

# HACIA UNA TEORÍA DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

**Juan D. GODINO**

En: A. Gutierrez (Ed.), *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática*. (pp. 105-148) Madrid: Síntesis, 1991

*"Nada hay más práctico que una buena teoría" (Anónimo)*

## ÍNDICE:

### 1. INTRODUCCIÓN

### 2. EPISTEMOLOGÍA Y DIDÁCTICA

2.1. Teorías científica y sus tipos

2.2. Corrientes epistemológicas

2.3. La Didáctica de la Matemática como disciplina científica

### 3. PRINCIPALES LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

3.1. El programa de investigación del grupo TME

3.2. Enfoque psicológico de la Educación Matemática

3.3. Hacia una concepción matemática y autónoma de la Didáctica.

3.4. Otras teorías relevantes

### 4. LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO SABER CIENTÍFICO, TECNOLÓGICO Y TÉCNICO

## BIBLIOGRAFÍA

## 1. INTRODUCCIÓN

La teoría del conocimiento es la parte de la filosofía que estudia la naturaleza, origen y valor del conocimiento. Se usa también la denominación de epistemología para esta disciplina, si bien algunos autores como Bunge (1985a) identifican la epistemología con la filosofía de la ciencia: "rama de la filosofía que estudia la investigación científica y su producto, el conocimiento científico".

El objetivo de este capítulo es analizar el estado actual, desde el punto de vista epistemológico, de la Didáctica de la Matemática, tratando de situarla en el contexto de las disciplinas científicas en general y de las ciencias de la educación en particular para tratar de dar una respuesta a preguntas como las siguientes: ¿Existen teorías específicas acerca de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, o son apropiadas y suficientes las teorías más generales de tipo psicopedagógico?; ¿los conocimientos didácticos son de naturaleza científica, tecnológica o técnica?. Se trata, pues, de una reflexión sobre el campo de la Didáctica de la Matemática en la línea sugerida por Kilpatrick (1985).

### *Componentes y relaciones de la Didáctica de la Matemática con otras disciplinas*

Interesa, en primer lugar, realizar una clarificación terminológica. Si bien el término educación es más amplio que didáctica y, por tanto, se puede distinguir entre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática, sin embargo, en el mundo anglosajón se emplea la expresión "Mathematics Education" para referirse al área de conocimiento que en Francia, Alemania, España, etc. se denomina Didáctica de la Matemática. En este trabajo tomaremos ambas denominaciones como sinónimas. También, las identifica Steiner (1985) para quien la Educación Matemática admite, además, una interpretación global dialéctica como disciplina científica y como sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica.

Steiner (1990) representa mediante el diagrama de la Figura 1 la disciplina Educación Matemática (EM) que está relacionada, formando parte de él, con otro sistema complejo social que llamaremos Sistema de Enseñanza de la Matemática (SEM) - denominado por Steiner "Educación Matemática y Enseñanza" -, representado en el diagrama por el círculo de trazo más grueso exterior a la EM. En dicho sistema se identifican subsistemas componentes como:

- La propia clase de matemáticas (CM)
- La formación de profesores (FP)
- Desarrollo del currículo (DC)
- La propia clase de matemáticas (CM)
- La propia Educación Matemática (EM), como una institución que forma parte del SEM.

...

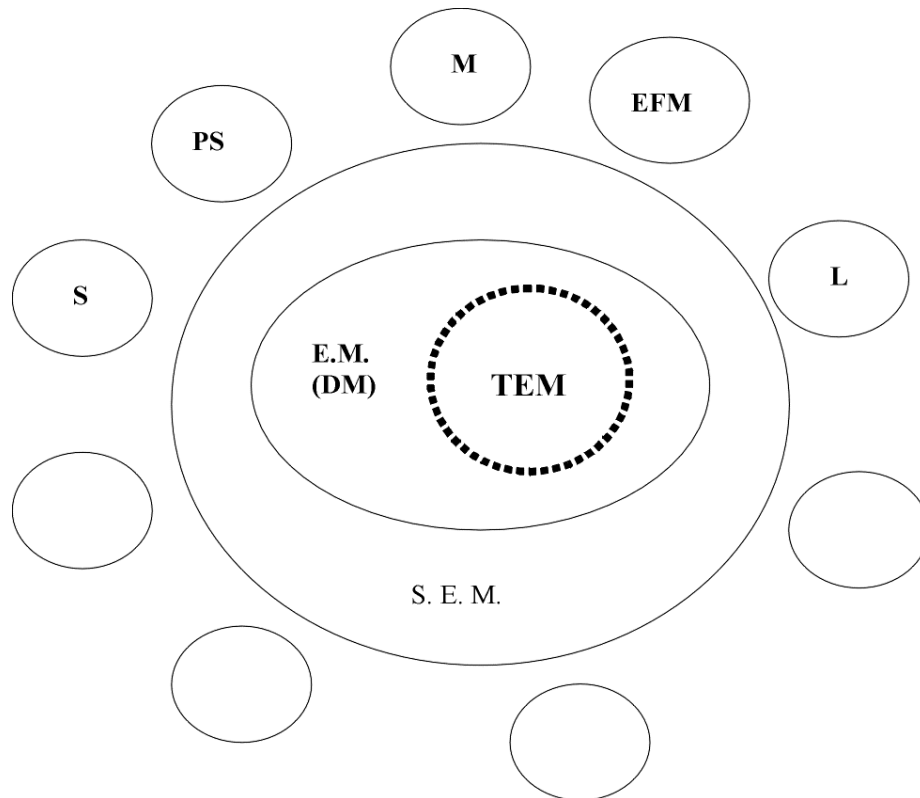
La figura también representa las ciencias referenciales para la Educación Matemática tales como:

- Matemáticas (M)
- Epistemología y filosofía de las matemáticas (EFM) - Historia de las matemáticas (HM)
- Psicología (PS)
- Sociología (SO)
- Pedagogía (PE), etc.

En una nueva corona exterior Steiner sitúa todo el sistema social relacionado con la comunicación de las matemáticas, en el que identifica nuevas áreas de interés para la Educación Matemática, como la problemática del "nuevo aprendizaje en sociedad" (NAS) inducido por el uso de ordenadores como medio de enseñanza de ideas y destrezas matemáticas fuera del contexto escolar. También sitúa en esta esfera las cuestiones derivadas del estudio de las interrelaciones

entre la Educación Matemática y la Educación en Ciencias Experimentales (ECE).

La actividad de teorización (TEM) es vista por Steiner como un componente de la Educación Matemática, y por ende del sistema más amplio que hemos denominado SEM que constituye el sistema de enseñanza de las matemáticas. La posición de TEM debería situarse en un plano exterior ya que debe contemplar y analizar en su totalidad el rico sistema global.

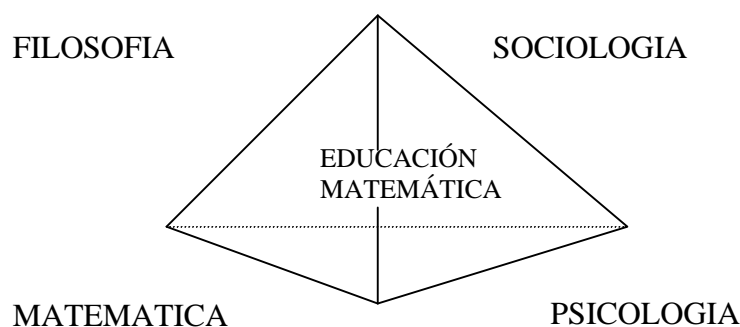


S.E.M: Sistema de enseñanza de las matemáticas (Formación de profesores, desarrollo curricular; materiales didácticos; evaluación, etc.)  
 E.M.: Educación matemática (o Didáctica de la Matemática)  
 TEM.: Teoría de la Educación Matemática  
 M: Matemáticas  
 EFM: Epistemología y Filosofía de las matemáticas  
 PS: Psicología  
 L: Lingüística  
 Etc.

**Figura 1: Relaciones de la Didáctica de la Matemática con otras disciplinas y sistemas (Steiner,1990)**

Otro modelo de las relaciones de la Educación Matemática con otras disciplinas es propuesto por Higginson (1980), quien considera a la matemática, psicología, sociología y filosofía como las cuatro disciplinas fundacionales de ésta. Visualiza la Educación Matemática en

términos de las interacciones entre los distintos elementos del tetraedro cuyas caras son dichas cuatro disciplinas (Figura 2).



**Figura 2: Modelo tetraédrico de Higginson para la Educación Matemática**

Estas distintas dimensiones de la Educación Matemática asumen las preguntas básicas que se plantean en nuestro campo:

- qué enseñar (matemáticas)
- por qué (filosofía)
- a quién y donde (sociología)
- cuando y cómo (psicología)

En el trabajo citado Higginson describe, asimismo, las aplicaciones del modelo para clarificar aspectos tan fundamentales como:

- la comprensión de posturas tradicionales sobre la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas;
- la comprensión de las causas que han producido los cambios curriculares en el pasado y la previsión de los cambios futuros;
- el cambio de concepciones sobre la investigación y sobre la preparación de profesores.

#### *Interés de la teorización en Didáctica*

En segundo lugar, consideramos necesario adelantar unas palabras que predispongan al lector a favor de los planteamientos teóricos en un área de conocimiento de la que se espera que aporte con urgencia soluciones prácticas a los problemas cotidianos del profesor de matemáticas. La necesidad de construir teorías es evidente, ya que constituyen una guía para el planteamiento de problemas de investigación y para interpretar los resultados de las mismas (Wenzelburger, 1990). Un marco teórico permite sistematizar los conocimientos dentro de una disciplina, lo que constituye un primer paso para conseguir una visión clara de la unidad que pueda existir en nuestras percepciones. La teorización es un requisito para que un área de conocimiento alcance la categoría de científica y pueda desempeñar su papel explicativo y predictivo de fenómenos; puede decirse que la investigación científica significativa está siempre guiada por una teoría, aunque a veces lo sea de un modo implícito. El interés y necesidad de que los profesores cuenten con las teorías firmemente basadas en datos empíricos es, asimismo, resaltado por A. Orton (1988).

Como afirma Mosterín (1987, p. 146), "gracias a las teorías introducimos orden conceptual en el caos de un mundo confuso e informe, reducimos el cambio a fórmula, suministramos a la historia (que sin teoría correría el riesgo de perderse en la maraña de los datos) instrumentos de extrapolación y explicación y, en definitiva, entendemos y dominamos el mundo aunque sea con un entendimiento y un dominio siempre inseguros y problemáticos". Este mismo autor nos proporciona una sugestiva metáfora que nos ayuda a no atribuir a las teorías una verdadera realidad independiente de nosotros mismos: "Somos como las arañas, y las teorías son como las

redes o telas de araña con que tratamos de captar y capturar el mundo. No hay que confundir estas redes o telas de araña con el mundo real, pero, sin ellas ¡cuanto más alejados estaríamos de poder captarlo y en último término, gozarlo!

La existencia de un Grupo de Trabajo con el nombre de "Teoría de la Educación Matemática", constituido en el V Congreso Internacional de Educación Matemática celebrado en Adelaida (Australia) en 1984, podría indicar que en este campo la teoría tiene ya una existencia clara y estabilizada. No es este el caso; a lo sumo podemos afirmar que existe un deseo y una necesidad, en una comunidad de investigadores, de que tal teoría sea posible. Lo que en la actualidad podemos encontrar, como es lógico en cualquier disciplina naciente, son diversas teorías parciales, inconexas, y más o menos dependientes de otras teorías generales de carácter psico-pedagógico; una parte importante de este capítulo (la sección 3) se dedica a la presentación de las corrientes de investigación más relevantes, materializadas en grupos existentes en la actualidad con una cierta cohesión en Didáctica de la Matemática.

La valoración del carácter científico de un campo de conocimiento no es una cuestión sencilla ya que existen distintas corrientes epistemológicas en teoría de la ciencia. Por este motivo, hemos creído necesario incluir una sección en la que hacemos una breve exposición de la noción de teoría y de sus tipos según su grado de generalidad. También presentamos unos conceptos básicos de tres concepciones epistemológicas que nos parecen relevantes para situar nuestro análisis de la Didáctica de la Matemática: las correspondientes a Kuhn, Lakatos y Bunge. El problema de la elección racional entre distintas teorías sobre unos mismos problemas básicos precisa de criterios epistemológicos, como se pone de manifiesto en el trabajo de R.E. Orton (1988). Este autor utiliza las ideas de Kuhn y Lakatos para comprender las diferencias entre dos teorías psicológicas - constructivismo y procesamiento de la información - en términos de su carácter más o menos progresivo y para estudiar la "inconmensurabilidad" de sus respectivas hipótesis.

## 2. EPISTEMOLOGÍA Y DIDÁCTICA

### 2.1. TEORÍAS CIENTÍFICAS Y SUS TIPOS

Con frecuencia el término teoría se aplica con distintos sentidos y grados de generalidad. El filósofo de la ciencia E. Nagel diferencia cuatro sentidos para el término teoría. En su significado más general, una teoría es un sistema de enunciados, frecuentemente universales y relativos a distintos aspectos de fenómenos complejos, capaces de explicar algunas regularidades empíricamente establecidas a partir de sucesos observados y, en muchos casos, de predecir con distintos grados de precisión cierta clase de ocurrencias individuales. Ejemplos de esta clase de teorías serían la mecánica de Newton, la teoría de la evolución, etc.

Un segundo sentido de teoría se refiere a "una ley o generalización que afirma alguna relación de dependencia entre variables" que puede adoptar una forma estrictamente universal o tener un alcance estadístico. Como ejemplo Nagel cita la ley de Boyle.

Una tercera acepción no se refiere a un conjunto de enunciados sistemáticamente integrados ni a una única generalización estrictamente formada, sino mas bien a la identificación de "una clase de factores o variables que por distintas razones se suponen constituyen los determinantes principales de los fenómenos que se investigan en una disciplina determinada. La teoría económica de Keynes se puede citar como ejemplo.

El cuarto sentido atribuido por Nagel a una teoría se refiere a cualquier análisis más o menos sistemático de un conjunto de conceptos relacionados. Este es el caso de la teoría del conocimiento en filosofía.

Burkhardt (1988) hace una distinción interesante entre las teorías que denomina fenomenológicas y teorías fundamentales. Las teorías fenomenológicas son las que surgen directamente de los datos, constituyendo un modelo descriptivo de una porción particular de fenómenos. Se caracterizan por el rango limitado de objetos a los que se aplican, pero son

detalladas y específicas en sus descripciones y predicciones, resultando con frecuencia de utilidad en el diseño del currículo y en la comprensión de los fenómenos que ocurren por su proximidad a la realidad.

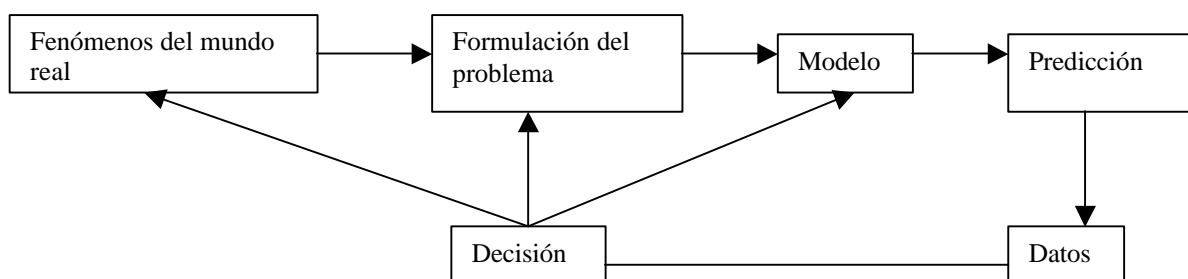
Una teoría de tipo fundamental es una estructura conceptual de variables y relaciones entre ellas que comprende los aspectos esenciales de un conjunto de fenómenos. Tiene un carácter descriptivo y productivo y es completa dentro de un dominio bien delimitado. Se trata, por tanto, de modelos analíticos que tratan de explicar un rango amplio de fenómenos en términos de unos pocos conceptos básicos. Esta definición se ajusta a ciertos casos típicos de los campos de la física y biología, como la mecánica de Newton, la teoría genética de Mendel, etc. y coincide con el sentido más general atribuido por Nagel.

Para el caso de las ciencias humanas, Burkhardt se pregunta acerca de la naturaleza y alcance de teorías como el conductismo, constructivismo y teorías del desarrollo. Considera que aunque proporcionan estructuras para comprender los fenómenos, no son completas en un dominio limitado, y por tanto, deben ser usadas a sabiendas de que se presentan sin mecanismos establecidos para su integración fiable en un modelo predictivo. Las considera descripciones peligrosamente simples de sistemas complejos. En términos de las ciencias físicas no pueden considerarse como teorías ni incluso como modelos, sino como descripción de efectos - aspectos válidos de un sistema de conducta que es preciso tener en cuenta, pero que son cada una de ellas, en sí mismas, inadecuadas y engañosas.

Termina Burkhardt su reflexión sobre las teorías con una pregunta crucial para nuestro problema: ¿Existe alguna expectativa de una teoría fundamental de la Educación Matemática?. A pesar de que ve actualmente esta posibilidad como remota y no se considera capacitado para analizar los intentos actuales, personalmente intuimos el inicio de un camino en este sentido en los esfuerzos teóricos que se están llevando a cabo por la escuela francesa de Didáctica de la Matemática que expondremos en la Sección 2.3.

#### *Componentes básicos en el proceso de construcción de teorías*

La Figura 3 resume el proceso de construcción del conocimiento científico según Romberg (1988).



**Figura 3: Componentes en la construcción de teorías según Romberg**

La raíz del proceso de teorización está en los fenómenos del mundo real que interesa estudiar, en nuestro caso, los relativos a la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares y sus interdependencias y relaciones con el sistema social. La formulación del problema implica la identificación de variables claves, usando un vocabulario y un conjunto de enunciados causales sobre el fenómeno. Estos enunciados se organizan con frecuencia en términos de modelos causales. Una predicción es un enunciado sobre los datos que se espera observar bajo las hipótesis de que el modelo sea verdadero. Estos datos pueden provenir de diseños experimentales en que se garantice el control de las variables o de observaciones naturalistas, y serán comparados con los resultados o hipótesis previstas. La naturaleza esencialmente estocástica de los fenómenos

educativos obligará al empleo de métodos estadísticos para poder adoptar una decisión acerca de la concordancia de los datos con el modelo.

El esquema de Romberg corresponde básicamente al enfoque clásico o confirmatorio de la investigación, que ha estado generalmente asociado con los métodos cuantitativos. A veces la complejidad del problema hace necesario, una vez formulado éste y previamente a la construcción de un modelo, una toma de datos, que se analizan desde todas las perspectivas posibles en un enfoque exploratorio, buscando teorías que los expliquen. Generalmente este enfoque se emplea en la investigación cualitativa. Remitimos al lector al capítulo de este libro dedicado a los métodos de investigación para una descripción más detallada de los tipos y métodos de investigación.

## 2.2. CORRIENTES EPISTEMOLÓGICAS

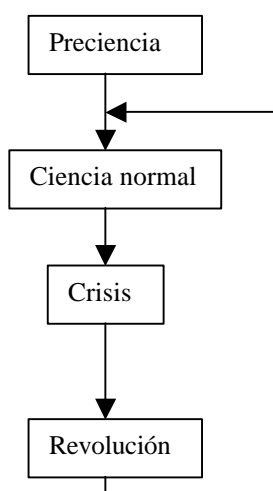
El análisis del objeto y métodos de la Didáctica de la Matemática y su posible demarcación de otros campos de conocimiento (didáctica general, pedagogía, psicología, ...) es un tema propio de la epistemología. Como se ha indicado, esta rama de la filosofía estudia, precisamente, la constitución de los conocimientos científicos que se consideran válidos, abarcando los problemas de demarcación de la ciencia y el estudio del desarrollo del conocimiento científico.

Expondremos, brevemente, algunos aspectos de las concepciones epistemológicas de Kuhn, Lakatos, y Bunge que pueden servirnos de guía en nuestro esbozo de estudio del significado de la Didáctica de la Matemática. El lector interesado en estas cuestiones puede encontrar una síntesis asequible y más completa de las corrientes epistemológicas en Chalmers (1986), o en Benedito (1987) donde se aplica al estudio del estatuto epistemológico de la didáctica general.

### *Los paradigmas según Kuhn*

Un rasgo característico de la teoría epistemológica defendida por Kuhn (1975) es la importancia que atribuye al carácter revolucionario del progreso científico, en el que una revolución supone el abandono de una estructura teórica y su reemplazo por otra, incompatible con la anterior.

La imagen que tiene Kuhn de cómo progresa una ciencia se puede resumir en el esquema de la Figura 4:



**Figura 4: Progreso de la ciencia (Kuhn)**

La noción que guía la aportación de Kuhn a la Teoría de la Ciencia es la de paradigma. Si

bien en su obra principal "La estructura de las revoluciones científicas", incorpora hasta 22 usos distintos del término paradigma, la concepción predominante es el conjunto o red de hipótesis teóricas generales, leyes y técnicas para su aplicación, compartidas por los miembros de una comunidad científica, implicando una cierta coincidencia en sus juicios profesionales.

La formación de una ciencia se estructura finalmente cuando una comunidad científica se adhiere a un solo paradigma, pero va precedida por una fase de actividad relativamente desorganizada de preciencia inmadura en la que falta un acuerdo en aspectos fundamentales. Según Kuhn, la preciencia se caracteriza por el total desacuerdo y el constante debate de lo fundamental; habrá casi tantas teorías como investigadores haya en el campo y cada teórico se verá obligado a comenzar de nuevo y a justificar su propio enfoque.

Otro rasgo de la concepción epistemológica de Kuhn es el carácter de inconmensurables que atribuye a los paradigmas. Los científicos que comparten un cierto paradigma no pueden discutir las ideas de otro distinto de un modo imparcial y racional. Aunque una cierta teoría precursora pueda ser considerada como un caso especial de otra posterior, debe ser transformada de algún modo para poder ser comparada. Por ejemplo, los conceptos de "masa" y "energía" de la teoría de Newton deben cambiar su significado para que la teoría pueda ser comparada con la de Einstein.

#### *Programas de investigación científica (Lakatos)*

Lakatos (1975) considera que lo que debe ser valorado como científico no es una teoría aislada sino una sucesión de teorías enlazadas con un criterio de continuidad en programas de investigación. Estos programas contendrán reglas metodológicas acerca de las vías de investigación que deben ser evitadas (heurística negativa) y los caminos que deben seguirse (heurística positiva). Estas heurísticas proporcionan una definición implícita del marco conceptual del programa correspondiente, el cual incluirá:

- un núcleo firme o "centro firme" del programa;
- un cinturón protector de hipótesis auxiliares;
- la heurística, o conjunto de procedimientos aplicables a la solución de los problemas.

La diferenciación entre programas de investigación competitivos se hará teniendo en cuenta su potencial respectivo para descubrir nuevos fenómenos y el poder explicativo que proporcionen. Un nuevo programa de investigación supone un cambio progresivo de problemática, mientras que la degeneración de un programa viene dada por la proliferación de hechos contradictorios.

Lakatos considera que los programas de investigación pueden estar basados en hipótesis "inconmensurables", pero estas tendrán distintos "frutos" en cuanto a resultados científicos, y, en consecuencia, se pueden comparar sobre la base de su progreso relativo. Una teoría supondrá un progreso si cumple tres requisitos:

- la nueva teoría hace predicciones que no hacía su predecesora;
- algunas de estas nuevas predicciones se han podido corroborar;
- la nueva teoría puede explicar los hechos que no podía explicar su predecesora.

Aunque el "núcleo firme de una teoría" - por ejemplo, el desarrollo tiene lugar por etapas, en la teoría de Piaget - no se pueda con frecuencia contrastar, sin embargo, es posible determinar (al menos en principio) si un programa cumple los tres criterios de progresión, lo que permite evaluar la racionalidad del cambio científico.

Para Lakatos el estado de ciencia madura implica la existencia de un programa de investigación y el de ciencia inmadura una secuencia de ensayos y errores. El estado de ciencia normal (en el sentido de Kuhn) estaría caracterizado por la existencia de un programa de investigación que ha conseguido el monopolio. La historia de la ciencia debe ser la de los programas de investigación o paradigmas que compiten entre sí, y no debe convertirse en una sucesión de períodos de ciencia normal; cuanto antes comience la competencia, mejor para el progreso científico. El pluralismo teórico es preferible al monismo, siendo bueno que algunos

investigadores se aferren a un programa de investigación hasta que alcance su punto de saturación.

### *Campos y líneas de investigación en la epistemología de Bunge*

Para Bunge (1985b) la ciencia es un cuerpo creciente de conocimientos que se caracteriza como conocimiento racional, sistemático, exacto, verificable y por consiguiente falible. El conjunto de ideas establecidas provisionalmente forman el conocimiento científico. La investigación científica se puede realizar individualmente y sobre todo en el seno de comunidades científicas.

Para dicho autor un campo de conocimiento puede caracterizarse como un sector de la actividad humana dirigido a obtener, difundir o utilizar conocimientos de alguna clase. Las características que definen los campos de conocimiento las simboliza del siguiente modo:

$$C = \{C, S, D, G, F, E, P, A, O, M\}$$

cuyo significado es el siguiente:

C : comunidad de científicos que cultivan C;

S : sociedad;

D : dominio o universo del discurso (los objetos de estudio);

G : concepción general o filosofía inherente;

F : fondo formal (conjunto de herramientas lógicas o matemáticas utilizables);

E : fondo específico o conjunto de supuestos que toma de otros campos;

P : problemática, o colección de problemas abordables;

A : fondo específico de conocimientos acumulados;

O : objetivos o metas;

M : metódica o conjunto de métodos utilizables.

Distingue entre campos de creencias y de investigación. En los primeros (religiones, ideologías políticas, ...) el cambio en las ideas se produce sólo como consecuencia de presuntas revelaciones, de controversias o de presiones sociales. Los campos de investigación cambian incesantemente de resultados de la propia investigación, por el flujo permanente de los distintos proyectos de investigación.

Las tres primeras componentes de C, comunidad de investigadores, sociedad que los apoya y dominio de objetos que estudian constituyen el marco material de un campo de investigación, mientras que las restantes constituyen el marco conceptual.

Todo campo de investigación puede analizarse como un conjunto de líneas de investigación en proceso de diseño o de realización, en las cuales estará presente cada componente de C. Usando esta formalización se puede hablar de líneas de investigación complementarias, en competencia, originales, revolucionarias o contrarrevolucionarias.

Es de interés también para analizar el estatuto epistemológico de la Didáctica de la Matemática el estudio de las nociones de técnica y tecnología.

Como afirma Benedito (1987) la acción técnica es un modo de actuar empírico, artesanal y precientífico; es una combinación de experiencia (más o menos rutinaria), de tradición y de intuición. La tecnología es la técnica que emplea o se basa en el conocimiento científico. Bunge (1985b, p. 33) propone la siguiente definición de tecnología:

"...el vastísimo campo de la investigación, diseño y planificación que utiliza conocimientos científicos con el fin de controlar cosas o procesos naturales, de diseñar artefactos o procesos o de concebir operaciones de manera racional. En este sentido amplio, la medicina y la agronomía son biotecnologías, al par que las ciencias de la educación y de la administración son sociotecnologías".

### *A modo de síntesis: Reflexiones sobre la Didáctica de la Matemática*

De la exposición que hemos hecho sobre corrientes epistemológicas se desprende que las teorías científicas no pueden ser realizaciones individuales ni hechos aislados; debe haber una comunidad de personas entre las que exista un acuerdo, al menos implícito, sobre los problemas

significativos de investigación y los procedimientos aceptables de plantearlos y resolverlos. Es preciso compaginar la autonomía personal en la elaboración de ideas y conceptos nuevos con la necesidad de que estas ideas sean contrastadas y compartidas. Las teorías son pues frutos o consecuencias de las líneas de investigación sostenidas por una comunidad mas o menos grande de especialistas en un campo determinado.

Romberg (1988), de acuerdo con los requisitos exigidos por Kuhn para que un campo de investigación se encuentre en el camino hacia la "ciencia normal", afirma que es necesario que se den las siguientes circunstancias:

(1) Debe existir un grupo de investigadores con intereses comunes acerca de las interrelaciones existente entre distintos aspectos de un fenómeno complejo del mundo real. Por tanto, debe haber una cuestión central (o dominio) que guíe el trabajo de dicha comunidad particular de especialistas.

(2) Las explicaciones dadas por la teoría deben ser enunciados sobre la causalidad, de modo que sea posible realizar predicciones acerca del fenómeno.

(3) Los enunciados se hacen según un vocabulario y una sintaxis sobre la que el grupo está de acuerdo. Existen, además, unos procedimientos aceptados por el grupo de investigadores para probar los enunciados, esto es, para aceptar o rechazar las proposiciones. Los conceptos, proposiciones y teorías de las ciencias se distinguen de los constructos no científicos en que satisfacen los criterios marcados por las reglas del método científico y del razonamiento lógico y están aceptados por las comunidades científicas.

Nos parece muy sugestiva la metáfora usada por Romberg según la cual la construcción de una teoría requiere la combinación de distintos "ingredientes", como si se tratara de una receta para elaborar un pastel: cada elemento puede ser identificado independientemente, pero son necesarias unas condiciones adecuadas y una correcta combinación. Para el caso de la Teoría de la Educación Matemática los "ingredientes" que deben integrarse son: "Un grupo de investigadores interesados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares, que plantean predicciones de tipo causal, enunciados en un vocabulario compartido y que desean probar estas predicciones según procedimientos acordados" (p. 108)

Desde nuestro punto de vista, la exigencia de que exista una comunidad de especialistas que compartan una red de hipótesis y concepciones acerca del planteamiento de los problemas y de los métodos aceptables de resolución, esto es, un único paradigma en el sentido de Kuhn, nos parece demasiado fuerte. Como argumenta Shulman (1986), para el caso de las ciencias sociales y humanas y, por tanto, para la Educación Matemática, la coexistencia de escuelas competitivas de pensamiento puede verse como un estado natural y bastante maduro en estos campos ya que favorece el desarrollo de una variedad de estrategias de investigación y el enfoque de los problemas desde distintas perspectivas. La complejidad de los fenómenos puede precisar la coexistencia de distintos programas de investigación, cada uno sustentado por paradigmas diferentes, con frecuencia mezcla de los considerados como idóneos para otras disciplinas. El enfoque epistemológico de Bunge, con su concepción de haces de líneas de investigación competitivas en un campo científico, parece más apropiado para valorar el estado actual del campo de la Didáctica de la Matemática.

### 2.3. LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA

Al reflexionar sobre la posibilidad de construir un "área de conocimiento", que explique y sirva de fundamento a la comunicación y adquisición de los contenidos matemáticos, observamos que las didácticas especiales aparecen frecuentemente clasificadas como "capítulos" o enfoques diferenciales de la didáctica, negándoles el calificativo de ciencias de la educación propiamente dichas (Benedito, 1987, p. 91). De este modo, estos autores las reducen a meros conocimientos técnicos o a la sumo tecnológicos, ya que el saber científico pertenecería al ámbito de la didáctica

(general) o a la psicología de la educación.

La interconexión entre la didáctica (general) y especiales puede clarificarse teniendo en cuenta el análisis que hace Bunge (1985a, p. 181) de la relación teoría general y teoría específica. Según explica este autor, una teoría general, como indica su nombre, concierne a todo un género de objetos, en tanto que una teoría específica se refiere a una de las especies de tal género. Por cada teoría general  $G$  hay entonces toda una clase de teorías especiales  $E_i$ , donde  $i$  es un número natural. Cada una de estas teorías especiales  $E_i$  contiene la teoría general  $G$  y, además, ciertas hipótesis subsidiarias  $S_{ij}$  que describen las peculiaridades de la especie  $i$  de objetos a que se refiere. Simbólicamente se puede representar,

$$E_i = G \cup \{S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{in}\}$$

donde  $n$  es el número de hipótesis subsidiarias que caracterizan a la teoría específica  $E_i$  con respecto a la general  $G$ .

Suele decirse que la teoría general "abarca" a cada una de las teorías específicas correspondientes, en el sentido de que éstas se obtienen con sólo agregarle a  $G$  ciertas premisas específicas. Pero, como Bunge afirma, es falso. Aunque se lea a menudo, que  $G$  contenga o implique a todas las teorías específicas  $E_i$ , mas bien es al revés.  $G$  se obtendría como la parte común (intersección) de todos los  $E_i$ . En otras palabras: dado un conjunto de teorías específicas, se puede extraer de éstas una teoría general con sólo suprimir todas las premisas particulares y dejar las suposiciones comunes a todas las teorías específicas.

Existen teorías generales del aprendizaje y teorías de la enseñanza. Pero, cabe preguntarse ¿aprendizaje de qué?; ¿enseñanza de qué?. Los fenómenos del aprendizaje y de la enseñanza se refieren a conocimientos particulares y posiblemente la explicación y predicción de estos fenómenos depende de la especificidad de los conocimientos enseñados, además de factores psicopedagógicos, sociales y culturales. Esto es, los factores "saber a aprender" y "saber a enseñar" pueden implicar interacciones con los restantes, que obligue a cambiar sustancialmente la explicación de los fenómenos didácticos. La programación de la enseñanza, el desarrollo del currículo, la práctica de la Educación Matemática, precisa tener en cuenta esta especificidad.

La insuficiencia de las teorías didácticas generales lleva necesariamente a la superación de las mismas mediante la formulación de otras nuevas, más ajustadas a los fenómenos que se tratan de explicar y predecir. Incluso pueden surgir nuevos planteamientos, nuevas formulaciones más audaces que pueden revolucionar, por qué no, los cimientos de teorías establecidas.

El marco estrecho de las técnicas generales de instrucción (o incluso de la tecnología) no es apropiado para las teorías que se están construyendo por algunas líneas de investigación de la Didáctica de las Matemáticas. El matemático, reflexionando sobre los propios procesos de creación y comunicación de la matemática, se ha visto obligado a practicar el oficio de epistemólogo, psicólogo, sociólogo,... esto es, el oficio de didacta.

### 3. PRINCIPALES LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Una vez analizado el concepto de teoría, sus tipos y los requisitos que algunos autores exigen para que pueda hablarse de la existencia de una disciplina científica, nos preguntamos si para la Didáctica de la Matemática existe esa comunidad de investigadores en la cual pueda surgir uno o varios programas de investigación que produzca una teoría o teorías de la Educación Matemática. En el resto del Capítulo trataremos de describir el "estado de la cuestión" sobre esta problemática, centrándonos en la actividad desarrollada por los grandes núcleos de investigadores, en particular los grupos TME (Theory of Mathematics Education), PME (Psychology of Mathematics Education) y la escuela francesa de Didáctica de la Matemática.

### 3.1. EL PROGRAMA DE INVESTIGACIÓN DEL GRUPO T.M.E.

En lo que respecta a la existencia de un grupo de investigación con intereses comunes en el desarrollo teórico, podemos decir que la intención del profesor Steiner en el V Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en 1984, fue precisamente convocar a los científicos interesados en la gestación de una Teoría de la Educación Matemática. En dicho Congreso se incluyó un Área Temática con el nombre "Teoría de la Educación Matemática" a la que se dedicaron cuatro sesiones. Finalizado el Congreso se celebraron nuevas reuniones en las que quedó constituido un Grupo de Trabajo que se denominó TME (Theory of Mathematics Education) y en las que se continuaron las discusiones iniciadas en el ICME.

Las sucesivas conferencias de TME que se han celebrado han mostrado que existe una comunidad, al menos en estado incipiente, interesada por construir las bases teóricas de la Didáctica de la Matemática como ciencia, que está constituida por personas con formación e intereses en campos bastante diversificados: investigadores en Educación Matemática, matemáticos, profesores, psicólogos educativos, sociólogos educativos, formadores profesores, etc.

En la configuración de esta comunidad científica existen intereses profesionales que han propiciado una orientación académica a esta actividad. Así, en Alemania, entre 1960 y 1975, se crearon más de 100 cátedras en las escuelas de formación de profesores, asignadas a departamentos de matemáticas; al ser integradas las citadas escuelas en la universidad, la Didáctica de la Matemática se vio en cierta medida equiparada a las restantes disciplinas. En España este fenómeno ha tenido lugar especialmente a partir de 1985 con el reconocimiento de la Didáctica de la Matemática como área de conocimiento y la consiguiente posibilidad de constituir departamentos universitarios profesores adscritos a dicha área.

Esta situación puede forzar a la Educación Matemática hacia un dominio de especulación científica relativamente desconectado de la realidad social. Steiner (1985), al analizar el papel que la Educación Matemática debería tener dentro de la universidad, propone que esta disciplina adopte una función de vínculo entre la matemática y la sociedad. "Esto es posible y necesario especialmente por medio de su contribución a la elaboración y actualización de muchas dimensiones olvidadas de las matemáticas: las dimensiones filosófica, histórica, humana, social y, comprendiendo a todas estas, la dimensión didáctica" (pag. 12).

Podemos hacer una primera aproximación al núcleo conceptual de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica analizando las cuestiones planteadas en el seno del Grupo TME que, dado su carácter abierto, ha reunido, en las sucesivas conferencias, a la mayoría de los investigadores en Educación Matemática interesados por el fundamento teórico de su actividad.

De acuerdo con el programa de desarrollo trazado en la Primera Conferencia (Steiner y cols, 1984), la "Teoría de la Educación Matemática" se ocupa de la situación actual y de las perspectivas para el desarrollo futuro de la Educación Matemática como un campo académico y como un dominio de interacción entre la investigación, el desarrollo y la práctica. En este programa se distinguen tres componentes interrelacionadas:

(A) La identificación y formulación de los problemas básicos en orientación, fundamento, metodología y organización de la Educación Matemática como una disciplina, tales como:

- (1) La existencia de distintas definiciones, incluso discrepantes, de la Educación Matemática como disciplina.
- (2) El uso de modelos, paradigmas, teorías, y métodos en la investigación y de herramientas apropiadas para el análisis de sus resultados.

(3) El papel que deben jugar los "macro-modelos", esto es marcos de referencia generales que relacionan significativamente los múltiples aspectos de la Educación Matemática y los micro-modelos, que proporcionan información detallada sobre áreas restringidas del aprendizaje matemático.

(4) El debate entre "teorías específicas" frente a interdisciplinariedad y transdisciplinariedad.

(5) Las relaciones entre la Educación Matemática y sus campos referenciales como matemáticas, pedagogía, psicología, sociología, epistemología, etc.

(6) Las relaciones entre teoría, desarrollo y práctica: las tareas integradoras y sintéticas de la Educación Matemática frente a las tendencias recientes hacia una ciencia normal y la creciente especialización.

(7) Los aspectos axiológicos éticos, sociales y políticos de la Educación Matemática.

(B) El desarrollo de una aproximación comprensiva a la Educación Matemática, que debe ser vista en su totalidad como un sistema interactivo, comprendiendo investigación, desarrollo y práctica. Esto lleva a destacar la importancia de la teoría de sistemas, especialmente de las teorías de los sistemas sociales, basadas en conceptos como interacción social, actividad cooperativa humana, diferenciación, subsistemas, autoreproducción y sistemas auto-organizados, auto-referencia y reflexión en sistemas sociales, etc.

Asimismo, interesa la identificación y el estudio de las múltiples interdependencias y mutuos condicionantes en la Educación Matemática, incluyendo el análisis de las complementariedades fundamentales.

(C) La organización de la investigación sobre la propia Educación Matemática como disciplina que, por una parte, proporcione información y datos sobre la situación, los problemas y las necesidades de la misma, teniendo en cuenta las diferencias nacionales y regionales y, por otra, contribuya al desarrollo de un meta-conocimiento y una actitud auto-reflexiva como base para establecimiento y realización de los programas de desarrollo del TME.

La Segunda Conferencia del Grupo TME, celebrada en 1985 en el Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) de la Universidad de Bielefeld (Steiner y Vermandel, 1988), se centró sobre el tema genérico "Fundamento y metodología de la disciplina Educación Matemática (Didáctica de la Matemática)" y, por

tanto, la mayoría de las contribuciones resaltaron el papel de la teoría y la teorización en dominios particulares. Entre estos temas figuran:

- teorías sobre la enseñanza;
- teoría de las situaciones didácticas;
- teoría interaccionista del aprendizaje y la enseñanza;
- el papel de las metáforas en teoría del desarrollo;
- el papel de las teorías empíricas en la enseñanza de la matemática;
- la importancia de las teorías fundamentales matemáticas;
- conceptos teóricos para la enseñanza de la matemática aplicada;
- la teoría de la representación como base para comprender el aprendizaje matemático;
- estudios históricos sobre el desarrollo teórico de la educación matemática como una disciplina.

Los grupos de trabajo se dedicaron a diferentes dominios de investigación con el fin de analizar el uso de modelos, métodos, teorías, paradigmas, etc.

El tema de trabajo de la Tercera Conferencia, celebrada en 1988 en Amberes (Bélgica) (Vermandel y Steiner, 1988) trató sobre el papel y las implicaciones de la investigación en Educación Matemática en y para la formación de los profesores, dado el desfase considerable existente entre la enseñanza y el aprendizaje. Concretamente las cuestiones seleccionadas fueron:

- El desfase entre enseñanza - aprendizaje en el proceso real en las clases de matemáticas como un fenómeno tradicional y como un problema presente crucial.
- El desfase ente investigación sobre la enseñanza e investigación sobre el aprendizaje.
- Modelos para el diseño de la enseñanza a la luz de la investigación sobre el aprendizaje.

- La necesidad de la teoría y la investigación en trabajos y proyectos de desarrollo y su posición en el contexto de investigación sobre enseñanza - aprendizaje.
- El papel del contenido, la orientación del área temática y las distintas perspectivas de las matemáticas en el estudio y solución del desfase investigación - aprendizaje y el desarrollo de modelos integradores.
- El desfase enseñanza - aprendizaje a la luz de los estudios sobre procesos e interacción social en la clase.
- Implicaciones del tema de la conferencia sobre la formación de profesores.
- El ordenador como una tercera componente en la interacción enseñanza- aprendizaje.

Los temas tratados en la cuarta Conferencia celebrada en Oaxtepec (México) en 1990 fueron los siguientes:

- I. Relaciones entre las orientaciones teóricas y los métodos de investigación empírica en Educación Matemática.
- II. El papel de los aspectos y acercamientos holísticos y sistémicos en Educación Matemática.

Asimismo, se inició en esta reunión la presentación de distintos programas de formación de investigadores en Educación Matemática en el seno de distintas universidades, tanto a nivel de doctorado como de "master". Un subgrupo de miembros del TME acordó recabar información sobre este tema, por medio de un cuestionario, a una amplia muestra de universidades de todo el mundo, como una primera fase en la constitución de una red de personas interesadas en el intercambio de información y discusión sobre el tema.

En la quinta Conferencia, celebrada en 1991 en Paderno del Grappa (Italia), se presentó un informe preliminar de resultados de la citada encuesta sobre formación de investigadores (Steiner y cols, 1991) y distintos trabajos sobre los temas siguientes:

- I. El papel de las metáforas y metonimias en Matemáticas, Educación Matemática y en la clase de matemáticas.
- II. Interacción social y desarrollo del conocimiento. Perspectiva de Vygotsky sobre la enseñanza y el aprendizaje matemático en la zona de construcción.

Como se ha expuesto, los fenómenos estudiados en las conferencias del TME incluyen un rango muy diverso: matemáticas, diseño de currículum, estudio de los modos de construcción por los alumnos del significado de las nociones matemáticas, las interacciones profesor - alumno, la preparación de los profesores, métodos alternativos de investigación, etc. La razón de esta diversidad se debe a que el término "Educación Matemática" no está aún claramente definido. No parece existir un consenso acerca de las cuestiones centrales para la Educación Matemática que agrupe todos los intereses aparentemente diversos del campo.

Si bien los temas tratados en las Conferencias TME son de interés para distintos aspectos de la Educación Matemática, no resulta fácil apreciar en ellos un avance en la configuración de una disciplina académica, esto es, una teoría de carácter fundamental que establezca los cimientos de una nueva ciencia por medio de la formulación de unos conceptos básicos y unos postulados elementales. Se encuentran muchos resultados parciales, apoyados en supuestos teóricos externos (tomados de otras disciplinas) que tratan de orientar la acción en el aula, aunque con un progreso escaso.

### 3.2. ENFOQUE PSICOLÓGICO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La psicología de la educación es la rama de la psicología y de la pedagogía que estudia científicamente los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como de los problemas que en el contexto de los mismos puedan presentarse. Como afirma Gimeno Sacristán (1986.), son numerosas las posturas consideran que la enseñanza es una técnica directamente derivada de una teoría psicológica del aprendizaje que le sirve de fundamento. "Esta situación de dependencia es claramente perjudicial

para perfilar un campo teórico propio tanto para la Didáctica General como para las Didácticas Especiales, ya que las sitúa en un estado de colonización esterilizante en cuanto a la propia creación teórica". (Sacristán, 1986, p. 18)

La psicología de la educación "amenaza", pues, con acaparar el estudio de la conducta humana en las situaciones de enseñanza, reduciendo al máximo el ámbito de la Didáctica. Dentro de ella, una rama es la psicología de la instrucción, definida por Genovard y Gotzens (1990, p. 33) como la "disciplina científica y aplicada desarrollada a partir de la psicología de la educación, que estudia las variables psicológicas y su interacción con los componentes de los procesos de enseñanza - aprendizaje que imparten unos sujetos específicos que pretenden enseñar unos contenidos o destrezas concretas a otros individuos igualmente específicos y en un contexto determinado".

Estos autores analizan y clasifican diferentes teorías y modelos instruccionales desde una perspectiva interaccionista en tres tipos: interacción cognitiva, social y contextual. La interacción cognitiva, en la que sitúan las teorías de Piaget, Bruner y Ausubel, designa las teorías instruccionales que subrayan el hecho de que la instrucción es básicamente un intercambio de información, en su acepción más amplia, que se produce entre profesores y alumnos y que debe ejercerse en condiciones lo más óptimas posibles para que el objetivo principal, que el alumno consiga una asimilación de la información correcta, se realice. También se incluyen dentro del significado de este término las propuestas que destacan la interacción entre los contenidos instruccionales y los procesos y habilidades cognitivas del alumno y cuyo fin coincide igualmente con el que se acaba de citar. La perspectiva de interacción social, que da prioridad al papel de los sujetos que intervienen en la instrucción como facilitadores de los aprendizajes que deben desarrollarse tiene como representantes a Vygotsky y Bandura. Por último, Skinner, Gagné y Cronbach, entre otros, han propugnado teorías que pueden encuadrarse en la interacción contextual por la cual la instrucción es ante todo el producto de la interacción entre los sujetos y algunas de las variables del contexto.

Por motivos de extensión no nos detendremos en la presentación de estas teorías, por otro lado bien conocidas por los profesores a través de sus estudios psico-pedagógicos. Recomendamos al lector interesado en revisar estas y otras teorías y modelos instruccionales el texto citado de Genovard y Gotzens, así como el de A. Orton (1991) y Resnick y Ford (1984) para un estudio aplicado a la instrucción matemática.

#### *El Grupo PME (Psychology of Mathematics Education)*

En la comunidad internacional de investigadores en Educación Matemática, se aprecia también una fuerte presión de la perspectiva psicológica en el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje matemático. Consideramos que este predominio del enfoque psicológico de la investigación no tiene en cuenta el necesario equilibrio y principio de complementariedad entre las cuatro disciplinas fundacionales de la Educación Matemática descritas por Higgison (1980). El citado predominio se manifiesta viendo la vitalidad del Grupo Internacional PME (Psychology of Mathematics Education), constituido en el Segundo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) y que ha celebrado en 1991 su 15 Reunión Anual.

Los objetivos principales de este colectivo abierto de investigadores, tal como aparecen en sus estatutos, son:

- Promover contactos internacionales e intercambio de información científica sobre la Psicología de la Educación Matemática.
- Promover y estimular investigación interdisciplinar en este área con la cooperación de psicólogos, matemáticos y profesores de matemáticas.
- Fomentar una comprensión más profunda y correcta de los aspectos psicológicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática implicaciones.

Al preguntarse sobre cuáles son las cuestiones esenciales para la Educación Matemática para las cuales una aproximación psicológica puede ser apropiada, Vergnaud (1988) cita las siguientes:

- el análisis de la conducta de los estudiantes, de sus representaciones y de los fenómenos inconscientes que tienen lugar en sus mentes;
- las conductas, representaciones y fenómenos inconscientes de los profesores, padres y demás participantes.

De un modo más especial, analiza cuatro tipos de fenómenos cuyo estudio desde una aproximación psicológica puede ser fructífero:

- 1) La organización jerárquica de las competencias y concepciones de los estudiantes.
- 2) La evolución a corto plazo de las concepciones y competencias en el aula.
- 3) Las interacciones sociales y los fenómenos inconscientes.
- 4) La identificación de teoremas en acto, esquemas y símbolos.

Sin embargo, el análisis de las actas de las reuniones anuales del PME revela que los informes de investigación aceptados incluyen tanto investigaciones empíricas como teóricas y que cubren ámbitos no estrictamente psicológicos. No es posible detallar, por su amplitud, los temas tratados en las distintas Conferencias, pero sí puede ser de interés citar el esquema de clasificación de los informes de investigación (research report) presentados en la última reunión (Furinghetti, 1991) ya que indica, a grandes rasgos, las cuestiones sobre las que se está trabajando en la actualidad. Dicho esquema indica en el cuadro 1.

- 
1. Geometría y pensamiento espacial
  2. Ordenadores y aprendizaje matemático
  3. Pensamiento algebraico
  4. Funciones
  5. Pensamiento matemático avanzado
  6. Fracciones, decimales, números racionales, razonamiento proporcional
  7. Imágenes y visualización
  8. Aprendizaje matemático en los primeros niveles
  9. Demostración
  10. Resolución de problemas
  11. Concepciones de los alumnos, creencias, ...
  12. Concepciones de los profesores, creencias, ...
  13. Factores sociales y afectivos, metacognición
  14. Construcción social del conocimiento matemático y lingüística
  15. Matemáticas fuera de la escuela, el papel del contexto
  16. Evaluación
  17. Cuestiones teóricas y epistemológicas
  18. Materiales curriculares
  19. Formación de profesores

*Cuadro 1: Clasificación de temas en la XV Conferencia PME*

---

Como afirma Balachef (1990a), más allá de la problemática psicológica inicial del grupo PME, el debate sobre la investigación ha puesto de manifiesto la necesidad de tener en cuenta nuevos aspectos, entre los que destaca:

- 1) La especificidad del conocimiento matemático. La investigación sobre el aprendizaje del álgebra, geometría, o el cálculo no se puede desarrollar sin un análisis epistemológico profundo de

los conceptos considerados como nociones matemáticas. También se reconoce que el significado de los conceptos matemáticos se apoya no sólo sobre su definición formal sino, de un modo fundamental, sobre los procesos implicados en su funcionamiento. Por esta razón se pone el énfasis en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes en lugar de en sus destrezas o producciones actuales.

2) La dimensión social. Tanto el estatuto social del conocimiento que se debe aprender como el papel crucial de las interacciones sociales en el proceso de enseñanza requieren una consideración importante de la dimensión social en la investigación. Uno de los principales pasos en el desarrollo de la investigación en la Psicología de la Educación Matemática es el movimiento desde los estudios centrados en el niño hacia los estudios centrados en el estudiante como aprendiz en la clase. El estudiante es un niño implicado en un proceso de aprendizaje dentro de un entorno específico en el que las interacciones sociales con otros estudiantes y el profesor juega un papel crucial. Con esta evolución de la problemática, se debe desarrollar más investigaciones que utilicen observaciones sistemáticas de la clase o que precisen de la organización de procesos didácticos específicos.

investigación requiere nuevos útiles teóricos y metodológicos para producir resultados que sean robustos tanto teóricamente como también con respecto a su significado para propósitos prácticos.

Posiblemente esta apertura del campo de interés del PME lleve a Fischbein (1990) a afirmar que la Psicología de la Educación Matemática tiende a convertirse en el paradigma de la Educación Matemática en general (como cuerpo de conocimiento científico). Además, atribuye a esta línea de trabajo una entidad específica dentro de las áreas de conocimiento al considerar que la adopción de cuestiones, conceptos, teorías y metodologías del campo de la psicología general no ha dado los frutos esperados. La explicación que sugiere es que la psicología no es una disciplina deductiva, y por tanto, la mera aplicación de principios generales a un dominio particular no conduce usualmente a descubrimientos significativos. Incluso aquellos dominios de la psicología fuertemente relacionados con la Educación Matemática - como los estudios sobre la resolución de problemas, la memoria, estrategias de razonamiento, creatividad, representación, e imaginación - no pueden producir directamente sugerencias útiles y prácticas para la Educación Matemática y no pueden representar por sí mismas la fuente principal de problemas en este campo. Incluso la teoría de los estadios de Piaget y sus descubrimientos sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos (número, espacio, azar, función, etc.) no pueden ser directamente trasladados en términos de currículo.

Esta observación no significa que la Educación Matemática debiera vivir y desarrollarse en una concha cerrada, opaca a las influencias externas. Las coordenadas psicológicas y sociológicas son prerequisites necesarios para definir problemas, trazar proyectos de investigación e interpretar los datos. No obstante, estos prerequisites son en sí mismos totalmente insuficientes.

La Educación Matemática, continúa explicando Fischbein, plantea sus propios problemas psicológicos, que un psicólogo profesional nunca encuentra en su propia área. Normalmente un psicólogo no se interesa por los tipos específicos de problemas de representación que aparecen en matemáticas - desde la representación gráfica de funciones y distintas clases de morfismos, a la dinámica del simbolismo matemático. Es extraño que un psicólogo cognitivo se interese y trate los problemas planteados por la comprensión del infinito matemático con todas sus distintas facetas y dificultades. Con el fin de poder afrontar estos problemas, se necesita un sistema particular de conceptos además de los generales inspirados por la psicología. Pero incluso los conceptos psicológicos usuales adquieren nuevo significado a la luz de las matemáticas y de la Educación Matemática.

#### *Aprendizaje matemático y constructivismo*

Dentro del enfoque psicológico, un problema esencial es la identificación de teorías acerca del aprendizaje matemático que aporten un fundamento sobre la enseñanza.

Romberg y Carpenter (1986) afirman que la investigación sobre aprendizaje proporciona relativamente poca luz sobre muchos de los problemas centrales de la instrucción y que gran cantidad de la investigación sobre enseñanza asume presupuestos implícitos sobre el aprendizaje infantil que no son consistentes con las actuales teorías cognitivas del aprendizaje. Se han tratado de aplicar teorías generales (fundamentales) sobre el aprendizaje para deducir principios que guíen la instrucción.

La instrucción basada en principios conductistas tiende a fragmentar el currículum en un número de partes aisladas que podrían aprenderse a través de un refuerzo apropiado. Pero la instrucción efectiva de las matemáticas necesita sustentarse en la comprensión de los conceptos matemáticos básicos.

En el caso de teorías del aprendizaje derivadas de la epistemología genética de Piaget, si bien la ejecución de tareas piagetianas está correlacionada con logros aritméticos, las operaciones lógicas no han suministrado una ayuda adecuada para explicar la capacidad del niño para aprender los conceptos y destrezas matemáticas más básicas.

De los estudios cognitivos se deduce uno de los supuestos básicos subyacentes de la investigación actual sobre aprendizaje. Consiste en aceptar que el niño construye, de un modo activo, el conocimiento a través de la interacción con el medio y la organización de sus propios constructos mentales. Aunque la instrucción afecta claramente a lo que el niño aprende, no determina tal aprendizaje. El niño no es un receptor pasivo del conocimiento; lo interpreta, lo estructura y lo asimila a la luz de sus propios esquemas mentales.

Como afirma Vergnaud (1990a) la mayoría de los psicólogos interesados hoy por la Educación Matemática son en algún sentido constructivistas. Piensan que las competencias y concepciones son construidas por los propios estudiantes. Según Kilpatrick (1987), el punto de vista constructivista implica dos principios:

1. El conocimiento es construido activamente por el sujeto que conoce, no es recibido pasivamente del entorno.
2. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el propio mundo experiencial; no se descubre un mundo independiente, preexistente, exterior a la mente del sujeto.

Pero el hecho de que la mayoría de los investigadores no especifiquen suficientemente las condiciones físicas y sociales bajo las cuales tiene lugar el conocimiento abre el camino a una amplia variedad de posiciones epistemológicas. Desde un constructivismo simple (trivial, para algunos) que solo reconocen el principio 1 mencionado, al constructivismo radical que acepta los dos principios y, por tanto, niega la posibilidad de la mente para reflejar aspectos objetivos de la realidad. También se habla de un constructivismo social, que refuerza el papel fundamental del conflicto cognitivo en la construcción de la objetividad. La solución epistemológica, afirma Vergnaud (1990a), es en principio bastante sencilla: La construcción del conocimiento consiste en la construcción progresiva de representaciones mentales, implícitas o explícitas, que son homomórficas a la realidad para algunos aspectos y no lo son para otros.

#### *Aprendizaje matemático y procesamiento de la información*

Como afirma Orton (1990), no existe ninguna teoría del aprendizaje de las matemáticas que incorpore todos los detalles que cabría esperar y que tenga una aceptación general. Según este autor se identifican en la actualidad dos corrientes de investigación sobre este campo: el enfoque constructivista, considerado anteriormente, y el enfoque de ciencia cognitiva - procesamiento de la información, de fuerte impacto en las investigaciones sobre el aprendizaje matemático, como se pone de manifiesto en el libro de Davis (1984).

Según Schoenfeld (1987) una hipótesis básica subyacente de los trabajos en ciencia cognitiva es que las estructuras mentales y los procesos cognitivos son extremadamente ricos y complejos, pero que tales estructuras pueden ser comprendidas y que esta comprensión ayudará a

conocer mejor los modos en los que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar. El centro de interés es explicar aquello que produce el "pensamiento productivo", o sea las capacidades de resolver problemas significativos.

El campo de la ciencia cognitiva intenta capitalizar el potencial de la metáfora que asemeja el funcionamiento de la mente a un ordenador para comprender el funcionamiento de la cognición como procesamiento de la información, y como consecuencia comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se considera que el cerebro y la mente están vinculados como el ordenador y el programa.

El punto de vista dominante en ciencia cognitiva actual es que la cognición es llevada a cabo por un mecanismo de procesamiento central controlado por algún tipo de sistema ejecutivo que ayuda a la cognición a ser consciente de lo que está haciendo. Los modelos de la mente se equiparan a los modelos de ordenadores de propósito general con un procesador central capaz de almacenar y ejecutar secuencialmente programas escritos en un lenguaje de alto nivel. En estos modelos, la mente se considera como esencialmente unitaria, y las estructuras y operaciones mentales se consideran como invariantes para los distintos contenidos; se piensa que un mecanismo único está en la base de las capacidades de resolución de una cierta clase de problemas.

Desde el punto de vista metodológico, los científicos cognitivos hacen observaciones detalladas de los procesos de resolución de problemas por los individuos, buscan regularidades en sus conductas de resolución e intentan caracterizar dichas regularidades con suficiente precisión y detalle para que los estudiantes puedan tomar esas caracterizaciones como guías para la resolución de los problemas. Tratan de construir "modelos de proceso" de la comprensión de los estudiantes que serán puestos a prueba mediante programas de ordenador que simulan el comportamiento del resolutor.

Como educadores matemáticos debemos preguntarnos si la metáfora del ordenador proporciona un modelo de funcionamiento de la mente que pueda ser adecuada para explicar los procesos de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas y cuáles son las consecuencias para la instrucción matemática de las teorías del procesamiento de la información.

Como nos advierte Kilpatrick (1985, p. 22) "Podemos usar la metáfora del ordenador sin caer prisioneros de ella. Debemos recordarnos a nosotros mismos que al caracterizar la educación como transmisión de información, corremos el riesgo de distorsionar nuestras tareas como profesores. Podemos usar la palabra información pero al mismo tiempo reconocer que hay varios tipos de ella y que algo se pierde cuando definimos los fines de la educación en términos de ganancia de información".

Como expondremos en la siguiente Sección, otros autores propugnan un enfoque diferente de los procesos de resolución de problemas y enseñanza-aprendizaje, que asignan un papel más activo al resolutor, tienen en cuenta las peculiaridades del contenido matemático así como el papel del profesor y de la interacción social en el aula.

### 3.3. HACIA UNA CONCEPCIÓN MATEMÁTICA Y AUTÓNOMA DE LA DIDÁCTICA

Dentro de la comunidad de investigadores que, desde diversas disciplinas, se interesan por los problemas relacionados con la Educación Matemática, se ha ido destacando en los últimos años, principalmente en Francia -donde sobresalen los nombres de Brousseau, Chevallard, Vergnaud, ...- un grupo que se esfuerza en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de investigación específicos en Didáctica de la Matemática.

Fruto de este esfuerzo ha surgido una concepción llamada por sus autores "fundamental" de la Didáctica que presenta caracteres diferenciales respecto a otros enfoques: concepción global de la enseñanza, estrechamente ligada a la matemática y a teorías específicas de aprendizaje y búsqueda de paradigmas propios de investigación, en una postura integradora entre los métodos

cuantitativos y cualitativos.

Como característica de esta línea puede citarse el interés por establecer un marco teórico original, desarrollando sus propios conceptos y métodos y considerando las situaciones de enseñanza - aprendizaje globalmente. Los modelos desarrollados comprenden las dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas y tratan de tener en cuenta la complejidad de las interacciones entre el saber, los alumnos y el profesor, dentro del contexto particular de la clase.

El estudio de las relaciones complejas entre la enseñanza y aprendizaje, en aquellos aspectos que son específicos de las matemáticas, queda concretado por Laborde (1989) en estas dos cuestiones:

(1) ¿Cómo podemos caracterizar las condiciones que deben implementarse en la enseñanza para facilitar un aprendizaje que reúna ciertas características fijadas a priori?

(2) ¿Qué elementos debe poseer la descripción de un proceso de enseñanza para asegurar que pueda ser reproducido desde el punto de vista del aprendizaje que induce en los alumnos?

Un criterio básico que guía la investigación de estas cuestiones es la determinación del significado del conocimiento matemático que se desea, a priori, que construyan los alumnos y del que realmente alcanzan durante el proceso de enseñanza.

Como afirma Laborde (1989), existe un amplio consenso sobre el requisito metodológico de utilizar la experimentación en una interacción dialéctica con la teoría. El paradigma experimental es concebido dentro de un marco teórico y las observaciones experimentales son comparadas con el marco, pudiendo ser modificado éste a la luz de la consistencia de los conceptos desarrollados y la exhaustividad en relación a todos los fenómenos relevantes.

#### *Concepción de la Didáctica de la Matemática; enfoque sistémico*

En Brousseau (1989, p. 3) se define la concepción fundamental de la Didáctica de la Matemática como:

*"una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos".*

indicando, como objetos particulares de estudio:

- las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que produce, tanto sobre los conocimientos como sobre sus utilizadores;
- las instituciones y las actividades que tienen por objeto facilitar estas operaciones.

Los didactas que comparten esta concepción de la Didáctica relacionan todos los aspectos de su actividad con las matemáticas. Se argumenta, para basar ese enfoque, que el estudio de las transformaciones de la matemática, bien sea desde el punto de vista de la investigación o de la enseñanza siempre ha formado parte de la actividad del matemático, de igual modo que la búsqueda de problemas y situaciones que requiera para su solución una noción matemática o un teorema.

Una característica importante de esta teoría, aunque no sea original ni exclusiva, es su consideración de los fenómenos de enseñanza - aprendizaje bajo el enfoque sistémico. Bajo esta perspectiva, el funcionamiento global de un hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes, de igual manera que ocurre con los fenómenos económicos o sociales.

Chevallard y Johsua (1982) describen El SISTEMA DIDACTICO en sentido estricto formado esencialmente por tres subsistemas: PROFESOR, ALUMNO y SABER ENSEÑADO. Además está el mundo exterior a la escuela, en el que se hallan la sociedad en general, los padres, los matemáticos, etc. Pero, entre los dos, debe considerarse una zona intermedia, la NOOSFERA, que, integrada al anterior, constituye con él el sistema didáctico en sentido amplio, y que es lugar, a la vez, de conflictos y transacciones por las que se realiza la articulación entre el sistema y su entorno. La noosfera es por tanto "la capa exterior que contiene todas las personas que en la

sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza".

Brousseau (1986) considera, además, como componente el MEDIO que está formado por el subsistema sobre el cual actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.).

Presentaremos, a continuación, una síntesis de los principales conceptos ligados a esta línea de investigación. Estos conceptos tratan de describir el funcionamiento del sistema de enseñanza - y de los sistemas didácticos en particular - como dependientes de ciertas restricciones y elecciones. Asimismo, tratan de identificar dichas restricciones y poner de manifiesto cómo distintas elecciones producen modos diferentes de aprendizaje desde el punto de vista de la construcción por los alumnos de los significados de las nociones enseñadas.

### *Aprendizaje y enseñanza: Teoría de Situaciones Didácticas*

La teoría que estamos describiendo, en su formulación global, incorpora también una visión propia del aprendizaje matemático, aunque pueden identificarse planteamientos similares sobre aspectos parciales en otras teorías.

Se adopta una perspectiva piagetiana, en el sentido de que se postula que todo conocimiento se construye por interacción constante entre el sujeto y el objeto, pero se distingue de otras teorías constructivistas por su modo de afrontar las relaciones entre el alumno y el saber. Los contenidos son el substrato sobre el cual se va a desarrollar la jerarquización de estructuras mentales.

Pero además, el punto de vista didáctico imprime otro sentido al estudio de las relaciones entre los dos subsistemas (alumno - saber). El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber pero con el fin de su optimización, de su control y de su reproducción en situaciones escolares. Esto obliga a conceder una importancia particular al objeto de la interacción entre los dos subsistemas, que es precisamente la situación - problema y la gestión por el profesor de esta interacción.

Como indica Balachef (1990a) se está reconociendo en los trabajos sobre Psicología de la Educación Matemática la importancia crucial que presentan las relaciones entre los aspectos situacionales, el contexto y la cultura y las conductas cognitivas de los alumnos. Esta dimensión situacional, que subyace - explícitamente o no - en cualquier estudio sobre procesos de enseñanza, raramente es considerada como objeto de investigación por sí misma. Pensamos que la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau es una iniciativa en este sentido.

Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con un fin de permitir a los alumnos aprender - esto es, reconstruir - algún conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo.

Para que el alumno "construya" el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno.

El proceso de resolución del problema planteado se compara a un juego de estrategia o a un proceso de toma de decisiones. Existen diferentes estrategias, pero sólo algunas de ellas conducen a la solución del problema y a la construcción por el alumno del conocimiento necesario para hallar dicha solución. Este conocimiento es lo que se puede ganar, lo que está en juego, ("enjeu") en la situación. De este modo, la teoría de situaciones es una teoría de aprendizaje constructiva en la que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas. Como teoría de resolución de problemas, asigna un papel crucial al resolutor. Comparada, por ejemplo a la Teoría del Procesamiento de la Información que asimila el proceso de resolución con el funcionamiento de un ordenador, asigna al resolutor el papel de un decisor que desea hallar la estrategia ganadora y tiene la posibilidad de modificar su estrategia inicial una vez iniciado el proceso de solución.

Por otro lado, debido a la peculiar característica del conocimiento matemático que incluye,

tanto conceptos, como sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, es preciso contemplar varios tipos de situaciones:

- SITUACIONES DE ACCIÓN, sobre el medio, que favorecen el surgimiento de teorías (implícitas) que después funcionarán en la clase como modelos proto-matemáticos.
- SITUACIONES DE FORMULACIÓN, que favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos. En estas suelen diferenciarse las situaciones de comunicación que son las situaciones de formulación que tienen dimensiones sociales explícitas.
- SITUACIONES DE VALIDACIÓN, requieren de los alumnos la explicitación de pruebas y por tanto explicaciones de las teorías relacionadas medios que subyacen en los procesos de demostración.
- SITUACIONES DE INSTITUCIONALIZACIÓN: que tiene por finalidad establecer y dar un "status" oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad de la clase. En particular se refiere al conocimiento, las representaciones simbólicas, etc, que deben ser retenidas para el trabajo posterior.

### *Los obstáculos y sus tipos*

El aprendizaje por adaptación al medio, implica necesariamente rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos implícitos (concepciones), de lenguajes, de sistemas cognitivos. Si se obliga a un alumno o a un grupo a una progresión paso a paso, el mismo principio de adaptación puede contrariar el rechazo, necesario, de un conocimiento inadecuado. Las ideas transitorias resisten y persisten. Estas rupturas pueden ser previstas por el estudio directo de las situaciones y por el indirecto de los comportamientos de los alumnos (Brousseau, 1983).

Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarles en conseguirlo.

Brousseau (1983) da las siguientes características de los obstáculos:

- un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento;
- el alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia;
- cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente;
- el alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber;
- después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica.

Se distinguen los siguientes tipos de obstáculos:

- OBSTÁCULOS ONTOGENÉTICOS - a veces llamados obstáculos psico genéticos: son debidos a las características del desarrollo del niño.
- OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS: que resultan de las elecciones didácticas hecho para establecer la situación de enseñanza.
- OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS: intrínsecamente relacionados al propio concepto. Evidenciado por medio de un análisis histórico, tal tipo de obstáculo debe ser considerado como parte del significado del concepto. Por tanto, encontrarlo y superarlo, parece ser una condición necesaria para la construcción de una concepción relevante.

Observamos que, frente a la teoría psicológica que atribuye los errores de los alumnos a causas de tipo cognitivo, se admite aquí la posibilidad de que tales errores puedan ser debidos a causas epistemológicas y didácticas, por lo que la determinación de este tipo de causas

proporciona una primera vía de solución.

### *Relación con el saber: Relatividad del conocimiento respecto de las instituciones*

Recientemente, Chevallard (1989) ha adoptado una posición de notable generalidad para los estudios de Didáctica. Desde una perspectiva antropológica, la Didáctica de la Matemática sería el estudio del Hombre - las sociedades humanas - aprendiendo y enseñando matemáticas.

Para Chevallard (1989) el objeto principal de estudio de la Didáctica de la Matemática está constituido por los diferentes tipos de sistemas didácticos - formados por los subsistemas: enseñantes, alumnos y saber enseñado - que existan actualmente o que puedan ser creados, por ejemplo, mediante la organización de un tipo especial de enseñanza.

La problemática del estudio puede ser formulada, globalmente y a grandes rasgos, con la ayuda del concepto de relación con el saber (*rapport au savoir*) (institucional y personal). Para este autor, dado un objeto conceptual, "saber" o "conocer" dicho objeto no es un concepto absoluto, sino que depende de la institución en que se encuentra el sujeto. Así la expresión "sabe probabilidad", referida a una persona dada, puede ser cierta si nos referimos a las probabilidades estudiadas en la escuela y falsa si nos referimos al mundo académico, e incluso en éste habría que diferenciar si nos referimos al conocimiento necesario para la enseñanza en los primeros cursos de una carrera técnica o al que sería preciso para realizar investigación teórica sobre Cálculo de Probabilidades.

Hay que distinguir pues entre relación institucional (saber referido al objeto conceptual, que se considera aceptable dentro de una institución) y relación personal (conocimiento sobre el objeto de una persona dada) que puede estar o no en coincidencia con el institucional para la institución de la que forma parte. Sobre estos conceptos, se plantean dos preguntas fundamentales:

- (1) ¿Cuáles son las condiciones que aseguran la viabilidad didáctica de tal elemento del saber y de tal relación institucional y personal a este elemento del saber?
- (2) ¿Cuáles son las restricciones que pueden impedir satisfacer estas condiciones?

El problema central de la Didáctica es para este autor el estudio de la relación institucional con el saber, de sus condiciones y de sus efectos. El estudio de la relación personal es en la práctica fundamental, pero epistemológicamente secundario. Este programa, sin embargo, no puede tener éxito sin una toma en consideración del conjunto de condicionantes (cognitivos, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos, etc.) del alumno, que juegan o pueden jugar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de saber en cuestión.

### *Transposición didáctica*

La relatividad del saber a la institución en que se presenta lleva al concepto de transposición didáctica, (Chevallard, 1985), el cual se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado.

En una primera fase de la transposición se pasa del saber matemático al saber a enseñar. Se pasa de la descripción de los empleos de la noción a la descripción de la misma noción y la economía que supone para la organización del saber. La constitución de un texto para fines didácticos, reduce así la dialéctica, esencial al funcionamiento del concepto, de los problemas y los útiles matemáticos. Hay una descontextualización del concepto. También se asiste a un fenómeno de deshistorización, por el cual el saber toma el aspecto de una realidad ahistórica, intemporal, que se impone por sí misma, que, no teniendo productor, no puede ser contestada en su origen, utilidad o pertinencia.

Una vez realizada la introducción del concepto, el funcionamiento didáctico va, progresivamente, a apoderarse de él para hacer "algo", que no tiene por qué tener relación con los móviles de quienes han concebido el programa. Su inmersión en el saber enseñado va a permitir finalmente su recontextualización. Pero ésta no conseguirá, en general, sobre todo en los primeros niveles de enseñanza, ni reconstituir el modo de existencia original de la noción, ni llenar todas y

únicamente las funciones para las cuales se había decidido introducirlo.

Por ejemplo, y refiriéndonos al tema de la Probabilidad condicional, es frecuente en los textos de Bachillerato encontrar un nuevo concepto relacionado con ella que es inexistente en el Cálculo de Probabilidades a nivel académico. Nos referimos al denominado "suceso condicionado", del que pueden verse en numerosos textos definiciones similares a la siguiente:

"Al suceso consistente en que se cumpla B habiéndose cumplido A, se le llama suceso B condicionado a la verificación del suceso A y se escribe  $B/A$ "

Sin embargo, el álgebra de sucesos es siempre isomorfa a un álgebra de conjuntos y las únicas operaciones posibles en un álgebra de conjuntos son la usuales de unión, intersección y diferencia. El estudio de la transposición didáctica se preocupa, entre otras cuestiones, de detectar y analizar esta clase de diferencias y hallar las causas por las cuales se han producido, con objeto de subsanarlas y evitar que la enseñanza transmita significados inadecuados sobre los objetos matemáticos.

#### *Otros nociones teóricas*

Además de las nociones anteriores, otros conceptos teóricos de interés son los siguientes:

##### *Contrato didáctico*

El contrato didáctico es un conjunto de reglas - con frecuencia no enunciadas explícitamente - que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemáticas (Brousseau, 1986).

Como ejemplo de este fenómeno se suele citar la investigación de Stella Baruk referida a la contestación de una amplia muestra de alumnos al problema denominado "la edad del capitán".

Un enunciado típico de este problema es el siguiente:

Un barco mide 37 metros de largo y 5 de ancho. ¿Cuál es la edad del capitán?

Preguntados sobre este problema, la mayoría de los niños en los primeros años escolares responde que 42 o 32 años. Si se cambia el enunciado, incluyendo otros datos o variando los números se da como respuesta un valor que pueda obtenerse mediante operaciones aritméticas con los datos del enunciado. Son muy pocos los casos de niños que contestan que no tiene sentido la pregunta.

El interés de esta noción se debe a que muchos estudiantes responden a una cuestión, no según un razonamiento matemático esperado, sino como consecuencia de un proceso de decodificación de las convenciones didácticas implícitas. Los estudios sobre el contrato didáctico y sus relaciones con los procesos de aprendizaje son esenciales ya que lo que está en juego es el significado real del conocimiento construido por los alumnos.

##### *Campos conceptuales*

Los conceptos matemáticos se dotan de significado a partir de una variedad de situaciones; cada situación no puede ser analizada usualmente con la ayuda de un solo concepto sino que precisa varios de ellos. Esta es la razón que ha llevado a Vergnaud (1990b) al estudio de la enseñanza y aprendizaje de campos conceptuales, esto es, grandes conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas unas con otras. Como ejemplos de tales campos conceptuales pueden citarse las estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, la lógica de clases y el álgebra elemental.

A estas nociones habría que añadir otras como las del juego de cuadros y dialéctica útil-objeto (Douady (1986)), Ingeniería didáctica reproductibilidad (Artigue (1989)), etc. Por las necesidades de brevedad, remitimos al lector interesado a las referencias citadas. Algunas de las nociones mencionadas en esta Sección puede consultarlas el lector en el texto de esta colección de Centeno (1988).

### *Conclusión*

La exposición sintética que hemos hecho de algunas de las nociones teóricas desarrolladas por los didactas franceses - que comprende un colectivo de una centena de investigadores (Laborde, 1989) es una muestra de que, bajo nuestro punto de vista, la Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática está en camino de constituir un "núcleo firme" de conceptos teóricos que sirva de soporte de un programa de investigación en el sentido de Lakatos. Su capacidad de plantear nuevos problemas de investigación, y de enfocar los problemas clásicos bajo una nueva luz, está siendo puesta de manifiesto a través de la producción científica de todo el colectivo de investigadores. Nociones como las de transposición didáctica, contrato didáctico, obstáculo, se utilizan cada vez con mayor frecuencia en las publicaciones en revistas y actas de congresos internacionales de la especialidad.

En todo caso, parece fuera de duda, que existe en Francia una línea de investigación (en el sentido de Bunge) dentro del campo de la Didáctica de la Matemática, con una problemática fuertemente original, como pone de manifiesto Balachef (1990), que puede significar una ruptura epistemológica para esta disciplina científica. Está por determinar si alcanzará o no el carácter de paradigma predominante (Kuhn) en un futuro más o menos lejano.

### 3.4. OTRAS TEORÍAS RELEVANTES SOBRE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Las investigaciones sobre la enseñanza y el currículo matemático constituyen un área de estudio en Didáctica de la Matemática de extraordinario interés. Para el mundo de la práctica el currículo y la instrucción son el centro de la acción ya que se orientan hacia necesidades vitales para mejorar los programas de la matemática escolar, planteándose, por tanto, cuestiones básicas para la investigación.

La investigación sobre currículo e instrucción, utilizando resultados de otros campos de la Educación Matemática - teorías del aprendizaje fundamentalmente - trata de ser una indagación sistemática para comprender o mejorar:

- a) la selección y estructuración de las ideas matemáticas a enseñar;
- b) la presentación de esas ideas a los alumnos;
- c) la evaluación de la efectividad del programa y del rendimiento de los alumnos.

En síntesis, se interesa por comprender las combinaciones de contenido, secuenciación, estrategias y sistemas de impartición más efectivos para distintos perfiles de aptitudes de los alumnos.

Un estudio pormenorizado de este campo, que incluye la descripción de la problemática y una valoración de resultados, se puede encontrar en Fey (1980) y Romberg y Carpenter (1986). Asimismo, recomendamos el trabajo de Rico (1990).

Una característica de las investigaciones sobre el currículo y la enseñanza es su extraordinaria complejidad. Por ello, como indica Fey, los diseñadores de materiales curriculares o de procedimientos de instrucción, con frecuencia, basan sus esfuerzos en la creatividad personal, en juicios intuitivos y en la elaboración de tests informales. Se dispone de poca investigación que explique la dinámica del sistema que pudiese transformar la mezcla de necesidades, intereses y valores en un currículo científicamente fundamentado. Así, la selección de los temas de la matemática escolar, se determina por:

- la estructura interna de la disciplina, sin un análisis epistemológico riguroso;
- el interés público, medido de un modo informal;
- la recomendación de expertos prestigiosos;
- los libros de texto, elaborados a veces con escasa fundamentación científica.

En consecuencia, no parece existir todavía un fundamento teórico y experimental consistente para la investigación sobre el currículo y la instrucción. Entre las cuestiones importantes y estrategias para las investigaciones futuras, Fey (1980) citaba, precisamente, como

tema prioritario la búsqueda de una teoría de la instrucción, o sea el diseño de modelos teóricos que relacionen las principales variables curriculares e instructivas.

El objetivo más perseguido en este campo ha sido el de buscar el mejor método de instrucción; pero ha sido improductivo en la identificación de procedimientos generales apropiados, secuenciación de estrategias o formas de presentación. En consecuencia, la investigación se está orientando hacia análisis más microscópicos del proceso curricular y hacia la búsqueda de los efectos que se esperan de una aproximación particular en situaciones y contenidos particulares. Este es el enfoque que se aprecia en la escuela francesa de didáctica de la matemática para las cuestiones curriculares.

Otras investigaciones sobre currículo e instrucción se han orientado hacia cuestiones generales, independientes de los contenidos particulares. Romberg y Carpenter (1986) afirman que la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza no han estado directamente relacionadas con las matemáticas y que los casos que han versado sobre este contenido se han centrado en mejorar la enseñanza de la matemática tradicional haciéndola más eficiente. Ahora bien, tales estudios se han basado en concepciones de la matemática y del aprendizaje ajenos a la perspectiva y resultados de las investigaciones cognitivas y, por tanto, sus hallazgos positivos podrían incluso ser irrelevantes o posiblemente perjudiciales.

Las ideas sobre el contenido que se enseña son ignoradas a menudo o se considera que están al margen del espectro de indagación en la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza. Romberg, Small y Carnahan (1979) localizaron cientos de estudios que valoraban la efectividad de casi todos los aspectos concebibles de la conducta docente, pero encontraron pocos modelos de instrucción que incluyeran la componente del contenido. Sin embargo, se reconoce la necesidad de acometer investigaciones que tengan en cuenta el contenido específico y las técnicas didácticas apropiadas para tal contenido. En general, los estudios llevados a cabo dentro del paradigma proceso - producto relacionados con la enseñanza de las matemáticas no han logrado dotar a los profesores de una lista de conductas examinables que les hiciera más competentes y les asegurase que sus alumnos aprendan. En cierto sentido, esta investigación refleja los estadios iniciales de lo que Kuhn (1969) denominó "la ruta de la ciencia normal". En ausencia de un paradigma o de un conjunto de principios organizativos, todos los hechos, que posiblemente atañesen a un área problemática, es posible que parezcan de igual relevancia.

Los estudios sobre enseñanza de las matemáticas hechos bajo un paradigma interpretativo, aunque son considerablemente menos numerosos que los positivistas, son interesantes ya que a través de diferentes lentes conceptuales se iluminan diversos aspectos de la enseñanza de la matemática. Como ejemplo puede citarse la línea de investigación sobre el pensamiento del profesor acerca de la Matemática y su enseñanza y el efecto de estas concepciones sobre su acción docente. Esta línea de trabajo está adquiriendo un interés creciente como puede verse en Llinares y Sanchez (1990).

Entre las teorías generales que se han proyectado sobre la Educación Matemática, y que sólo han sido mencionadas, destacamos el conductismo, el aprendizaje por descubrimiento (Bruner) y el aprendizaje significativo (Ausubel). La falta de espacio y el enfoque que hemos dado al Capítulo nos impide hacer una presentación con el detalle que requieren. Una síntesis de ellas, desde una perspectiva de la Didáctica de la Matemática, puede encontrarla el lector en el texto de Orton (1988), así como de la teoría del aprendizaje matemático de Dienes. Otra teoría relevante para la investigación didáctica es la de los niveles de razonamiento de Van Hiele que puede consultarse en Jaime y Gutierrez (1990). Finalmente, no podemos dejar de resaltar la importancia del trabajo teórico de Freudenthal (1983) sobre la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.

#### 4. LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO SABER CIENTIFÍCO, TECNOLÓGICO Y TÉCNICO

### *Disciplina autónoma, pluridisciplinariedad y transdisciplinariedad*

Una vez descritas las principales corrientes de investigación dentro de la teoría de la Didáctica de la Matemática, en esta Sección trataremos de realizar una reflexión final acerca de la naturaleza de este campo como área de conocimiento. ¿Se trata de un saber meramente práctico, una tecnología fundada y dependiente de otras ciencias, o, por el contrario, existen problemas cuyas características requieren un nivel de análisis teórico y una metodología propias de un verdadero saber científico?

Esta reflexión epistemológica, que es esencial para orientar adecuadamente la investigación didáctica, ya que condiciona la formulación de las cuestiones centrales de la misma (Godino, 1990), apenas ha sido tratada en la bibliografía. Destaca, sin embargo, el trabajo de Brousseau (1989) con el significativo título "La tour de Babel" y las ideas de Steiner, que a continuación exponemos.

Ante la extrema complejidad de los problemas de la Educación Matemática, Steiner (1985) indica que se producen dos reacciones extremas:

- los que afirman que la Didáctica de la Matemática no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica y, por tanto, la enseñanza de la matemática es esencialmente un arte;
- los que, pensando que es posible la existencia de la Didáctica como ciencia, reducen la complejidad de los problemas seleccionando sólo un aspecto parcial (análisis del contenido, construcción del currículo, métodos de enseñanza, desarrollo de destrezas en el alumno, interacción en el aula,... ) al que atribuyen un peso especial dentro del conjunto, dando lugar a diferentes definiciones y visiones de la misma.

De manera parecida se expresa Brousseau (1989) indicando una primera acepción de la Didáctica de la Matemática, que consiste en la identificación de la didáctica como el ARTE DE ENSEÑAR - conjunto de medios y procedimientos que tienden a hacer conocer, en nuestro caso, la matemática.

Brousseau (1989), sin embargo, distingue dos concepciones de carácter científico que denominaremos concepción PLURIDISCIPLINAR APLICADA y concepción AUTÓNOMA (calificada por Brousseau como FUNDAMENTAL O MATEMÁTICA). Como bisagra entre estos dos grupos se distingue también una concepción TECNICISTA, para la que la didáctica serían las técnicas de enseñanza, "la invención, descripción, estudio, producción y el control de medios nuevos para la enseñanza: currícula, objetivos, medios de evaluación, materiales, manuales, logicales, obras para la formación, etc."

En el punto de vista que hemos denominado concepción PLURIDISCIPLINAR de la didáctica, que coincidiría con la segunda tendencia señalada por Steiner, ésta aparece como una etiqueta cómoda para designar las enseñanzas necesarias para la formación técnica y profesional de los profesores. La Didáctica como área de conocimiento científico sería "el campo de investigación llevado a cabo sobre la enseñanza en el cuadro de disciplinas científicas clásicas", como son: la psicología, la semiótica, sociología, lingüística, epistemología, lógica, neurofisiología, pedagogía, pediatría, psicoanálisis, ... En este caso, la naturaleza del conocimiento didáctico sería el de una tecnología fundada en otras ciencias.

La concepción autónoma tiende a integrar todos los sentidos precedentes y a asignarles un lugar en relación a una teoría unificadora del hecho didáctico, cuya fundamentación y métodos serían específicos, pretendiendo una justificación endógena. Dicha concepción pudiera ser el comienzo de una respuesta a la necesidad señalada por Steiner "de una base teórica que nos permita una mejor comprensión e identifique las diversas posiciones, aspectos e intenciones que subrayan las diferentes definiciones de Educación Matemática en uso, para analizar las relaciones entre estas posiciones y conjuntarlas en una comprensión dialéctica del campo total". (Steiner, 1985, pg.11).

En la escuela francesa de Didáctica se observa una aspiración de construir un área de

estudio científico propio que no esté encorsetado y dependiente del desarrollo de otros campos científicos, no siempre consistentes. Contrasta este objetivo con la postura de Steiner quien no es partidario de insistir en la búsqueda de teorías internas (home-theories) ya que ve en ellas un peligro de restricciones inadecuadas. La naturaleza del tema y sus problemas reclama una aproximación interdisciplinar y considera erróneo no hacer un uso significativo del conocimiento que otras disciplinas ya han producido sobre aspectos específicos de aquellos problemas.

En el trabajo ya citado, Steiner afirma que la Educación Matemática debe tender hacia lo que Piaget llama transdisciplinariedad, que cubriría no solo las interacciones o reciprocidades entre proyectos de investigación especializados, sino que situaría estas relaciones dentro de un sistema total sin límites fijos entre disciplinas.

### *Conexión teoría-práctica*

Brousseau (1988) analiza la relación que puede existir entre su concepción de la Didáctica de la Matemática, como teoría fundamental de la comunicación de los conocimientos matemáticos, frente a otras perspectivas y orientaciones, afirmando que no hay ninguna incompatibilidad. Por el contrario, es una concepción que favorece la integración de aportaciones de otros dominios y su aplicación a la enseñanza, y que establece con la práctica una relación sana de ciencia a técnica y no de prescripción a reproducción.

No condena, a priori, ninguna acción en favor de la enseñanza. Pero es preciso comprender que es un error querer a toda costa obligar a la didáctica a comprometerse en cada una de estas acciones y a jugar un papel que no le corresponde. En el mejor de los casos, se le proponen desafíos que no se osaría exigir a ciencias que están, sin embargo, mucho más avanzadas. En el peor de los casos, se corre el riesgo de confiar a sus expertos responsabilidades por encima de sus fuerzas y de reproducir errores semejantes a los que se han visto en otras partes (por ejemplo, en economía, ...). Como se afirma en Godino (1990), la mejora efectiva de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas depende del funcionamiento óptimo de otros elementos, ajenos a la propia investigación didáctica, condicionantes de la toma de decisiones en el sistema didáctico. Particularmente, dada la influencia sobre las decisiones del profesor en el aula de factores como las directrices curriculares, los procedimientos de evaluación externa, la difusión de materiales didácticos, etc., se considera imprescindible facilitar la intercomunicación de los agentes responsables de ellos con los investigadores, así como la potenciación de la investigación didáctica.

De esta investigación didáctica, entendida bajo una perspectiva científica, no podemos esperar la producción de situaciones didácticas modélicas que el profesor debe imitar, "pero es razonable pensar que el desarrollo de la investigación proporcionará algún conocimiento que capacitará a los profesores para afrontar el problema didáctico difícil de conducir la vida de esta sociedad cognitiva original: la clase de matemáticas" (Balacheff, 1990b, p. 7)

### *Conclusión*

En este Capítulo hemos efectuado un análisis del estado actual del desarrollo teórico de la Didáctica de la Matemática, particularmente de las grandes corrientes o líneas de investigación actuales. El propósito perseguido ha sido la clarificación del papel de este área de conocimiento en el panorama de la ciencia y de la técnica y de sus conexiones con otras disciplinas. También, nos hemos preguntado sobre la consideración de la Didáctica de la Matemática como campo de conocimiento pluridisciplinar o autónomo y el carácter científico - técnico del mismo.

Sobre esta última problemática, coincidimos con el análisis efectuado por Bedito (1987), quien tras el resumen que presenta de las distintas concepciones epistemológicas, otorga a la didáctica general un triple carácter: científico, tecnológico y práctico. Coincidimos con este autor y consideramos que su análisis es aplicable también para la Didáctica de la Matemática, que no puede quedar relegado como un apéndice técnico de teorías más generales.

Las características de la misma se pueden desglosar, como hace el autor citado para la didáctica general, en los aspectos indicados en el cuadro 2.

Por otro lado, nuestra búsqueda de una teoría de carácter fundamental en el sentido de Burkhart (sección 2.1), con aceptación general para explicar y predecir el conjunto de fenómenos de los procesos de enseñanza-aprendizaje matemático, ha sido infructuosa. El estado de la Didáctica de la Matemática puede definirse como el de un campo de investigación científico-tecnológico emergente en el que se identifican un cúmulo de teorías competitivas, expresadas generalmente de un modo informal y dependientes especialmente de planteamientos psicológicos. Sin embargo, el número y calidad creciente de las investigaciones en el área nos hacen ser optimistas sobre la consolidación de nuestra disciplina como campo autónomo de conocimiento en un futuro no muy lejano.

---

#### COMO SABER CIENTÍFICO:

- Recibe aportaciones de otras ciencias.
- Intenta elaborar teorías descriptivas, explicativas o axiomáticas de menor a mayor formalización, a partir de los resultados de la investigación.
- Se proyecta sobre la tecnología.
- Utiliza el método científico.

#### COMO SABER TECNOLÓGICO:

- Es una actividad científicamente fundada, es decir, una ciencia aplicada que se inspira en el conocimiento científico.
- Utiliza el método científico y el método tecnológico, en el sentido de Bunge.
- Se apoya en modelos y diseños progresivamente rigurosos y adecuados a la idiosincrasia de la didáctica, con evaluación de resultados.
- Está en continua interacción con la práctica.

#### COMO HACER TÉCNICO:

- Se nutre, o se ha de nutrir, de las normas, leyes o reglas derivadas del saber científico y del tecnológico.
- Adapta la norma con flexibilidad a cada caso particular y no al revés.
- Es punto de partida de nuevos enfoques, revisiones e investigaciones destinados a mejorar el saber tecnológico y el científico.

*Cuadro 2: Característica de la didáctica (Benedito, 1987)*

---

#### ***Agradecimientos***

Agradezco las sugerencias y correcciones sobre este trabajo que he recibido de A. Gutiérrez (Dpto de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia), E. Wenzelburger (Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM (México)), M.L. Oliveras y M.C. Batanero (Dpto de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada).

#### **BIBLIOGRAFÍA:**

- Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, n. 3, pp. 281-308.
- Balacheff, N. (1990a). Future perspectives for research in the psychology of mathematics

- education. En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Balacheff, N. (1990b). Beyond a psychological approach: the Psychology of Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, p. 2-8.
- Balacheff, N. (1990c). Towards a problématique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 21, n. 4, pp. 258-272.
- Benedito, V. (1987). *Introducción a la Didáctica. Fundamentación teórica y diseño curricular*. Barcelona: Barcanova.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 4, n. 2, pp. 165-198.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.
- Brousseau, G. (1988). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x*, n. 21, pp.47 - 68. [Traducción castellana en la revista Suma, n. 4 y 5].
- Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. Etudes en Didactique des Mathématiques. *Article occasionnel n. 2. IREM de Bordeaux*.
- Bunge, M. (1985a). *Epistemología*. Barcelona: Ariel.
- Bunge, M. (1985b). *Pseudociencia e ideología*. Madrid: Alianza.
- Burkhardt, H. (1988). The roles of theory in a 'systems' approach to mathematical education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n.5, pp. 174-177.
- Centeno, J. (1988). *Números decimales*. (Nº 5 Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje). Madrid: Síntesis.
- Chalmers, A.F. (1986) *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?*. Madrid: Siglo XXI.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1989) Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actas del Seminario de Grenoble. IREM Université de Grenoble*.
- Chevallard, Y. y Johsua, M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 3, n. 1, pp. 159-239.
- Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. London: Croom Helm.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 5-31.
- Fey, J.T. (1980). Mathematics education research on curriculum and instruction. En: R.J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston, VA: N.C.T.M.
- Fischbein, E. (1990). Introduction (Mathematics and Cognition). En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Furinghetti, F. (Ed.) (1991). *International Group for the Psychology of Mathematics Education. Proceeding Fifteenth PME Conference*. Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova. Italia.
- Genovard, C. y Gotzens, C. (1990). *Psicología de la instrucción*. Madrid: Santillana.
- Gimeno Sacristán, J. (1986). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del currículo*. Madrid: Anaya.
- Godino, J.D. (1990). Concepciones, problemas y paradigmas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Sevilla: Soc. Thales.
- Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 1, n.2 pp. 3-7.
- Kilpatrick, J. (1985). Reflection and recursion. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 1-26.
- Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. *Proc. 11th Conference PME*. Montreal, p. 3-23.

- Kuhn, T.S. (1975). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: F.C.E.
- Laborde, C. (1989). Audacity and reason: French research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, n. 3, pp. 31-36.
- Lakatos, I. y Musgrave, A. (1975). *La crítica y el desarrollo del conocimiento*. Barcelona: Grijalbo.
- Llinares, S. y Sanchez, M.V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En: S. Llinares y M.V. Sanchez (Eds), *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.
- Mosterín, J. (1987). *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid: Alianza Universidad.
- Orton, A. (1988). *Learning mathematics. Issues, theory and classroom practice*. London: Cassel. [Traducción castellana: "Didáctica de las Matemáticas". Madrid: MEC y Morata, 1990].
- Orton, R.E. (1988). Two theories of "theory" in Mathematics Education: using Kuhn and Lakatos to examine four foundational issues. *For the Learning of Mathematics* Vol. 8, n. 2, pp. 36-43.
- Resnick, L.B. y Ford, W.W. (1984). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, N.J.: LEA. [Traducción castellana: "La enseñanza de las matemáticas y su fundamento psicológico. Barcelona: Paidós-MEC, 1990].
- Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural. En: S. Llinares y M.V. Sanchez (Eds), *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.
- Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a Theory of Mathematics Education. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Proceeding 2nd TME- Conference*. Bielefeld - Antwerp: Dept of Didactics and Criticism Antwerp Univ. & IDM.
- Romberg, T. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific inquiry. En M.C. Wittrock (Ed.) *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan.
- Schoenfeld, A.H. (1987). Cognitive science and mathematics education: an overview. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*. London: LEA, p. 1-32.
- Shulman, L.S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. En M.C. Wittrock (Ed.) *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan. [Traducción castellana en: La investigación de la enseñanza, I, Paidós-MEC, 1989].
- Stanic, G.M.A. (1988). A response to professor Steiner's "Theory of Mathematics Education". En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Proceeding 2nd TME- Conference*. Bielefeld - Antwerp.
- Steiner, H.G. (1984); Balacheff, N. y otros. (Eds.) *Theory of mathematics education (TME)*. ICME 5. Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.
- Steiner, H.G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics*, Vol 5. n. 2, pp. 11-17.
- Steiner, H.G.; Vermandel, A. (Eds) (1988). *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics)*. Proc. 2nd TME Conference. Antwerp and Bielefeld: Dpt of Didactics and Criticism Antwerp Univ. and IDM.
- Steiner, H.G. (1990). Needed cooperation between science education and mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* n. 6, pp. 194-197.
- Steiner, G.H.; Batanero, M.C.; Godino, J.D. y Wenzelburger, E. (1991). Preparation of researchers in mathematics education: an international survey (preliminary report). *5-TME Conference*, Paderno del Grappa (Italia)
- Vergnaud, G. (1988). Why is psychology essential? Under which conditions?. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics*

- Education. Proceeding 2nd TME- Conference. Bielefeld - Antwerp.*
- Vergnaud, G. (1990a). Epistemology and psychology of mathematics education. En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Vergnaud, G. (1990b). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 10, n. 2,3, pp. 133-170.
- Vermandel, A.; Steiner, H:G.(Eds) (1988). *Investigating and bridging the teaching-learning gap. Proc. 3rd TME Conference*. Antwerp: Dept of Didactics and Criticism Antwerp Univ.
- Wenzelburger, E. (1990). Teoría e investigación en Educación Matemática. 4 Conferencia TME. Oaxtepec (México).