con la siguiente.

9. Aprendizaje Creador: Todos los seres humanos tienen hasta cierto punto capacidades creadoras. Por consiguiente, la labor de creación no debe limitarse a algunos individuos considerados excepcionales. Casi todas las personas nacen con alguna capacidad para crear. Una de las funciones de la escuela consiste en proporcionen un ambiente que estimule el desarrollo de esas potencialidades creativas.

10. Aprendizaje Mecánico: Es el aprendizaje logrado por la pronunciación y observación repetida de una frase, estrofa, o de un largo párrafo de prosa o poesía, hasta recitarlos sin error, y sin tomar en cuenta el significado.

11. Aprendizaje Reflexivo: El aprendizaje reflexivo tiene gran significación en la vida del hombre. Su progreso se debe a su condición de ente de pensamiento. La actitud de indagación frente a los problemas puede desarrollarse o aprenderse.

4. Factores Individuales del Aprendizaje:

Para explicar los factores individuales de aprendizaje se explicarán como variables.

Las variables son aspectos o condiciones de un fenómeno cuyas características Fluctúan de una situación, a otra. Con respecto al aprendizaje, son ejemplos de variables: la inteligencia, la edad, el sexo, la experiencia previa, etc.

VARIABLES QUE INFLUYEN EN EL APRENDIZAJE

1.- Variables relacionadas con el sujeto que aprende:

a. Variables Biológicas: Papel de:

- El sistema nervioso y secreción endocrina.
- La maduración, la edad y el sexo.
- La psicomotricidad.

b. Variables cognoscitivas: Papel de:

- Los procesos sensopercetivos.
- La atención.
- La memoria.
- El pensamiento.
- La inteligencia.

c. Variables psicosociales: Papel de:

- Lenguaje.
- La comunicación.
- La motivación.
- La personalidad.

2. Variables relacionadas con la situación de aprendizaje:

Papel de:

- La Tarea o material de aprendizaje.
- Las estrategias y métodos.

- La transferencia de aprendizaje.
- Las características de los docentes.

VARIABLES BIOLÓGICAS: Hacen referencia a1 papel que desempeñan en el aprendizaje, los sistemas y procesos del organismo que están más íntimamente vinculados con la organización y funcionamiento de los fenómenos que intervienen en el aprendizaje. Dentro de estas variables tenemos:

EL SISTEMA NERVIOSO EN LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE:

Al referirnos a las características del cerebro humano, que permiten las excepcionales posibilidades de aprendizaje que posee nuestra especie, mencionamos cuatro áreas que, según los científicos, cumplen funciones, fundamentales en 1a organización y regulación de las funciones psíquicas superiores.

Las cuatro áreas consideradas son:

La Formación Reticular: Está formada por un entrecruzamiento de fibras nerviosas y de neuronas que constituyen dos sistemas: El sistema reticular ascendente S.R.A y el sistema reticular descendente S.R.D.

La F.R. está situada en el tronco cerebral. El sistema reticular Ascendente ejerce una acción activadora ascendente que culmina en importantes disposiciones a nivel de la corteza cerebral, con participación de la misma. Junto con los lóbulos Frontales, regula los procesos de la atención.

El Hipotálamo: Contiene numerosas neuronas, más densas en determinadas regiones donde constituyen núcleos.

Junto con el tálamo forma el diencéfalo. El hipotálamo está situado al lado de la hipófisis.

El hipotálamo cumple con las siguientes Funciones:

- Interviene en la iniciación, mantenimiento v cese de comportamientos

relacionados con necesidades corporales: hambre, sed, etc.

- Regula procesos relativos al equilibrio en el ambiente interno, esencial para el normal funcionamiento de las células.
- El hipotálamo recibe los efectos de otras partes del cerebro, de ahí que sea susceptible a la influencia del aprendizaje.
- Influye en el Funcionamiento visceral vinculado a las reacciones emocionales y al humor.
- Regula distintas necesidades, entre ellas, la sexualidad.

El Sistema Límbico: Está formado por el bulbo olfatorio y las Formaciones olfatorias, los núcleos amigdaloides y la formación del hipocampo.

Parte del sistema límbico está oculta en el uncus.

La Formación del hipocampo está situada en la profundidad de la fisura hipocámpica.

Anteriormente se creía que el sistema límbico se relacionaba exclusivamente con el sentido del olfato. En la actualidad se reconoce que interviene en los procesos fisiológicos de las emociones. A partir de estudios experimentales recientes se le asigna al hipocampo un papel importante En la transferencia de los recuerdos a la memoria a largo plazo.

Neocórtex o cerebro cortical: El cerebro humano consta de dos hemisferios simétricos unidos por el cuerpo calloso, cada hemisferio regula el lado opuesto del cuerpo, sin embargo, no son independientes en su acción.

Ante la lesión de un hemisferio cerebral, el otro puede llegar a sustituirlo en amplia medida.

Cada hemisferio cerebral tiene ciertas funciones respecto al Aprendizaje como:

- El hemisferio izquierdo es racional y el derecho es intuitivo.
- El hemisferio izquierdo es lógico y e1 derecho es analógico.
- El hemisferio izquierdo es secuencial y el derecho Es aglutinador.
- El hemisferio izquierdo responde e instrucciones verbales y el derecho a Instrucciones no verbales.
- El hemisferio izquierdo hace juicios objetivos, el hemisferio derecho

hace juicios subjetivos.

En Fin, son muchas les Funciones de cada hemisferio, pero esto no quiere decir que trabajen separadamente al contrario, pueden trabajar muy bien ambos al mismo tiempo.

LA SECRECION ENDOCRINA EN EL APRENDIZAJE:

Las glándulas endocrinas pueden influir directamente en la conducta. Dichas glándulas están situadas en distintas partes del cuerpo y segregan sustancias químicas llamadas hormonas que pasan directamente a la sangre. De acuerdo con Burk, las Funciones generales de la secreción endocrina son:

1. Acción sobre el metabolismo.
2. Acción morfogenética.
3. Acción sobre las funciones de reproducción.
4. Acción sobre la actividad nerviosa superior.
5. Acción que moviliza las defensas del organismo en situaciones de emergencia.

LA MADURACION, LA EDAD y EL SEXO:

La Maduración: Entendida como nivel de desarrollo, constituye una condición básica para el aprendizaje. Sin embargo, esta concepción acerca de la relación maduración aprendizaje, no es la única que se ha postulado en el campo de la sicología. Vygotski, en su obra titulada EL DESARROLLO DE LOS PROCESOS SICOLÓGICOS SUPERIORES, opina que la relación entre aprendizaje y desarrollo ha sido abordada en una forma metodológicamente confusa y considera que se han incorporado postulados, premisas y soluciones al problema, teóricamente vagas y carentes de evaluación.

La Edad y el Aprendizaje: Con frecuencia oímos que la gente dice "loro viejo no aprende a hablar”. ¿ Qué hay de cierto en esta afirmación popular?.

Para dar respuesta a esta interrogante resumiremos lo siguiente:

- Los primeros años de vida tienen primordial importancia para el aprendizaje del ser humano.
- Muchos aprendizajes guardan estrecha relación con el proceso de desarrollo y deben realizarse oportunamente.
- Todas las edades son buenas para aprender. Se aprende toda la vida.

Diferencias Sexuales y Aprendizaje: El sexo está determinado fundamentalmente por factores genéticos. La presencia de testículos en el varón y de Ovarios en la hembra, constituye los caracteres sexuales primarios.

Las diferencias que según Maccoby y Jacklin parecen tener comprobación empírica son:

- Ventaja Femenina en el ámbito de las aptitudes verbales.
- Superioridad masculina en aptitudes espacio-visuales y en aptitud matemática.
- Mayor incidencia de conducta agresiva en los varones.

Presentan como creencias populares que carecen de apoyo empírico en los estudios examinados, las siguientes afirmaciones:

- Las mujeres son más sociables y sugestionables.
- Las mujeres destacan en tareas sencillas y rutinarias mientras que los hombres se destacan en tareas complejas que requieren pensamiento analítico.
- Las mujeres tienen baja autoestima y escasa motivación de logro.

LA PSICOMOTRICIDAD EN EL APRENDIZAJE:

Una gran parte de 1a conducta del hombre es motriz incluso entes de nacer la criatura humana manifiesta movimientos variados y difusos. El ser humano dedica, en forma prominente, los primeros años de vida a desarrollar destrezas motrices fundamentales.

Las primeras destrezas de respuesta al organismo son como actos de conducta, están

representados por las reacciones motoras del niño.

En los primeros tres años las adquisiciones motrices del niño son considerables: en un comienzo, los movimientos son globales e incoordinados, poco a poco va adquiriendo una mayor coordinación, a través de la interacción desarrollo-aprendizaje.

Cada adquisición motriz tiene una significación tanto desde el punto de vista motor como psicológico.

Las adquisiciones psicomotrices a las cuales haremos referencia son las siguientes:

- La coordinación motora global.
- El esquema corporal.
- Estructuración espacial: lateralidad y direcciona1idad.
- Estructura temporal.

VARIABLES COGNOSCITIVAS: Las variables cognoscitivas, agrupan un conjunto de fenómenos y funciones que permiten al sujeto que aprende su vinculación con el medio circundante, el incremento de su capacidad para obtener, seleccionar y producir conocimientos que acompañan su actuación como ser pensante y creativo. Con relación a esta categoría de variables se presentará un análisis de:

LOS PROCESOS DE SENSACIÓN, PERCEPCIÓN Y ATENCIÓN EN EL APRENDIZAJE.

La Sensación: Se trata de una respuesta motora que por participación de la corteza cerebral se acompaña de conciencia: el sujeto se da cuenta de algo o siente algo. La sensación no surge pues, en los sentidos, sino en la excitación de las neuronas corticales.

Las sensaciones representan el primer contacto de la mente con la materia. Constituyen el medio básico por el cual la información acerca de los objetos y fenómenos del mundo exterior y del propio organismo llega al cerebro, dándole al hombre la posibilidad de orientarse en el mundo circundante y con respecto a su propio cuerpo.

La Percepción: Es e1 proceso por el cual e1 individuo interpreta los estímulos sensoriales.

Las percepciones siempre implican una imagen integral de los objetos y fenómenos

de la realidad. Por ejemplo, cuando percibimos una rosa roja, no tenemos sensaciones visuales y olfativas aisladas (color ,olor) sino que recibimos una imagen total, integral de la rosa, con su forma, tamaño, color y olor característicos.

Las percepciones es el resultado de un proceso complejo que no puede ser explicado como un simp1e y agregado de sensaciones. En este complejo proceso intervienen algunos factores corno:

La personalidad y la experiencia previa del sujeto, por cuanto el hombre al percibir los objetos y fenómenos de la realidad, los interpreta según sus conocimientos actitudes, motivaciones, intereses y valores, lo cual hace que las imágenes perceptivas cuando son influenciadas predominantemente por factores internos, pueden carecer de objetividad.

La Participación de distintos tipos de receptores sensoriales ya que la percepción casi nunca se reduce a los límites de una sola modalidad sensorial, sino que incluye en su estructura el resultado de la labor mancomunada de varios órganos de los sentidos.

El lenguaje, en el sentido de que el hombre no se limita e mirar los objetos y registrar pasivamente la información recibida. Al destacar y unificar los rasgos substanciales, designa mediante la palabra los objetos percibidos, los nombra y clasifica en determinadas categorías.

La atención: Es la posibilidad de concentrar la actividad mental hacia un objeto o circunstancia, o grupos de objetos o circunstancias, entre varios que se nos presentan en forma simultánea.

Luria distingue tres aspectos característicos de la atención que nos permiten comprender mejor el papel que desempeña dicho Fenómeno psicológico en la interacción del individuo con su medio. Tales aspectos son:

- Volumen de la atención, es entendido como el número de señales aferentes que adquieren carácter dominante en la conciencia.
- Estabilidad: Es la permanencia con que 1os procesos destacados por la atención, pueden conservar su carácter dominante.
- Las oscilaciones: Se refieren al carácter cíclico del proceso, según el cual determinados contenidos de la actividad consciente adquieren valor dominante o lo pierden.

LA MEMORIA EN EL APRENDIZAJE:

La memoria es una de 1as funciones básicas que hacen posible el aprendizaje, ya que gracias a ella el individuo almacena y conserva 1a información que adquiere, día a día.

El docente contribuirá a facilitar en los alumnos el aprendizaje efectivo y la adquisición de una memoria a largo plazo si:

- Fomenta en ellos el deseo de aprender y recordar.
- Los ayuda a organizar e integrar el material de aprendizaje.
- Hace énfasis en el dominio de los conceptos.
- Los ayuda en la identificación y solución de problemas.
- Promueve la aplicación de los conocimientos adquiridos.
- Insiste en que el aprendizaje sea secuencial y acumulativo.
- Ayuda a los alumnos a controlar aquellos factores que pueden ocasionar el olvido.

EL PENSAMIENTO EN EL APRENDIZAJE:

Las operaciones básicas del pensamiento son de vital importancia en el aprendizaje, ya que ellas le permiten al individuo Formar nociones y conceptos acerca de la rea1idad. Sólo mediante el pensamiento se puede identificar, clasificar y organizar 1a experiencia.

El educador debe tener presente que la mejor Forma para que los alumnos desarrollen tales operaciones es mediante la realización de numerosas y variadas experiencias de aprendizaje que los capaciten para destacar lo esencial de los fenómenos y llegar por sí mismos al proceso de generalización.

LA INTELIGENCIA EN EL APRENDIZAJE:

El desarrollo de lA inteligencia humane constituye necesariamente una de las prioridades de la educación, por cuanto la conducta inteligente es la que hace posible el proceso de cambio de la persona como tal y de la sociedad.

El docente está siempre interactuando con niños o jóvenes que normalmente presentan diferencias en sus habilidades mentales. Tendrá alumnos que aprenden con mayor, rapidez que otros, tendrá niños que manejan algunas situaciones mejor que otras, y en general encontrará niños con diferencias debidas a los niveles de desarrollo cognoscitivo alcanzado por ellos.

VARIABLES PSICOSOCIALES: Se refieren a aquellas características de los sujetos en una doble dimensión: como miembros de una sociedad a la cual pertenecen y con la cual comparten tradiciones, creencias, lenguaje, actitudes y valores; y como personas con necesidades, metas y propósitos por los cuales luchar. Dentro de esta categoría de variables, se hace referencia a:

EL LENGUAJE.

El lenguaje es un instrumento que permite al individuo la expresión del pensamiento, la transmisión de mensajes y por tanto, la comunicación con los demás. Representa uno de los logros más característicos de la especie humana.

LA COMUNICACIÓN.

El hombre desde que nace participa en forma más o menos activa en organizaciones humanas. Primero en el seno de la Familia, luego en los grupos de juego, de trabajo o de amigos; en la escuela, en la iglesia, en la comunidad. En cada una de estas instituciones el individuo desarrolla una conducta social, interactúa, intercambia experiencias, e ideas. Este intercambio en sus distintas formas, constituye la comunicación.

LA MOTIVACIÓN..

La motivación se define como cualquier condición interna que inicia, guía y mantiene una conducta. Comprende por tanto, todas aquellas condiciones básicas que activan una conducta, dirigiéndola hacia un fin u objetivo determinado.

El conocimiento de las motivaciones humanas es de particular importancia para el docente, ya que a través de dicho conocimiento puede convertir el ambiente formal de la escuela en un medio en el cual los niños aprendan y se desarrollen en forma adecuada y

eficaz. El proceso de la motivación consiste en liberar energía que puede utilizarse para alcanzar los objetivos educacionales.

Ahora bien -casi siempre- se insiste en que se debe motivar el inicio de una clase, pero casi nunca se le informa al docente el por que de ello. Tal vez la justificación mas importante que se ha dado a la motivación, es que ella posibilita la interconexión de los tres tipos de cerebros que posee el ser humano, permitiendo de está forma, que el individuo se disponga a aprender con TODO el cerebro!.

LA PERSONALIDAD.

La personalidad es la organización dinámica, dentro del individuo, de aquellos sistemas psicofísicos que determinan sus ajustes únicos a su ambiente.

El ajuste deficiente de la personalidad tiende a estar asociado con un aprovechamiento escolar inferior.

La mayoría de los problemas serios de personalidad, tienden a interferir en el aprendizaje escolar de los alumnos.

Como características que comúnmente reflejan desajustes de la personalidad que afectan el aprendizaje podemos señalar:

- Los síntomas asociados a problemas orgánicos, especialmente localizados en el sistema nervioso central. Entre estos se pueden mencionar: la hiperactividad, irritabilidad, labilidad emocional, los cuales obstaculizan la persistencia de la atención.
- Altos niveles de ansiedad.
- Agresividad u hostilidad manifiesta.
- La falta de disposición para cooperar.
- La falta de confianza en sí mismo en inseguridad personal.

Por el contrario, podemos destacar como atributos de una personalidad armónica e integrada que tienen efectos positivos en la actuación de alumnos, los siguientes:

- Disposición para asumir responsabilidades.
- Autonomía.
- Autoestima.

- Sentimiento de identidad.
- Capacidad para trazarse metas realistas.
- Equilibrio afectivo-emocional.
- Sentido del humor.
- Cooperación y solidaridad humana.
- Otros.

VARIABLES RELACIONADAS CON LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: Las variables relacionadas con la situación de aprendizaje, denominadas también variables situacionales abarcan todos aquellos factores del ambiente escolar que contribuyen al logro de las metas educativas. Entre las múltiples variables que corresponden e esta categoría, es objeto de análisis en el presente trabajo, las siguientes:

a. La tarea o material de aprendizaje.
b. La estrategia y métodos.
c. La transferencia del aprendizaje.
d. Las características de los docentes.

5.- Principios Sicológicos que fundamentan las reglas prácticas para aprender con eficacia:

Existen muchas reglas prácticas para lograr aprender con eficacia. Las más significativas son:

CALENTAMIENTO.

En este principio, le eficacia se logra sólo después de cierto tiempo de práctica, cuando se forma un conjunto, el cual tiene un efecto facilitador.

La práctica constituye una condición necesaria para aprender, la misma por si no es suficiente, entonces es mas bien una condición que un método de aprender y se puede concebir corno rica experiencia.

Si es efectiva, la práctica ofrece oportunidades, para modificar y fijar de una manera

progresiva el aprendizaje. Para que la misma, sea fructífera, se requiere la presencia de varios factores, entre ellos:

1.- La capacidad mental del individuo es muy importante en la determinación de la cantidad de práctica que requiere un aprendizaje para establecerse adecuadamente.

2.- Otro sería, la naturaleza de la actividad o de el material.

DISPOSICIÓN O ACTITUD.

Esta regla, consiste en la disposición o el ánimo de aprender un contenido, ya que; si dicho contenido no absorbe 1a atención, se podrá estar estudiando durante, un tiempo prolongado sin que al final se haya aprendido nada.

Por ende, la disposición o preparación más o menos estable, de interés o propósito que implica expectativa por un cierto tipo de experiencia y preparación de una respuesta apropiada; algunas veces se usa en un sentido.

LA MOTIVACIÓN.

Es una de las condiciones fundamentales en el aprendizaje. Sólo mediante ella, puede comprenderse el porqué de la conducta del hombre. Los motivos inician vigorizan, dirigen y regulan las actividades del individuo.

Según THORNDIKE, las funciones de los motivos son:

1.- Determinar la conducta.

2.- Provocar una reacción que cambie el organismo o la situación de modo que las respuestas tiendan a ser satisfactorias.

No obstante, las motivaciones para aprender se pueden sintetizar en:

No hay conducta sin motivación. De igual forma, tampoco hay aprendizaje sin que haya una necesidad visceral, cortical o social que propicie o estimule a aprender. Siguiendo la clasificación de K. Lewin, él divide las motivaciones en dos tipos:

1.- LAS MOTIVACIONES PRIMARIAS, las cuales son: tanto positivas como negativas.

1.1. **La Motivación primaria positiva**, más eficaz en el aprendizaje humano, es especialmente en el intelectual, el cual es de índole cortico-social. Esta

motivación es innata y actúa desde la corteza, recibe un notable refuerzo social en forma de aplauso, aprobación o simple confirmación de lo exitoso de algún aprendizaje.

1.2. **La Motivación primaria negativa,** Consiste en inducir a aprender pare evitar un castigo el cual no tiene relación directa con el aprendizaje.

2.- MOTIVACIONES SECUNDARIAS, son las que no consisten en gratificaciones inherentes al mismo aprendizaje, sino en el logro de algo que queda mas allá del mismo.

LA RECITACIÓN.

Se dice, que cuando se está aprendiendo un material de apoyo nuevo, es conveniente intercalar entre lecturas, sucesivas intentos de recitar todo o parte. La recitación nos proporciona un conocimiento inmediato de los resultados. Por otra parte, supone una actitud más activa, que la simple lectura, y además, se llega a practicar durante el estudio las mismas destrezas que después se pedirán en el aula.

En la misma, se distinguen varias etapas:

- LA ADQUISICIÓN O FIJACIÓN: que requiere recibir percepciones.
- LA CONSERVACIÓN O RETENCIÓN: Además de la adquisición de conocimientos, la memoria implica conservarlos durante un tiempo.
- LA EVOCACIÓN o REPRODUCCIÓN: Consiste en hacer presentes en la conciencia los contenidos originales. Entonces, el olvido es el fenómeno opuesto y se caracteriza por la imposibilidad de evocar.
- EL RECONOCIMIENTO: Consiste en reconocer el hecho pasado como propio.

SOBREAPRENDIZAJE.

Es el aprendizaje en el cual la repetición y la práctica han proseguido más allá de lo necesario para la retención o recuerdo requerido; tal sobreaprendizaje puede, a pesar de eso, ser necesario en vista de los factores que probablemente afectan el recuerdo, los que necesariamente entran ulteriormente según las circunstancias del caso.

ESTUDIO MASIVO Y ESTUDIO DISTRIBUIDO.

Cuando un aprendizaje exige un gran empleo de tiempo es más eficiente distribuir los tiempos de estudio durante periodos prolongados, que concentrar el esfuerzo y la energía en intervalo breve.

La explicación más probable de esta conclusión experimental es que: la conducta al estarse efectuando tiende a crear un estado que opera contra sí mismo, se produce un impulso negativo que reduce la eficiencia, es decir fatiga.

ESTUDIO GLOBAL Y ESTUDIO POR PARTES.

Es conveniente iniciar cualquier aprendizaje usando el método global, es decir, haciendo una revisión previa de todo lo que hay que aprender, para lograr una perspectiva completa, y luego pasar a estudiar por partes procurando hacerlo progresivamente.

SIGNIFICADO.

La importancia de los significados en el aprendizaje últimamente se le viene concediendo mucha resonancia, siendo así, que:

- Más que un problema de hechos, aprender es un problema de significados.
- Aprender es un problema de cambiar los significados.
- Aprender es descubrir los significados personales.
- El cambio en los significados personales requiere un clima apropiado.
- Reto y amenaza.
- El significado personal requiere experiencias.
- El aprendizaje ocurre mejor dentro de limites bien, definidos.
- La enseñanza efectiva depende de lo que uno considere importante.

B. BASES SOCIOLÓGICAS.

1. *Computadora y Sociedad.*

Los cambios tecnológicos habidos en los últimos años han alterado profundamente el tejido de nuestra sociedad y han cambiado en gran medida nuestros modos de proceder. Una de las principales protagonistas de esta situación es la computadora, concebida como una herramienta útil para la resolución de una gran variedad de problemas complicados y para realizar de forma rápida y eficaz las tareas pesadas, bien por su tamaño, por su minuciosidad o por ser rutinarias.

En la actual sociedad es impensable la vida diaria sin el uso de las computadoras. Han llegado a ser tan imprescindibles en multitud de aspectos cotidianos que sin ellas la actividad se colapsaría.

Resumiremos en esta parte algunas de las diferentes aplicaciones y usos de la computadora en la actualidad, teniendo en cuenta que cada día aparece alguna nueva y que su potencial parece ilimitado debido a sus principales características:

Gran capacidad de almacenamiento y manejo de información. Alta precisión y rapidez en la realización de cálculos, por complicados que estos sean.

Otro factor que afecta al crecimiento de las aplicaciones de la computadora es el hecho de que su coste disminuye continuamente, habiéndose extendido su uso a pequeñas empresas, establecimientos y a los profesionales liberales.

Entre las muchas y muy diversas aplicaciones actuales de la computadora podemos citar las siguientes:

a. Gestión Empresarial: Uno de los mayores impactos de la informática ha sido el que ha afectado a los trabajos administrativos de la oficina, dando lugar a una nueva técnica conocida con el nombre de Ofimática. Algunas de las tareas administrativas que se pueden realizar con la computadora son la gestión de personal, proceso de nóminas, control de inventarios, gestión de almacén, facturación contabilidad, correspondencia, etc.

b. Aplicaciones Industriales: La computadora también ha ocupado su lugar en los

procesos de fabricación, siendo sus principales usos el control de procesos industriales, robótica industrial, diseño y fabricación asistidos por computadora.

c. Aplicaciones Técnico-científicas: Son multitud las tareas que se realizan dentro de esta área por medio de la computadora o con su ayuda.. En cualquier campo de la investigación se ha constituido en herramienta imprescindible. Algunas de las aplicaciones técnico-científicas principales son: 1a predicción meteorológica, el control de comunicaciones, control de satélite e ingenios espaciales, etc.

d. Aplicaciones médicas: La utilidad de la computadora en le medicina va desde el control clínico de pacientes, hasta la investigación de nuevos métodos de tratamiento de enfermedades. Se pueden citar entre otras el diagnóstico clínico, mantenimiento de historiales, etc.

e. Aplicaciones militares: El uso de la computadora por parte de los Gobiernos en aplicaciones militares ha sido pionero y predecesor frente a las demás aplicaciones. Como ejemplo basta decir que el Departamento de Defensa de los Estados Unidos es el mayor consumidor usuario de informática del mundo.

Destacan los sistemas computarizados de radar, conducción automatizada de misi1es, espionaje militar por satélites artificiales, etc.

f. Aplicaciones Financieras: Los mercados financieros también se encuentran afectados hasta en sus cimientos por el uso de las tecnologías de la información. Las posibilidades de intercambiar ideas, realizar transacciones y transferencias de fondos a través de las redes teleinformáticas internacionales permiten a los ejecutivos financieros competir en una economía g1obal.

g. Aplicaciones Educativas: El efecto de las computadoras en la educación se ha de contemplar desde dos puntos de vista. Por un lado la necesidad de incluir la informática como materia en los planes de estudios, ya que, como queda claro, la Computadora es ya una herramienta esencial en todos los ámbitos y por tanto es necesario que cualquier

persona formada posea los conocimientos necesarios para su utilización y aprovechamiento. En segundo lugar la computadora ha demostrado ser un complemento muy útil en la formación de los estudiantes en cualquiera de las áreas mediante las técnicas de EAO o Enseñanza asistida por computadora. En esta faceta educativa la computadora proporciona características didácticas importantes como perseverancia, paciencia, disponibilidad continua y atención individual, adaptándose al ritmo de aprendizaje y a los condicionamientos particulares del alumno.

h. La Computadora Doméstica: Desde que surgió la denominada COMPUTADORA PERSONAL a comienzos de la década de los 8O, el uso de esta máquina Individual se ha popularizado enormemente llegando a la práctica totalidad de medianas y pequeñas empresas, oficinas y establecimientos, e introduciéndose finalmente en multitud de hogares.

En este fenómeno de introducción de la computadora en los hogares, conocido como domótica, ha influido en gran manera la continua reducción de sus precios así como la creación y difusión de una gran cantidad de software general y especifico de aplicación a un elevado número de las tareas que realizamos habitualmente tanto en el ámbito de nuestro trabajo como en el hogar.

No es fácil predecir los futuros avances y mucho menos los plazos en que se pueden llevar a cabo, habida cuenta que la evolución y desarrollo de la tecnología aumenta a un ritmo cada vez más acelerado. No obstante, a partir de los logros conseguidos y de otros iniciados, se puede vislumbrar el efecto de su implantación masiva, en la sociedad.

En el campo educativo, los programas tutoriales de enseñanza asistida por ordenador (EAD) se generalizarán, en los centros docentes, lo que facilitará la labor del profesor en la atención individualizada y adaptación a los diferentes ritmos de la enseñanza-aprendizaje de los alumnos, así como la atención especializada a los alumnos con algún tipo de discapacidad. Se utilizarán en esta área reconocedores y generadores de voz para la comunicación estudiante-computadora. Además, mediante el reconocimiento y análisis de la voz, la computadora podrá evaluar el estado físico y anímico del estudiante, ajustando su programa a las necesidades de éste en cada momento.

En definitiva, podemos deducir que no todas las aplicaciones de la computadora

son beneficiosas y ni siquiera efectivas, pero hemos de considerarlo como una herramienta útil para ayudar a resolver nuestros problemas y que su efecto sobre los individuos y la sociedad solamente dependerá de la programación que se le proporcione y del uso a que se destine por parte de sus gestores.

2.- Características de una Sociedad Tecnológica.

Entre las características que definen la sociedad tecnológica destacamos:

- El incremento del consumo y materialización progresiva de las relaciones entre las personas.
- El desarrollo de un excesivo sentido de eficacia, y productividad como criterio de realización personal.
- La valoración de los resultados como criterio de avance del conocimiento.
- La insistencia en los procesos de control y eficiencia.
- La producción masiva de bienes de consumo.
- La continua anulación de sistemas de producción mecanismos, sustituidos por los electrónicos y robóticos.
- La selección continua de áreas de desarrollo preferentemente en la investigación, ligadas al impacto tecnológico, proyecto Eureka, Comet, etc.
- El impacto tecnológico en el ámbito de las comunicaciones: satélites, televisión, informática (redes), etc., que permiten una información inmediata de lo acontecido a grandes distancias.
- La forma de vivir, relacionarse con el entorno, estructurar espacios y realizar las actividades de producción (trabajo).
- La búsqueda de una rentabilidad inmediata, tanto, financiera como pragmática.

3.- El sentido de la formación del profesional en una Sociedad Tecnológica:

La demanda de formación en esta sociedad Tecnológica deviene tanto de las propias exigencias del desarrollo, tecnológico, como de la preparación de los ciudadanos para entender, concebir, usar, criticar y controlar los procesos y productos que la tecnología nos ofrece. En nuestra perspectiva es más esta segunda exigencia la que reclama la preparación de ciudadanos y obviamente del profesor, para dominar y dar sentido a los procesos y recursos que la tecnología pone a nuestro alcance.

La perspectiva tecnológica como provocadora de cambios exponenciales en le relación del hombre con el medio, con los otros y consigo mismo, exige al docente una reflexión crítica superadora de la misma. De ahí que la capacitación del docente en el análisis de la "dimensión tecnológica de nuestra sociedad y su consecuencia para el futuro", nos sea necesario el tenerlo en cuenta.

La formación tecnológica ha de estar subsumida a una formación general y abierta del hombre que le capacite, en-la adquisición de una conciencia crítica y prospectiva, descubriendo las posibilidades y riesgos que comporta un desmesurado proceder tecnológico.

El siglo XXI y la formación para el mismo es una exigencia inmediata. La próxima centuria será la del impacto tecnológico, lo que exigirá de la educación y los profesores una previsión y apertura, pero con una actitud de cautela y crítica. El docente ha de reflexionar ante este nuevo desafío.

Obligándose a la adquisición de un estilo de pensamiento que contemple estas dimensiones:

- Crítica.
- Prospectiva.
- Evolutiva-apertura.
- Socio-política.
- Técnica-científica.
- Artística-creativa.
- Cooperadora.

- Tolerante-alteralidad.
- Riesgo-compromiso de cambio permanente.
- Profundo-reflexivo.
- Interiorización filtro selectivo del impacto:
  - Medios.
  - Tecnología.

El profesor, el maestro y el experto en educación son un tipo de profesionales que preparan a los alumnos y profesores, respectivamente, para alcanzar un estilo nuevo de aprender y enseñar, este nuevo estilo se concreta en un diálogo o relación comunicativa en torno al análisis de unos conocimientos formalizados en disciplinas, que contribuyen a la adquisición de modos formativos de pensar y actuar.

Lo que una sociedad tecnológica demanda al profesional de la educación es una oferta clara sobre el modelo de hombre-educado y de nueva comunidad en proceso de formación, que habrá de preparar para enfrentarse a los desafíos de la próxima década y siglo. El profesional de la educación precisa de una reflexión profunda sobre el sentido, orientación y modelo al que ha de responder con una óptima formación en las demandas del presente y futuro, asumiendo superadamente su pasado.

4.- Las Computadoras en la Educación.

Las tecnologías informáticas y de comunicaciones han permeado todas las organizaciones modernas y son utilizadas hoy en la mayoría de las actividades productivas y de servicios. La razón de esto es que se reconoce que el acceso eficiente (rapidez, calidad, confiabilidad) a la información juega un papel crucial en la sociedad moderna, altamente competitiva, desburocratizada, de tendencias globalizantes y crecientemente basada en el conocimiento.

El desarrollo tecnológico permite hoy en día acceder a grandes recursos de información, procesarlos y transformarlos en insumos de apoyo a la inteligencia y memoria de las personas. La tecnología está cambiando radicalmente las formas de trabajo, los medios a través de los cuales las personas se comunican y aprenden, y los mecanismos

con que acceden a los servicios que les ofrecen sus comunidades: transporte, comercio, entretenimiento y gradualmente también, la educación, en todos los niveles de edad y profesión.

El objetivo general del sistema educativo es preparar a la gente para su vida post-escolar. Esto quiere decir, disciplina y creatividad. Disciplina para trabajar en grado de manera armónica y creatividad para imaginar soluciones distintas y mejores a los problemas cotidianos y laborales.

Los objetivos de contar con tecnologías informáticas y de comunicaciones en los establecimientos educacionales nos prestan grandes beneficios de los que se resumen los siguientes:

- Modernización de la práctica docente.
- Modernización de le gestión administrativa.
- Recursos de aprendizajes.
- Equidad y descentralización.
- Profesionalización.

Los profesores pueden compartir experiencias, guías de trabajo, éxitos y experiencias educativas a través de las redes de comunicación.

La utilización de la informática en la educación es un fenómeno que ya lleva más de una década en los países, desarrollados. También en Venezuela, numerosas escuelas, liceos y colegios privados tienen computadores y la demanda por esta tecnología aumenta año a año.

E1 panorama actual, en general, refleja un consenso sobre la conveniencia de utilizar computadores en la educación, matizado con una serie de advertencias acerca de los esfuerzos y recursos que deben invertirse, para que el impacto de las tecnologías sea significativo.

a. Los proyectos exitosos han centrado sus esfuerzos en potenciar el trabajo de los profesores. El profesor que ha logrado incorporar al computador como una herramienta habitual en sus prácticas docentes y en sus labores administrativas, puede ir logrando

gradualmente cambios significativos en la calidad y efectividad de su trabajo.

b. El sólo hecho de colocar computadores en un establecimiento educacional rara vez logra un impacto significativo. Para lograr efectos, es fundamental considerar una capacitación intensiva inicial y un apoyo gradual en el largo plazo, comenzando con los profesores, quienes a su vez, podrán capacitar a sus alumnos.

c. El computador se considera una herramienta de uso general, para todo profesor, independientemente de su asignatura, y no un fin sí logrado a través del aprendizaje de lenguajes de programación o de conocer la arquitectura interna de los computadores.

d. La tecnología puede convertirse en aliada de los procesos de reforma educacional, sólo si los profesores La perciben como "aliada de su parte". El computador ha sido utilizado con éxito como herramienta de apoyo a cambios graduales en las prácticas pedagógicas, como un nuevo y poderoso recurso pedagógico y para mejorar la relación alumno-profesor.

e. Además de los profesores, es necesario involucrar a la dirección del establecimiento educacional en torno, a los actores que involucra, es aquella que estimula la relación institución de educación superior establecimiento educacional.

La tecnología computacional puede cumplir diversos roles en la educación. Algunos de ellos van estableciendo con el tiempo, una vez que los usos más evidentes y de efecto inmediato ya han sido asimilados. Existen literalmente miles de programas computacionales susceptibles de ser utilizados en los establecimientos educacionales, los cuales pueden clasificarse en las siguientes categorías:

1.- Programas de apoyo curricular, generalmente denominados software educativo, que buscan reforzar completar o servir de material pedagógico en una o más asignaturas.

2.- Programas de apoyo administrativo, estas aplicaciones computacionales buscan aliviar el trabajo de los profesores en áreas tales como: planillas de notas, control de asistencia, etc.

3.- Programas de propósito general o de productividad entre los cuales se cuentan las planillas de cálculo, los procesadores de Texto, y otros.

4.- Redes de datos. El uso de redes de datos en ambientes educacionales es ampliamente difundido en el mundo y en Venezuela. Se usan como mecanismo de coordinación, de difusión y de acceso cultural especialmente para los centros más alejados.

5.- La matemática en la sociedad:

El papel y la práctica de las matemáticas a nivel global y mundial está sufriendo una revolución, con la influencia principal de la tecnología de cómputo. Las calculadoras y los sistemas de cómputo proporcionan a estudiantes y maestros la fuerza matemática que ninguna generación anterior podría haber imaginado. Incluso leemos en los periódicos eventos impresionantes, como el reciente anuncio de la demostración del último teorema de Fermat. En términos de las matemáticas, ¡seguramente ésta es la época más excitante en toda la historia!.

También es evidente que el dominio de la matemática es la puerta principal para las carrera técnicas y profesionales para un número cada vez mayor de estudiantes en un rango cada vez mayor de curricula. Adonde volteemos (en las empresas, el gobierno, la ciencia y la tecnología), casi todo aspecto del trabajo profesional está relacionado con las matemáticas. Por tanto es necesario que se tenga un dominio de esta importante ciencia para el avance y desarrollo en todos los ámbitos de la sociedad.

6.- La Economía en la sociedad:

Durante siglos, la economía solamente existió de modo implícito, es decir, como una práctica, sin que el hombre abordara su teorización. Mientras las sociedades consumían aquello que producían, no se hizo sentir la necesidad de pensar

económicamente. Cuando apareció el sobrante o excedente económico, que permitía el intercambio en el mercado, el hombre comenzó a desarrollar lo que David Ricardo (1772-1823) llamó "Cálculo económico", cuyo centro de gravedad era la obtención del máximo beneficio en las operaciones de intercambio.

Hoy la ciencia económica ocupa un lugar tan destacado como cualquiera de las grandes ciencias físicas, y el "hecho económico" es el eje de la vida de las sociedades modernas, tanto a nivel interno como a nivel exterior, pero en un proceso de engarce global que permite ya hablar de la economía mundial.

Teóricamente la Economía "es la ciencia que estudia el uso óptimo de los recursos –que son escasos por definición- con el objetivo de satisfacer, dentro de un orden de jerarquía y en la mayor medida posible, las necesidades económicas ilimitadas del hombre y de la sociedad.

La Ciencia económica forma parte del conjunto de disciplinas sociales que tienen como objeto de estudio al hombre en sus diversas manifestaciones. La Economía estudia al hombre en su lucha por resolver el problema económico. Una fase importante de la ciencia económica es el estudio de las instituciones económicas creadas por las distintas sociedades como medio para resolver el problema económico.

A la luz del extraordinario papel que juegan los aspectos económicos en el desenvolvimiento de la vida moderna, el conocimiento de los procesos económicos fundamentales parece ya un imperativo para el ciudadano corriente. La progresiva supeditación de los órdenes sociales y políticos al orden económico, que se manifiesta en los pueblos de occidente, y muy especialmente en los países económicamente menos desarrollados, requiere de todo ciudadano medianamente culto, cierto conocimiento de la estructura y funcionamiento del sistema económico.

Aparte del valor cultural del estudio de la Ciencia Económica, el conocimiento de los procesos económicos fundamentales es esencial para la más eficaz participación del ciudadano en la vida pública.

Además de estas consideraciones generales que fortalecen la necesidad e importancia del estudio de la Ciencia Económica, se puede señalar en apoyo adicional la estrecha relación entre el éxito como empresario particular y el conocimiento del funcionamiento del sistema económico.

D. BASES LEGALES.

1.- Ley Orgánica de Educación (Artículo No. 27):

Le educación tendrá los siguientes objetivos:

1.- Continuar el proceso de formación integral del hombre, formar profesionales y especialistas y promover su actualización y mejoramiento conforme las necesidades, del desarrollo nacional y del progreso científico.

2.- Fomentar la investigación de nuevos conocimientos, e impulsar el progreso de la ciencia, la tecnología, las letras, las artes y demás manifestaciones creadoras del, espíritu en beneficio del bienestar del ser humano, de la sociedad y del desarrollo independiente de le nación.

3.- Difundir los conocimientos para elevar el nivel cultural y ponerlos al servicio de la sociedad y del desarrollo integral del hombre.

2.- Resolución No. 1 del Ministerio de Educación (Enero 1996).

El perfil profesional del docente en un contexto de educación permanente, que trasciende el marco curricular de los estudios que conducen a la habilitación para el ejercicio de la función educativa. En tal sentido, se aspira que todo docente sea promotor de su desarrollo ulterior.

También ha de entenderse el perfil del docente como, una totalidad armónica que lo caracteriza o identifica como educador.

El perfil debe ser el punto de partida para la elaboración de un currículo que enfatice en la integración afectiva, ética e intelectual de 1a personalidad y el dominio de las funciones profesionales del docente.

Un énfasis prioritario en la formación del docente, debe ser el cultivo de la capacidad de reflexión permanente en la acción y sobre la acción, para lograr la transformación creadora del acto educativo y de las condiciones que limitan el aprendizaje

de los alumnos, al tiempo que se estimule el propio desarrollo profesional del educador. El educador es un intelectual autónomo y cooperativo, en proceso permanente de desarrollo profesional que considera las estrategias de enseñanza-aprendizaje como hipótesis de acción, para analizarlas y comprobar su eficacia, eficiencia y pertinencia, a fin de actualizarlas o sustituirlas.

El docente debe ser:

- Capaces de propiciar la innovación y el desarrollo educativo y de participar consciente y creativamente en la elaboración de diseños pedagógicos que conduzcan a la formación de la población.
- Preparados para comprender e interpretar los procesos de enseñanza y aprendizaje, considerando el contexto social, las implicaciones éticas del proceso educativo, el nivel de desarrollo del alumno, las características del contenido y los objetivos instruccionales.
- Con dominio teórico y práctico de los saberes básicos de las áreas del conocimiento en las que se inscriben los programas oficiales del nivel, modalidad o área de especialización.
- Con un saber vivencial de los procesos de desarrollo y aprendizaje de1 sujeto de su acción educadora.
- Conocedores de la realidad educativa y de sus relaciones con factores sociales, económicos, Políticos y culturales del país.
- Conscientes de sus responsabilidades en el análisis y la solución de los problemas que afectan el funcionamiento de la institución y la comunidad donde presten sus servicios.
- Con una actitud crítica, positiva y abierta a la posibilidad de cambio y de superación permanente, espíritu de servicios, sólidos principios éticos poseedores de características y actitudes personales que les permiten interpretar y desempeñar su rol en la comunidad y ser verdaderos ejemplos de Educación ciudadana.

CAPITULO III

Marco Metodológico

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Tipo de Investigación:

La investigación es básica y a partir de la información Teórica y Práctica contenida en el presente trabajo en la sección denominada **“Desarrollo de la Propuesta”** de la página” “ se diseñan las “pantallas” que permiten el desarrollo del Software Educativo.

3.2 Fase de desarrollo:

Utilizando la Plataforma AUTHOWARE PARA WINDOWS (A.P.W), se realizarán las implantaciones ocupacionales necesarias para desarrollar el Software Educativo Propuesto.

CAPITULO IV
Desarrollo de la Propuesta

PREFACIO

Es sabido que para el estudiante, la matemática no es nada fácil, además según muchos estudios y luego de algunas discusiones se ha llegado a la conclusión de adjudicar este hecho al carácter abstracto de dicha disciplina; pues dada su abstracción, el alumno considera que - la mencionada disciplina - no posee ningún tipo de aplicación cotidiana, más allá de las operaciones básicas.

La realización de esta propuesta es el producto de una inquietud por demostrar que a pesar de la abstracción del aspecto teórico o conceptual de la matemática, ésta es de gran utilidad y es aplicable en todos los aspectos de la vida social. En particular se mostrará dicha aplicación en un campo también muy importante como lo es La Economía.

Se escogió el campo Económico para mostrar la aplicación de la matemática, dado que como estudiante de Contaduría Pública, me ha llenado de satisfacción y asombro, la gran variedad de usos de diversos contenidos matemáticos en este campo.

Además de la dificultad natural del estudio de la matemática, se le agregan otros factores psicológicos y pedagógicos que la hacen de menos facilidad de aprendizaje, dichos factores son; *desde el punto de vista psicológico* es el temor y sobrenaturalidad atribuido a la matemática desde niños, tanto padres como docentes, le hacen creer al alumno que esta disciplina es muy difícil y por ende son muy pocos los que la entienden, en fin, le crean una predisposición negativa hacia su estudio; *el factor pedagógico* se encuentra en que el docente de matemática no presenta ningún tipo de actividad motivadora para introducir los contenidos matemáticos (importancia del contenido, historia, aplicabilidad, etc.),para incentivar al estudiante y mostrarle estos aspectos surgidos de alguna situación real o natural, además de esto, tampoco le enseñan al alumno cómo pueden utilizar los contenidos matemáticos en la cotidianidad.

Pero esta situación no es de total culpabilidad del docente, pues, éste en la gran mayoría de los casos, no motiva al estudiante, ni le muestra la aplicación de la matemática, porque ni él mismo las conoce, por esto el desarrollo de esta propuesta está dirigido a

presentar tanto al docente como al alumno un material de referencia, donde se muestra una de las tantas aplicaciones del conocimiento matemático, como lo es en la Economía.

Se busca que el docente lo use como herramienta para dar su clase, es decir, resuelva y plantee problemas económicos donde se utilicen los aspectos teóricos del conocimiento matemático ya impartidos por él en clase. Que el alumno lo utilice para complementar el contenido dado en clase y tener más material para ejercitarse, además de aclarar cualquier duda.

El contenido de este trabajo estará organizado en unidades de aprendizaje, dentro de las cuales se dará una explicación general del conocimiento matemático a utilizar y se pasará directamente a mostrar y explicar la aplicación de dicho contenido a la Economía. Luego de varios ejemplos y problemas resueltos se presentarán algunos propuestos cuya respuesta, dada la complejidad del problema, se hará muy especifica o simplemente se dará el resultado final.

La presente propuesta está dirigida a la Educación Básica de la Tercera Etapa, la media diversificada y profesional y a nivel Universitario. Por lo cual el docente puede usar el aspecto que necesite de acuerdo al nivel en el cual se desempeñe.

1. ECUACIONES

Una Ecuación es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus lados o miembros y están separadas por el signo de igualdad "=" .

EJEMPLO 1: Resolución de Ecuaciones

a. $x + 2 = 3$

b. $x - 5 = 2$

c. $\dfrac{y}{y-4} = 6$

d. $x^2 + 3x + 2 = 0$

En el ejemplo anterior cada ecuación contiene al menos una variable. Una **variable** es un símbolo que puede ser reemplazado por un número cualquiera que pertenezca a un conjunto numérico. Los símbolos más comunes para las variables son las últimas letras del alfabeto, x, y, z, w y t. En la ecuación $x + 2 = 3$, los números 2 y 3 son llamados constantes. Son números fijos.

No está permitido, en una ecuación, que una variable tenga un valor para el cual alguna expresión en esa ecuación no esté definida. Por tanto, en

$$\frac{y}{y-4} = 6$$

y no puede ser 4, porque provocaría que el denominador fuese cero (no se puede dividir entre cero).

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera, (se cumple la igualdad). Estos valores son llamados soluciones de la ecuación y se dice que satisfacen la ecuación. Cuando sólo está implicada una variable, una solución también es llamada raíz. En ocasiones a una letra que representa una cantidad desconocida en una ecuación se le denomina incógnita.

Ejemplos sobre terminología para las Ecuaciones:

a. En la Ecuación $x + 2 = 3$, la variable x es la incógnita. El único valor de "x" que satisface la ecuación es 1. De aquí que 1 sea una raíz y el conjunto solución es {1}.

b. –2 es una raíz de $x^2 + 3x + 2 = 0$ porque al sustituir –2 por "x" hace que la ecuación sea verdadera: $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$.

c. $W = 7 - z$ es una ecuación con dos incógnitas. Una solución es la pareja de valores $w = 4$ y $z = 3$. Sin embargo, existe una infinidad de soluciones. ¿Podría pensar en otra?.

Ecuaciones Equivalentes

Generalmente, resolvemos una ecuación encontrando una ecuación equivalente que tenga soluciones que se determinen fácilmente. Realizando las siguientes operaciones, encontramos ecuaciones equivalentes:

a. Sume o reste de cada lado de una ecuación la misma expresión que represente un número.

b. Multiplique o divida cada lado de una ecuación por la misma expresión que represente un número diferente de cero.

EJEMPLO 2: Resolución de una ecuación con ecuaciones equivalentes.

Solución.

$$3x - 6 = 0 \qquad \text{Sumando a ambos lados 6}$$

$$3x - 6 + 6 = 0 + 6$$

$$3x = 6 \qquad \text{Multiplicando a ambos lados por } \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}(3x) = (6)\frac{1}{3}$$

$$x = 2$$

Para verificar la solución, se sustituye el valor obtenido en la ecuación original y se debe cumplir la igualdad.

$$3(2) - 6 = 0$$

$$6 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

1.1 Ecuaciones Lineales

Una **ecuación lineal** en la variable x es una ecuación que puede ser escrita en la forma $ax + b = 0$, donde a y b son constantes y $a \neq 0$

Una ecuación lineal también es llamada *ecuación de primer grado o ecuación de grado uno,* ya que la potencia (exponente) más alta de la variable que aparece en la ecuación es la primera (1).

Para resolver una ecuación lineal realizamos operaciones en ella hasta que tenemos una ecuación equivalente cuyas soluciones son obvias. Esto significa una ecuación en la que la variable queda aislada en un lado de la ecuación.

EJEMPLO 3: Resolución de una ecuación lineal

Resolver $5x - 6 = 3x$

Solución: Empezamos por dejar los términos que implican a x en un lado y las constantes en el otro.

$$5x - 6 = 3x$$

$$5x - 6 + (-3x) = 3x + (-3x) \quad \text{(sumando –3x a ambos miembros),}$$

$$2x - 6 = 0 \quad \text{(simplificando),}$$

$$2x - 6 + 6 = 0 + 6 \quad \text{(sumando 6 a ambos miembros),}$$

$$2x = 6 \quad \text{(simplificando),}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \quad \text{(dividiendo ambos miembros entre 2),}$$

$$x = 3$$

El conjunto solución es {3}.

EJEMPLO 4: Resolución de una ecuación lineal

Resolver $\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4} = 6$

Solución: Primero eliminamos las fracciones, multiplicando ambos lados de la ecuación por mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 4.

$$4.\left(\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4}\right) = 4(6),$$

$$4.\frac{7x+3}{2} - 4.\frac{9x-8}{4} = 24 \qquad \text{(propiedad distributiva),}$$

$$2(7x + 3) - (9x - 8) = 24 \qquad \text{(simplificando),}$$

$$14x + 6 - 9x + 8 = 24 \qquad \text{(propiedad distributiva),}$$

$$5x + 14 = 24 \qquad \text{(simplificando)}$$

$$5x = 10 \qquad \text{(restando 14 de ambos lados),}$$

$$x = 5 \qquad \text{(dividiendo ambos lados entre 5).}$$

Toda Ecuación Lineal tiene exactamente una raíz.

1.2 Ecuaciones Fraccionarias

Al resolver una ecuación no lineal puede suceder que se reduzca a una ecuación lineal.

EJEMPLO 5: Resolución de una ecuación fraccionaria

Resolver $\frac{5}{x-4} = \frac{6}{x-3}$

Solución:

Primero debemos escribir la ecuación de forma que no tenga fracciones, multiplicando ambos lados por el mínimo común múltiplo de los denominadores. (x – 4)(x – 3), tenemos

$$(x-4)(x-3)\left(\frac{5}{x-4}\right) = (x-4)(x-3)\left(\frac{6}{x-3}\right)$$

$$5(x-3) = 6(x-4) \qquad \text{Ecuación Lineal}$$

$$5x - 15 = 6x - 24$$

$$9 = x$$

APLICACIÓN ECONÓMICA DE LAS ECUACIONES LINEALES Y FRACCIONARIAS.

En la mayoría de los casos, para resolver problemas prácticos deben traducirse las relaciones establecidas a símbolos matemáticos. Esto es conocido como *modelación*, y cada uno de los ejemplos ilustran las técnicas y conceptos básicos para ello.

EJEMPLO 6:

Pablo a ahorrado 2.300 Bs. Durante cuatro meses. En cada mes ha ahorrado 50 Bs. más que en el anterior. ¿Cuál fue el monto de la primera cantidad ahorrada?

Solución:

Si llamamos x a la cantidad que ahorró el primer mes, entonces la segunda cantidad (segundo mes) sería (x + 50), el tercer mes sería (x + 100) y finalmente el cuarto mes sería (x + 150).

Para hallar el valor del primer mes resolvemos la ecuación lineal

$$x + (x + 50) + (x + 100) + (x + 150) = 2.300$$

$$4x + 300 = 2.300$$

$$4x = 2.300 - 300$$

$$x = \frac{2000}{4}$$

$$x = 500$$

La primera cantidad que ahorró pablo fue de 500 Bs.

EJEMPLO 7:

Un sastre compró 20 metros de tela tipo A, y 30 metros de tela tipo B, pagando 6 Bs. más por el metro de tela tipo A que por el metro de tela tipo B; en total pagó 1.120 Bs. ¿Cuál es el precio de cada tipo de tela?

Solución :

Si llamamos x el precio de la tela tipo B, entonces el precio de la tela tipo A sería $(x + 6)$, por tanto la cantidad comprada sería $30x$ y $20(x + 6)$, luego para hallar el precio de cada tipo de tela, resolvemos la ecuación lineal

$$30x + 20(x + 6) = 1.120$$
$$30x + 20x + 120 = 1.120$$
$$50x = 1.120 - 120$$
$$x = \frac{1000}{50}$$
$$x = 20$$

Dado que x es el precio de la tela tipo B entonces cada metro de tela tipo B cuesta 20 Bs. Dado que el precio de la tela tipo A esta dado por $(x + 6)$, entonces el precio de la tela tipo A es (20 + 6) = 26 Bs.

EJEMPLO 8:

La compañía Andersón hace un producto para el que el costo variable por unidad sea de 6 Bs. y el costo fijo sea de Bs. 80.000. Cada unidad tiene un precio de venta de Bs. 10. Determine el número de unidades que deben venderse para obtener una utilidad de Bs. 60.000.

Solución: Sea q el número de unidades que deben ser vendidas (en problemas económicos, q representa cantidad.) Entonces, si el costo variable (en bolívares) es $6q$, el costo total (la suma del costo variable y el costo fijo) será $6q + 80.000$, y el ingreso total por la venta de q unidades resultará en 10q. Ya que

Utilidad = ingreso total – costo total.

El modelo para este problema es

$$60.000 = 10q - (6q + 80.000).$$

Resolviendo se obtiene

$$60.000 = 10q - 6q - 80.000$$
$$140.000 = 4q$$

$35.000 = q$

Por tanto, se deben vender 35.000 unidades para obtener una ganancia de Bs. 60.000.

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.1

1.- Un granjero vendió 20 pollos e igual número de gallinas, cobrando por cada gallina 3 bolívares más que por cada pollo y recibiendo en total 460 Bs. ¿Cuál fue el precio unitario de cada pollo y de cada gallina?.

R. 10 Bs. Los Pollos y 13 Bs. Las gallinas

2.- Cuatro amigos acordaron ahorrar, según sus posibilidades económicas, para comprarse una carpa que cuesta 2.100 Bs. Juan y Pedro se comprometieron en pagar cada uno ¼ del total. Luis se comprometió en pagar la tercera parte (1/3). El resto le correspondió pagar a Carlos. ¿Cuánto tuvo que pagar cada uno de ellos?

R. Juan 525 Bs., Pedro 525 Bs., Luis 700 Bs. y Carlos 350 Bs.

3.- Antonio tiene cierto número de cromos y Luis tiene 13 más que Antonio. Juntos tienen 77 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Antonio y cuántos tiene Luis?.

R. Antonio 32 cromos y Luis 45 cromos.

4.- En un corral, entre gallinas y conejos hay 41 animales y 118 patas de animales. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en el corral?.

R. 18 conejos y 23 gallinas.

5.- Una columna tiene ¼ de su longitud introducida en tierra, 5/9 de la misma en el agua y 7 metros en el aire. ¿Cuánto es la longitud total de la columna?

R. 36 metros.

6.- Al sumar a un número su mitad se obtiene ¾ menos la quinta parte de dicho número. ¿Cuál es el número?

R. 15/34.

7.- En una escuela, 18 niños y 20 niñas van a llevar 188 ladrillos, que están en la camioneta, al aula para repararla, de modo que todos sean llevados en un solo viaje y que cada niño lleve dos ladrillos más que cada niña. Averigua cuántos ladrillos tiene que llevar cada niño y cada niña.

R. Cada niño 6 ladrillos y cada niña 4 ladrillos.

2. FUNCIONES.

Usualmente la palabra función es utilizada para indicar la *dependencia* de una cantidad respecto a otra.

La función habitualmente se usa como sinónimo de **"regla"** ó **"correspondencia"**. Así en una forma descriptiva y práctica se define **una función f de un conjunto X en un conjunto Y** *como una regla que asigna a cada elemento x de X* ***un único*** *elemento y de Y.* El conjunto X se llama **dominio de definición** de f o simplemente **dominio** de la función f y el conjunto Y que es el conjunto donde f toma valores es denominado **codominio** de f.

De otra manera: Una **función f de X en Y** es una relación de X en Y, esto es, un subconjunto de XxY, que satisface la siguiente propiedad:

También podría definirse función de la siguiente manera: *Una función es una regla que asigna a cada número de entrada "x* $\in$ X" exactamente un número de salida "y $\in$Y". Al conjunto de números de entrada a los cuales se les aplica la regla se le llama **dominio** de la función. El conjunto de números de salida es llamado el **rango**.

Para **cada** "x" $\in$ X hay exactamente un **único "**y" $\in$ Y tal que (x,y) $\in$ f.

Una función f de X en Y se denota de alguna de las formas siguientes:

$f: X \rightarrow Y$, $\qquad X \xrightarrow{f} Y$,

En el presente trabajo utilizaremos la primera notación.

La correspondencia definida por una función es costumbre denotarla con letras minúsculas como f, g, h ... o bien con letras griegas φ, Ψ..., en ocasiones se utilizan letras mayúsculas F, G, H,...

Un elemento cualquiera en el conjunto X se acostumbra denotar por **x**. Se dice que x es un elemento genérico de X y que es la **variable independiente**. Un elemento genérico de Y se acostumbra denotar por **y**. Se dice que y es la **variable dependiente**, la función se escribe mediante y = f(x).

Se pueden usar otras notaciones como:

$y = f(t)$, $\quad v = g(u)$, $\quad y = H(t)$, $\quad u = \Psi(x)$,...

EJEMPLO 9:

Dada la función $y = x + 2$

Solución:

f(x) **no** significa f veces x. f(x) es la salida que corresponde a la entrada x. Así la salida f(x) es lo mismo que y. Pero como y = x + 2, podemos escribir y = f(x) = x + 2, o simplemente

$$f(x) = x + 2$$

Siendo en este caso x la variable independiente, mientras que "y" representa la variable dependiente.

Por ejemplo para encontrar f(3), que es la salida correspondiente a la entrada 3, reemplazamos con 3 cada x en f(x) = x + 2:

$$f(3) = 3 + 2 = 5$$

Del mismo modo,

$$f(8) = 8 + 2 = 10$$

$$f(-4) = -4 + 2 = -2$$

Los números de salida tales como f(-4) son llamados **valores de la función** (o valores funcionales). Y están en el rango de f.

EJEMPLO 10:

La función de Interés está definida por I = c.r.t. Con c el capital, r la taza de interés y t el tiempo.

Solución:

Por ejemplo, supongamos que se 500 Bs. ganan un interés simple a una tasa anual del 6%. Entonces, en este caso:

$$I = 500(0{,}06)t$$

Donde el tiempo (t) es la variable independiente y el Interés (I) es la variable dependiente. Con t en años e I en Bolívares.

Si queremos calcular el interés en 6 meses = ½ de un año, entonces:

$$I = 500(0{,}06)(1/2) = 15$$

Lo que significa que 500 Bs. a una taza de 6% anual, alcanza un interés simple en 6 meses de 15 Bs.

Para continuar hay que ser más específicos acerca del dominio de una función. A menos que se establezca otra cosa, el dominio consiste en todos los números reales (**R**) para los cuales la regla de la función tenga sentido, esto es, que den valores de la función reales.

EJEMPLO 11:

Con la función

$$h(x) = \frac{1}{x-6}$$

Solución:

Aquí cualquier número real puede ser usado para x excepto 6, ya que el denominador es cero cuando x = 6. Por tanto, el dominio de h se entenderá como todos los números reales excepto 6.

Determinación de dominios.

El **dominio** consiste en todos los números reales para los cuales la regla de la función tenga sentido, esto es, que los valores de la función sean números reales.

Formalmente **El dominio de la función f es el mayor subconjunto del conjunto de los números reales para el cual f está definida.**

Por lo tanto, se deben determinar los valores $x \in \mathbf{R}$ tales que $f(x) \in \mathbf{R}$. Muchas veces la determinación del dominio de f conduce a resolver ecuaciones e inecuaciones en una variable.

EJEMPLO 12:

Solución:

- El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x-3}$ es todo el conjunto de los números reales, excepto el 3, pues para éste la función no está definida, pues el denominador es igual a cero, y dicha solución no está definida en los números reales.

- El dominio de la función f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$ es todo el conjunto **R** ya que para cualquier valor que tome x la función estará definida, pues el denominador no se hará cero, y sabemos que $1 + x^2 > 0$ para todo $x \in$ **R**.
- El dominio de la función h(t) = $\sqrt{t+2}$ es el intervalo infinito [-2,∞), ya que $\sqrt{t+2}$ es un número real si y sólo si $t + 2 \geq 0$, es decir, $t \geq -2$. Pues sabemos que en los números reales no está definida una raíz con índice par de un número negativo.

EJEMPLO 13:

Solución:

Para la función de interés del ejemplo anterior definida por la fórmula I = c.r.t, el número de entrada t no puede ser negativo ya que el tiempo negativo no tiene sentido físico. Así que el dominio consiste en todos los números no negativos.

Determinación del dominio y de valores funcionales.

Sea $g(x) = 3x^2 – x + 5$.

Primero observamos el dominio de la función, que en este caso se aprecia que podemos utilizar cualquier número real en lugar de x y obtenemos un número real.

Por tanto podemos sustituir a x por cualquier número real, como:

Encontrar g(z).

$g(z) = 3(z)^2 – z + 5 = 3z^2 – z + 5$

Encontrar g(3).

$g(3) = 3(3)^2 – (3) + 5 = 3(9) – 3 + 5 = 27 + 2 = 29$

APLICACIÓN ECONÓMICA DE LAS FUNCIONES

Como se ha visto, una función es en esencia una *correspondencia* por la que a cada número de entrada en el dominio se asigna un número de salida en el rango.

En Economía son muchas las situaciones que se expresan como una función, es decir que una situación determinada, depende del comportamiento de un aspecto. En el presente trabajo, se abordarán las funciones más conocidas y más utilizadas, como lo son: la función demanda, oferta, costo, ingreso y beneficio.

Función demanda.

Suponga que la ecuación p= 100/q describe la relación entre el precio por unidad p de cierto producto y el número de unidades q del producto que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Esta ecuación es llamada *ecuación de demanda* para el producto. Si q es un número de entrada, entonces para cada valor de q se asigna exactamente un número de salida p:

$$q \rightarrow \frac{100}{p} = p$$

Por ejemplo, $20 \rightarrow \frac{100}{20} = 5;$

Esto es, cuando q es 20, entonces p es 5. Así, el precio p es una función de la cantidad demandada, q. Esta función es llamada **función de demanda.** La variable independiente es q, y p es la variable dependiente. Ya que q no puede ser cero (la división entre cero no está definida) y no puede ser negativa (q representa una cantidad), el domino es todos los valores de q tales que q>0.

Analizando cotidianamente la función de la demanda, **en general, salvo casos muy singulares, la ecuación de la demanda representa a q como una función decreciente de p,** debido a la tendencia en la población a consumir menor cantidad del bien a medida que el precio de éste aumenta.

También se puede expresar la función de demanda de q en función de p, siendo esta q = f(p), donde la cantidad demandada q depende del precio unitario p.

EJEMPLO 14:

Se tienen dos bienes, B1 y B2, con funciones de demanda dadas por:

Bien B1 : $q = f(p) = \dfrac{90 - 3p}{5}$

Bien B2: $q = f(p) = 140 - 12p$

Donde p viene expresado en bolívares.

a) Si el precio unitario de ambos bienes es de Bs. 5,75, ¿Cuál de los dos bienes tendrá mayor demanda?

b) ¿Existe algún precio del mercado para el cual la demanda de ambos bienes sea la misma?

Solución:

a) Para averiguar cuál de los dos bienes tendrá una mayor demanda, si el precio unitario de ambos es de Bs. 5,75; bastará hacer p = 5,75 en cada una de las funciones de demanda y hallar el valor de q correspondiente. Así.

Para B1: $q = \dfrac{90 - 3(5{,}75)}{5} = 14{,}55$

Para B2: $q = 140 - 12(5{,}75) = 71$

Por lo tanto para un precio unitario de Bs. 5,75, el bien B2 tendrá una mayor demanda (71) que el bien B1 (14,55).

b) La respuesta a la interrogante planteada acerca de la existencia de algún precio que iguale la demanda de ambos bienes, la tendremos al resolver la ecuación que resulta al igualar las cantidades demandadas de dichos bienes. Es decir, el precio p, que iguala la demanda del bien B1 con la del bien B2, es aquél que verifica la ecuación:

$$\frac{90-3p}{5} = 140 - 12p$$

Esto es:

$$90 - 3p = 5\,(140 - 12p)$$

$$90 - 3p = 700 - 60p$$

$$60p - 3p = 700 - 90$$

$$57\,p = 610$$

$$p = \frac{610}{57}$$

$$p = 10{,}70$$

Por lo tanto, si el precio es de Bs. 10.70, ambos bienes tendrán la misma demanda. El valor de demanda común se obtiene al sustituir este precio en cualquiera de las dos funciones de demanda; en este caso, resulta ser q =11,6 unidades.

EJEMPLO 15:

La función de demanda de un producto está dada por:

$$p = f(q) = \frac{551-q}{4}$$

Si la demanda del producto es de 255, ¿Cuál será el precio unitario del producto?

Solución:

Para averiguar el precio del producto, sólo hay que hacer q = 255 en la función de demanda y hallar el valor de p.

$$p = \frac{551-255}{4} = 74$$

Por lo tanto el precio unitario del producto es de 74 Bolívares.

Función de oferta

La siguiente tabla es un *programa de oferta.*

p	**q**
Precio por Unidad	**Cantidad surtida por semana**
500	11
600	14
700	17
800	20

Esta tabla da una correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes proporcionan por semana a ese precio. A cada producto le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

Si p es la variable independiente, entonces q es una función de p, digamos q = f(p), y f(500) = 11, f(600) = 14, f(700) = 17 Y F(800) = 20.

Observando que, cuando el precio por unidad se incremente, los fabricantes está dispuestos a surtir más unidades por semana.

Por otra parte, si q es la variable independiente, entonces p es una función de q, digamos p = g(q), y g(11) = 500, g(14) = 600, g(17) = 700 y g(20) = 800.

Por esto se habla de f y g como **funciones de oferta.**

Así como la demanda se refiere a la cantidad de un bien que los consumidores están dispuestos a comprar en un determinado período de tiempo. **La oferta** trata de la cantidad del bien que los productores colocan en el mercado para su venta.

La función de oferta s = f(p) de s (oferta) en función de p (precio unitario), también se puede expresar de p en función de s siendo esta p = f(s), donde el precio depende de la cantidad ofertada.

La función de la oferta, en contraposición a la función de la demanda, representa, en general, a p como función creciente de s; esto se explica por el incentivo de los productores a generar más cantidades del bien a medida que el precio en el mercado sea mayor.

EJEMPLO 16:

Se tienen dos bienes A y B, con ecuaciones de oferta dadas por:

Bien A: $s = f(p) = \dfrac{p+20}{5}$

Bien B: $s = f(p) = \dfrac{120+p}{15}$

Un consumidor acude al Mercado con las intenciones de comprar uno cualquiera de dichos bienes:

a) Si el consumidor está dispuesto a pagar Bs. 12 por cada unidad del bien comprado, ¿Cuál de los bienes debería comprar?

Solución:

Para determinar el bien a comprar por el consumidor, que sólo esta dispuesto a pagar Bs. 12 por cada unidad del bien comprado, deberán evaluarse para este precio, las cantidades ofrecidas para cada productor de los bienes considerados y seleccionar aquél cuya oferta sea mayor.

Para el bien A: $s = \dfrac{12+20}{5} = 6{,}4$

Para el bien B: $s = \dfrac{120+12}{15} = 8{,}8$

Por lo tanto, el consumidor deberá comprar el bien B.

EJEMPLO 17:

Una compañía va a entregar mensualmente 5000 linternas de bolsillo a un precio de Bs. 500 la unidad; si el precio unitario es de Bs. 350, ofrece sólo 2000 unidades. Suponiendo que la función de la oferta es lineal. Obtenga la función de la oferta.

Solución:

Para s = 5000, se tiene que p = 500; es decir:

$5000 = a + 500b.$

Análogamente, si p = 350, s = 2000, lo que se traduce en:

$$2000 = a + 350b.$$

Los valores de “a” y “b” se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5000 = a + 500b \\ 2000 = a + 350b \end{cases}$$

cuya solución es: a = - 5000, b = 20. La Función de la oferta es por tanto:

$$s = -5000 + 20p.$$

Hasta ahora se han presentado dos funciones muy importantes en el mercado; la oferta y la demanda. No obstante que en cada una de ellas influye el precio, ninguna por sí sola puede determinar el precio. Los precios en un mercado de competencia están determinados por el equilibrio de estas funciones. De esto surge la definición de **Punto de Equilibrio.**

Sea B un bien cualquiera y T un período de referencia, llamamos **Punto de equilibrio** del bien B, en el período T, al punto en donde se igualan la cantidad ofrecida, s y la cantidad demandada, q.

El valor del precio, en el punto de equilibrio, lo denominamos **Precio de Equilibrio** del bien B; la cantidad demandada (ofrecida) en el punto de equilibrio la denominamos **Cantidad de Equilibrio.**

EJEMPLO 18:

Si las ecuaciones de la demanda y de la oferta de un determinado bien son, respectivamente:

$$q = \frac{180 - 15p}{2}$$

$$s = 6p - 18$$

Obtenga el punto de equilibrio.

Solución:

Por definición, las coordenadas del punto de equilibrio se obtienen hallando el punto de intersección de las curvas de demanda y de oferta del bien considerado. Es decir,

obteniendo el punto para el cual la demanda q se iguala a la oferta s; en otras palabras; cuando se da la igualdad;

$$q = s$$

En este caso, la igualdad anterior adopta forma:

$$\frac{180 - 15p}{2} = 6p - 18$$

De donde,

$$180 - 15p = 12p - 36$$

$$180 + 36 = 12p + 15p$$

$$216 = 27p$$

$$\frac{216}{27} = p$$

$$8 = p$$

Siendo p = 8; el valor de la cantidad ofrecida para p = 8, resulta ser q = s = 30.

En definitiva, el precio de equilibrio es 8 y la cantidad de equilibrio es 30.

Función Costo, Ingreso y Beneficio

Las empresas realizan dos funciones básicas; por un lado, elaboran o transforman bienes y recursos para su posterior venta; por otro lado, compran recursos en el mercado de factores. Una de las decisiones fundamentales que toda empresa debe tomar es la cantidad que va a producir, y ésta depende del precio de venta y del costo de producción; esta decisión es guiada por el deseo de maximizar el beneficio, definido como la diferencia entre el ingreso y el costo total.

BENEFICIO = INGRESO – COSTO TOTAL.

En general, el costo total (C), asociado a un proceso productivo, es el resultado de la suma de dos tipos de costo: el costo fijo (CF) y el costo variable (CV). El primero contempla aquellos gastos que no dependen de las cantidades producidas como por ejemplo los incurridos en: compra y mantenimiento del edificio, compra de maquinaria, pagos al personal administrativo, etc. El costo variable depende de la cantidad producida; aquí se

incluyen los gastos efectuados en la compra de materia prima, gastos energéticos, transporte, pago de obreros, etc.; este costo aumenta conforme aumenta la producción.

Se puede establecer la relación entre los costos anteriores por la ecuación:

$$\mathbf{C = CF + CV.}$$

Por lo tanto llamamos **Función de costo** de un bien B, en el período T, a la función que nos muestra para cada nivel de producción q, el costo total asociado C. Es decir la función: $C = f(q)$ con $C \geq 0$, $q \geq 0$.

En adelante supondremos que la ecuación de costo es del tipo lineal, es decir de la forma:

$$C = a + bq$$

Interpretando económicamente las constantes "a" y "b" que aparecen en la ecuación anterior:

- a, la ordenada en el origen, es el valor del costo cuando q = 0; podemos interpretar este valor como el correspondiente al costo fijo de producción.
- b, la pendiente, representa el aumento de costo necesario para producir una unidad adicional del bien.¿Por qué?; a este valor lo llamamos **costo marginal (Cma)** del bien.

EJEMPLO 19:

La función de costo de un bien es: $C = 4680{,}35 + 200q$

a) Obtén el Costo fijo y el costo variable.
b) Determina el costo marginal.

Solución:

El Costo fijo es igual a la ordenada en el origen, a , esto es:

$$CF = 4680{,}35$$

La función de costo variable es C – CF; o sea;

$$CV = 200q$$

El Costo marginal es el valor de la pendiente, b; es decir:

$$CMa = b = 200$$

Función de Ingreso

Llamamos **Función de Ingreso** de un bien, en el período T, a la función que nos muestra para cada nivel de producción q, el ingreso proveniente de la venta, I. Es decir a la función: $I = f(q)$ con $I \geq 0$, $q \geq 0$.

Función de Beneficio

Como se dijo en párrafos anteriores, la función primordial de una empresa es la de maximizar sus beneficios. El beneficio dado por un bien B, producto de la venta de q unidades del mismo, es:

$$\mathbf{B = I - C}$$

Siendo I el ingreso obtenido y C el costo ocasionado, por la venta y producción, respectivamente de q unidades de dicho bien.

Tanto I como C son funciones de Q, en consecuencia B también lo es.

Llamamos **Función de Beneficio** de un bien en el período T, a la función que nos muestra para cada nivel de producción q, el beneficio obtenido B. Es decir a la función:

$B = f(q)$ con $q \geq 0$.

EJEMPLO 20:

Una empresa puede vender un determinado artículo a un precio unitario de Bs. 70. El costo fijo de producción es de Bs. 8000, mientras que el costo marginal se estima en Bs. 30 por unidad.

a) Obtén las funciones de Costo e Ingreso.
b) Obtén la función de Beneficio.

Solución:

El Costo fijo es por condiciones del problema, CF = 8000; el costo variable, CV, se determina mediante la relación:

$$CV = CMa \cdot q$$

Es decir:

$$CV = 30q$$

Por lo tanto, la función de Costo, C es:

$$C = CF + CV = 8000 + 30q$$

La función de Ingreso se obtiene mediante la relación fundamental

$$I = p \cdot q$$

En consecuencia:

$$I = 70\ q$$

La función de **beneficio** se obtiene mediante la relación:

$$B = I - C$$

Es decir,

$$B = 70q - (8000 + 30q)$$

$$B = 40q - 8000.$$

Función de Producción

Las empresas en su proceso de producción utilizan recursos, o mejor dicho, factores de producción. La idea del asunto está en determinar la forma en que se combinan dichos factores para producir un cierto número de unidades del bien considerado; es decir:

¿Qué cantidad de producto se puede elaborar con determinadas disponibilidades de tierra, trabajo, maquinaria, materias primas y demás recursos productivos?

La respuesta a esta interrogante se tiene en la **Función de Producción;** ésta no es más que una relación que vincula, la cantidad de producto producido Q, con los factores productivos – trabajo(L), capital (K), recursos naturales (T) – siguiendo los lineamientos de una incentiva empresarial (H); en otras palabras, es una función de las variables: L, K. T, H. Manteniendo constantes todos, menos uno, los factores que intervienen, la cantidad producida q, será función sólo del factor que se ha dejado como variable, y es en este contexto que definiremos la función de producción.

Llamamos **Función de Producción** de un bien relativo a un factor F, en el período T, a la función que nos muestra para cada valor de F, la cantidad Q producida, manteniendo el resto de los factores constantes. Es decir a la función: $Q = g(F)$ con $Q \geq 0$, $F \geq 0$.

EJEMPLO 21:

El número de unidades producidas de un determinado bien, Q, en términos de la cantidad de trabajo L, medida en horas-hombre, está dada por la función $Q = 20L$, con L[0,8].

a) ¿Qué cantidad de bien se produce si se emplean 4,5 horas – hombre?
b) ¿Cuántas horas - hombre se necesitan para producir 125 unidades?

Solución:

a) La cantidad del bien producida cuando se usan 4,5 horas-hombre del factor trabajo, se obtiene sustituyendo L = 4,5 en la función de producción.

$$Q = 20(4,5) = 90$$

Por lo tanto al utilizar 4,5 horas-hombre se obtienen 90 unidades del bien.

b) El número de horas-hombre requerido para producir 125 unidades, se obtiene sustituyendo en la función de producción Q = 125 y luego resolviendo la ecuación resultante para L; es decir.

$$125 = 20L$$

$$\frac{125}{20} = L$$

$$6,25 = L$$

Por lo tanto para obtener 125 unidades del producto hay que utilizar 6,25 horas-hombre.

EJEMPLO 22:

Una compañía produce dos tipos de artículos: A1 y A2. Las funciones de beneficio para dichos bienes son:

Bien A1: $B = 2000Q - 30000$

Bien A2: $B = 2500Q - 150000$

Ambos bienes usan como materia prima el algodón. Las funciones de producción asociadas a este factor son:

Bien A1: $Q = 0.75T$, con $T[0,100]$

Bien A2: $Q = 1.20T$; con $T[0,100]$

Siendo T la cantidad de algodón utilizada en Kg.

a) Si se dispone de 60 Kg. de algodón, ¿Cuál bien conviene producir?
b) Expresa la función de beneficio de cada bien términos de la algodón utilizada en su fabricación.

Solución:

a) Para deducir cuál de los dos bienes se producirá, debe evaluarse para cada bien, el beneficio que se obtiene al utilizar 60 Kg. de algodón en la producción de los mismos.

Para el bien A1 se tiene:

Cantidad Producida: $Q = 0,75(60) = 45$ unidades

Beneficio Obtenido: $B = 2000(45) - 30000 = 60000$

Para el bien A2 se tiene:

Cantidad Producida: $Q = 1,20(60) = 72$ unidades

Beneficio Obtenido: $B = 2500(72) - 150000 = 30000$.

Obviamente el bien a producir es el A1, ya que genera un mayor beneficio que A2.

b) La función de beneficio para cada bien, en términos de la cantidad de algodón utilizada en su fabricación, se obtiene eliminando la variable Q del sistema formado por las ecuaciones de beneficio y producción; esto es:

Para el bien A1:

$$\begin{cases} B = 2000Q - 30000 \\ Q = 0.75T \quad \text{con } T[0,100] \end{cases}$$

Sustituyendo Q en B, se tiene:

$$B = 2000(0.75T) - 30000$$
$$B = 1500T - 30000 \quad \text{con } T[0,100]$$

Para el bien A2:

$$\begin{cases} B = 2500Q - 150000 \\ Q = 1{,}20T \quad \text{con } T[0,100] \end{cases}$$

Sustituyendo Q en B, se tiene:

$$B = 2500(1.20T) - 150000$$
$$B = 3000T - 150000 \quad \text{con } T[0,100]$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.1

1.- Una compañía ha analizado sus ventas y ha encontrado que sus clientes compran 10 artículos más de sus productos por cada Bs. 2,50 de reducción en el precio unitario. Cuando el precio es de Bs. 12,75, la compañía vende 500 unidades. Asumiendo que la relación entre la cantidad demandada q y el precio unitario p es lineal. ¿Cuál es la ecuación de la demanda?.

R. q = 551 – 4p

2.- En un cierto mercado se sabe que cuando el precio de una lámpara es de Bs. 2000, no hay lámparas disponibles, sin embargo, por cada Bs. 1000 de aumento en el precio, se dispone de 20 lámparas más para el mercado. Asumiendo que la relación entre la cantidad ofrecida S y el precio unitario p es lineal. ¿Cuál es la ecuación de la oferta?.

R. s = -40 + 0,02p

3.- Para cada una de las siguientes condiciones, obtén las coordenadas del punto de equilibrio:

i. La ecuación de la demanda es q = 10 – 2p, y la ecuación de la oferta es s = $\frac{2+3p}{2}$.

ii. Se mantiene la ecuación de la demanda del apartado anterior, pero la ecuación de la oferta es ahora: s = $\frac{8+3p}{2}$.

R. i: (34/7,18/7), ii: (46/7,12/7)

4.- La función de beneficio de un bien, viene dada por B = -25000 + 320q. Por cada 10 unidades de aumento en la producción; se sabe que el ingreso se incrementa en Bs. 5354,25. ¿Cuál es la función costo? y ¿Cuál es el costo de producir 90 unidades del bien?.

Sugerencia: Recuerde que el costo fijo CF = -B(0) y suponga que la función costo es lineal.

R. c(q) = 25000 + 215,43q; c(90) = 44388,70

5.- El costo fijo asociado al proceso de producción de un determinado bien es de Bs. 120000; por cada 5 unidades adicionales del bien producido, el costo se incrementa en Bs. 60000. El precio en el mercado es tal que por cada unidad adicional vendida, se genera un incremento en el beneficio de Bs. 5000. Obtenga las funciones de Costo, ingreso y beneficio.

R. c(q) = 120000 + 12000q; r(q) = 17000q; B(q) = 5000q - 12000

6.- El incremento en las cantidades producidas de un determinado bien, cuando el factor trabajo se incrementa en 40 horas-hombre, es de 650 unidades, a) ¿Qué cantidad del bien se produce si se emplean 6,8 horas-hombre?, b) ¿Cuántas horas hombres se necesitan para producir 494 unidades?.

R. a) 110,5 ; b) 30,4 horas-hombre

7.- Una mueblería fabrica gabinetes de cocina y los vende a Bs. 500 cada uno. En la fabricación sus costos fijos se elevan a Bs. 5000 y el costo y el costo de producción de cada gabinete es Bs. 200.

a) Exprese las funciones de ingreso y costo en función del número de gabinetes que vende.
b) Cuántos gabinetes debe vender la mueblería para obtener una ganancia de Bs. 16000.

R. a) r(q) = 500q, c(q) = 5000 + 200q ; b)70 gabinetes.

3. LIMITES Y CONTINUIDAD.

Límites

Tal vez has estado en un estacionamiento en el que debe "aproximarse" al carro de enfrente, pero no quiere golpearlo ni tocarlo. Esta noción de estar cada vez más cerca de algo, pero sin tocarlo, es muy importante en matemáticas y está involucrada en el concepto de *límite*, en el que descansa el fundamento del cálculo. Básicamente haremos que una variable "se aproxime" a un valor particular y examinaremos el efecto que tiene sobre los valores de la función.

Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Aunque esta función no está definida en x = 1, quizá desee conocer acerca del comportamiento de los valores de la función cuando x se hace muy cercana a 1. La tabla siguiente da algunos valores de x que son un poco menores y otros un poco mayores, que 1, y sus correspondientes valores funcionales. Observe que cuando x toma valores más y más próximos a 1, sin importar si x se aproxima *por la izquierda (x<1) o por la derecha (x>1)*, los valores correspondientes de f(x) se acercan cada vez más a exclusivamente un número, el 3.

1

X	0.8	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	1.001	1.005	1.01	1.05	1.1	1.2
F(x)	2.44	2.71	2.8525	2.9701	2.9850	2.9970	3.0030	3.0150	3.0301	3.1525	3.31	3.64

3

Esto también es claro de la gráfica de f en la figura (1).

Figura 1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$

Observe que aunque la función no está definida en x = 1 (como se indica por un pequeño círculo vacío), los valores de la función se acercan cada vez más a 3 conforme x se acerca más y más a 1. Para expresar esto decimos que el **límite** de f(x) cuando x se aproxima a 1 es 3 y escribimos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

Podemos hacer f(x) tan cercanos a 3 como queramos. El límite existe en 1 aunque 1 no esté en el dominio de f.

Llamamos el **límite** de f(x) cuando x se aproxima (o tiende) a a, es el número L, escrito.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{L},$$

siempre que f(x) esté arbitrariamente cercano a L para toda x lo suficientemente cerca, pero diferente, de a.

Enfatizamos que cuando debemos encontrar un límite, no estamos interesados en lo que le pasa a f(x) cuando x es *igual a a*, sino sólo en lo que le sucede a f(x) cuando x es *cercana a a.*

Propiedades de los límites

Para determinar límites no siempre hace falta calcular los valores de la función o esbozar una gráfica. De manera alternativa, hay varias propiedades de los límites que podemos emplear; las siguientes son las que más utilizaremos.

1. Si f(x) = c es una función constante, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c$ = c.

EJEMPLO 23:

Solución:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 7 = 7$$

2. $\lim_{x \to a} x^n$ = a^n, para cualquier entero positivo *n*.

EJEMPLO 24:

Solución:

$$\lim_{x \to 6} x^2 = 6^2 = 36$$

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ **existe, entonces:**

3. $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$ **.** Esto es, el límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia, respectivamente, de los límites.

EJEMPLO 25:

Solución:

$$\lim_{x \to 2}(x^2 + x) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} x = (2)^2 + (2) = 6$$

4. $\lim_{x \to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x)$ **.** Esto es, el límite de un producto es el producto de los límites.

EJEMPLO 26:

Solución:

$$\lim_{x\to 3}(x+1)x = \lim_{x\to 3}(x+1).\lim_{x\to 3} x = (\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 1)\ .\ \lim_{x\to 3} x = (3 + 1).\ 3 = 12$$

5. $\lim_{x\to a}[cf(x)] =$ c. $\lim_{x\to a} f(x)$**,** donde c es una constante. Esto es, el límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

EJEMPLO 27:

Solución:

$$\lim_{x\to -2} 3x^3 = 3.\ \lim_{x\to -2} x^3 = 3.(-2)^3 = -24$$

6. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$**,** si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. Esto es, el límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el denominador no tenga un límite de 0.

EJEMPLO 28:

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^3+4} = \frac{\lim_{x\to 1}(2x^2+x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^3+4)} = \frac{2+1-3}{1+4} = \frac{0}{5} = 0.$$

7. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

EJEMPLO 29:

Solución:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{x^2+7} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 3}(x^2+7)} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

EJEMPLO 30:

Hallar $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x^3-8}{x-2}$

Solución:

Dado que $\lim_{x\to 0}(x-2)\neq 0,$ se puede utilizar la propiedad del cociente de límites para obtener:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-8}{x-2}=\frac{\lim_{x\to 0}(3x^3-8)}{\lim_{x\to 1}(x-2)}=\frac{3\lim_{x\to 0}x^3-\lim_{x\to 0}8}{\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}2}=\frac{-8}{-2}=4$$

Límites Indeterminados de Funciones.

En algunas ocasiones los teoremas tratados anteriormente para el cálculo de límites no son aplicables ya que al evaluar el límite se puede presentar, algunas veces, formas extrañas que no presentan ni dicen nada. Esta formas extrañas reciben el nombre de **formas indeterminadas**. Por ejemplo si consideramos a f(x) definida por: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ y deseamos averiguar su límite, es decir $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ nos encontramos con que el límite del denominador es cero, y en consecuencia, no es aplicable el teorema sobre límite de un cociente para encontrar el valor del límite (que existe y es 2). Se dice entonces que estamos ante una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Otras indeterminaciones que se pueden encontrar son: $\infty-\infty$, $0.\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0.

En algunos casos las indeterminaciones señaladas anteriormente, pueden hacerse desaparecer a través de algunas manipulaciones algebraicas de la función (factorizando, empleando conjugada, sacando factores comunes, entre otros).

En limites de la forma $\frac{0}{0}$ para levantar o suprimir la indeterminación, se recomienda utilizar la conjugada o factorizar tanto al numerador como al denominados de la expresión.

Recordando que:

$$\boxed{\begin{aligned} a^3-b^3&=(a-b)(a^2+ab+b^2)\\ a^3+b^3&=(a+b)(a^2-ab+b^2)\\ x^3-8&=x^3-2^3\end{aligned}}$$

EJEMPLO 31:

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^3-8}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+2x+4}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

En los límites de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ para levantar o suprimir este tipo de indeterminación se sugiere dividir tanto el numerador como el denominador de la expresión por la mayor potencia de la variable.

EJEMPLO 32:

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}$ (indeterminación)

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+0}=1$$

En los límites de la forma (∞ - ∞) se puede suprimir o eliminar la indeterminación utilizando cualquier artificio matemático VALIDO para transformar dicha indeterminación a las formas antes mencionadas y luego aplicar según sea el caso, su criterio respectivo.

EJEMPLO 33:

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\infty-\infty$

Resolviendo previamente, la expresión aplicando conjugada:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}=\frac{\sqrt{(x^2+2x)^2}-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Levantando la indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+\frac{x}{x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x}}+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\right]=\frac{2}{2}=1.$$

$$\boxed{\text{Pues } \frac{2}{\infty}=0}$$

Continuidad

Gráficamente se tiene la idea de que una función es continua cuando su gráfica es una curva no segmentada, sin “huecos” o vacíos. No todas las funciones tienen esta propiedad pero las que sí la poseen presentan características especiales que las hacen bastante importantes en el desarrollo del cálculo. Por ejemplo, compare las funciones

$$f(x) = x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \neq 1, \\ 2, & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

cuyas gráficas se presentan en la figura (2).

Cuando x = 1 la gráfica de f no se corta, pero la de g sí tiene un corte. Poniéndolo de otra manera, si tuviera que trazar ambas gráficas con un lápiz, tendría que levantar el lápiz de la gráfica de g cuando x = 1, pero no tendría que levantar de la gráfica f.

Por todo esto.

Una función f es ***continua en a si y sólo si, las siguientes tres condiciones se cumplen:***

1. f(x) está definida en x = a; esto es, a está en el dominio de f.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe,
3. $\lim_{x \to a} f(x)$ = f(a)

Si f está definida en un intervalo abierto que contenga a a, excepto tal vez en a misma, y f no es continua en a, entonces se dice que f es <u>*discontinua*</u> *en a, y a es llamada* ***<u>punto de discontinuidad</u>.***

EJEMPLO 34:

Demostrar que el polinomio p(x) = $3x^3 - x + 5$ es continuo en x = 1.

Solución:

Verificar que se cumplan los criterios de continuidad. Sin duda p(1) está definido;

$$P(1) = 3(1)^3 - (1) + 5 = 7.$$

Además, $\lim_{x \to 1} p(x)$ existe.

$$\lim_{x \to 1} p(x) = \lim_{x \to 1}(3x^3 - x + 5) = \lim_{x \to 1} 3x^3 - \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 5$$

$$= 3\lim_{x \to 1} x^3 - \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 5 = 3(1)^3 - (1) + 5 = 7$$

Luego se cumple que.

$$\lim_{x \to 1} p(x) = p(1)$$

Por tanto p(x) es continuo en x = 1.

EJEMPLO 35:

Demostrar que la función racional f(x) = $\dfrac{x+1}{x-2}$ es continua en x = 3.

Solución:

Observando que f(3) existe y es $\frac{3+1}{3-2} = 4$. Puesto que $\lim_{x\to 3} x - 2 \neq 0$, entonces.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-2} = \frac{\lim_{x\to 3}(x+1)}{\lim_{x\to 3}(x-2)} = \frac{4}{1} = 4 = f(3)$$

Entonces se cumple la condición de

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

Por lo que se verifica que f(x) es continua en x = 3.

APLICACIÓN ECONÓMICA DE LÍMITES Y CONTINUIDAD

Básicamente la aplicación económica de los límites y la Continuidad de funciones se aprecia al describir lo que le ocurre a las funciones económicas cuando toman determinados valores.

EJEMPLO 36:

Cierta función de Costo se define C(x) = $\left[\frac{4x^2-100}{x-5}\right], x \neq 5$ en donde x es el número de artículos producidos (en cientos) y C es el costo de producción (en miles de bolívares). Encontrar e Interpretar: a) $\lim_{x\to 5} C(x)$, b) $\lim_{x\to 3} C(x)$, c) $\lim_{x\to 0} C(x)$

Solución:

a) $\lim_{x\to 5}\left[\frac{4x^2-100}{x-5}\right] = \frac{100-100}{5-5} = \frac{0}{0}$ (indeterminación)

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{4x^2-100}{x-5}\right] = \lim_{x\to 5}\left[\frac{(2x)^2-10^2}{x-5}\right] = \lim_{x\to 5}\left[\frac{(2x-10)(2x+10)}{x-5}\right]$$

$$= \lim_{x\to 5}\left[\frac{2(x-5)(2x+10)}{x-5}\right] = \lim_{x\to 5} 2(2x+10) = 40$$

Puede interpretarse la ruptura en x = 5, como el hecho de no estar preparado el montaje de la producción de los artículos, para funcionar aproximadamente cuando el número de artículos producidos sean 40.

b) $\lim_{x \to 3}\left[\frac{4x^2 - 100}{x - 5}\right] = \frac{4(3)^2 - 100}{3 - 5} = \frac{-64}{-2} = 32.$

El costo aproximado de tres artículos es de 32 (miles de bolívares) en él se incluyen todos los gastos que genera la elaboración de cada uno de los artículos.

c) $\lim_{x \to 0}\left[\frac{4x^2 - 100}{x - 5}\right] = \frac{4(0)^2 - 100}{0 - 5} = \frac{-100}{-5} = 20$

El costo o gastos que puede prever la empresa para iniciar la producción de los artículos es de 20 (miles de bolívares).

EJEMPLO 37:

El costo (en bolívares) de eliminar x% de la polución del agua en cierto riachuelo está dado por:

$$C(x)=\frac{75000x}{100 - x} \; para \; 0 \leq x < 100$$

a) Hallar el Costo de eliminar la mitad de la polución.

b) ¿Qué porcentaje de la polución puede eliminarse con 20000 Bs.

c) Evaluar e interpretar el resultado del $\lim_{x \to 100} C(x)$

Solución:

a) La mitad de la polución es el 50%, es decir, evaluar la función en x = 50.

$$C(50) = \frac{75000(50)}{100 - 50} = 75000bs.$$

Por lo tanto el Costo de eliminar el 50% de la polución es de 75000 Bs.

b) Conociendo el costo, tenemos que hallar a x , para la cual resolvemos la ecuación:

$$20000 = \frac{75000x}{100 - x} = 20000(100 - x) = 75000x$$

2000000 – 20000x = 75000x

2000000 = 75000x + 20000x

$$\frac{2000000}{95000} = x$$

21,05% = x

Con 20000 se puede eliminar el 21,05% de la polución.

c) $\lim_{x \to 100} \frac{75000x}{100 - x}$

Dado que $0 \leq x < 100$ a medida que x se acerca a 100 ilimitadamente el Costo se vuelve arbitrariamente grande.

(verificar con x cerca de 100, como por ejemplo 99,999)

EJERCICIOS PROPUESTOS 3.1

1.- Un colegio privado de San Cristóbal ha lanzado una campaña para reunir fondos. Se supone que los directivos del colegio estiman que llevará f(x) = $\frac{10x}{150 - x}$ semanas lograr el x% de su objetivo. a) ¿Cuánto tiempo llevará alcanzar el 50% del objetivo de la campaña?, b) ¿Cuánto tiempo se tomará cuando se tiende a alcanzar el 100% de los objetivos, es decir, $\lim_{x \to 100} f(x)$.

R. a) 5 semanas, b) 20 semanas.

2.- Un minorista puede obtener cámaras del fabricante a un costo de Bs. 50 cada una y las vende a 80 Bs. cada una. A este precio, los consumidores compran 40 cámaras al mes. El minorista planea bajar el precio para estimular las ventas y estima que por cada 5 Bs. de reducción en el precio, cada mes se venderán 10 cámaras más. Expresar la utilidad mensual como una función del precio de venta x.

R. P(x) = 2(100 – x)(x – 50)

3.- La función de Producción de cierto bien con respecto a la cantidad de Materia Prima (t) en kilogramos, es P(x) = $\frac{t^2-4}{t-2}$, a) Calcule e interprete la producción para cuando se tiente a 2 Kg. de materia prima, es decir, $\lim_{x\to 2} P(x)$, b) ¿Qué cantidad de materia prima se utiliza para producir 10 unidades del bien.

R. a) Se tiende a 4 unidades. b) t = 8

4.- Un fabricante es capaz de producir 5000 unidades por día. Si el costo (indirecto) fijo es 1500 Bs. por día y el costo variable 2 Bs. por unidad producida, expresar el costo C como una función de la cantidad de unidades producidas.

R. C(q) = 1500 + 2q

5.- Se conoce que la oferta y la demanda de cierto artículo son funciones de la forma S(p) = p^2 + Ap – 3 y D(p) = Cp + 32 donde p es el precio por unidad y A y C son constantes, y que no se suministrará ninguna unidad hasta que el precio sea al menos de 3 Bs. Así mismo, se sabe que cuando el precio exceda 8 Bs. por unidad, no habrá demanda del artículo. A) ¿Cuántas unidades deben ofrecerse y demandarse en el punto de equilibrio?, b) ¿En cuánto excede la oferta a la demanda cuando el precio es 6 Bs.?

R. a) S(p) = p^2 - 2p – 3, D(p) = -4p + 32, S(p) = D(p) = 12 unidades. b) S(6) – D(6) = 13

4. La derivada.

*La **derivada** de una función f es la función denotada por f' y definida por*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ *; siempre que éste límite exista.*

Si puede encontrarse f'(x), se dice que f es **diferenciable** *y f'(x) se llama derivada de f en x, o derivada de f con respecto a x. El proceso de encontrar la derivada se llama* **diferenciación.**

EJEMPLO 38:

Encontrar la derivada por medio de su definición. Si $f(x) = x^2$.

Solución:

$$f' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x.$$

Observe que al tomar el límite tratamos a x como una constante porque era h y no x la que estaba cambiando.

Además de la notación f'(x), se dan a continuación otras maneras de denotar la derivada de y = f(x).

$\frac{dy}{dx}$	(derivada de y respecto a x),
$\frac{d}{dx}[f(x)]$	[derivada de f(x) respecto a x]
y'	(y prima),

Si la derivada f'(x) puede evaluarse en $x = x_1$. el *número* $f'(x_1)$ resultante se llama **derivada de f en x_1** y se dice que f es *diferenciable en x_1*.

La diferenciación directa de una función por medio de la definición de la derivada puede ser un proceso tedioso. Afortunadamente existen reglas que permiten efectuar la diferenciación en forma por completo mecánica y eficiente. Con ellas se evita el uso directo de límites. Estas son las que más se utilizan.

1.- Derivada de una constante.

Si c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Esto es, la derivada de una función constante es cero.

EJEMPLO 39:

Solución:

$$\frac{d}{dx}(3) = 0 \qquad \text{porque 3 es una función constante.}$$

2.- Derivada de una función potencia.

Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},$$

siempre que x^{n-1} esté definida. Esto es, la derivada de una potencia constante de s es igual al exponente multiplicado por la x elevada a una potencia menor en una unidad que la potencia dada.

EJEMPLO 40:

$g(x) = x^2$

Solución:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$$

EJEMPLO 41:

f(x) = x

Solución:

$$\frac{d}{dx}(x) = 1x^{1-1} = x^0 = 1$$

EJEMPLO 42:

f(x) = $\sqrt{x}$

Solución:

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3.- Regla del factor constante.

Si f es un función diferenciable y c una constante, entonces cf(x) es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

Esto es, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

EJEMPLO 43:

g(x) = $5x^3$

Solución:

$$\frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) = (5)(3)x^{3-1} = 15x^2$$

EJEMPLO 44:

f(q) = $\frac{13q}{5}$

Solución:

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{13q}{5}\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{13}{5}q\right) = \frac{13}{5}\frac{d}{dq}(q) = \frac{13}{5}(1) = \frac{13}{5}$$

Estrategia: Primero rescribimos f como una constante por una función y luego aplicamos la regla 2.

4.- Derivada de una suma o de una resta.

Si f y g son funciones diferenciables, entonces f + g y f – g son diferenciables y

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

Esto es, la derivada de la suma (o resta) de dos funciones es la suma (o resta) de sus derivadas.

EJEMPLO 45:

f(x) = $3x^5 + \sqrt{x}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}x^{1/2}$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}x^{1/2} = 3(5x^4) + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5.- Regla del producto.

Si f y g son funciones diferenciables, el producto fg es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Esto es, la derivada del producto de dos funciones es la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

EJEMPLO 46:

F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5), encontrar F´(x).

Solución:

$$F(x) = = \underbrace{(x^2 + 3x)}_{\boxed{f(x)}}\underbrace{(4x + 5)}_{\boxed{g(x)}}$$

Podemos entonces utilizar la regla del producto:

$$F'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

$$= (x^2+3x)\frac{d}{dx}(4x+5) + (4x+5)\frac{d}{dx}(x^2+3x)$$
$$= (x^2+3x)(4) + (4x+5)(2x+3)$$
$$= 12x^2 + 34x + 15$$

6.- Regla del cociente

Si f y g son funciones diferenciables y g(x) ≠ 0, entonces el cociente f/g es también diferenciable y

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Esto es, la derivada del cociente de dos funciones es el denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, todo ello dividido entre el cuadrado del denominador.

EJEMPLO 47:

$$y = \frac{1}{x + \frac{1}{x+1}}$$

Solución:

Estrategia: Para simplificar la diferenciación rescribimos la función de manera que ninguna fracción aparezca en el denominador.

$$y = \frac{1}{x + \frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x(x+1)+1}{x+1}} = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+x+1)(1) - (x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + x + 1) - (2x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}$$

7.-Regla de la cadena

Si y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, entonces y es una función diferenciable de x Y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

EJEMPLO 48: Uso de la Regla de la cadena

Si y = $2u^2 - 3u - 2$ y u= $x^2 + 4$, encontrar dy/dx.

Solución: Por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(2u^2 - 3u - 2).\frac{d}{dx}(x^2 + 4)$$

$$= (4u - 3)(2x)$$

Podemos escribir la respuesta sólo en términos de x reemplazando u por $x^2 + 4$.

$$\frac{dy}{dx} = [4(x^2 + 4) - 3](2x) = [4x^2 + 13](2x) = 8x^3 + 26x.$$

EJEMPLO 49: Uso de la Regla de la cadena

Si y = $\sqrt{w}$ y w = $7 - t^3$, encontrar dy/dt.

Solución: Aquí y es una función de w y w es una función de t, por lo que podemos considerar a y como función d e t. Por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw}.\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dw}(\sqrt{w}).\frac{d}{dt}(7 - t^3)$$

$$= \left(\frac{1}{2}w^{-1/2}\right)(-3t^2) = \frac{1}{2\sqrt{w}}(-3t^2) = -\frac{3t^2}{2\sqrt{w}}$$

Sustituyendo w $= -\dfrac{3t^2}{2\sqrt{7 - t^3}}$.

8.- Regla de la Potencia

Si u es una función diferenciable de x y n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

EJEMPLO 50: Uso de la regla de la potencia.

Si y = $(x^3 - 1)^7$, encontrar y´.

Solución: Como y es una potencia de una *función* de x, es aplicable la regla de la potencia. Si hacemos u(x) = $x^3 - 1$ y n = 7, tenemos

$$\begin{aligned} Y' &= n[u(x)]^{n-1}u'(x) = 7(x^3-1)^{7-1}.\frac{d}{dx}(x^3-1) \\ &= 7(x^3 - 1)^6\,(3x^2) \\ &= 21x^2(x^3 - 1)^6. \end{aligned}$$

EJEMPLO 51: Uso de la regla de la potencia.

Si y = $\frac{1}{x^2-2}$, encontrar $\frac{dy}{dx}$.

Solución: Aunque la regla del cociente puede emplearse aquí, un procedimiento más eficiente es tratar el miembro derecho como la potencia $(x^2 - 2)^{-1}$ y usar la regla de la potencia. Sea u = $x^2 - 2$. Entonces y = u^{-1} y

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= nu^{n-1}\frac{du}{dx} \\ &= (-1)(x^2-2)^{-1-1}\frac{d}{dx}(x^2-2) \\ &= (-1)(x^2-2)^{-2}(2x) \\ &= -\frac{2x}{(x^2-2)^2}. \end{aligned}$$

Derivadas de Orden Superior

Sabemos que la derivada de una función y = f(x) es a su vez una función f´(x). Si diferenciamos f´(x), la función resultante se llama **segunda derivada** de f con respecto a x.

Se denota con f´´(x). Similarmente, la derivada de la segunda derivada se llama **tercera derivada** y se escribe f´´´(x). Continuando de esta manera, obtenemos *derivadas de orden superior*.

EJEMPLO 52: Encontrar derivadas de orden superior

Si $f(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$, encuentre todas las derivadas de orden superior.

Solución: Al diferenciar f(x) resulta

$$f'(x) = 18x^2 - 24x + 6.$$

Al diferenciar f´(x) resulta

$$f''(x) = 36x - 24.$$

Similarmente,

$$f'''(x) = 36$$

$$f^{(4)}(x) = 0.$$

Todas las derivadas sucesivas son también cero.

EJEMPLO 53: Encontrar una derivada de segundo orden

Si $y = e^{x^2}$ **,** encuentre y´´.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}(2x) = 2xe^{x^2}.$$

Por la regla del producto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2[x(e^{x^2})(2x) + e^{x^2}(1)] = 2e^{x^2}(2x^2 + 1).$$

APLICACIÓN ECONÓMICA DE LA DERIVACIÓN

Análisis Marginal

Sean "x" e "y" dos variables económicas cualesquiera, relacionadas por la ecuación y = f(x). En general se entiende por **análisis marginal** el estudio de las variaciones de la variable "y" en términos de las variaciones de la variable "X".

En la realidad el conjunto formado por los valores que toman las variables económicas tales como precio, costo, oferta, demanda y beneficio, es un conjunto finito; sin embargo, con el fin de aprovechar la potencia que nos brinda el cálculo diferencial, supondremos que los valores de las mencionadas variables son números reales.

Costo, Ingreso y Beneficio Marginal.

Costo Marginal

La **función de costo total** de un fabricante, c = f8q9, nos da el costo total c de producción y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama **costo marginal**. Así,

$$\text{Costo marginal} = \frac{dc}{dq}.$$

Igualmente, sea C = C(q) la función de costo asociada a un cierto bien A, Llamamos **costo marginal** del bien A en el nivel de producción q al valor de la derivada de la función de costo en q_o, es decir a C´(q), siempre y cuando dicha derivada exista.

El costo marginal del bien A en el punto q_0 representa la *velocidad instantánea o tasa* con la cual aumenta (disminuye) el costo del bien en el nivel de producción.

EJEMPLO 54:

Sea c= $0.1q^2 + 3$ una función de costo, donde c está en bolívares y q en kilogramos. Entones,

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q.$$

El costo marginal cuando se producen 4 libras es dc/dq evaluado cuando q = 4:

$$\frac{dc}{dq}\Big|_{q=4} = 0.2(4) = 0.80.$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 1 kilogramo, de 4 a 5 kilogramos, entonces el cambio en el costo es aproximadamente de 0.80 Bolívares. Esto es, el kilogramo adicional cuesta aproximadamente 0.80 Bolívares. En general, *interpretamos el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional producida.*

Si c es el costo total de producir q unidades de un producto, entonces el **costo medio** por unidad, $\bar{c}$ es

$$\bar{c} = \frac{c}{q}$$

EJEMPLO 55:

Si el costo total de 20 unidades es de Bs. 100, entonces el costo medio por unidad es $\bar{c} = \frac{100}{20} = 5Bs.$ Multiplicando ambos miembros de la ecuación (4) por q obtenemos,

$$c = q\bar{c}.$$

Esto es, el costo total es el producto del número de unidades producidas multiplicado por el costo medio unitario.

EJEMPLO 56: Costo marginal

Si la ecuación del costo promedio de un fabricante es

$$\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q},$$

Encontrar la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades?

Solución:

Estrategia: La función de costo marginal es la derivada de la función de costo total c. Encontramos primero c, multiplicando $\bar{c}$ por q.

$$c = \bar{c}q$$

$$= q\left[0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}\right]$$

$$c = 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 5q + 5000.$$

Al diferenciar c obtenemos la función de costo marginal:

$$\frac{dc}{dq} = 0.0001(3q^2) - 0.02(2q) + 5(1) + 0$$

$$= 0.0003q^2 - 0.04q + 5.$$

El costo marginal cuando se producen 50 unidades es

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q = 50} = 0.0003(50)^2 - 0.04(50) + 5 = 3.75.$$

Si c es el precio y la producción se incrementa en 1 unidad, de q = 50 a q = 51, el costo de la unidad adicional es aproximadamente de Bs. 3.75. Si la producción se incrementa 1/3 de unidad desde q = 50, el costo de la producción adicional es aproximadamente de (1/3)(3.75) = 1.25 Bs.

Ingreso Marginal

Supongamos que r = f(q) es la **función de ingreso total** de un fabricante. La ecuación r = f(q) establece que el valor total recibido al vender q unidades de un producto es r. El **ingreso marginal** se define como la razón de cambio del valor total recibido con respecto al número total de unidades vendidas. Por consiguiente, el ingreso marginal es solamente la derivada de r con respecto a q.

$$\text{Ingreso marginal} = \frac{dr}{dq}.$$

El ingreso marginal es la razón a la que el ingreso cambia con respecto a las unidades vendidas. Lo interpretamos como *el ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción.*

EJEMPLO 57:

Suponga que un fabricante vende un producto a Bs. 2 por unidad. Si se venden q unidades, el ingreso total está dado por

$$r = 2q.$$

Solución:

La función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}(2q) = 2$$

que es una función constante. El ingreso marginal es entonces igual a 2 independientemente del número de unidades vendidas. Esto es lo que esperaríamos porque el fabricante recibe Bs. 2 por cada unidad vendida.

Si r es el ingreso total de vender q unidades de un producto, entonces el **ingreso medio** por unidad, $\bar{r}$ es

$$\bar{r} = \frac{r}{q}$$

EJEMPLO 58: Ingreso Marginal

La función de demanda de un cierto bien está dada por $p = \frac{400}{q+2}$. Determina:

a) La función de ingreso.
b) La función de ingreso medio
c) La función de ingreso marginal

Solución:

a) La función de ingreso r(q), se obtiene multiplicando el precio unitario de venta "p" por el número de unidades a vender "q"; es decir,

$$\text{r(q) = p.q =} \frac{400}{q+2}q = \frac{400q}{q+2}$$

b) La función de ingreso medio es:

$$\bar{r}(q) = \frac{r}{q} = \frac{\frac{400q}{q+2}}{q} = \frac{400}{q+2}, q > 0.$$

c) La función de ingreso marginal no es más que la derivada de la función de ingreso, en consecuencia:

$$\text{r´(q)} = \frac{400(q+2) - 400q(1)}{(q+2)^2} = \frac{800}{(q+2)^2}.$$

Al igual que en la función Costo e Ingreso también se encuentra la función Beneficio marginal y Beneficio medio.

EJEMPLO 59: Ingreso Marginal

La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es $p = \frac{80-q}{4}, 0 \le q \le 80$, donde q es el número de unidades y p el precio por unidad. ¿Para qué valor de q se tendrá un ingreso máximo?¿Cuál es el ingreso máximo?.

Solución:

Sea r el ingreso total, que es la cantidad por maximizar. Como

Ingreso = (precio)(cantidad),

tenemos

$$r = pq = \frac{80-q}{4}.q = \frac{80q-q^2}{4}$$

donde $0 \le q \le 80$. Haciendo dr/dq = 0:

$$\frac{dr}{dq} = \frac{80-2q}{4} = 0,$$

$$80 - 2q = 0,$$

$$q = 40.$$

Así, 40 es el único valor crítico. Ahora veamos si este valor da un máximo. Examinando la primera derivada para $0 \le q \le 40$, tenemos dr/dq > 0, por lo que r es creciente. Si q > 40, entonces dr/dq < 0, por lo que r es decreciente. Como a la izquierda de 40 tenemos r creciente y a la derecha r decreciente, concluimos que q = 40 da un ingreso máximo absoluto, esto es $[80(40) - (40)^2] = 400$.

EJEMPLO 60: Ingreso Marginal

La empresa Netuno TV por cable tiene actualmente 2000 suscriptores que pagan una cuota mensual de 20$ Una encuesta reveló que se tendrían 50 suscriptores más por cada 0,25$ Bs. de disminución en la cuota. ¿Bajo qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían entonces?

Solución:

Sea x el número de disminuciones de 0.25$ La cuota mensual es entonces de 20 – 0,25x, donde $0 \le x \le 80$ (la cuota no puede ser negativa) y el número de nuevos

suscriptores es 50x. Así, el número total de suscriptores es 2000 + 50x. Queremos maximizar el ingreso r que está dado por:

$$r = (\text{número de suscriptores})(\text{cuota por suscriptor})$$
$$= (2000 + 50x)(20 - 0{,}25x)$$
$$= 50(40 + x)(20 - 0{,}25x)$$
$$= 50(800 + 10x - 0{,}25x^2)$$

Haciendo $r' = 0$ y despejando x, tenemos:

$$r' = 50(10 - 0{,}5x) = 0,$$
$$x = 20.$$

Puesto que el dominio de r es el intervalo cerrado [0,80], el valor máximo absoluto de r debe ocurrir en x = 20 o en uno de los puntos extremos del intervalo. Calculamos ahora r en esos tres puntos:

Si x = 0,	entonces	r = 40000
Si x = 20,	entonces	r = 45000
Si x = 40,	entonces	r = 0

El ingreso máximo ocurre cuando x = 20. Esto corresponde a veinte disminuciones de \$0,25 para una disminución total de \$5; entonces la cuota mensual resulta de \$15. El número de suscriptores bajo esa cuota será de 2000 + 50(20) = 3000.

Beneficio Marginal

La **función de beneficio total** de un fabricante, B = f(q), nos da el beneficio de producir y vender q unidades de un producto. La razón de cambio de B con respecto a q se llama **Beneficio Marginal**. Así,

$$\text{Beneficio marginal} = \frac{dB}{dq}.$$

Si B es el beneficio total de producir y vender q unidades de un producto, entonces el **beneficio medio** por unidad, $\overline{B}$ es

$$\overline{B} = \frac{B}{q}$$

EJEMPLO 61: Beneficio Marginal

La Ecuación de la demanda de un cierto bien es, p = $600e^{\left(-\frac{q}{100}\right)}, q \geq 0$. Si la función de costo es c(q) = 700ln(q + 1) + 800, q≥0. Obtener

a) La función de beneficio.
b) La función de beneficio medio.
c) La función de beneficio marginal
d) La tasa con la cual varía el beneficio en el nivel de producción de 60 unidades.

Solución:

a) La función de beneficio B(q) es:

B(q) = r(q) – c(q).

La función de ingreso, r(q), viene dada por:

$$r(q) = pq = \left(600e^{\left(-\frac{q}{100}\right)}\right)q$$

En consecuencia, la función de beneficio es:

$$B(q) = 600qe^{-q/100} - 700\ln(q+1) - 800.$$

b) La función de beneficio medio es:

$$\overline{B}(q) = \frac{B(q)}{q} = \frac{600qe^{-\frac{q}{100}} - 700\ln(q+1) - 800}{q} = 600e^{-\frac{q}{100}} - \frac{700\ln(q+1)}{q} - \frac{800}{q}$$

c) La función de beneficio marginal se obtiene derivando la función de beneficio, por lo tanto:

$$B'(q) = 600\left(e^{-\frac{q}{100}} - \frac{qe^{-\frac{q}{100}}}{100}\right) - \frac{700}{q+1} = 6e^{-\frac{q}{100}}(100-q) - \frac{700}{q+1}$$

d) La tasa con la cual varía la función de beneficio en el nivel de producción de 60 unidades, es el beneficio marginal evaluado en q = 60; es decir:

$$B'(60) = 6e^{-\frac{60}{100}}(100-60) - \frac{700}{60+1} \approx 6(0{,}549)(40) - 11{,}475 = 120{,}285.$$

EJEMPLO 62:

Una industria estima que el costo total para producir q unidades por día de un producto p está definido por:

$$c(q) = \frac{3}{2}q^2 + 80q + 60 \text{ (en bolívares)}$$

y el precio de venta p por cada unidad es:

p = 50 – x (en bolívares)

Determinar:

a) La función ingreso total.
b) La función ingreso marginal.
c) La función Beneficio
d) El costo marginal para 5 unidades

Solución:

a) r(q) esta dado por:

$r(q) = p.q = (50 - x)q = 50q - q^2$

b) Para hallar el ingreso marginal, sólo tenemos que derivar a r(q)

$r'(q) = 50 - 2q$

c) La función de beneficio viene dada por.

$$B(q) = r(q) - c(q) = 50q - q^2 - \frac{3}{2}q^2 - 80q - 60 = -\frac{5}{2}q^2 - 30q - 60$$

d) Para hallar el costo marginal para q = 5, derivamos la función c(q) y la evaluamos en q = 5

$c'(q) = 3q + 80$

$c'(5) = 3(5) + 80 = 95$

Optimización de las funciones de Costo, Ingreso y Beneficio.

Obviamente cuando hablamos de las funciones económicas Costo, ingreso y Beneficio, queremos alcanzar el mejor resultado del proceso productivo, y esto se logra alcanzando el **Costo mínimo, el ingreso máximo** y **el Beneficio máximo.**

EJEMPLO 63: Optimización

La ecuación de la demanda de un cierto bien es p = 400 – 2q, mientras que la función de costo es $c(q) = 0.2q^2 + 4q + 400$. Obtener:

a) El costo mínimo.
b) El Ingreso máximo.
c) El beneficio máximo.

Solución:

a) Se trata de hallar el mínimo de la función:

$C(q) = 0.2q^2 + 4q + 400, \quad q \in [0,+\infty)$.

Comenzando por determinar los *puntos críticos* de la función, pues los valores extremos (máximos y mínimos) de una función sólo se alcanzan en sus puntos críticos.

c = c(q). La derivada de esta función es:

$c'(q) = 0.4q + 4$.

Observando que:

i. $c'(q)$ existe para cualquier valor de q en el intervalo $[0,+\infty)$.
ii. $C'(q) = 0 \Leftrightarrow 0{,}4q + 4 = 0 \Leftrightarrow q = -10$, valor éste que no pertenece al intervalo$[0,+\infty)$.

Se concluye entonces que el único punto crítico de la función c = c(q) es el extremo inferior del intervalo $[0,+\infty)$, es decir q = 0.

Como $c'(q) > 0$ para cualquier valor de q en $[0,+\infty)$, la función c = c(q) es creciente en el mencionado intervalo y por lo tanto en q = 0 dicha función alcanza un mínimo relativo, que a su vez también absoluto, cuyo valor es c(0) = 400.

En resumen, la función de costo alcanza su valor mínimo de 400 Bs. en el nivel de producción q = 0.

b) La función de ingreso r(q) es:

$r(q) = p.q = (400 - 2q)p = 400q - 2q^2, \quad q \in [0,+\infty).$

Derivando r(q), se tiene:

$r'(q) = 400 - 4q, \quad q \in [0,+\infty).$

Es obvio que r´(q) existe en todo punto del intervalo $q \in [0,+\infty)$. Además:

$r'(q) = 0 \Leftrightarrow 400 - 4q = 0 \Leftrightarrow q = 100.$

El conjunto de los puntos críticos de la función de ingreso es {0,100}.

Estudiando el signo de la derivada r´(q), encontramos que:

$r'(q) \Leftrightarrow 400 - 4q > 0 \Leftrightarrow q < 100.$

$r'(q) < 0 \Leftrightarrow q > 100.$

En consecuencia, la función r = r(q) es creciente en el intervalo [0,100) y decreciente en $(100,+\infty)$. Se concluye que en q = 0 la función r = r(q) alcanza un mínimo relativo (no absoluto) cuyo valor es r(0) = 0, mientras que en q = 100 la función alcanza un máximo relativo (que a su vez es máximo absoluto). Este valor máximo es r(100) = 20000. En definitiva, el ingreso máximo es de 20000 Bs. y ocurre cuando el nivel de ventas es de q= 100 unidades.

c) La función de beneficio es:

$B(q) = r(q) - c(q) = (400q - 2q^2) - (0,2q^2 + 4q + 400) =$

$= -2,2q^2 + 396q - 400. \quad q \in [0,+\infty).$

Su derivada es B´(q) = -4,4q + 396. Como podrá apreciarse, B´(q) existe en todos los puntos del intervalo $[0,+\infty)$ y :

$B'(q) = 0 \Leftrightarrow -4,4q + 396 = 0 \Leftrightarrow q = 90.$

El conjunto de los puntos críticos de la función de beneficio es {0,90}.

A continuación analizamos el signo de B´(q) para obtener los intervalos en donde la función B(q) crece o decrece.

$B'(q) > 0 \Leftrightarrow -4,4q + 396 > 0 \Leftrightarrow q < 90.$

$B'(q) < 0 \Leftrightarrow q > 90.$

De manera que la función B(q) es creciente en [0,90) y decreciente en $(90,+\infty)$. Así que en q = 0, B(q) alcanza un mínimo relativo (no absoluto), cuyo valor es B(0= = -400,

mientras que en q = 90 alcanza un máximo relativo dado que $B'_{-}(90) > 0$ y $B'_{+}(90)<0$. Este máximo relativo, que también es su máximo absoluto, vale B(90) = 17420.

La aplicación del criterio de la segunda derivada nos hubiera permitido establecer también la existencia de un máximo relativo en q = 90. En efecto B´´(q) = -4,4 y por lo tanto B´´(90) = -4,4 < 0, concluyéndose entonces la presencia de un máximo relativo en q=90.

EJEMPLO 64: Optimización

La función de costo de un cierto bien es c(q) = $35q + 2\sqrt{q-1}, q \in [1,1000]$, mientras que la ecuación de la demanda viene dada por p = $40 - \sqrt{q-1}, q \in [1,1000]$. Hallar:

a) Los valores máximo y mínimo del costo medio
b) El beneficio máximo y el beneficio máximo.

Solución:

a) En este ejercicio usaremos una propiedad muy importante de las funciones continuas: *"Si f es una función continua definida sobre el intervalo cerrado [a,b], entonces f alcanza sus extremos (máximo y mínimo) absolutos en puntos pertenecientes a dicho intervalo"*. Es claro que estos valores máximo y mínimo sólo pueden aparecer en los puntos críticos d la función sobre el intervalo dado. Si el número de puntos críticos es finito, entonces calculamos el valor de la función en cada uno de los puntos críticos y el mayor de esto números en el máximo absoluto y el menor es el mínimo absoluto.

La función de costo medio y su derivada, vienen dadas por:

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q} = \frac{35q + 2\sqrt{q-1}}{q} = 35 + 2\frac{\sqrt{q-1}}{q}, q \in [1,1000]$$

$$\bar{c}'(q) = 2\frac{q\frac{1}{2\sqrt{q-1}} - \sqrt{q-1}}{q^2} = \frac{-q+2}{q^2\sqrt{q-1}}, q \in [1,1000]$$

Como se observa $\bar{c}'(q)$ existe para todo valor de q en el intervalo (1,1000]; no existe en q = 1; además $\bar{c}'(q) = 0 \Leftrightarrow$ q = 2. El conjunto de los puntos críticos para la función de

costo medio es {1,2,1000}. En virtud de que dicha función es continua en el intervalo [1,1000], procederemos a evaluarla en cada uno de sus puntos críticos y tomar el máximo valor como máximo absoluto, y el mínimo valor como el mínimo absoluto.

$$\bar{c}(1) = 35 + 2\frac{\sqrt{1-1}}{1} = 35$$

$$\bar{c}(2) = 35 + 2\frac{\sqrt{2-1}}{2} = 36$$

$$\bar{c}(1000) = 35 + 2\frac{\sqrt{1000-1}}{1000} = 35{,}06$$

En definitiva, el mínimo valor de la función de costo medio es 35 y ocurre cuando q= 1, y el máximo valor es 36 que ocurre cuando q = 2.

b) La función de beneficio, B(q), toma la forma:

B(q) = r(q) – c(q) = pq – c(q) = $40q - q\sqrt{q-1} - 35q - 2\sqrt{q-1} =$

$= 5q - (q+2)\sqrt{q-1}, q \in [1{,}1000].$

Su derivada es:

B´(q) = $5 - \sqrt{q-1} - \dfrac{q+2}{2\sqrt{q-1}} = \dfrac{10\sqrt{q-1} - 3q}{2\sqrt{q-1}}$

Esta derivada se anula en q = 10 y q = $\dfrac{10}{9}$ como se muestra a continuación:

B´(q) = 0 $\Leftrightarrow 10\sqrt{q-1} - 3q = 0 \Leftrightarrow 10\sqrt{q-1} = 3q \Leftrightarrow 100(q-1) = 9q^2$

$\Leftrightarrow 9q^2 - 100q + 100 = 0 \Leftrightarrow q = 10$ ó $q = \dfrac{10}{9}$.

Además B´(q) no existe en q = 1; el conjunto de los puntos críticos de la función de beneficio es {1,10/9,10,1000}. Dado que B(q) es continua en el intervalo cerrado [1,1000], evaluemos dicha función en cada punto crítico para luego obtener los valores extremos de la misma.

$$B(1) = 5(1) - (1+2)\sqrt{1-1} = 5$$

$$B(\frac{10}{9}) = 5(\frac{10}{9}) - (\frac{10}{9} + 2)\sqrt{\frac{10}{9} - 1} \approx 4{,}52$$

$$B(10) = 5(10) - (10+2)\sqrt{10-1} = 14$$

$$B(1000) = 5(1000) - (1000+2)\sqrt{1000-1} \approx -26670{,}18$$

Se concluye que la función de beneficio alcanza su valor mínimo de –26670,18 en q = 1000 y su valor máximo de 14 en q = 10.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.1

1.- En los ítem siguientes están dadas funciones de costo donde c es el costo de producir q unidades de un producto. En cada caso encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal para el valor o valores dados de q?.

a) $c = 500 + 10q$; $q = 100$

b) $c = 0{,}3q^2 + 2q + 850$; $q = 3$

c) $c = 0{,}03q^3 - 0{,}6q^2 + 4{,}5q + 7700$; $q = 10$, $q = 20$, $q = 100$

R. **a) c'(q) = 10 ; 10**

b) c'(q) = 0,6q + 2 ; 3,8

c) c'(q) = $0{,}09q^2$ – 1,2q + 4,5; 1,5 ; 16,5 ; 784,5

2.- En los ítem siguientes están dadas las funciones de costo promedio, que es una función del número q unidades producidas. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores indicados de q.

a) $\bar{c} = 0{,}01q + 5 + \dfrac{500}{q}; q = 50, q = 100.$

b) $\bar{c} = 0{,}00002q^2 - 0{,}01q + 6 + \dfrac{20000}{q}; q = 100, q = 500.$

R. **a) c'(q) = 0,02q + 5 ; 6 ; 7**

b) c'(q) = $0{,}00006q^2$ – 0,02q + 6 ; 4,6 ; 11

3.- En los ítem siguientes r representa el ingreso total y es una función del número q de unidades vendidas. Encuentre la función de ingreso marginal y el ingreso marginal para los valores indicados de q.

a) $r = q(15 - \frac{1}{30}q)$; $q = 5$, $q = 15$, $q = 150$.

b) $r = 250q + 45q^2 - q^3$; $q = 5$, $q = 10$, $q = 25$

R. **a) r'(q) =** $15 - \frac{1}{15}q$ **; 14,67 ; 14 ; 5**

b) r'(q) = 250 + 90q – 3q ; 625 ; 850 ; 625

4.- La Ecuación de la demanda de un cierto bien es p = 60 – 0,6q. Si la función de costo es c(q) = $qe^q + 30$. Obtenga.

a) Las funciones de Costo marginal, ingreso marginal y beneficio marginal.

b) Las funciones de costo medio, ingreso medio y beneficio medio.

R. **a)** **$c'(q) = e^q (1+q)$**

$r'(q) = 60 - 1{,}2q$

$B(q) = 60 - 1{,}2q - e^q - qe^q$.

b) $\bar{c}(q) = e^q + \frac{30}{q}$

$\bar{r}(q) = 60 - 0{,}6q$

$\bar{B}(q) = 60 - 0{,}6q - e^q - \frac{30}{q}$

5.- La función de costo de un cierto bien viene dada por:

$$c(q) = \begin{cases} 80 + 10q & , 0 \le q < 30 \\ -220 + 20q & , 30 \le q \le 200. \end{cases}$$

Si la ecuación de la demanda es p = 200 – q, $0 \le q \le 200$. Obtenga:

a) El costo mínimo y el costo máximo.

b) El ingreso máximo.

c) El beneficio mínimo y beneficio máximo.

R. **a) costo mínimo = 80; costo máximo = 3780**

b) Ingreso máximo = 10000

c) Beneficio mínimo = -3780 ; Beneficio máximo = 8320

5. LA INTEGRAL.

Integral Indefinida

Dada una función f, si F es una función tal que

F´(x) = f(x),

Entonces F se llama *antiderivada* de f. Así,+

una antiderivada de f es simplemente una función cuya derivada es f.

Una **antiderivada** *de una función F tal que*

F´(x) = f(x), ó dF = f(x) dx.

Por ejemplo, como la derivada de x^2 es 2x, x^2 es una antiderivada de 2x, sin embargo, no es la única, veamos por qué. Como,

$$\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(x^2-5) = 2x$$

Tanto $x^2 + 1$ como $x^2 - 5$ son también antiderivadas de 2x. Es claro que como la derivada de una constante es cero, $x^2 + C$ es también una antiderivada de 2x para *cualquier* constante C. Así, 2x tiene un número infinito de antiderivadas. Lo más importante, es que *todas* las antiderivadas de 2x deben ser funciones de la forma $x^2 + C$, debido a que:

Dos antiderivadas cualesquiera de una función difieren sólo en una constante.

Como la expresión $x^2 + C$ describe todas las antiderivadas de 2x, podemos referirnos a ella como la *antiderivada más general* de 2x, denotada por $\int 2xdx$, que se lee "*integral indefinida* de 2x respecto a x". Escribimos entonces:

$$\int 2xdx = x^2 + C\ .$$

El símbolo $\int$ se llama **símbolo de integración,** 2x es el **integrando** y C la **constante de integración.** La dx es parte la notación integral e indica la variable implicada. Aquí, x es la **variable de integración.**

En forma más general, la **integral indefinida** de cualquier función f con respecto a x se escribe $\int f(x)dx$ y denota la antiderivada más general de f. Como todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante, si F es cualquier antiderivada de f, entonces.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ donde C es una constante.}$$

En resumen **Integrar** significa encontrar $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{si y sólo si} \qquad F'(x) = f(x).$$

Usando las fórmulas de diferenciación vistas en el apartado anterior, se pueden compilar una lista de fórmulas básicas de integración, las cuales son fácilmente verificables. Las más útiles en el campo económico se presentan a continuación:

Fórmulas básicas de Integración

1. $\int kdx = kx + C,$ k es una constante.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1$.

3. $\int e^x dx = e^x + C$

4. $kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ k es una constante.

5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

6. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C.$

A continuación se presentan ejemplos de cada una de estas fórmulas.

EJEMPLO 65:

Encontrar $\int 1dx.$

Solución: Por la fórmula 1 con k = 1,

$$\int 1dx = 1x + C = x + C.$$

Usualmente escribimos $\int 1dx$ como $\int dx$. Entonces, $\int dx$ = x + C.

EJEMPLO 66:

Encontrar $\int x^5 dx$

Solución: Por la fórmula 2 con n = 5,

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C.$$

EJEMPLO 67:

Encontrar $\int 7xdx$.

Solución: Por la fórmula 4 con k = 7 y f(x) = x,

$$\int 7xdx = 7\int xdx$$

Como x es x^1, por la fórmula 2 tenemos

$$\int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1$$

donde C_1 es la constante de integración. Por tanto,

$$\int 7xdx = 7\int xdx = 7\left[\frac{x^2}{2} + C_1\right] = \frac{7}{2}x^2 + 7C_1$$

Como $7C_1$ es una constante arbitraria, por simplicidad la reemplazamos por C. Así,

$$\int 7xdx = \frac{7}{2}x^2 + C.$$

EJEMPLO 68:

Encontrar $\int -\frac{3}{5}e^x dx$.

Solución:

$$\int -\frac{3}{5}e^x dx = -\frac{3}{5}\int e^x dx \qquad \text{(fórmula 4)}$$

$$= -\frac{3}{5}e^x + C \qquad \text{(fórmula 3).}$$

EJEMPLO 69:

Encontrar $\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$

Solución: Aquí, t es la variable de integración. Rescribimos el integrando de manera que podamos usar una fórmula básica. Como $1/\sqrt{t} = t^{-1/2}$, al aplicar la fórmula 2 obtenemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int t^{-1/2}dt = \frac{t^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C.$$

EJEMPLO 70:

Encontrar $\int \frac{1}{6x^3}dx$

Solución:

$$\int \frac{1}{6x^3}dx = \frac{1}{6}\int x^{-3}dx = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= -\frac{x^{-2}}{12} + C = -\frac{1}{12x^2} + C.$$

EJEMPLO 71:

Encontrar $\int (x^2 + 2x)dx$

Solución: Por la fórmula 5,

$$\int (x^2 + 2x)dx = \int x^2dx + \int 2xdx$$

$$= \int x^2dx + 2\int xdx = \frac{x^3}{3} + (2)\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

EJEMPLO 72:

Encontrar $\int y^2(y + \frac{2}{3})dy$.

Solución: El integrando no concuerda con ninguna forma familiar de integración. Sin embargo, multiplicando los factores del integrando obtenemos.

$$\int y^2(y + \tfrac{2}{3})dy = \int (y^3 + \tfrac{2}{3}y^2)dy$$

$$= \frac{y^4}{4} + \left(\frac{2}{3}\right)\frac{y^3}{3} + C = \frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{9} + C.$$

EJEMPLO 73:

Encontrar $\int \frac{(2x-1)(x+3)}{6}dx$

Solución: Factorizando la constante $\frac{1}{6}$ y multiplicando los binomios, obtenemos

$$\int \frac{(2x-1)(x+3)}{6}dx = \frac{1}{6}\int (2x^2+5x-3)dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[(2)\frac{x^3}{3}+(5)\frac{x^2}{2}-3x\right]+C$$

$$= \frac{x^3}{9}+\frac{5x^2}{12}-\frac{x}{2}+C$$

Métodos de Integración

La integración sería una cuestión por completo simple si contáramos con una lista de fórmulas de integración, una *tabla de integrales* en la que pudiésemos localizar cualquier integral que necesitásemos calcular. Pero la diversidad de integrales que encontramos en la práctica es demasiado grande para que esté contenida en una tabla de integrales. Es más razonable imprimir o memorizar, una corta tabla de integración como la presentada anteriormente, que son las que aparecen con más frecuencia y aprender técnicas mediante las cuales se puede ampliar el rango de aplicación de esta tabla corta. Veremos tres de tales procedimientos: *integración por sustitución, integración por partes y la integración usando fracciones parciales*, pues son los que con más frecuencia se utilizan en problemas de tipo económico.

Integración por sustitución

La forma integral de la regla de la cadena puede considerarse como una técnica para simplificar una integral cambiando la variable de integración. Se empieza con una integral $\int g(u)\frac{du}{dx}dx$ en la cual la variable de integración es x, y se la transforma en una integral más simple, $\int g(u)du$, en la cual la variable de integración es u. En este paso,

la expresión $\frac{du}{dx}dx$ de la integral original se remplaza en la integral simplificada por el símbolo *du*. Nótese que en esta relación entre $\frac{du}{dx}dx$ y *du* se supone que $\frac{du}{dx}$ es el cociente y se escribe,

$$\frac{du}{dx}dx = du$$

Estas observaciones conducen a la siguiente técnica general de integración denominada **integración por sustitución**, donde la variable *u* se sustituye formalmente por una expresión apropiada en función de x, y la integral original se transforma en una más simple donde la variable de integración es *u*. Los pasos para realizar esta técnica de integración se presentan detalladamente en el siguiente cuadro.

Integración por sustitución

Paso 1. Insertar la letra *u* que representa alguna expresión en función de *x*, la cual se escoge para simplificar la integral.

Paso 2. Rescribir la integral en términos de *u*. Para rescribir *dx*, calcular $\frac{du}{dx}$ y resolver algebraicamente, como si el símbolo $\frac{du}{dx}$ fuera un cociente.

Paso 3. Calcular la integral resultante y luego remplazar *u* por su expresión en términos de x en la respuesta.

Sugerencia: Si el integrando es un producto o un cociente de dos términos, y uno de éstos es un múltiplo constante de la derivada de una expresión que aparece en el otro, entonces esta expresión probablemente sea una buena elección para *u*.

EJEMPLO 74:

Hallar $\int 9(x^2+3x+5)^8(2x+3)dx$

Solución: El integrando es un producto donde uno de los factores, 2x + 3, es la derivada de la expresión, $x^2 + 3x + 5$, que aparece en el otro factor. Esto indica que debe hacerse $u = x^2 + 3x + 5$. Entonces

$$\frac{du}{dx} = 2x + 3 \qquad \text{y así} \qquad du = (2x + 3)dx$$

Al sustituir $u = x^2 + 3x + 5$ y $du = (2x + 3)dx$, se obtiene

$$\int 9(x^2 + 3x + 5)^8 (2x + 3)dx = \int 9u^8 du = u^9 + C = (x^2 + 3x + 5)^9 + C.$$

EJEMPLO 75:

Hallar $\int \frac{3x}{x^2 - 1} dx$

Solución: Obsérvese que

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 1) = 2x = \frac{2}{3}(3x)$$

Por tanto, el integrando es un cociente donde el término 3x es un múltiplo constante de la derivada de la expresión $x^2 - 1$. Entonces,

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad du = 2xdx \qquad \text{ó} \qquad \frac{3}{2}du = 3xdx$$

Al sustituir $u = x^2 - 1$ y $\frac{3}{2}du = 3xdx$, se obtiene

$$\int \frac{3x}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{u}\left(\frac{3}{2}\right) du = \frac{3}{2}\int \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{3}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2 - 1| + C$$

EJEMPLO 76:

Hallar $\int x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx$

Solución: Observe que x^2 es, salvo un factor **constante**, la derivada de $x^3 + 9$. Por lo tanto, podemos sustituir.

$U = x^3 + 9, \qquad du = 3x^2\, dx.$

Podemos proporcionar el factor constante 3 si compensamos multiplicando la integral por $\frac{1}{3}$, con lo que obtenemos

$$\int x^2\sqrt{x^3+9}dx = \frac{1}{3}\int (x^2+9)^{1/2}.3x^2dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{9}(x^3+9)^{3/2} + C.$$

Integración por partes

Una razón para transformar una integral en otra es la de producir una integral que sea más fácil de evaluar. Hay dos formar generales de lograr dicha transformación; la primera es la integración por sustitución y la segunda es la *integración por partes.*

La fórmula de integración por partes es una consecuencia sencilla se la regla del producto para derivadas.

Si *u* y *v* son funciones diferenciables de x, por la regla del producto tenemos

$$(uv)' = uv' + vu' \quad = \quad uv' = (uv)' + vu'$$

Luego integrando ambos miembros con respecto a x, obtenemos la *fórmula de integración por partes:*

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Esta fórmula expresa una integral, $\int udu$, en términos de otra integral, $\int vdu$, que puede ser más fácil de integrar.

Para aplicar la fórmula a una integral dada $\int f(x)dx$, debemos escribir f(x) dx como el producto de dos factores (o partes) escogiendo una función u y una diferencial *dv* tales que f(x) dx = u du. Sin embargo, para que la fórmula sea útil, debemos ser capaces de integrar la parte seleccionada como dv.

En general para aplicar la integración por partes a una integral dada, primero factorizamos su integrando en dos "partes", *u* y *dv*, tales que la última incluya la diferencial *dx*. Intentamos elegir esas partes de acuerdo con dos principios:

1. La primitiva v = $\int dv$ debe ser fácil de determinar.
2. La nueva integral $\int vdu$ debe ser más fácil de calcular que la integral original.

Una estrategia eficaz consiste en elegir *dv* como el factor más complicado que se pueda integrar fácilmente. Entonces derivamos la otra parte, *u*, para encontrar *du*.

EJEMPLO 77:

Hallar $\int xe^x dx$

Solución: Esta integral no puede determinarse con las fórmulas de integración previas. Una manera de escribir xe^x en la forma *u.du* es haciendo.

$u = x$ y $dv = e^x dx$

Para aplicar la fórmula de integración por partes debemos encontrar *du y v:*

$du = dx$ (derivada de u respecto a x)

y $v = \int e^x dx = e^x + C_1$ (integral de dv)

Entonces,

$$\int xe^x dx = uv - \int vdu$$

$$= x(e^x + C_1) - \int (e^x + C1)dx$$

$$= xe^x + C_1x - e^x - C_1x + C$$

$$= xe^x - e^x + C$$

$$= e^x(x - 1) + C.$$

La primera constante C_1 no aparece en la respuesta final. Ésta es una característica de la integración por partes y de ahora en adelante esta constante no será escrita cuando encontremos *v* a partir de *dv*.

Cuando se usa la fórmula de integración por partes, algunas veces la "mejor selección" de *u* y *dv* puede ser obvia. En algunos casos una selección puede ser tan buena como la otra; en otros, sólo una selección puede ser adecuada. La habilidad para hacer una

buena selección (si ésta existe) se adquiere con la práctica y, desde luego, con el procedimiento de ensayo y error.

EJEMPLO 78:

Hallar $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

Solución:

$$u = \ln x \qquad \text{y} \qquad dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Entonces,

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad \text{y} \qquad v = \int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int \ln x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) &= uv - \int v du \\
&= (\ln x)(2\sqrt{x}) - \int (2x^{1/2}) \left(\frac{1}{x} dx \right) \\
&= 2\sqrt{x} \ln x - 2\int x^{1/2} dx \\
&= 2\sqrt{x} \ln x - 2(2\sqrt{x}) + C \\
&= 2\sqrt{x}[\ln(x) - 2] + C .
\end{aligned}$$

Integración por Fracciones Parciales.

Ahora se estudiarán un tipo especial de funciones llamadas racionales. Se mostrará que toda función racional se puede integrar en términos de funciones elementales. Recuerde que una función racional R(x) es aquella que se expresa como cociente de dos polinomios. Es decir,

$$\text{R(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \ ,$$

Donde P(x) y Q(x) son polinomios. El **método de fracciones parciales** es una técnica *algebraica* que descompone R(x) en una suma de términos:

$$R(x)= \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_k(x),$$

Donde p(x) es un polinomio y cada expresión $F_i(x)$ es una fracción que puede integrarse con poca dificultad.

Para obtener dicha descomposición, primero se debe factorizar el denominador Q(x) como un producto de factores lineales (de la forma ax + b) y factores cuadráticos irreducibles (de la forma $ax^2 + bx + c$, con $b^2 - 4ac < 0$). Una vez que se ha encontrado esta factorización de Q(x), podemos obtener la descomposición en fracciones parciales mediante métodos algebraicos rutinarios que se ejemplifican a continuación.

Factores Lineales

Sea R(x) = P(x)/Q(x) una fracción racional *propia* (el grado de P(x) es menor que el de Q(x)) y supóngase que el factor lineal $ax + b$ se presenta n veces en la factorización de Q(x). Es decir, $(ax + b)^n$ es la máxima potencia de $ax + b$ que divide a Q(x) sin dejar residuo.

Regla 1 ***Fracciones parciales con factores lineales***

La parte de la descomposición en fracciones parciales de R(x) correspondiente al factor lineal $ax + b$ de multiplicidad n es una suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n},$$

donde A_1, A_2, ..., A_n son constantes.

Si todos los factores de Q(x) son lineales, la descomposición en fracciones parciales de R(x) es la suma de expresiones como la de la ecuación anterior (cuadro). La situación es particularmente sencilla si ninguno de esos factores *se repite* (es decir, si cada uno tiene multiplicidad $n = 1$). En este caso la expresión en la ecuación anterior se reduce a su primer término y la descomposición en fracciones parciales de R8x) es la suma de tales términos.

EJEMPLO 79:

Hallar $\int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}dx$

Solución:

La función racional por integrar es propia, por lo que procedemos de inmediato a factorizar el denominador.

$$x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)\,.$$

Tenemos tres factores lineales no repetidos, por lo que la descomposición en fracciones parciales es de la forma

$$\frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Para determinar las constantes A, B y C, multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por el denominador común *x(x – 1)(x + 2)* y tenemos que

$$4x^2-3x-4 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

Entonces, agrupamos los coeficientes de las potencias iguales de x en el lado derecho:

$$4x^2-3x-4 = (A+B+C)x^2+(A+2B-C)x+(-2A)$$

Como dos polinomios son (idénticamente) iguales sólo si los coeficientes de las potencias correspondientes de *x* son iguales, concluimos que

$$A+B+C = 4,$$
$$A+2B-C = -3,$$
$$-2A = -4.$$

Resolvemos estas ecuaciones simultáneas y determinamos que A = 2, B = -1 y C = 3. Y con estos valores tenemos que.

$$\int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}dx = \int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx$$
$$= 2\ln|x| - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C$$

EJEMPLO 80:

Hallar $\int \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}dx$

Solución:

Aquí tenemos un factor lineal de multiplicidad n =3. De acuerdo con la regla 1, la descomposición del integrando es fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

Para encontrar las constantes A, B, C y D multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por $x(x-1)^3$ y obtenemos:

$$x^3-4x-1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx.$$

Desarrollando y agrupando los coeficientes de potencias iguales de x en el lado derecho y obtenemos:

$$x^3-4x-1=(A+B)x^3+(-3A-2B+C)x^2+(3A+B-C+D)x-A.$$

Después igualamos los coeficientes de las potencias iguales de x en ambos lados de esta ecuación. Obtenemos las cuatro ecuaciones simultáneas .

$$\begin{aligned}&A+B=1,\\&-3A-2B+C=0,\\&3A+B-c+D=-4\\&-A=-1.\end{aligned}$$

Resolvemos estas ecuaciones simultáneas y obtenemos A = 1, B = 0, C = 3 y D = -4. Por tanto,

$$\int\frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-1)^3}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\frac{3}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+C.$$

Factores Cuadráticos

Supóngase que R(x) = P(x)/Q(x) es una fracción racional propia y que el factor cuadrático irreducible $(ax^2+bx+c)^n$ es la máxima potencia de ax^2+bx+c que divide sin residuo a Q(x). Como antes, decimos que ***n*** es la ***multiplicidad*** del factor cuadrático ax^2+bx+c .

Regla 2 ***Fracciones parciales con factores cuadráticos***

La parte de la descomposición en fracciones parciales de R(x) correspondiente al factor cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$ de multiplicidad *n* es una suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

donde B_1, B_2, ..., B_n y C_1, C_2, ..., C_n son constantes.

Si Q(x) tiene factores lineales y factores cuadráticos irreducibles, la descomposición en fracciones parciales de R(x) es simplemente la suma de las expresiones de la forma dada en la ecuación de factores lineales más la suma de las expresiones de la forma dada en la ecuación anterior (cuadro) correspondientes a los factores cuadráticos. En el caso de un factor cuadrático irreducible de multiplicidad $n = 1$ (el factor no se repite), la expresión de la ecuación anterior se reduce a su primer término.

EJEMPLO 81:

Hallar $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} dx$

Solución:

El denominador $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$ tiene un factor cuadrático y un factor lineal repetido. La descomposición en factores lineales toma la forma

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Al multiplicar ambos miembros por $x^4 + x^2$ se obtiene,

$$5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B$$

Como antes, igualamos los coeficientes de potencias iguales de *x* para obtener las cuatro ecuaciones simultáneas,

A + C = 5

B + D = -3

A = 2

B = -1

Resolvemos fácilmente estas ecuaciones, obteniendo A = 2, B = -1, C = 3 y D = -2. Por tanto,

$$\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3x-2}{x^2+1} \right) dx$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - 2\tan^{-1} x + C$$

Integral Definida

El cálculo integral se basa en el concepto de la *integral*. La definición de la integral es motivada por el problema de definir y calcular el área de la región que se encuentra ente la gráfica de una función de valores positivos f y el eje x en un intervalo cerrado [a,b]. El área de la región R de la figura 3. está dada por la integral de f de *a* a *b*, denotada por el símbolo,

$$\int_a^b f(x)dx$$

Figura 3. Área y = f(x) y x. en [a,b]

El teorema principal de este tipo de integral es el *teorema fundamental del cálculo*, el cual proporciona una conexión vital entre las operaciones de derivación e integración, la que proporciona un método eficaz para calcular el valor de las integrales.

El teorema fundamental del cálculo

Supongamos que la función *f* es continua en el intervalo cerrado [a,b]

Parte 1 Si la función F está definida en [a,b] como

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

Entonces F es una primitiva de *f*. Es decir, F´(x)=f(x) para x en (a,b).

Parte 2 Si G es cualquier primitiva de *f* en [a,b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

De esto se obtiene que

La integral definida

La integral definida de *f* desde *a* hasta *b* es la diferencia

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde F es una antiderivada de *f*. Es decir, la integral definida es el cambio neto producido en la antiderivada entre x = a y x = b.

Las propiedades o reglas para resolver integrales definidas son similares a las la integral indefinida, sólo que luego de integrar se evalúa el resultado según los límites de la integral.

Una propiedad importante de la integral definida que hay que resaltar pues no se presenta en la integral indefinida es:

Si f es continua sobre un intervalo I y *a, b* y están en I, entonces

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

EJEMPLO 82:

Calcular $\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx$

Solución:

El integrando es un producto donde uno de los factores, 8x, es un múltiplo constante de la derivada de la expresión $x^2 + 1$, que aparece en el otro factor. Esto indica que $u = x^2 + 1$. Entonces, $du = 2xdx$, y por tanto

$$\int 8x(x^2+1)^3 dx = \int 4u^3 du = u^4$$

Los límites de integración, 0 y , se refieren a la variable *x*, y no a *u*. Por tanto, se puede proceder de dos maneras: rescribir la antiderivada en términos de *x* o hallar los valores de *u* que corresponden a $x = 0$ y $x = 1$.

Eligiendo la primera alternativa, se hallará que,

$$\int 8x(x^2+1)^3 dx = u^4 = (x^2+1)^4$$

y en consecuencia,

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx = (x^2+1)^4 \Big|_0^1 = 16 - 1 = 15$$

EJEMPLO 83:

Hallar $\int_{-1}^{2} | x^3 - x | dx$

Solución:

Observamos que $x^3 - x \geq 0$ en [-1,0], que $x^3 - x \leq 0$ en [0,1] y que $x^3 - x \geq 0$ en [1,2]. Así, escribimos

$$\int_{-1}^{2} | x^3 - x | dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} + \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}$$

$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \left[2 - (-\tfrac{1}{4})\right] = \tfrac{11}{4} = 2{,}75$$

Cálculo de áreas

Área bajo una curva

Si f(x) es continua y f(x) ≥ 0 en un intervalo $a \le x \le b$, entonces se puede hablar de área "bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$". Existe una sorprendente conexión entre esta área y la integral definida, la cual puede resumirse como sigue.

El área bajo una curva

Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $a \le x \le b$, la región R bajo la curva $y = f(x)$, entre x = a y x = b, tiene un área

$$\text{Área de R} = \int_a^b f(x)dx$$

EJEMPLO 84:

Hallar el área de la región limitada por la recta limitada por la recta $y = 2x$, el eje x y la recta vertical x = 2.

Solución:

La región en cuestión es el triángulo de la figura (4), y su área es:

Figura 4 y = 2x y x = 2

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(base)(altura) = \frac{1}{2}(2)(4) = 4$$

Para hallar esta área mediante el cálculo, se debe aplicar la fórmula integral para $f(x) = 2x$. Se toma $b = 2$, ya que la región está limitada a la derecha por la recta x = 2 y

a = 0 ya que, a la izquierda, el límite incluye el único punto (0,0), que pertenece a la recta vertical x = 0. Se encontrará, como se esperaba, que:

$$\text{Área} = \int_0^2 2x dx) = x^2 \,|_0^2 = (2)^2 - (0)^2 = 4$$

EJEMPLO 85:

Hallar el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + 4x - 3$ y el eje x.

Solución:

A partir de la forma factorizada del polinomio:

$$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-3)(x-1)$$

se observa que las intersecciones de la curva con el eje x son (1,0) y (3,0). A partir de la gráfica correspondiente (*véase* figura 5) se nota que la región en cuestión está por debajo de la curva $y = -x^2 + 4x - 3$, por encima del eje x, y se extiende desde x = 1 hasta x = 3. Por tanto,

Figura 5. $y = -x^2 + 4x - 3$

$$\text{Área} = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right)\Big|_1^3$$

$$= \left(-9 + 18 - 9\right) - \left(\frac{1}{3} + 2 - 3\right) = \frac{4}{3}$$

Área entre dos curvas

En algunos problemas prácticos, quizá sea necesario calcular el área entre dos curvas. Supóngase que *f(x)* y g(x) son funciones no negativas y que f(x) $\geq$ g(x) en el intervalo $a \leq x \leq b$ como se muestra en la figura (6a).

a) b) c)

Figura 6. Área de R = área de R_1 – área de R_2

Para hallar el área de la región R situada entre las curvas, desde x = a y x = b, se resta el área situada bajo la curva inferior y = g(x) (*véase* figura 6c) del área localizada bajo la curva superior y = f(x) (*véase* la figura 6b). Es decir,

El área entre dos curvas

Si *f(x)* y g(x) son continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$, para f(x)≥g(x), y si R es la región limitada por las gráficas de f y g y las rectas verticales x = a y x = b, entonces,

$$\text{Área de R} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

EJEMPLO 86:

Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 + 1$ y $y = 2x - 2$ entre x = -1 y x = 2.

Solución:

Trazar la gráfica de la región de manera que puede visualizarse la situación, como se muestra en la figura 7. Luego, al aplicar la fórmula de la integral para f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x –2, a = -1 *y* b = 2 se obtiene:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2}\left[(x^2+1)-(2x-2)\right]dx = \int_{-1}^{2}\left(x^2-2x+3\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right)_{-1}^{2} = \frac{14}{3} - \left(-\frac{13}{3}\right) = 9$$

Figura 7. *y = x^2+ 1* y *y = 2x – 2*

EJEMPLO 87:

Determine el área A de la región R acotada por la recta y = x y por la parábola y = 6 – x^2.

Solución: La región R se muestra en la figura 8. Podemos utilizar la fórmula de área entre dos curvas y considerar f(x) = 6 – x^2 y g(x) = x. Los límites a y b serán las coordenadas x de los dos puntos de intersección de la recta y la parábola; lo primero que debemos hacer es determinar a y b. Para esto, igualamos f(x) y g(x) y determinamos x en la ecuación resultante:

Figura 8. y = x y y = 6 – x^2.

$x = 6 - x^2$, $x^2 + x - 6 = 0$; $(x - 2)(x + 3) = 0$; $x = -3, 2$.

Por tanto a = -3 y b = 2, de modo que la fórmula de área entre dos curvas es:

$$A = \int_{-3}^{2} (6 - x^2 - x)dx = \left[6x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{2}$$

$$= \left[6.2 - \tfrac{1}{3}.2^3 - \tfrac{1}{2}.2^2\right] - \left[6.(-3) - \tfrac{1}{3}.(-3)^3 - \tfrac{1}{2}.(-3)^2\right] = \tfrac{125}{6}$$

APLICACIÓN ECONÓMICA DE LA INTEGRAL

La Integral Indefinida

En los apartados anteriores trabajamos las funciones Costo, Ingreso y Beneficio, luego abordamos el análisis marginal de estas funciones utilizando la derivación, ahora procederemos a utilizar la integración para también resolver problemas económicos de análisis marginal.

EJEMPLO 88: Encontrar la función de demanda a partir del ingreso marginal

Si la *función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es*

$$\frac{dr}{dq} = 2000 - 20q - 3q^2$$

Encontrar la función de demanda.

Solución:

Como dr/dq es la derivada del ingreso total r,

$$r = \int (2000 - 20q - 3q^2)dq$$

$$= 2000q - (20)\frac{q^2}{2} - (3)\frac{q^3}{3} + C$$

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3 + C$$

Suponemos que **cuando no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es 0;** esto es, r = 0 cuando q = 0. Ésta es nuestra condición inicial. Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior resulta:

$$0 = 2000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C.$$

Por tanto, C = 0 y

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3.$$

Para encontrar la función de demanda, usamos el hecho de que p = r/q y sustituimos el valor de r:

$$p = \frac{r}{q} = \frac{2000q - 10q^2 - q^3}{q}$$

$$p = 2000 - 10q - q^2.$$

EJEMPLO 89: Encontrar el costo a partir del costo marginal

En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de Bs. 4000. Los costos fijos son costos como la renta y el seguro, que permanecen constantes durante todos los niveles de producción en un período dado. Si la función de costo marginal dc/dq es:

$$\frac{dc}{dq} = 0{,}000001(0{,}002q^2 - 25q) + 0{,}2,$$

donde c es el costo total (en bolívares) de producir q libras de producto por semana, encontrar el costo de producir 10.000 libras en una semana.

Solución:

Como dc/dq es la derivada del costo total c,

$$c = \int \left[0{,}000001(0{,}002q^2 - 25q) + 0{,}2\right] dq$$

$$= 0{,}000001\int (0{,}002q^2 - 25q)dq + \int 0{,}2dq$$

$$c = 0{,}000001\left(\frac{0{,}002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0{,}2q + C$$

Los costos fijos son constantes independientemente de la producción. Por tanto, cuando q = 0, c = 4000, lo cual es nuestra condición inicial. Sustituyendo encontramos que C = 4000, por lo que

$$c = 0{,}000001\left(\frac{0{,}002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0{,}2q + 4000$$

De la ecuación anterior, cuando q = 10.000, c = $5416\frac{2}{3}$ Bolívares. El costo total de producir 10.000 libras de producto en una semana es de Bs. 5.416,67.

EJEMPLO 90:

Si el beneficio marginal en la producción de x unidades de un producto está definida por:

B´(q) = 100 – 0,01q y si B(0) = 0.

Hallar la función Beneficio y el beneficio sobre 100 unidades.

Solución:

Tenemos

$$B(q) = \int (100 - 0{,}01q)dq = 100q - \frac{0{,}01}{2}q^2 + C$$

$$= \quad 100q - \frac{1}{200}q^2 + C, \qquad \text{además}$$

$$0 = 100(0) - \frac{1}{200}(0) + C, \qquad \text{luego } C = 0\text{, por lo tanto}$$

$$B(q) = 100q - \frac{1}{200}q^2$$

Así mismo

$$B(100) = 10000 - \frac{1}{200}.10000 = 10000 - 50$$

B(100) = 9950.

El beneficio que se obtiene con la venta de 100 unidades es de 9950 Bs.

EJEMPLO 91:

Un pozo petrolero que produce 50 barriles de petróleo crudo al día se agotará dentro de 4 años y ha sido estudiado que dentro de t meses el precio del petróleo será $20 + 0{,}4\sqrt{t}$ Bolívares por barril. Suponiendo que el petróleo acumulado en la producción mensual lo vende totalmente al precio de mercado en ese momento, calcular cuál será el ingreso total futuro obtenido en la venta del petróleo extraído del pozo.

Solución:

Observemos que el número de barriles producidos por el pozo en un mes es:

50 . 30 = 1500 barriles por mes.

Ahora si P(t) representa el precio del petróleo crudo expresado en bolívares por barril, entonces si r(t) representa el ingreso total acumulado durante t meses.

Tenemos que r´(t) = 1500(20 + 0,4$\sqrt{t}$ y así obtenemos que:

r(t) = $\int\left(30000+600.\sqrt{t}\right)dt,$ o sea:

r(t) = $30000+600.\frac{2}{3}t^{3/2}+C$

r(t) = 30000 + 400t$\sqrt{t}+C$

y como r(0) = 0 se obtiene que C = 0 y así

r(t) = 30000 + 400t$\sqrt{t}$.

Ahora el ingreso total futuro proveniente del pozo y tomando en cuenta que para esto t = 4 años = 48 meses, tenemos que este ingreso es:

r(48) = 30000.48 +400.48.$\sqrt{48}$, o sea

r(48) = 1440000 + 19200. 6,9282

r(48) $\approx$ 1440000 + 133021,50

r(48) $\approx$ 1573021,44 Bs.

Integral Definida

EJEMPLO 92:

En cierta fábrica, el costo marginal es $3(q-4)^2$ Bolívares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto aumentará el costo total de fabricación si el nivel de producción aumenta de 6 a 10 unidades?

Solución:

Sea c(q) el costo total de producción de q unidades. Entonces el costo marginal es de derivada $\frac{dc}{dq}=3(q-4)^2$, y el incremento en el costo, si la producción aumenta de 6 a 10 unidades, es la integral definida.

$$c(10)-c(6)=\int_6^{10}3(q-4)^2\,dq=(q-4)^3\,\Big|_6^{10}$$

$$=(10-4)^3-(6-4)^3=216-8$$

$$=208 \text{ Bs.}$$

Cálculo de Áreas

El cálculo de áreas en economía se utiliza principalmente para el cálculo del Excedente (superavit) de Consumidores y el Excedente (superavit) de productores.

Excedente de Consumidores

Si la función demanda p = f(q) representa la cantidad de un producto que puede ser comprado a varios precios. Si el precio de mercado es p_o y la correspondiente demanda en el mercado es q_o, entonces aquellos consumidores que desean comprar el producto a un precio mayor que el precio del mercado ganan por el hecho que el precio del mercado es p_o (ver figura 9)

Figura 9.Excedente de Consumidores

Bajo ciertas hipótesis económicas, el total de consumidores que obtienen ganancias, se define como el área bajo la curva de demanda y por encima de la recta de ecuación $y = p_o$. Esta área E_c, fue llamada **excedente de consumidores** por el economista inglés Alfred Marshall (1842-1924) y se calcula como sigue:

E_c = Área ABCD = Área OEBDCAO – Área OEBA, es decir,

$$E_c = \int_0^{q_o} f(q)dq - q_o p_o = \int_0^{q_o} [f(q) - p_o]dq$$

EJEMPLO 93:

Si la función demanda viene dada por

$$p = f(q) = 32 - 4q - q^2,$$

Calcular el excedente de consumidores, en el caso de que $x_o = 3$

Solución:

Como $q_o = 3$, entonces $p_o = f(q_o)$ luego

$$p_o = f(3) = 32 - 4.3 - 3^2 = 11,$$

Por lo tanto

$$E_c = \int_0^3 (32 - 4q - q^2)dq - 3.11$$

$$E_c = \left[32q - 4q - \frac{x^3}{x} \right]_0^3 - 33$$

$$E_c = 36.$$

En la figura 10 se presenta la función p = f(q) para $q_o = 3$

Figura 10. p = f(q)

Excedente de productores

La función oferta representa la cantidad de un producto que puede ser ofrecido a varios precios. Si el precio del mercado es p_o y la correspondiente oferta es q_o, entonces aquellos productores que están deseosos de vender el producto a un precio menor que el precio del mercado ganan, por el hecho que el precio del mercado es p_o (ver figura 11).

Figura 11. Excedente de Productores

Bajo ciertas hipótesis económicas, el total de productores que obtienen ganancias viene dado por el área encima de la curva de oferta p = g(q) entre q = 0 y q = q_o y por debajo de la recta de ecuación p = p_o y se le conoce como **el excedente de productores,** y se calcula como sigue:

El valor de esta área es : E_c = Área OAEB – Área OAEDCO, es decir,

$$E_c = q_o p_o - \int_0^{q_o} g(q)dq = \int_0^{q_o} [p_o - g(q)]dq$$

EJEMPLO 94:

Si la función oferta es la definida por s = f(q) = $(x + 2)^2$ y el precio es p_o = 25, calcular el excedente de productores.

Solución:

Como p_o = 25 entonces

$$g(q_o) = (q_o + 2)^2 = 25$$

Por lo tanto $q_o + 2 = 5$

Ya que sólo consideramos valores positivos de q_o por ser la cantidad de un determinado producto.

En consecuencia $x_o = 3$.

Luego, se tiene $E_p = 3 \,.\, 25 - \int_0^3 (q+2)^2 dq$

$$E_p = 75 - \left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_0^3$$

$$E_p = 75 - \left(\frac{125}{3} - \frac{8}{3}\right) = 36$$

Figura 12. $s = f(q) = (x + 2)^2$

EJEMPLO 95:

La función de demanda para un producto es:

$$P = f(q) = 100 – 0{,}05q.$$

donde p es el precio por unidad (en bolívares) de q unidades. La función de oferta es:

$$p = g(q) = 10 + 0{,}1q.$$

Determinar los excedentes de consumidores y productores bajo equilibrio del mercado.

Solución:

Primero debemos encontrar el punto de equilibrio (p_o,q_o) resolviendo el sistema formado por las funciones $p = 100 – 0{,}05q$ y $p = 10 + 0{,}1q$.

$$10 + 0{,}1q = 100 – 0{,}05q,$$

$$0{,}15q = 90,$$

$$q = 600.$$

Cuando $q = 600$, $p = 10 + 0{,}1(600) = 70$. Así $q_o = 600$ y $p_o = 70$. El excedente de los **consumidores** es:

$$E_c = \int_0^{q_o} [f(q) - p_o]dq = \int_0^{600} (100 - 0{,}05q - 70)dq$$

$$= \left(30q - 0{,}05\frac{q^2}{2}\right)_0^{600} = 9.000 \text{ Bs.}$$

El excedente de los productores es:

$$E_p = \int_0^{q_o} [p_o - g(q)]dq = \int_0^{600} [70 - (10 + 0{,}1q)]dq$$

$$= \left(60q - 0{,}1\frac{q^2}{2}\right)_0^{600} = 18.000 \text{ Bs.}$$

El excedente de los consumidores es de 9.000 Bs. y el de los productores es de 18.000 Bs.

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.1

1. Se estima que dentro de "x" meses la población de Capacho cambiará a una razón de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. ¿En cuánto crecerá la población de Capacho durante los próximos 4 años?

R. Crecerá en 40 personas.

2. La función de costo marginal es 4q – 8. Si el costo de producir 5 unidades es 200 Bs. encontrar la función de costo total.

R. c(q) = 2q^2 – 8xq+ 190

3. Si el ingreso marginal en miles de Bolívares en la producción de q unidades de un producto, viene dado por r´(q) = $q(q^2 + 9)^{-\frac{1}{2}}$ y el ingreso es nulo a un nivel de producción cero. Determinar la función r(q) de ingreso y calcule el mismo para un nivel de producción de 100 unidades.

R. r(q) = $\sqrt{q^2 + 9} - 3.$**, r(100) = 97000 Bolívares.**

4. En una fabrica se ha establecido que al alcanzar la producción de q unidades, los ingresos marginales están determinados por Bs. $\frac{120}{\sqrt{q}}$ por unidad. Además se sabe que la función de

costo marginal correspondiente es Bs. $\frac{2}{3}q$ por unidad. Por otra parte, cuando el nivel de producción es 100 unidades, el beneficio obtenido es Bs. 40.000. Calcular el la función beneficio y el beneficio cuando el nivel de producción sea de 400 unidades.

R. B(q) = $240\sqrt{q} - \frac{q^2}{3} + \frac{122800}{3}$**. B(400) = 60400 Bs.**

5. Calcular el exceso de consumidores cuando la función de demanda es p = f(q) = $85 - 4q - q^2$, en el caso de $q_o = 5$.

R. $\mathbf{E_c} = \frac{400}{3}$

6. Si las funciones de demanda y oferta están definidas por:

p(q) = 10 – q

s(q) = q + 5

Hallar los excedentes de consumidores y de productores para un equilibrio de Mercado.

R. $\mathbf{E_c} = \frac{25}{8}$ **,** $\mathbf{E_p} = \frac{25}{8}$

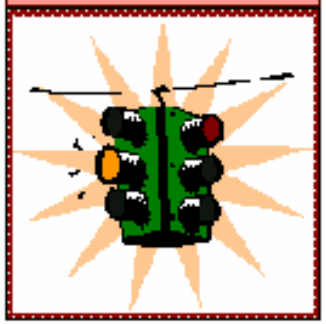
CAPITULO V

Software Educativo

Matemática Aplicada a la Economía

Ecuaciones

Límites y Continuidad



Integración

Ayuda

Problemas Resueltos

Evaluación

Salida

Funciones

Derivación

Ecuaciones

Continuar

Teoría Matemática

Aplicación Económica

Ecuaciones

Una Ecuación es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus lados o miembros y están separadas por el signo de igualdad "=" .

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera, (se cumple la igualdad). Estos valores son llamados soluciones de la ecuación y se dice que satisfacen la ecuación. Cuando sólo está implicada una variable, una solución también es llamada raíz.

Ecuaciones Equivalentes

Generalmente, resolvemos una ecuación encontrando una ecuación equivalente que tenga soluciones que se determinen fácilmente. Realizando las siguientes operaciones, encontramos ecuaciones equivalentes:

Ecuaciones

En la mayoría de los casos, para resolver problemas prácticos deben traducirse las relaciones establecidas a símbolos matemáticos. Esto es conocido como *modelación*, y cada uno de los ejemplos ilustran las técnicas y conceptos básicos para ello.

EJEMPLO

Pablo a ahorrado 2.300 Bs. Durante cuatro meses. En cada mes ha ahorrado 50 Bs. más que en el anterior. ¿Cuál fue el monto de la primera cantidad ahorrada?

Solución:

Si llamamos x a la cantidad que ahorró el primer mes, entonces la segunda cantidad (segundo mes) sería $(x + 50)$, el tercer mes sería $(x + 100)$ y finalmente el cuarto mes sería $(x + 150)$.

Para hallar el valor del primer mes resolvemos la ecuación lineal

$$x + (x + 50) + (x + 100) + (x + 150) = 2.300$$

$$4x + 300 = 2.300$$

$$4x = 2.300 - 300$$

$$x = \frac{2000}{4}$$

$$x = 500$$

La primera cantidad que ahorró pablo fue de 500 Bs.

Ecuaciones

EJEMPLO

Un sastre compró 20 metros de tela tipo A, y 30 metros de tela tipo B, pagando 6 Bs. más por el metro de tela tipo A que por el metro de tela tipo B; en total pagó 1.120 Bs. ¿Cuál es el precio de cada tipo de tela?

Solución :

Si llamamos x el precio de la tela tipo B, entonces el precio de la tela tipo A sería $(x+6)$, por tanto la cantidad comprada sería $30x$ y $20(x+6)$, luego para hallar el precio de cada tipo de tela, resolvemos la ecuación lineal

$$30x + 20(x+6) = 1.120$$
$$30x + 20x + 120 = 1.120$$
$$50x = 1.120 - 120$$
$$x = \frac{1000}{50}$$
$$x = 20$$

Dado que x es el precio de la tela tipo B entonces cada metro de tela tipo B cuesta 20 Bs. Dado que el precio de la tela tipo A esta dado por $(x+6)$, entonces el precio de la tela tipo A es $(20+6) = 26$ Bs.

Ecuaciones

EJEMPLO

La compañía Andersón hace un producto para el que el costo variable por unidad sea de 6 Bs. y el costo fijo sea de Bs. 80.000. Cada unidad tiene un precio de venta de Bs. 10. Determine el número de unidades que deben venderse para obtener una utilidad de Bs. 60.000.

Solución: Sea q el número de unidades que deben ser vendidas (en problemas económicos, q representa cantidad.) Entonces, si el costo variable (en bolívares) es $6q$, el costo total (la suma del costo variable y el costo fijo) será $6q + 80.000$, y el ingreso total por la venta de q unidades resultará en 10q. Ya que

Utilidad = ingreso total – costo total.

El modelo para este problema es

$$60.000 = 10q - (6q + 80.000).$$

Resolviendo se obtiene

$$60.000 = 10q - 6q - 80.000$$
$$140.000 = 4q$$
$$35.000 = q$$

Por tanto, se deben vender 35.000 unidades para obtener una garancia de Bs. 60.000.

Funciones

Continuar

Teoría Matemática

Aplicación Económica

Funciones

Usualmente la palabra función es utilizada para indicar la *dependencia* de una cantidad respecto a otra.

La función habitualmente se usa como sinónimo de **"regla"** ó **"correspondencia"**. Así en una forma descriptiva y práctica se define **una función f de un conjunto X en un conjunto Y** *como una regla que asigna a cada elemento x de X un único elemento y de Y.* El conjunto X se llama **dominio de definición** de f o simplemente **dominio** de la función f y el conjunto Y que es el conjunto donde f toma valores es denominado **codominio** de f.

Para **cada** "x" $\in$ X hay exactamente un **único** "y" $\in$ Y tal que (x,y) $\in$ f.
Una función f de X en Y se denota de alguna de las formas siguientes:

$f: X \to Y$, $\qquad X \xrightarrow{f} Y$,

En el presente trabajo utilizaremos la primera notación.

La correspondencia definida por una función es costumbre denotarla con letras minúsculas como f, g, h ... o bien con letras griegas φ, Ψ..., en ocasiones se utilizan letras mayúsculas F, G, H,...

Funciones

Continuar

Función Demanda

Función Oferta

Equilibrio

Función Costo, Ingreso y Beneficio

Función Producción

Función Demanda

Como se ha visto, una función es en esencia una *correspondencia* por la que a cada número de entrada en el dominio se asigna un número de salida en el rango.

En Economía son muchas las situaciones que se expresan como una función, es decir que una situación determinada, depende del comportamiento de un aspecto. En el presente trabajo, se abordarán las funciones más conocidas y más utilizadas, como lo son: la función demanda, oferta, costo, ingreso y beneficio.

Función demanda.

Suponga que la ecuación p= 100/q describe la relación entre el precio por unidad p de cierto producto y el número de unidades q del producto que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Esta ecuación es llamada *ecuación de demanda* para el producto. Si q es un número de entrada, entonces para cada valor de q se asigna exactamente un número de salida p:

$$q \rightarrow \frac{100}{p} = p$$

Por ejemplo, $20 \rightarrow \frac{100}{20} = 5;$

Esto es, cuando q es 20, entonces p es 5. Así, el precio p es una función de la cantidad demandada, q. Esta función es llamada **función de demanda.** La variable independiente es q, y p es la variable dependiente. Ya que q no puede ser cero (la división entre cero no está definida) y no puede ser negativa (q representa una cantidad), el domino es todos los valores de q tales que q>0.

Función Demanda

Analizando cotidianamente la función de la demanda, **en general, salvo casos muy singulares, la ecuación de la demanda representa a q como una función decreciente de p,** debido a la tendencia en la población a consumir menor cantidad del bien a medida que el precio de éste aumenta.

También se puede expresar la función de demanda de q en función de p, siendo esta q = f(p), donde la cantidad demandada q depende del precio unitario p.

EJEMPLO

Se tienen dos bienes, B1 y B2, con funciones de demanda dadas por:

Bien B1 : $q = f(p) = \dfrac{90 - 3p}{5}$

Bien B2: $q = f(p) = 140 - 12p$

Donde p viene expresado en bolívares.

1. Si el precio unitario de ambos bienes es de Bs. 5,75, ¿Cuál de los dos bienes tendrá mayor demanda?
2. ¿Existe algún precio del mercado para el cual la demanda de ambos bienes sea la misma?

Solución:

Para averiguar cuál de los dos bienes tendrá una mayor demanda, si el precio unitario de ambos es de Bs. 5,75; bastará hacer p = 5,75 en cada una de las funciones de demanda y hallar el valor de q correspondiente. Así.

Función Demanda

Para B1: $q = \frac{90 - 3(5{,}75)}{5} = 14{,}55$

Para B2: $q = 140 - 12(5{,}75) = 71$

Por lo tanto para un precio unitario de Bs. 5,75, el bien B2 tendrá una mayor demanda (71) que el bien B1 (14,55).

1.1 La respuesta a la interrogante planteada acerca de la existencia de algún precio que iguale la demanda de ambos bienes, la tendremos al resolver la ecuación que resulta al igualar las cantidades demandadas de dichos bienes. Es decir, el precio p, que iguala la demanda del bien B1 con la del bien B2, es aquél que verifica la ecuación:

$$\frac{90 - 3p}{5} = 140 - 12p$$

Esto es:

$$90 - 3p = 5\,(140 - 12p)$$
$$90 - 3p = 700 - 60p$$
$$60p - 3p = 700 - 90$$
$$57\,p = 610$$
$$p = \frac{610}{57}$$
$$p = 10{,}70$$

Por lo tanto, si el precio es de Bs. 10.70, ambos bienes tendrán la misma demanda. El valor de demanda común se obtiene al sustituir este precio en cualquiera de las dos funciones de demanda; en este caso, resulta ser q = 11,6 unidades.

Función Oferta

Función de oferta

La siguiente tabla es un *programa de oferta*.

p **Precio por Unidad**	q **Cantidad surtida por semana**
500	11
600	14
700	17
800	20

Esta tabla da una correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes proporcionan por semana a ese precio. A cada producto le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

Si p es la variable independiente, entonces q es una función de p, digamos q = f(p), y f(500) = 11, f(600) = 14, f(700) = 17 Y F(800) = 20.

Por otra parte, si q es la variable independiente, entonces p es una función de q, digamos p = g(q), y g(11) = 500, g(14) = 600, g(17) = 700 y g(20) = 800.

Por esto se habla de f y g como **funciones de oferta.**

Función Oferta

Así como la demanda se refiere a la cantidad de un bien que los consumidores están dispuestos a comprar en un determinado período de tiempo. **La oferta** trata de la cantidad del bien que los productores colocan en el mercado para su venta.

La función de oferta $s = f(p)$ de s (oferta) en función de p (precio unitario), también se puede expresar de p en función de s siendo esta $p = f(s)$, donde el precio depende de la cantidad ofertada.

La función de la oferta, en contraposición a la función de la demanda, representa, en general, a p como función creciente de s; esto se explica por el incentivo de los productores a generar más cantidades del bien a medida que el precio en el mercado sea mayor.

EJEMPLO

Se tienen dos bienes A y B, con ecuaciones de oferta dadas por:

Bien A: $s = f(p) = \dfrac{p+20}{5}$

Bien B: $s = f(p) = \dfrac{120+p}{15}$

Un consumidor acude al Mercado con las intenciones de comprar uno cualquiera de dichos bienes:

1. Si el consumidor está dispuesto a pagar Bs. 12 por cada unidad del bien comprado, ¿Cuál de los bienes debería comprar?

Función Oferta

Solución:

Para determinar el bien a comprar por el consumidor, que sólo esta dispuesto a pagar Bs. 12 por cada unidad del bien comprado, deberán evaluarse para este precio, las cantidades ofrecidas para cada productor de los bienes considerados y seleccionar aquél cuya oferta sea mayor.

Para el bien A: $s = \frac{12+20}{5} = 6{,}4$

Para el bien B: $s = \frac{120+12}{15} = 8{,}8$

Por lo tanto, el consumidor deberá comprar el bien B.

Equilibrio

Hasta ahora se han presentado dos funciones muy importantes en el mercado; la oferta y la demanda. No obstante que en cada una de ellas influye el precio, ninguna por sí sola puede determinar el precio. Los precios en un mercado de competencia están determinados por el equilibrio de estas funciones. De esto surge la definición de **Punto de Equilibrio.**

Sea B un bien cualquiera y T un período de referencia, llamamos **Punto de equilibrio** del bien B, en el período T, al punto en donde se igualan la cantidad ofrecida, s y la cantidad demandada, q.

El valor del precio, en el punto de equilibrio, lo denominamos **Precio de Equilibrio** del bien B; la cantidad demandada (ofrecida) en el punto de equilibrio la denominamos **Cantidad de Equilibrio.**

EJEMPLO

Si las ecuaciones de la demanda y de la oferta de un determinado bien son, respectivamente:

$$q = \frac{180-15p}{2}$$

$$s = 6p - 18$$

Obtenga el punto de equilibrio.

Solución:

Por definición, las coordenadas del punto de equilibrio se obtienen hallando el punto de intersección de las curvas de demanda y de oferta del bien considerado. Es decir, obteniendo el punto para el cual la demanda q se iguala a la oferta s; en otras palabras; cuando se da la igualdad;

$$q = s$$

Equilibrio

En este caso, la igualdad anterior adopta forma:

$$\frac{180-15p}{2} = 6p - 18$$

De donde,

$$180 - 15p = 12p - 36$$
$$180 + 36 = 12p + 15p$$
$$216 = 27p$$
$$\frac{216}{27} = p$$
$$8 = p$$

Siendo p = 8; el valor de la cantidad ofrecida para p = 8, resulta ser q = s = 30.
En definitiva, el precio de equilibrio es 8 y la cantidad de equilibrio es 30.

Función Costo, Ingreso y Beneficio

Función Costo, Ingreso y Beneficio

Las empresas realizan dos funciones básicas; por un lado, elaboran o transforman bienes y recursos para su posterior venta; por otro lado, compran recursos en el mercado de factores. Una de las decisiones fundamentales que toda empresa debe tomar es la cantidad que va a producir, y ésta depende del precio de venta y del costo de producción; esta decisión es guiada por el deseo de maximizar el beneficio, definido como la diferencia entre el ingreso y el costo total.

BENEFICIO = INGRESO – COSTO TOTAL.

En general, el costo total (C), asociado a un proceso productivo, es el resultado de la suma de dos tipos de costo: el costo fijo (CF) y el costo variable (CV). El primero contempla aquellos gastos que no dependen de las cantidades producidas como por ejemplo los incurridos en: compra y mantenimiento del edificio, compra de maquinaria, pagos al personal administrativo, etc. El costo variable depende de la cantidad producida; aquí se incluyen los gastos efectuados en la compra de materia prima, gastos energéticos, transporte, pago de obreros, etc.; este costo aumenta conforme aumenta la producción.

Se puede establecer la relación entre los costos anteriores por la ecuación:

C = CF + CV.

Función Costo, Ingreso y Beneficio

Por lo tanto llamamos **Función de costo** de un bien B, en el período T, a la función que nos muestra para cada nivel de producción q, el costo total asociado C. Es decir la función: $C = f(q)$ con $C \geq 0$, $q \geq 0$.

En adelante supondremos que la ecuación de costo es del tipo lineal, es decir de la forma:

$$C = a + bq$$

Interpretando económicamente las constantes "a" y "b" que aparecen en la ecuación anterior:

1. a, la ordenada en el origen, es el valor del costo cuando $q = 0$; podemos interpretar este valor como el correspondiente al costo fijo de producción.
2. b, la pendiente, representa el aumento de costo necesario para producir una unidad adicional del bien.¿Por qué?; a este valor lo llamamos **costo marginal (Cma)** del bien.

EJEMPLO

La función de costo de un bien es: $C = 4680{,}35 + 200q$

a. Obtén el Costo fijo y el costo variable.
b. Determina el costo marginal.

Solución:

El Costo fijo es igual a la ordenada en el origen, a , esto es:

$$CF = 4680{,}35$$

La función de costo variable es $C - CF$; o sea;

$$CV = 200q$$

El Costo marginal es el valor de la pendiente, b; es decir:

$$CMa = b = 200$$

Función Costo, Ingreso y Beneficio

Función de Ingreso

Llamamos **Función de Ingreso** de un bien, en el período T, a la función que nos muestra para cada nivel de producción q, el ingreso proveniente de la venta, I. Es decir a la función: $I = f(q)$ con $I \geq 0$, $q \geq 0$.

Función de Beneficio

Como se dijo en párrafos anteriores, la función primordial de una empresa es la de maximizar sus beneficios. El beneficio dado por un bien B, producto de la venta de q unidades del mismo, es:

$$\mathbf{B = I - C}$$

Siendo I el ingreso obtenido y C el costo ocasionado, por la venta y producción, respectivamente de q unidades de dicho bien.

Tanto I como C son funciones de Q, en consecuencia B también lo es.

Llamamos **Función de Beneficio** de un bien en el período T, a la función que nos muestra para cada nivel de producción q, el beneficio obtenido B. Es decir a la función:

$B = f(q)$ con $q \geq 0$.

EJEMPLO

Una empresa puede vender un determinado artículo a un precio unitario de Bs. 70. El costo fijo de producción es de Bs. 8000, mientras que el costo marginal se estima en Bs. 30 por unidad.

1. Obtén las funciones de Costo e Ingreso.

Obtén la función de Beneficio.

Función Costo, Ingreso y Beneficio

Solución:

El Costo fijo es por condiciones del problema, CF = 8000; el costo variable, CV, se determina mediante la relación:

$$CV = CMa \cdot q$$

Es decir:

$$CV = 30q$$

Por lo tanto, la función de Costo, C es:

$$C = CF + CV = 8000 + 30q$$

La función de Ingreso se obtiene mediante la relación fundamental

$$I = p \cdot q$$

En consecuencia:

$$I = 70\,q$$

La función de **beneficio** se obtiene mediante la relación:

$$B = I - C$$

Es decir,

$$B = 70q - (8000 + 30q)$$

$$B = 40q - 8000.$$

Función Producción

Función de Producción

Las empresas en su proceso de producción utilizan recursos, o mejor dicho, factores de producción. La idea del asunto está en determinar la forma en que se combinan dichos factores para producir un cierto número de unidades del bien considerado; es decir:

¿Qué cantidad de producto se puede elaborar con determinadas disponibilidades de tierra, trabajo, maquinaria, materias primas y demás recursos productivos?

La respuesta a esta interrogante se tiene en la **Función de Producción;** ésta no es más que una relación que vincula, la cantidad de producto producido Q, con los factores productivos – trabajo(L), capital (K), recursos naturales (T) – siguiendo los lineamientos de una incentiva empresarial (H); en otras palabras, es una función de las variables: L, K. T, H. Manteniendo constantes todos, menos uno, los factores que intervienen, la cantidad producida q, será función sólo del factor que se ha dejado como variable, y es en este contexto que definiremos la función de producción.

Llamamos **Función de Producción** de un bien relativo a un factor F, en el período T, a la función que nos muestra para cada valor de F, la cantidad Q producida, manteniendo el resto de los factores constantes. Es decir a la función: $Q = g(F)$ con $Q \geq 0$, $F \geq 0$.

Función Producción

EJEMPLO

El número de unidades producidas de un determinado bien, Q, en términos de la cantidad de trabajo L, medida en horas-hombre, está dada por la función Q = 20L, con L[0,8].

1. ¿Qué cantidad de bien se produce si se emplean 4,5 horas – hombre?
2. ¿Cuántas horas - hombre se necesitan para producir 125 unidades?

Solución:

a. La cantidad del bien producida cuando se usan 4,5 horas-hombre del factor trabajo, se obtiene sustituyendo L = 4,5 en la función de producción.

$$Q = 20(4,5) = 90$$

Por lo tanto al utilizar 4,5 horas-hombre se obtienen 90 unidades del bien.

b. El número de horas-hombre requerido para producir 125 unidades, se obtiene sustituyendo en la función de producción Q = 125 y luego resolviendo la ecuación resultante para L; es decir.

$$125 = 20L$$

$$\frac{125}{20} = L$$

$$6,25 = L$$

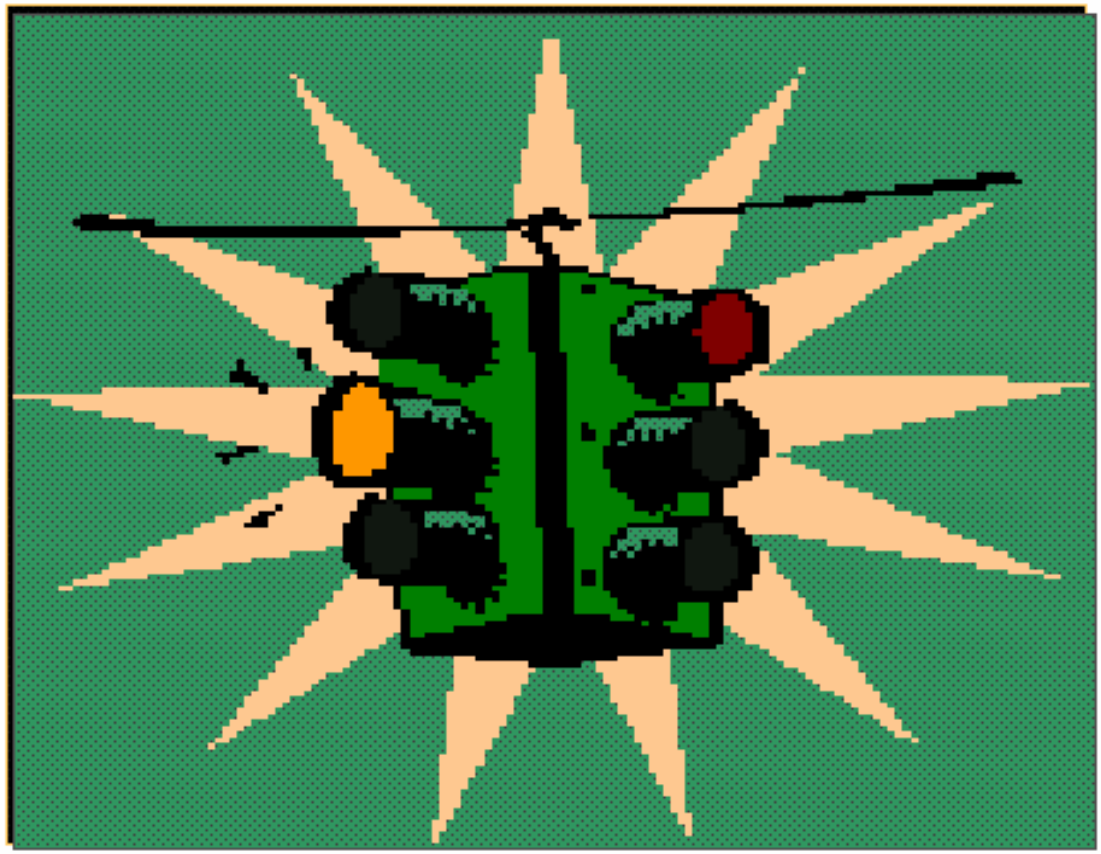
Por lo tanto para obtener 125 unidades del producto hay que utilizar 6,25 horas-hombre.

Límites y Continuidad

Continuar

Teoría Matemática

Aplicación Económica

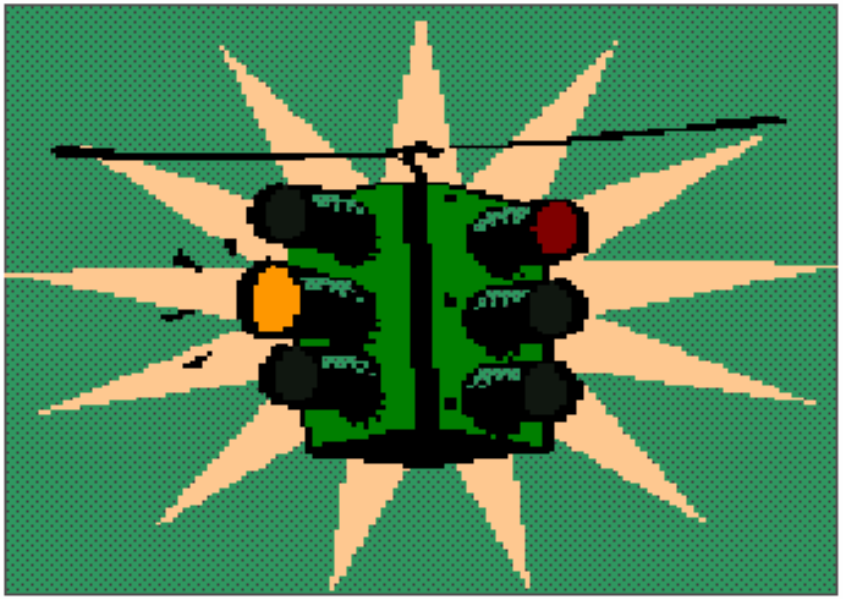


Límites y Continuidad

Continuar

Límites

Continuidad



Límites y Continuidad

Básicamente la aplicación económica de los límites y la Continuidad de funciones se aprecia al describir lo que le ocurre a las funciones económicas cuando toman determinados valores.

EJEMPLO

Cierta función de Costo se define $C(x) = \left[\dfrac{4x^2-100}{x-5}\right], x \neq 5$ en donde x es el número de artículos producidos (en cientos) y C es el costo de producción (en miles de bolívares).

Encontrar e Interpretar: a) $\lim\limits_{x\to 5} C(x)$, b) $\lim\limits_{x\to 3} C(x)$, c) $\lim\limits_{x\to 0} C(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{4x^2-100}{x-5}\right] = \dfrac{100-100}{5-5} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminación)

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{4x^2-100}{x-5}\right] = \lim_{x\to 5}\left[\frac{(2x)^2-10^2}{x-5}\right] = \lim_{x\to 5}\left[\frac{(2x-10)(2x+10)}{x-5}\right]$$

$$= \lim_{x\to 5}\left[\frac{2(x-5)(2x+10)}{x-5}\right] = \lim_{x\to 5} 2(2x+10) = 40$$

Límites y Continuidad

Puede interpretarse la ruptura en x = 5, como el hecho de no estar preparado el montaje de la producción de los artículos, para funcionar aproximadamente cuando el número de artículos producidos sean 40.

b) $\lim_{x \to 3}\left[\frac{4x^2-100}{x-5}\right] = \frac{4(3)^2-100}{3-5} = \frac{-64}{-2} = 32.$

El costo aproximado de tres artículos es de 32 (miles de bolívares) en él se incluyen todos los gastos que genera la elaboración de cada uno de los artículos.

c) $\lim_{x \to 0}\left[\frac{4x^2-100}{x-5}\right] = \frac{4(0)^2-100}{0-5} = \frac{-100}{-5} = 20$

El costo o gastos que puede prever la empresa para iniciar la producción de los artículos es de 20 (miles de bolívares).

Límites y Continuidad

EJEMPLO

El costo (en bolívares) de eliminar x% de la polución del agua en cierto riachuelo está dado por:

$$C(x)=\frac{75000x}{100-x}\ para\ 0 \leq x < 100$$

1. Hallar el Costo de eliminar la mitad de la polución.
2. ¿Qué porcentaje de la polución puede eliminarse con 20000 Bs.
3. Evaluar e interpretar el resultado del $\lim_{x \to 100} C(x)$

Solución:

a. La mitad de la polución es el 50%, es decir, evaluar la función en x = 50.

$$C(50) = \frac{75000(50)}{100-50} = 75000bs.$$

Por lo tanto el Costo de eliminar el 50% de la polución es de 75000 Bs.

Límites y Continuidad

1. Conociendo el costo, tenemos que hallar a x, para la cual resolvemos la ecuación:

$$20000 = \frac{75000x}{100 - x} = 20000(100 - x) = 75000x$$

$$2000000 - 20000x = 75000x$$

$$2000000 = 75000x + 20000x$$

$$\frac{2000000}{95000} = x$$

$$21{,}05\% = x$$

Con 20000 se puede eliminar el 21,05% de la polución.

c) $\lim_{x \to 100} \frac{75000x}{100 - x}$

Dado que $0 \leq x < 100$ a medida que x se acerca a 100 ilimitadamente el Costo se vuelve arbitrariamente grande.

(verificar con x cerca de 100, como por ejemplo 99,999)

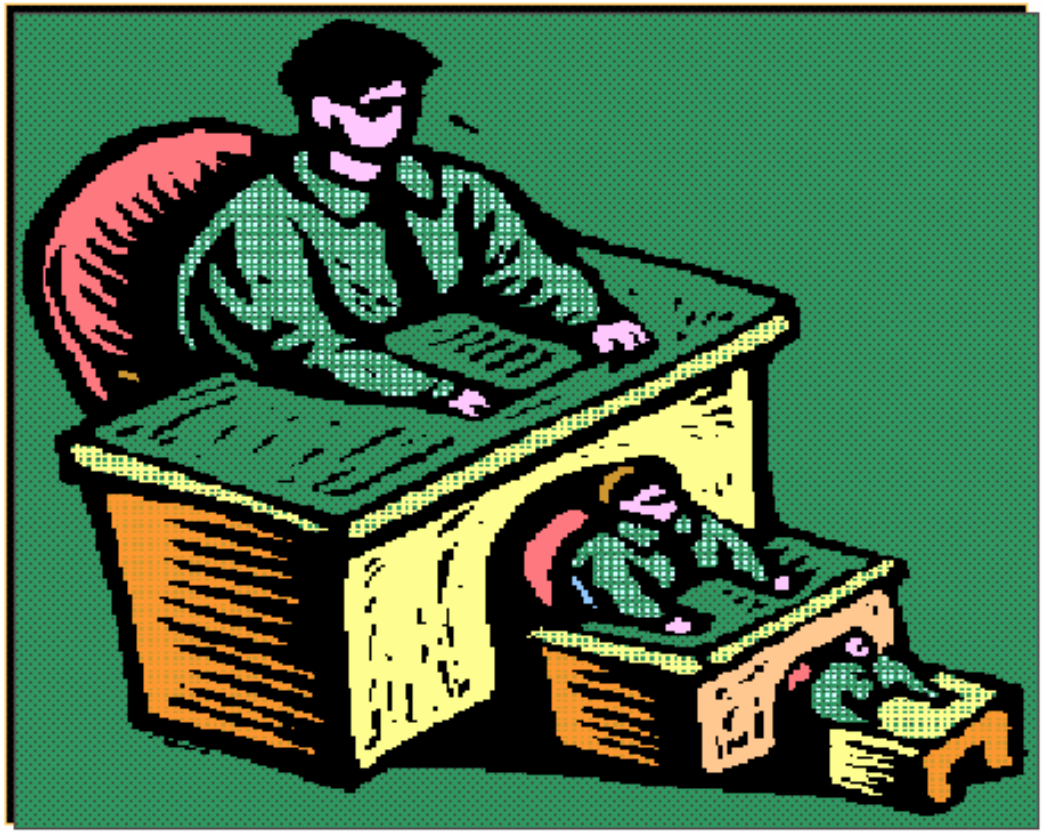
Derivación

Continuar

Teoría Matemática

Aplicación Económica

Tablas



Derivación

La derivada de una función f es la función denotada por f' y definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ *; siempre que éste límite exista.*

Si puede encontrarse f'(x), se dice que f es **diferenciable** *y f'(x) se llama derivada de f en x, o derivada de f con respecto a x. El proceso de encontrar la derivada se llama* **diferenciación.**

EJEMPLO

Encontrar la derivada por medio de su definición. Si $f(x) = x^2$.

Solución:

$$f' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x.$$

Observe que al tomar el límite tratamos a x como una constante porque era h y no x la que estaba cambiando.

Derivación

Análisis Marginal

Sean "x" e "y" dos variables económicas cualesquiera, relacionadas por la ecuación y = f(x). En general se entiende por **análisis marginal** el estudio de las variaciones de la variable "y" en términos de las variaciones de la variable "X".

En la realidad el conjunto formado por los valores que toman las variables económicas tales como precio, costo, oferta, demanda y beneficio, es un conjunto finito; sin embargo, con el fin de aprovechar la potencia que nos brinda el cálculo diferencial, supondremos que los valores de las mencionadas variables son números reales.

Costo Marginal

La **función de costo total** de un fabricante, c = f&q9, nos da el costo total c de producción y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama **costo marginal**. Así,

$$\text{Costo marginal} = \frac{dc}{dq}.$$

Derivación

EJEMPLO

Sea $c = 0.1q^2 + 3$ una función de costo, donde c está en bolívares y q en kilogramos. Entones,

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q.$$

El costo marginal cuando se producen 4 libras es dc/dq evaluado cuando q = 4:

$$\frac{dc}{dq}\Big|_{q=4} = 0.2(4) = 0.80.$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 1 kilogramo, de 4 a 5 kilogramos, entonces el cambio en el costo es aproximadamente de 0.80 Bolívares. Esto es, el kilogramo adicional cuesta aproximadamente 0.80 Bolívares. En general, *interpretamos el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional producida.*

Si c es el costo total de producir q unidades de un producto, entonces el **costo medio** por unidad, $\bar{c}$ es

$$\bar{c} = \frac{c}{q}$$

Derivación

Ingreso Marginal

Supongamos que r = f(q) es la **función de ingreso total** de un fabricante. La ecuación r = f(q) establece que el valor total recibido al vender q unidades de un producto es r. El **ingreso marginal** se define como la razón de cambio del valor total recibido con respecto al número total de unidades vendidas. Por consiguiente, el ingreso marginal es solamente la derivada de r con respecto a q.

$$\text{Ingreso marginal} = \frac{dr}{dq}.$$

El ingreso marginal es la razón a la que el ingreso cambia con respecto a las unidades vendidas. Lo interpretamos como *el ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción.*

EJEMPLO

Suponga que un fabricante vende un producto a Bs. 2 por unidad. Si se venden q unidades, el ingreso total está dado por

$$r = 2q.$$

Derivación

Solución:

La función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}(2q) = 2$$

que es una función constante. El ingreso marginal es entonces igual a 2 independientemente del número de unidades vendidas. Esto es lo que esperaríamos porque el fabricante recibe Bs. 2 por cada unidad vendida.

Si r es el ingreso total de vender q unidades de un producto, entonces el **ingreso medio** por unidad, $\bar{r}$, es

$$\bar{r} = \frac{r}{q}$$

Beneficio Marginal

La **función de beneficio total** de un fabricante, B = f(q), nos da el beneficio de producir y vender q unidades de un producto. La razón de cambio de B con respecto a q se llama **Beneficio Marginal**. Así,

$$\text{Beneficio marginal} = \frac{dB}{dq}.$$

Derivación

Si B es el beneficio total de producir y vender q unidades de un producto, entonces el **beneficio medio** por unidad, $\overline{B}$ es

$$\overline{B} = \frac{B}{q}$$

EJEMPLO Beneficio Marginal

La Ecuación de la demanda de un cierto bien es, $p = 600e^{\left(-\frac{q}{100}\right)}, q \geq 0$. Si la función de costo es $c(q) = 700\ln(q + 1) + 800$, $q \geq 0$. Obtener

1. La función de beneficio.
2. La función de beneficio medio.
3. La función de beneficio marginal
4. La tasa con la cual varía el beneficio en el nivel de producción de 60 unidades.

Solución:

a. La función de beneficio B(q) es:

$B(q) = r(q) - c(q)$.

Derivación

1. La tasa con la cual varía la función de beneficio en el nivel de producción de 60 unidades, es el beneficio marginal evaluado en q = 60; es decir:

$$B'(60) = 6e^{-\frac{60}{100}}(100-60) - \frac{700}{60+1} \approx 6(0{,}549)(40) - 11{,}475 = 120{,}285.$$

Optimización de las funciones de Costo, Ingreso y Beneficio.

Obviamente cuando hablamos de las funciones económicas Costo, ingreso y Beneficio, queremos alcanzar el mejor resultado del proceso productivo, y esto se logra alcanzando el **Costo mínimo, el ingreso máximo y el Beneficio máximo.**

EJEMPLO Optimización

La ecuación de la demanda de un cierto bien es $p = 400 - 2q$, mientras que la función de costo es $c(q) = 0.2q^2 + 4q + 400$. Obtener:

1. El costo mínimo.
2. El Ingreso máximo.
3. El beneficio máximo.

Solución:

a. Se trata de hallar el mínimo de la función:

$$C(q) = 0.2q^2 + 4q + 400, \quad q \in [0, +\infty).$$

Derivación

Comenzando por determinar los *puntos críticos* de la función, pues los valores extremos (máximos y mínimos) de una función sólo se alcanzan en sus puntos críticos.

$c = c(q)$. La derivada de esta función es:

$c'(q) = 0.4q + 4$.

Observando que:

1.1 $c'(q)$ existe para cualquier valor de q en el intervalo $[0,+\infty)$.

1.2 $C'(q) = 0 \Leftrightarrow 0{,}4q + 4 = 0 \Leftrightarrow q = -10$, valor éste que no pertenece al intervalo $[0,+\infty)$.

Se concluye entonces que el único punto crítico de la función $c = c(q)$ es el extremo inferior del intervalo $[0,+\infty)$, es decir $q = 0$.

Como $c'(q) > 0$ para cualquier valor de q en $[0,+\infty)$, la función $c = c(q)$ es creciente en el mencionado intervalo y por lo tanto en $q = 0$ dicha función alcanza un mínimo relativo, que a su vez también absoluto, cuyo valor es $c(0) = 400$.

En resumen, la función de costo alcanza su valor mínimo de 400 Bs. en el nivel de producción $q = 0$.

Integración

Continuar

Teoría Matemática

Aplicación Económica

Tablas

Integración

Continuar

Integral Indefinida

Métodos de Integración

Integral Definida

Cálculo de Áreas

Integral Indefinida

Dada una función f, si F es una función tal que

$F'(x) = f(x)$,

Entonces F se llama *antiderivada* de f. Así, una antiderivada de f es simplemente una función cuya derivada es f.

Por ejemplo, como la derivada de x^2 es 2x, x^2 es una antiderivada de 2x, sin embargo, no es la única, veamos por qué. Como,

$$\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(x^2-5) = 2x$$

Tanto x^2+1 como x^2-5 son también antiderivadas de 2x.

. Lo más importante, es que *todas* las antiderivadas de 2x deben ser funciones de la forma x^2+C, debido a que:

Dos antiderivadas cualesquiera de una función difieren sólo en una constante.

Como la expresión $x^2 + C$ describe todas las antiderivadas de 2x, podemos referirnos a ella como la *antiderivada más general* de 2x, denotada por $\int 2x dx$, que se lee "*integral indefinida* de 2x respecto a x". Escribimos entonces:

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

En resumen **Integrar** significa encontrar $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{si y sólo si} \qquad F'(x) = f(x).$$

Métodos de Integración

La integración sería una cuestión por completo simple si contáramos con una lista de fórmulas de integración, una *tabla de integrales* en la que pudiésemos localizar cualquier integral que necesitásemos calcular. Pero la diversidad de integrales que encontramos en la práctica es demasiado grande para que esté contenida en una tabla de integrales. Es más razonable imprimir o memorizar, una corta tabla de integración como la presentada anteriormente, que son las que aparecen con más frecuencia y aprender técnicas mediante las cuales se puede ampliar el rango de aplicación de esta tabla corta. Veremos tres de tales procedimientos: *integración por sustitución, integración por partes y la integración usando fracciones parciales*, pues son los que con más frecuencia se utilizan en problemas de tipo económico.

Integración por sustitución

La forma integral de la regla de la cadena puede considerarse como una técnica para simplificar una integral cambiando la variable de integración. Se empieza con una integral $\int g(u)\frac{du}{dx}dx$ en la cual la variable de integración es x, y se la transforma en una integral más simple, $\int g(u)du$, en la cual la variable de integración es u.

Integral Definida

El teorema fundamental del cálculo

Supongamos que la función *f* es continua en el intervalo cerrado [a,b]

Parte 1 Si la función F está definida en [a,b] como

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

Entonces F es una primitiva de *f*. Es decir, F´(x)=f(x) para x en (a,b).

Parte 2 Si G es cualquier primitiva de *f* en [a,b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

De esto se obtiene que

La integral definida

La integral definida de *f* desde *a* hasta *b* es la diferencia

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde F es una antiderivada de *f*. Es decir, la integral definida es el cambio neto producido en la antiderivada entre x = a y x = b.

Cálculo de Áreas

Área bajo una curva

Si f(x) es continua y f(x) ≥ 0 en un intervalo $a \leq x \leq b$, entonces se puede hablar de área "bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$". Existe una sorprendente conexión entre esta área y la integral definida, la cual puede resumirse como sigue.

El área bajo una curva

Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, la región R bajo la curva $y = f(x)$, entre x = a y x = b, tiene un área de: Área de R = $\int_a^b f(x)\,dx$

EJEMPLO

Hallar el área de la región limitada por la recta limitada por la recta $y = 2x$, el eje x y la recta vertical x = 2.

Solución:

La región en cuestión es el triángulo de la figura ,

Integración

Continuar

Integral Indefinida

Integral Definida

Cálculo de Áreas

Integral Definida

Integral Definida

EJEMPLO

En cierta fábrica, el costo marginal es $3(q-4)^2$ Bolívares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto aumentará el costo total de fabricación si el nivel de producción aumenta de 6 a 10 unidades?

Solución:

Sea c(q) el costo total de producción de q unidades. Entonces el costo marginal es de derivada $\frac{dc}{dq} = 3(q-4)^2$, y el incremento en el costo, si la producción aumenta de 6 a 10 unidades, es la integral definida.

$$c(10) - c(6) = \int_6^{10} 3(q-4)^2\,dq = (q-4)^3\Big|_6^{10}$$

$$= (10-4)^3 - (6-4)^3 = 216 - 8$$

$$= 208 \text{ Bs.}$$

Integral Indefinida

Suponemos que **cuando no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es 0;** esto es, r = 0 cuando q = 0. Ésta es nuestra condición inicial. Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior resulta:

$$0 = 2000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C.$$

Por tanto, C = 0 y

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3.$$

Para encontrar la función de demanda, usamos el hecho de que p = r/q y sustituimos el valor de r:

$$p = \frac{r}{q} = \frac{2000q - 10q^2 - q^3}{q}$$

$$p = 2000 - 10q - q^2.$$

EJEMPLO Encontrar el costo a partir del costo marginal

En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de Bs. 4000. Los costos fijos son costos como la renta y el seguro, que permanecen constantes durante todos los niveles de producción en un período dado. Si la función de costo marginal dc/dq es:

Integral Definida

Integral Definida

EJEMPLO

En cierta fábrica, el costo marginal es $3(q-4)^2$ Bolívares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto aumentará el costo total de fabricación si el nivel de producción aumenta de 6 a 10 unidades?

Solución:

Sea c(q) el costo total de producción de q unidades. Entonces el costo marginal es de derivada $\frac{dc}{dq} = 3(q-4)^2$, y el incremento en el costo, si la producción aumenta de 6 a 10 unidades, es la integral definida.

$$c(10) - c(6) = \int_6^{10} 3(q-4)^2\,dq = (q-4)^3\Big|_6^{10}$$

$$= (10-4)^3 - (6-4)^3 = 216 - 8$$

$$= 208 \text{ Bs.}$$

Cálculo de Áreas

Bajo ciertas hipótesis económicas, el total de consumidores que obtienen ganancias, se define como el área bajo la curva de demanda y por encima de la recta de ecuación y = p_0. Esta área E_c, fue llamada **excedente de consumidores** por el economista inglés Alfred Marshall (1842-1924) y se calcula como sigue:

E_c = Área ABCD = Área OEBDCAO – Área OEBA, es decir,

$$E_c = \int_0^{q_0} f(q)dq - q_0 p_0 = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]dq$$

EJEMPLO

Si la función demanda viene dada por

$$p = f(q) = 32 - 4q - q^2,$$

Calcular el excedente de consumidores, en el caso de que $x_0 = 3$

Solución:

Como $q_0 = 3$, entonces $p_0 = f(q_0)$ luego

$$p_0 = f(3) = 32 - 4\,3 - 3^2 = 11,$$

Cálculo de Áreas

Bajo ciertas hipótesis económicas, el total de productores que obtienen ganancias viene dado por el área encima de la curva de oferta $p = g(q)$ entre $q = 0$ y $q = q_0$ y por debajo de la recta de ecuación $p = p_0$ y se le conoce como **el excedente de productores,** y se calcula como sigue:

El valor de esta área es: E_c = Área OAEB – Área OAEDCO, es decir,

$$E_c = q_0 p_0 - \int_0^{q_0} g(q)\,dq = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq$$

EJEMPLO

Si la función oferta es la definida por $s = f(q) = (x + 2)^2$ y el precio es $p_0 = 25$, calcular el excedente de productores.

Solución:

Como $p_0 = 25$ entonces

$$g(q_0) = (q_0 + 2)^2 = 25$$

Por lo tanto $\quad q_0 + 2 = 5$

Ayuda

Se recomienda leer la siguiente información con el objeto de evitar contratiempos al momento de navegar a través de la obra.

La navegación del software es muy sencilla, en algunas pantallas se te dirá que debes hacer.

En el menú principal y submenús, al desplazar el puntero sobre algunas partes de la pantalla, el cursor se convertirá en una mano , esto te indicará que puedes hacer clic sobre el área donde aparezca dicha mano.

Presiona cualquier tecla para continuar.

Problemas Resueltos

Continuar

Ecuaciones

Funciones

Límites y Continuidad

Derivación

Integración

Evaluación

Las siguientes preguntas de repuesta múltiple, hay una sóla respuesta correcta. Selecciónela haciendo click o presionando la tecla que corresponda.

En un corral, entre gallinas y conejos hay 41 animales y 118 patas de animales. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en el corral?.

a) 21conejos y 20 gallinas

b) 23 conejos y 18 gallinas

c) 18 conejos y 23 gallinas

d) 15 conejos y 26 gallinas

Salir

Confirma la Salida del Programa

No

Si

Solución de Problemas Propuestos

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.1

1.-

Sea x el precio del pollo

X + 3 el precio de las gallina

20x la cantidad de pollos por el precio de cada pollo

20(x +3) la cantidad de gallinas por el precio de cada gallina

Entonces:

$20x + 20(x+3) = 460$

$20x + 20x = 460 - 60$

$40x = 400$

$x = \frac{400}{10} = 10$

El precio del pollo es de 10 Bs. y las gallinas de (10 + 3) = 13 Bs.

3.

Antonio x

Luis x +13

$x + x + 13 = 77$

$2x = 77 - 13$

$x = \frac{64}{2} = 32$

Antonio tiene 32 cromos y Luis tiene (32 + 13) = 45 cromos.

4.

Conejos = x

Gallinas = 41 – x

Patas de conejos = 4x

Patas de gallinas = 2(41 – x)

Total de patas = 118

$$4x + 2(41 - x) = 118$$

$$4x - 2x = 118 - 82$$

$$2x = 36$$

$$x = \frac{36}{2} = 18$$

Hay 18 conejos y (41 – 18) = 23 gallinas

5.

Longitud total de la columna: x

$\frac{1}{4}$ de su longitud : $\frac{1}{4}x$ $\qquad$ $\frac{5}{9}$ de su longitud: $\frac{5}{9}x$

Longitud total de la columna: $\frac{1}{4}x + \frac{5}{9}x + 7 = x$

Resolvemos la ecuación: $\frac{9x}{36} + \frac{20x}{36} + \frac{252}{36} = \frac{36x}{36}$

$$9x + 20x + 252 = 36$$

$$9x + 20x - 36x = -252$$

$$-7x = -252$$

$$x = \frac{-252}{-7} = 36$$

La longitud total de la columna es de 36 metros.

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.1

1.

Asumiendo que la relación entre la cantidad demanda q y el precio unitario p es lineal, podemos escribir:

$$q = a + bp$$

Tenemos que determinar los valores de las constantes “a” y “ b”. En efecto sabemos que q = 500 cuando p = 12,75; por lo tanto, sustituyendo:

$$500 = a + b(12,75)$$

Ahora como la demanda a cualquier nivel de precios, se incrementa en 10 unidades, cuando se reduce el precio en dos y media unidades, podemos establecer que si desde el punto (q,p) reducimos el precio en Bs. 2,50, esto es, nos situamos en el nivel p – 2,50, la cantidad demandada correspondiente será q + 10; es decir:

$$Q + 10 = a + b(p – 2,50):$$

Como q = a + bp, la ecuación anterior se reduce a:

$$10 = -2,50b$$

de donde

$$b =-4.$$

Y por tanto:

$$a = 500 – 12,75b = 500 – 12,75(-4) = 551.$$

Finalmente se tiene que:

$$Q = 551 – 4p.$$

3.

i. Sea p el precio en el punto de equilibrio para la situación planteada. Este valor se obtiene, al resolver para p, la ecuación S = P; es decir:

$$-2p + 10 = \frac{3p+2}{2}$$

cuya solución es p = 18/7; la cantidad de equilibrio es 34/7; y el punto de equilibrio es (34/7,18/7)

ii Sea p el precio de equilibrio para la situación planteada. El valor de p lo obtenemos mediante la resolución de la ecuación:

$$-2p + 10 = \frac{3p+8}{2}$$

cuya solución es p = 12/7; la cantidad de equilibrio es 46/7; y el punto de equilibrio es por lo tanto (46/7,12/7)

5.

Dado que el costo fijo, CF = 120000, la función de costo es de la forma:

$C(q) = 120000 + bq$

Además se sabe que la variación del costo es de 60000 Bs. por cada 5 unidades adicionales, de donde:

$$b = \frac{60000}{5} = 12000$$

por lo que:

$$\boxed{C(q) = 120000 + 12000q}$$

La función de beneficio B es:

$B = r - c = pq - 120000 + 12000q = (p - 12000)q - 120000$

De donde:

Dado que por cada unidad adicional q = 1, se genera un incremento en el beneficio de 5000 Bs.

$$P - 12000 = \frac{5000}{1} \Rightarrow p = 17000$$

Por lo tanto, las funciones de ingreso y beneficio resultan ser:

$$\boxed{r(q) = 17000q} \qquad \boxed{B(q) = 5000q - 120000}$$

7.

a) Sean r y c las funciones ingreso y costo respectivamente, y sea q el número de gabinetes que vende la mueblería.

Tenemos así que las funciones r y c están definidas como sigue:

$r(q) = 500q \quad ; \quad c(q) = 5000 + 200q$

b) Para obtener una ganancia de Bs. 16000, se debe tener que

$r(q) - c(t) = 16000,$

es decir $\quad 500q - (5000 + 200q) = 16000,$

o sea $\quad 500q - 5000 - 200q = 16000,$

$300q = 21000,$

luego $\quad q = \frac{21000}{300} = 70$

PROBLEMAS PROPUESTO 3.1

1.

a) x = 50%

f(50) = $\frac{10(50)}{150-50} = \frac{500}{100} = 5$

Alcanzar el 50% del objetivo de la campaña se llevará 5 semanas.

b)

$$\lim_{x\to 100} f(x) = \lim_{x\to 100} \frac{10x}{150-100} = \frac{10(100)}{150-100} = \frac{1000}{50} = 20$$

A medida que se acerca a cumplir el 100% de los objetivos de la campaña se acercan a cumplir 20 semanas.

2.

a) $\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ (indeterminación)

$$\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t-2} = \lim_{t\to 2} \frac{(t-2)(t+2)}{t-2} = \lim_{t\to 2}(t+2) = 2+2 = 4$$

A medida que la cantidad de materia prima se acerca a 2 kg se tiende a producir 4 unidades del bien.

b) P(t) = $\frac{t^2-4}{t-2} = t+2$

Para calcular la cantidad t para producir 10 unidades del bien, se resuelve la ecuación: 10 = t + 2

10 – 2 = t

8 = t

Para producir 10 unidades del bien se necesitan 8 kg de materia prima.

5.

S(p) = p^2 + Ap – 3

P(p) = Cp + 32

S(p) = 0 con p = 3

De donde

$$A = \frac{3-(3)^2}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Luego $S(p) = p^2 - 2p - 3$.

$P(p) = 0$ con $p = 8$

De donde

$$C = \frac{-32}{p} = \frac{-32}{8} = -4$$

Luego $P(p) = -4p + 32$.

a) Para calcular las unidades de ofrecerse y demandarse en el precio de equilibrio se obtienen al igualar la demanda y la ofera y hallar el precio:

$P^2 - 2p - 3 = -4p + 32$

$P^2 - 2p + 4p - 3 - 32 = 0$

$P^2 + 2p - 35 = 0$

Resolviendo la ecuación de Segundo grado, obtenemos

$P_1 = 5$ unidades y $p_2 = -7$ unidades

Como se trata se unidades de producto, esta cantidad no puede ser negativa, por lo que se deben producir a **5 Bolívares** y la cantidad de equilibrio la obtenemos al sustituir el precio de equilibrio en cualquiera de las funciones:

$S(5) = P(5) = -4(5) + 32$

$= -20 + 32$

$= 12.$

Deben ofrecerse y demandarse 12 unidades.

b) Se sustituye el precio = 6 en las funciones:

$S(6) = (6)^2 - 2(6) - 3$

$S(6) = 36 - 12 - 3$

$S(6) = 21$

P(6) = -4(6) + 32

P(6) = -24 + 32

P(6) = 8

S(6) – P(6) = 21 – 8 = 13

Con un precio de 6 Bs. la oferta excede a la demanda en 13 unidades.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.1

1.

a) c'(q) = 10	por lo que	c'(100) = 10
b) c'(q) = 0,6q + 2	por lo que	c'(3) = 3,8
c) c'(q) = $0{,}09q^2 - 1{,}2q + 4{,}5$	por lo que	c'(10) = 1,5
		c'(20) = 16,5
		c'(100) = 784,5

3.

a) r'(q) = $15 - \frac{1}{15}q$	por lo que	r'(5) = 14,67
		r'(15) = 14
		r'(150) = 5
b) r'(q) = $250 + 90q - 3q^2$	por lo que	r'(5) = 625
		r'(10) = 850
		r'(25) = 625

5.

a) La derivada de la función de costo es:

$$c'(q) = \begin{cases} 10 & , \quad 0 \le q < 30 \\ 20 & , \quad 30 < q \le 200 \end{cases}$$

En este caso la derivada no se anula en ningún punto; además, no existe en q = 30 ya que las derivadas laterales en dicho punto no coinciden.

El conjunto de los puntos crítico de la función de costo es {0,30,200}. Como:

$c(0) = 80 + 10(0) = 80$

$c(30) = -220 + 20(30) = 380$

$c(200) = -220 + 20(200) = 3780.$

Se deduce que la función de costo alcanza un valor mínimo de 80 en q = 0 y un valor máximo de 3780 en q = 200.

b) La función de ingreso r(q) y su derivada r'(q) son:

$r(q) = pq = (200 - q)q = 200q - q^2 \quad , \quad 0 \leq q \leq 200$

$r'(q) = 200 - 2q \quad , \quad 0 \leq q \leq 200$

La derivada r'(q) existe para todo valor de q en el intervalo [0,200] y se anula en q = 100; por lo tanto, el conjunto de los puntos críticos de la función de ingreso es {0,100,200}. En virtud de que:

$r(0) = 200(0) - (0)^2 = 0$

$r(100) = 200(100) - (100)^2 = 10000$

$r(200) = 200(200= - (200)^2 = 0$

Concluimos que el ingreso mínimo es 0 y ocurre en q = 0 y q = 200, mientras que el ingreso máximo es 10000 y ocurre en q = 100.

c) La función de beneficio es:

$$B(q) = r(q) - c(q) = \begin{cases} (200q - q^2) - (80 + 10q) & , \quad 0 \leq q < 30 \\ (200q - q^2) - (-220 + 20q) & , \quad 30 \leq q \leq 200 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -q^2 + 190q - 80 & , \quad 0 \leq q < 30 \\ -q^2 + 180q + 220 & , \quad 30 < q \leq 200 \end{cases}$$

La derivada B'(q) es por lo tanto:

$$B'(q) = \begin{matrix} -2q + 190 & , & 0 \leq q < 30 \\ -2q + 180 & , & 30 < q \leq 200 \end{matrix}$$

B'(30) no existe ya que $B'_-(30) = 130 \neq B'_+(30) = 120$ luego q = 30 es un punto crítico.

Resolvamos ahora la ecuación B'(q) = 0.

Si $0 \le q < 30$, entonces:

B'(q) = 0 $\Leftrightarrow$ - 2q + 190 = 0 $\Leftrightarrow$ q = 95, valor que se descarta por no pertenecer al intervalo [0,30).

Si $30 < q \le 200$, entonces:

B'(q) = 0 $\Leftrightarrow$ -2q + 180 = 0 $\Leftrightarrow$ q = 90, valor aceptado ya que 90 está en el intervalo [0,200].

El conjunto de los puntos críticos de la función de beneficio es {0,30,90,200}y la evaluación de dicha función en tales puntos arroja:

$B(0) = (0)^2 + 190(0) – 80 = -80$

$B(30) = (-30)^2 + 180(30) + 220 = 4720$

$B(90) = (-90)^2 + 180(90) + 220 = 8320$

$B(200) = (-200)^2 + 180(200) + 220 = -3780$

El beneficio máximo es 8320 y ocurre cuando q = 90; el beneficio mínimo es –3780 y ocurre cuando q = 200.

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.1

1.

Sea P(x) la población dentro de x meses. Entonces, la razón de cambio de la población con respecto al tiempo es $\frac{dP}{dx} = 2 + 6\sqrt{x}$, y la cantidad en la que crecerá la población durante los próximos 4 años es la integral definida:

$$P(4) – P(0) = \int_0^4 (2 + 6\sqrt{x})dx = (2x + 4x^{\frac{3}{2}} + C)\,|_0^4$$

$$= [2(4) + 4(4)^{\frac{3}{2}} + C] - [2(0) + 4(0)^{\frac{3}{2}} + C]$$

$$= (40 + C) – (0 + C) = 40 \text{ personas.}$$

3.

Tenemos que r(q) = $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx,$ ahora recordando que

$\left(\sqrt{x^2+9}\right) = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, se deduce que $\sqrt{x^2+9}$ + C es primitiva del integrando, luego:

r(q) = $\sqrt{x^2+9}$ + C,

por otra parte, se sabe que r(0) = 0 y así 0 = $\sqrt{9}+C$ y así C = -3 (tomando $\sqrt{9}$ = +3)

Luego:

r(q) = $\sqrt{x^2+9}$ -. Por lo tanto r(100) = $\sqrt{10009}-3$

r(100) $\approx 100-3=97$

r(100) $\approx$ 97000 bolívares.

5.

Tenemos la gráfica siguiente:

$q_o = 5$

Sea p = f(q), entonces

$p = 85 - 4q - q^2$

$= 85 - 4 + 4 - 4q - q^2$

$= -(q+2)^2 + 89$ y así

$(q + 2)^2 = -(p - 89)$

$p_o = 85 - 20 - 25 = 40.$

$(q_o,p_o) = (5,40)$

Luego

$$E_c = \int_0^5 (85 - 4q - q^2 - 40)dq = \int_0^5 (45 - 4q - q^2)dx = \left[45q - 2q - \frac{q^3}{3} \right]_0^5$$

$$= 225 - 50 - \frac{125}{3} = 175 - \frac{125}{3} = \frac{525 - 125}{3} = \frac{400}{3}$$

$$E_c = \frac{400}{3}$$

TABLA

DERIVADAS E INTEGRALES INDEFINIDAS

En la siguiente tabla, las letras u y v representan cualquier función de x; a y m son constantes.
Debe sumarse una constante de integración arbitraria a cada una de las integrales.

DERIVADAS	INTEGRALES INDEFINIDAS	DERIVADAS	INTEGRALES INDEFINIDAS
1. $\frac{dx}{dx}=1$	1. $\int dx = x$	9. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	9. $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$
2. $\frac{d}{dx}(au)=a\frac{du}{dx}$	2. $\int au\, dx = a\int u\, dx$	10. $\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$	10. $\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln\lvert\sec x\rvert$
3. $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$	3. $\int (u+v)dx = \int u\, dx + \int v\, dx$	11. $\frac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$	11. $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \ln\lvert\operatorname{sen} x\rvert$
4. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$	4. $\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\quad (m\neq -1)$	12. $\frac{d}{dx}\sec x = \operatorname{tg} x \sec x$	12. $\int \sec x\, dx = \ln\lvert\sec x + \operatorname{tg} x\rvert$
5. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$	5. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$	13. $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x$	13. $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln\lvert\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x\rvert$
6. $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$	6. $\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx$	14. $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$	14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$
7. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	7. $\int e^x\, dx = e^x$	15. $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x$
8. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	8. $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$	16. $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x$

Tabla de Microsoft

BIBLIOGRAFÍA

- Resolución No. 1 del Ministerio de Educación, (Enero 1986).
- Ley Orgánica de Educación (1980).
- MEDINA RIVILL, Antonio "Educación y Futuro" Monografías para la reforma.
- U.N.A (1989) "Psicología del Aprendizaje", Caracas – Venezuela. Volúmenes I y II.
- SÁNCHEZ HIDALGO, Efraín. (1969) " Psicología Educativa" Editorial Universitaria. Puerto Rico. México.
- PARRA, Cecilia e Irma Gélvez (1995) "Didáctica de las Matemáticas". Aportes y Reflexiones. Editorial Paídos, Educador. Buenos Aires – Barcelona.
- CASTELLANOS, Emma (1970) "Didáctica de la Matemática", Editorial Trillas.
- LARROYO, Francisco (1967) "Historia General de la Pedagogía".
- MONTESORI, María (1979). "La Educación para el desarrollo humano". Comprendiendo a Montessori. Editorial Diana. México.
- CISSELL, Robert y Helen Cissell (1978) "Matemáticas Financieras". Editorial Continental. Mexico.
- VILLALOBOS, José Luis (1993) "Matemáticas Financieras". Editorial Iberoamericana .
- JAGDISH C. Arya y Robin W. Lardner. (1992) " Matemáticas Aplicadas a la Administración y Economía".
- LISTA BLANCO, Jesús y Robert Rosenberg. (1958) "Matemáticas Mercantiles"
- U.N.A (1998) "Matemática I y II" Caracas – Venezuela.
- U.N.A (1996) "Matemática III" Caracas – Venezuela.

- HOFFMANN, Laurence D. y BRADLEY Gerald L. (1998) “CALCULO para Administración y Ciencias Sociales”. Editorial Mc Graw Hill. Colombia
- ERNEST F., Haeussler Jr. y Paul Richard S. “MATEMATICAS para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la vida. Editorial Prentice may.
- EDWARDS, C. H. y David E. Penney (1996) “Cálculo con Geometría Analítica” Editorial Prentice may. México.