Algebras duales generadas por N-uplas polinomialmente acotadas

por

Gerardo Chacón

Tesis de Grado presentada como requisito parcial

para optar al Título de Philosophus Scientiarum en Matemáticas

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

I. V. I. C.

Centro de Estudios Avanzados

Caracas

Febrero, 2000

La Tesis de grado de Gerardo Chacón titulada **"Algebras duales generadas por N-uplas polinomialmente acotadas"**, ha sido aprobada por el jurado, quien no se hace responsable de su contenido, pero que la ha encontrado correcta en su calidad y en su forma de presentación en fe de lo cual firman,

Carlos Di Prisco
I.V.I.C.

Stefania Marcantognini
I.V.I.C.

Mischa Cotlar
U.C. V.

Marisela Domínguez
U.C.V.

Carlos Durán
I.V.I.C.

Vladimir Strauss
U.S.B.

Alfredo Octavio
Director de la Tesis de Grado
I.V.I.C.

Centro de Estudios Avanzados, IVIC
Altos de Pipe, Febrero 2000

Resumen de la Tesis de Grado presentada para optar

al título de Philosophus Scientiarum en Matemáticas

Algebras duales generadas por N-uplas polinomialmente acotadas

por

Gerardo Chacón

Centro de Estudios Avanzados

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

I. V. I. C.

Caracas, Febrero 2000

Alfredo Octavio

Director de la Tesis

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, complejo, de dimensión infinita y separable. En este trabajo se consideran N-uplas polinomialmente acotadas de operadores, actuando en $\mathcal{H}$, que conmutan entre sí.

De modo análogo a los casos de una contracción, de un operador polinomialmente acotado y de N-uplas de contracciones, una herramienta fundamental para el estudio de tales N-uplas es la existencia de representaciones w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$, generadas por

esas N-uplas. Se estudian tales representaciones y se establecen condiciones necesarias y suficientes para su existencia.

Se estudia la clase $ACPB^N(\mathcal{H})$, formada por las N-uplas polinomialmente acotadas de operadores que conmutan entre sí y generan representaciones w^*-continuas. Siguiendo las técnicas clásicas de álgebras duales, se introducen las correspondientes clases $\mathbb{A}_{p,q}^N(\mathcal{H})$ $(1 \leq p, q \leq \aleph_0)$ y se inicia su estudio. En particular, las técnicas indicadas de álgebras duales conducen a resultados iniciales en la búsqueda de subespacios invariantes para las N-uplas consideradas, bajo ciertas condiciones sobre el espectro de la N-upla. Finalmente, se estudia la relación de la pertenencia a la clase $\mathbb{A}_{\aleph_0}^N(\mathcal{H})$ y la propiedad $X_{\theta,\gamma}$ $(0 \leq \theta < \gamma \leq 1)$.

A mi esposa;
a mi hijo.

Agradecimiento

A mi Tutor el Dr. Alfredo Octavio. A su puerta un escrito dice: *"I love math"*. Gracias por ayudarme a compartir ese amor. Mi más profunda gratitud por la extraordinaria generosidad con la que me regalo tiempo, paciencia, ayuda,...

Al Departamento de Matemáticas del IVIC. Espero siempre poder seguir el ejemplo de laboriosidad y entrega a la Ciencia que Uds. me dieron.

Al Grupo de Teoría de Operadores. La dirección `http://GroupOT.ivic.ve/` es una cita con la excelencia, con el esfuerzo sostenido, con la vocación por la Ciencia...

A mi amada esposa Betty. Estos tres años de luna de miel en el IVIC han sido maravillosos. Sólo por tu compañía y apoyo ha podido salir algo bueno de mi trabajo.

A mi hijo. La promesa de colocarte tu medalla el día ya cercano en que obtengas tu primer título universitario y que seamos *colegas* fue la motivación más importante de este esfuerzo.

Al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas. Los amables atardeceres y las estrelladas madrugadas de Altos de Pipe acogiendo el trabajo de este monaterio de la Ciencia, reconcilian con la esperanza en Venezuela.

A la Universidad de los Andes.

Gracias a todos.

Indice General

1 Introducción **1**

2 Preliminares **5**

2.1 Notación básica 5

2.2 Elementos de teoría de funciones en el polidisco 7

2.3 Elementos de álgebras de funciones 12

2.4 Elementos de álgebras duales 15

3 Representaciones generadas por N-uplas polinomialmente acotadas **18**

3.1 Representaciones generadas por N-uplas 18

3.2 La clase $ACPB^N(\mathcal{H})$ 20

3.3 Existencia de representaciones 24

4 Las clases $\mathbb{A}^N(\mathcal{H})$ y $\mathbb{A}_p^N(\mathcal{H})$ **33**

4.1 Conceptos básicos 33

4.2 Espectro dominante y subespacios invariantes 35

4.3 La clase $\mathbb{A}_{\aleph_0}^N(\mathcal{H})$ y la propiedad $X_{\theta,\gamma}$ 40

Capítulo 1

Introducción

La teoría multiparamétrica de operadores es el estudio de N-uplas de operadores (lineales y acotados), actuando en un espacio de Hilbert (complejo, separable y de dimensión infinita). Se trata de un campo que ha recibido recientemente una creciente atención y continúa siendo objeto de investigación. La teoría de álgebras duales, que ha sido utilizada con éxito para estudiar la estructura de un operador actuando en un espacio de Hilbert, ha venido siendo aplicada más recientemente (cf. [Oct91] y [Pta98] y las referencias allí citadas), al correspondiente estudio de N-uplas de contracciones, con algunos éxitos relativamente más modestos, pero importantes, que abren diversas perspectivas.

Particularmente, el objeto fundamental del estudio de álgebras duales, esto es, el *problema del subespacio invariante* (i.e., la pregunta de si cada operador definido en un espacio de Hilbert posee subespacios invariantes no triviales) se plantea de modo natural en el contexto de la teoría multiparamétrica de operadores: dada una N-upla de operadores actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, ¿ posee $\mathcal{H}$ un subespacio no trivial invariante para cada uno de los elementos de la N-upla ?

Tal cuestión, ciertamente contiene el tremendamente escurridizo problema para un sólo operador y como tal parecería fuera de alcance. No obstante los progresos y respuestas parciales en el caso de varias variables, podrían arrojar luz sobre el caso de una variable (cf. [Ion96]).

En la literatura reciente (cf. [Pta98]) es considerado el caso de N-uplas de contracciones que conmutan entre sí, y se han hecho importantes progresos. En particular, se hace uso extensivo de representaciones de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ que, de modo análogo al cálculo funcional de Sz.-Nagy y Foias, es la base de la técnica de álgebras duales.

A partir de la exitosa experiencia en este caso, se ha propuesto como programa de trabajo, verificar si los análogos a los resultados de una variable son válidos para este contexto. Ciertamente la extensión no es trivial y surgen dificultades que han sido calificadas incluso de "recalcitrantes" (cf. [KO]). El paso de una a varias variables, de un modo quizá paralelo a lo que ocurre al pasar de la teoría de funciones de una variable compleja a la de varias variables, parecería requerir nuevas ideas.

Por otra parte, en el caso de una variable, se han hecho esfuerzos por desarrollar una teoría paralela a la de una contracción, para operadores polinomialmente acotados (cf. [Li92] y [LP95]). El reciente resultado negativo de Pisier (cf. [Pis97]) al problema de Halmos de si cada operador polinomialmente acotado es similar a una contracción, da un interés adicional a la consideración de este tipo de operadores.

En el caso de varias variables la situación ofrece diversas cuestiones fundamentales que continúan abiertas. Para una y dos variables, la existencia de dilataciones unitarias dada por los Teoremas de Sz.-Nagy y Ando respectivamente, permite deducir fácilmente que cada contracción y cada par de contracciones que conmutan satisfacen la desigualdad de von Neumann, esto es, dadas dos contracciones T_1 y T_2 que conmutan entre sí, se tiene que para cada polinomio $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ se cumple que

$$\|p(T_1, T_2)\| \le \sup_{z \in \mathbb{D}^2} |p(z)|.$$

Para más de dos contracciones que conmutan, en general no existe una dilatación unitaria y es desconocido si existe alguna constante M (dependiendo de N) tal que

$$\|p(T_1, \ldots, T_N)\| \le M \sup_{z \in \mathbb{D}^N} |p(z)|,$$

para cada N-upla $(T_1, \ldots, T_N)$ de contracciones que conmuten entre sí y cada polinomio $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ (cf. [Pis96]).

La consideración de N-uplas de operadores que conmutan entre sí y satisfacen una desigualdad como la anterior surge pues, como tema de interés en la teoría multiparamétrica de operadores.

En este trabajo abordamos el estudio de esta clase de N-uplas. El Capítulo 2 presenta la notación y terminología que requeriremos e incluye una revisión de los elementos de Teoría de Funciones en el Polidisco, Algebras de Funciones y Algebras Duales necesarios para obtener una exposición relativamente autocontenida.

En el Capítulo 3 se estudian las representaciones w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ generadas por N-uplas polinomialmente acotadas de operadores que conmutan entre sí. Los resultados integran los obtenidos previamente para una variable (cf. [SNF68] y [Li92]) y varias variables (cf. [BDØ73], [Oct91], [KP90], [KO97] y [Ion98]. En nuestro resultado principal al respecto, contenido en el Teorema 3.3.4, damos una respuesta definitiva al problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre una N-upla polinomialmente acotada para que ésta genere representaciones w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$.

En trabajos previos al respecto se construyen representaciones w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ generadas por N-uplas polinomialmente acotadas bajo ciertas hipótesis adicionales. En [Apo80] tal construcción se hace bajo la hipótesis de que la N-upla satisfaga una condición denominada *condición de Apostol*. En [KP90] la construcción se hace para N-uplas de contracciones que verifiquen la desigualdad de von Neumann y que sean absolutamente continuas. En [Li92] se considera el caso de representaciones generadas por un operador polinomialmente acotado absolutamente continuo y en [Ion98] el de pares de operadores polinomialmente acotados que conmutan entre sí y son absolutamente continuos.

En nuestro resultado principal probamos que la existencia de representaciones w^*-continuas generadas por N-uplas polinomialmente acotadas es equivalente tanto a la continuidad absoluta como a la condición de Apostol, dando así una respuesta definitiva al problema planteado.

En el Capítulo 4 se considera la clase $ACPB^N(\mathcal{H})$ formada por las N-uplas polinomialmente acotadas de operadores que conmutan entre sí y generan representaciones w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$.

La teoría de álgebras duales ha sido exitosa en el caso de una variable al estudiar representaciones isométricas (en el caso de contracciones) y representaciones inversibles (en el caso polinomialmente acotado). Introducimos la clase $\mathbb{A}^N(\mathcal{H})$ de aquellos elementos de $ACPB^N(\mathcal{H})$ que generan representaciones w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ inversibles. Iniciamos el estudio de tales N-uplas y de modo análogo a la teoría clásica de álgebras duales generadas por contracciones, se estudia el predual del álgebra w^*-cerrada con unidad $\mathcal{A}_T$ generada por la N-upla $T \in \mathbb{A}^N(\mathcal{H})$, en búsqueda de subespacios invariantes no triviales para la N-upla. El Teorema 4.3.4 presenta los resultados que hemos obtenido con respecto a este problema, los cuales extienden resultados conocidos para N-uplas de contracciones.

Finalmente se considera la clase $\mathbb{A}^N_{\aleph_0}(\mathcal{H})$, una subclase de $\mathbb{A}^N(\mathcal{H})$, cuyos elementos poseen gran provisión de subespacios invariantes y se estudia un problema propuesto en [Oct95] sobre la relación entre la pertenencia a dicha clase y cierta propiedad de "factorización" de los elementos del predual de $\mathcal{A}_T$. Nuestro resultado, que da una respuesta parcial al Problema 4.3.3, está contenido en el Teorema 4.3.5.

Los conceptos y resultados aquí introducidos no son más que elementos iniciales en el marco de la hermosa teoría de las álgebras duales aplicadas a nuestra clase de N-uplas. Numerosas cuestiones quedan abiertas en espera de posteriores investigaciones.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Notación básica

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita. Escribiremos $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ para designar el álgebra de los operadores lineales y acotados definidos en $\mathcal{H}$. Como es usual, $\mathbb{N}$ designará el conjunto de los enteros no negativos, $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y $\mathbb{C}$ el plano complejo. El disco unitario en $\mathbb{C}$ se denota por $\mathbb{D}$ y su frontera es el círculo $\mathbb{T}$. El *polidisco unitario* $\mathbb{D}^N$ y el *toro* $\mathbb{T}^N$ son los subconjuntos de $\mathbb{C}^N$ los cuales son el producto cartesiano de N copias de $\mathbb{D}$ y de $\mathbb{T}$ respectivamente.

Al referirnos a un *subespacio* de $\mathcal{H}$ entenderemos siempre que éste es cerrado. Si $\mathcal{S}$ es una familia de operadores que conmutan entre sí, actuando en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, un subespacio $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ se dice *invariante* para $\mathcal{S}$ si $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$, para cada operador $T \in \mathcal{S}$. Un subespacio $\mathcal{M}$ es *hiperinvariante* para $\mathcal{S}$ si $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$, para cada operador T que conmute con los elementos de $\mathcal{S}$.

Los subespacios de $\mathcal{H}$ invariantes para $\mathcal{S}$ forman un retículo, que denotaremos $\operatorname{Lat} \mathcal{S}$. El *problema del subespacio invariante* es justamente la cuestión de si para cada operador T, el retículo de sus subespacios invariantes, que denotaremos $\operatorname{Lat} T$, contiene elementos distintos de (0) y $\mathcal{H}$.

El álgebra de los operadores $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tales que $\operatorname{Lat} \mathcal{S} \subseteq \operatorname{Lat} T$, se denotará por $\operatorname{Alg} \operatorname{Lat} \mathcal{S}$. Nótese que $\operatorname{Alg} \operatorname{Lat} \mathcal{S}$ es una subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, cerrada en la topología débil de operadores (WOT). Luego, si $\mathcal{W}(\mathcal{S})$ designa la menor subálgebra, con unidad y WOT-

cerrada, de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, que contiene a $\mathcal{S}$, se tiene que $\mathcal{W}(\mathcal{S}) \subseteq \operatorname{Alg}\operatorname{Lat}\mathcal{S}$.

Un álgebra de operadores $\mathcal{W}$ con unidad y WOT-cerrada, se dice *reflexiva* si $\mathcal{W} = \operatorname{Alg}\operatorname{Lat}\mathcal{W}$. Claramente, un álgebra reflexiva (distinta de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) posee subespacios invariantes no triviales.

Un *multi-índice* (de longitud N) es un elemento de $\mathbb{Z}_+^N$, el conjunto de las N-uplas $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ de enteros no negativos. Se usarán las siguientes notaciones: $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_N$, $\nu! = \nu_1! \cdots \nu_N!$ y $z^\nu = z_1^{\nu_1} \cdots z_N^{\nu_N}$ (para $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$).

Si $\mathfrak{X}$ es un espacio de Banach y $\mathfrak{X}^*$ su dual, la forma bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^*,$$

definida por

$$\langle x, x^* \rangle = x^*(x), \qquad x \in \mathfrak{X},\ x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

es una *dualidad* que permite introducir en $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{X}^*$ las topologías débil (denotada w) y débil* (denotada w^*) respectivamente.

La topología w es la topología localmente convexa definida en $\mathfrak{X}$ por la familia de seminormas

$$x \to |\langle x, x^* \rangle|, \qquad x^* \in \mathfrak{X}^*;$$

y la topología w^* es la topología localmente convexa definida en $\mathfrak{X}^*$ por la familia de seminormas

$$x^* \to |\langle x, x^* \rangle|, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Si X es un espacio compacto de Hausdorff, designaremos por $C(X)$ el álgebra de Banach de las funciones continuas, a valores complejos, definidas en X, con la norma del supremo, esto es,

$$\|f\|_\infty \equiv \sup\{|f(x)| : x \in X\}, \qquad f \in C(X).$$

Escribiremos $M(X)$ para denotar el espacio de las medidas complejas, regulares, de Borel definidas en X. Recordemos que $M(X)$ es un espacio de Banach, con la norma de la variación total y como es usual lo identificaremos con el espacio dual de $C(X)$.

En particular se considerarán medidas definidas en $\mathbb{T}^N$ y designaremos por m_N (o simplemente por m si no hay lugar a confusión) la medida de Lebesgue normalizada, definida en $\mathbb{T}^N$. Consideraremos también los espacios de Banach $L^p(\mathbb{T}^N)$, $1 \le p \le \infty$. Si $p \in [1, \infty)$, $L^p(\mathbb{T}^N)$ es el espacio de las funciones f definidas en $\mathbb{T}^N$ para las cuales

$$\|f\|_p \equiv \left(\int_{\mathbb{T}^N} |f|^p \, dm \right)^{1/p} < \infty;$$

y $L^\infty(\mathbb{T}^N)$ consiste de las funciones f medibles Borel definidas en $\mathbb{T}^N$ para las cuales el supremo esencial $\|f\|_\infty$, respecto a m, es finito.

Como es bien conocido, si $1 \le p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$, podemos identificar el espacio dual de $L^p(\mathbb{T}^N)$ con $L^q(\mathbb{T}^N)$, y en particular tenemos que

$$L^1(\mathbb{T}^N)^* = L^\infty(\mathbb{T}^N).$$

2.2 Elementos de teoría de funciones en el polidisco

En esta sección se describen brevemente los conceptos básicos de teoría de funciones en el polidisco que requeriremos. La referencia clásica sobre el particular es [Rud69].

En el bien conocido caso de una variable (cf. [Rud74]), la integral de Poisson de funciones en $L^1(\mathbb{T})$ (o más en general de medidas en $M(\mathbb{T})$), permite obtener sus extensiones armónicas en $\mathbb{D}$. Las extensiones así obtenidas satisfacen ciertas restricciones sobre su crecimiento. Recíprocamente, tomando límites radiales de funciones armónicas en $\mathbb{D}$ (con las correspondientes restricciones de su crecimiento), se recupera la función (o en general la medida) en la frontera $\mathbb{T}$. Los valores en la frontera $\mathbb{T}$ de estas funciones son justamente, los elementos de los clásicos espacios de Hardy.

En el caso del polidisco el desarrollo de la teoría básica es similar. Recordemos que el *Kernel de Cauchy* en $\mathbb{D}$ es la función definida por

$$C(z, \zeta) = \frac{1}{1 - z\overline{\zeta}},$$

para todo $(z, \zeta) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}$, y el *Kernel de Poisson* en $\mathbb{D}$ viene dado por

$$P(z, \zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2},$$

para $(z, \zeta) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}$.

Las correspondientes extensiones para el polidisco se definen por

$$C(z, \zeta) = \prod_{i=1}^{N} C(z_i, \zeta_i),$$

y

$$P(z,\zeta) = \prod_{i=1}^{N} P(z_i, \zeta_i),$$

donde $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{D}^N$ y $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \in \mathbb{T}^N$.

Si $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$, su *integral de Poisson* que denotaremos por $\tilde{f}$, es la función definida por

$$\tilde{f}(z) = \int_{\mathbb{T}^N} P(z,\zeta) f(\zeta)\, dm(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}^N.$$

Se ve fácilmente que $\tilde{f}$ es armónica en $\mathbb{D}^N$(es decir armónica en cada variable) y de hecho nos referiremos a ella como la *extensión armónica* de f a $\mathbb{D}^N$. Más en general para $\mu \in M(\mathbb{T}^N)$ se define su integral de Poisson por

$$\tilde{\mu}(z) = \int_{\mathbb{T}^N} P(z,\zeta)\, d\mu(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}^N.$$

Si f es una función definida en $\mathbb{D}^N$y $0 < r < 1$, escribiremos f_r para designar la aplicación dada por $f_r(\zeta) = f(r\zeta)$ para cada $\zeta \in \mathbb{T}^N$. La siguiente proposición extiende al polidisco los resultados conocidos para una variable.

Proposición 2.2.1. *(cf. [Rud69])*

1. *Si $f \in C(\mathbb{T}^N)$, entonces $\|f - f_r\|_\infty \to 0$ cuando $r \to 1$.*

2. *Si $1 \le p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$, entonces $\|f - f_r\|_p \to 0$.*

3. *Si $\mu \in M(\mathbb{T}^N)$ y μ_r es el elemento de $M(\mathbb{T}^N)$ definido por $\mu_r = \tilde{\mu}_r m$, entonces $\mu_r \to \mu$ en la topología w^* de $M(\mathbb{T}^N)$.*

4. *Si $f \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, entonces $\tilde{f}_r \to f$ en la topología w^* de $L^\infty(\mathbb{T}^N)$.*

El próximo resultado caracteriza las funciones armónicas en $\mathbb{D}^N$, que pueden representarse como integrales de Poisson, de medidas o funciones.

Proposición 2.2.2. *(cf. [Rud69]) Sea u una función armónica en $\mathbb{D}^N$.*

1. *Existe una medida $\mu \in M(\mathbb{T}^N)$ con $u = \tilde{\mu}$ si y sólo si $\sup_{0<r<1} \|u_r\|_1 < \infty$.*

2. *Si $1 < p \le \infty$, existe una función $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$ con $u = \tilde{f}$ si y sólo si $\sup_{0<r<1} \|u_r\|_p$ es finito.*

3. *Hay una función $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$ con $u = \tilde{f}$ si y sólo si $\{u_r\}$ es convergente en la norma de $L^1(\mathbb{T}^N)$.*

4. *Hay una función $f \in C(\mathbb{T}^N)$ con $u = \tilde{f}$ si y sólo si $\{u_r\}$ es uniformemente convergente.*

El siguiente resultado describe el comportamiento de los límites radiales de funciones armónicas, que satisfacen las condiciones de crecimiento en $\mathbb{D}^N$indicadas.

Proposición 2.2.3. *(cf. [Rud69]) Si $1 \le p \le \infty$ y $u : \mathbb{D}^N \to \mathbb{C}$ es una función armónica tal que* $\sup_{0<r<1} \|u_r\|_p < \infty$, *entonces*

$$f(\zeta) \equiv \lim_{r\to 1} u(r\zeta)$$

existe y es finito c.t.p.$[m]$ *en $\mathbb{T}^N$. Si $1 < p \le \infty$, entonces $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$ y $u = \tilde{f}$. Si $p = 1$, entonces $u = \tilde{\mu}$ para alguna medida $\mu \in M(\mathbb{T}^N)$ y f es la derivada de Radon-Nikodyn de la parte absolutamente continua (respecto a m) de μ.*

Las funciones analíticas en $\mathbb{D}^N$son armónicas, así que los resultados anteriores valen en particular para estas funciones. Las restricciones sobre el crecimiento en $\mathbb{D}^N$sugieren las siguientes definiciones.

Definición 2.2.4. *Sea $f : \mathbb{D}^N \to \mathbb{C}$ una función analítica y $r \in (0,1)$. Para $1 \le p < \infty$ sea*

$$M_p(r,f) \equiv \left[\int_{\mathbb{T}^N} |f(r\zeta)|^p \, dm(\zeta)\right]^{1/p}$$

y

$$M_\infty(r,f) \equiv \sup\{|f(r\zeta) : \zeta \in \mathbb{T}^N\}.$$

Para cada valor de p, $1 \le p \le \infty$, sea $H^p(\mathbb{D}^N)$ el espacio de funciones analíticas en $\mathbb{D}^N$para las cuales $\|f\|_p \equiv \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty$.

Nótese que para cada $r \in (0,1)$, $M_p(r,f)$ es la norma en $L^p(\mathbb{T}^N)$ de f_r. Se sigue inmediatamente que $\|\cdot\|$ es una norma en $H^p(\mathbb{D}^N)$ y de hecho $(H^p(\mathbb{D}^N), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach para cada $p \in [1,\infty]$.

Se sigue inmediatamente de la teoría estándar de espacios L^p que

$$H^p(\mathbb{D}^N) \subseteq H^r(\mathbb{D}^N) \subseteq H^1(\mathbb{D}^N),$$

si $1 \leq r \leq p$. En particular $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ es el espacio de las funciones analíticas acotadas en $\mathbb{D}^N$y $H^\infty(\mathbb{D}^N) \subseteq H^p(\mathbb{D}^N)$ para todo p.

Obsérvese que para cada $p \in [1, \infty)$ y cada f analítica en $\mathbb{D}^N$, la función $z \to |f(z)|^p$ $(z \in \mathbb{D}^N)$ es N-subarmónica (es decir, subarmónica en cada variable) y de modo análogo a lo que ocurre en el caso de una variable, $M_p(r, f)$ es una función no decreciente de r. En el caso $p = \infty$ se tiene un resultado similar. En todo caso $\|f\|_p = \lim_{r\to 1} M_p(r, f)$ para cada f analítica en $\mathbb{D}^N$y $1 \leq p \leq \infty$.

Obsérvese que si $f \in H^1(\mathbb{D}^N)$, por la Proposición 2.2.2, hay una medida $\mu \in M(\mathbb{T}^N)$ tal que $f = \tilde{\mu}$. Si $1 < p \leq \infty$ y $f \in H^p(\mathbb{D}^N)$, entonces $f = \tilde{g}$ para alguna $g \in L^p(\mathbb{T}^N)$. Más aún, en el caso $p > 1$, $f_{r_j} \to g$ c.t.p.$[m]$, para una sucesión $r_j \to 1$.

Surge la cuestión de determinar los elementos g de $L^p(\mathbb{T}^N)$ (ó de $M(\mathbb{T}^N)$) que son límites radiales de elementos de $H^p(\mathbb{D}^N)$. La respuesta a esta cuestión nos permitirá identificar $H^p(\mathbb{D}^N)$ con cierto subespacio de $L^p(\mathbb{T}^N)$ (ó de $M(\mathbb{T}^N)$). De hecho, esto ocurre si y sólo si los coeficientes de Fourier $\hat{g}(\nu)$ son nulos para cada $\nu \notin \mathbb{Z}_+^N$.

Proposición 2.2.5. *(cf. [Rud69]) Si $f \in H^p(\mathbb{D}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$g(\zeta) \equiv \lim_{r\to 1} f(r\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{T}^N,$$

define una función en $L^p(\mathbb{T}^N)$ tal que $\hat{g}(\nu) = 0$ para $\nu \notin \mathbb{Z}_+^N$, $\tilde{g} = f$ y $\|g\|_p = \lim_{r\to 1} \|f_r\|_p$. Así, la aplicación que envía la función $f \in H^p(\mathbb{D}^N)$ a sus valores en la frontera g es un isomorfismo isométrico de $H^p(\mathbb{D}^N)$ sobre un subespacio de $L^p(\mathbb{T}^N)$.

En adelante no haremos distinción entre funciones en los espacios de Hardy $H^p(\mathbb{D}^N)$, y sus valores en la frontera. En particular consideraremos el espacio $H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Nótese que $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ es un subespacio w^*-cerrado de $L^\infty(\mathbb{T}^N)$. Ciertamente $f \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$ está en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ si y sólo si f está en el kernel de los funcionales w^*-continuos definidos en $L^\infty(\mathbb{T}^N)$ por

$$f \to \int_{\mathbb{T}^N} f(\zeta)\overline{\zeta}^\nu \, dm(\zeta).$$

para cada $\nu \notin \mathbb{Z}_+^N$.

Si escribimos $\mathcal{P}_+$ para designar el espacio de los polinomios analíticos en $\mathbb{T}^N$, es decir la variedad lineal generada por las aplicaciones

$$e_\nu : \mathbb{T}^N \to \mathbb{C}, \qquad \zeta \to \zeta^\nu,$$

para $\nu \in \mathbb{Z}_+^N$; es inmediato observar que los espacios $H^p(\mathbb{D}^N)$ $(1 \leq p < \infty)$ son la clausura en la correspondiente norma del espacio $L^p(\mathbb{T}^N)$ de $\mathcal{P}_+$. En el caso de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$, se trata de la w^*-clausura de $\mathcal{P}_+$ en $L^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Nótese también que para cada $p \in [1, \infty]$, si $f \in H^p(\mathbb{D}^N)$, son válidas las representaciones integrales

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}^N} C(z,\zeta) f(\zeta)\, dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^N} P(z,\zeta) f(\zeta)\, dm(\zeta).$$

Requeriremos con frecuencia la siguiente caracterización de w^*-convergencia en el espacio $H^\infty(\mathbb{D}^N)$.

Proposición 2.2.6. *Sea $f \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ y $\{f_n\}$ una sucesión en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Se tiene que $f_n \to f$ en la topología w^* de $L^\infty(\mathbb{T}^N)$ si y sólo si $\{f_n\}$ esta uniformemente acotada y $f_n(z) \to f(z)$ para cada $z \in \mathbb{D}^N$.*

Prueba. Si $f_n \to f$ en la topología w^* de $L^\infty(\mathbb{T}^N)$, el Principio de Acotación Uniforme muestra que $\{f_n\}$ está uniformemente acotada, y como para cada $z \in \mathbb{D}^N$ la función $\zeta \to C(z,\zeta)$ es continua en $\mathbb{T}^N$, se tiene que

$$f_n(z) = \int_{\mathbb{T}^N} C(z,\zeta) f_n(\zeta)\, dm(\zeta) \to \int_{\mathbb{T}^N} C(z,\zeta) f(\zeta)\, dm(\zeta) = f(z).$$

Por otra parte, sea $\{f_n\}$ una sucesión uniformemente acotada de funciones en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$, y $f_n(z) \to f(z)$ $(z \in \mathbb{D}^N)$ para una función $f \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Supóngase que $\{f_n\}$ no converge en la topología w^* a f, podemos asumir que cada f_n está fuera de una cierta w^*-vecindad de f. Sin embargo, el teorema de Banach-Alaoglu permite obtener una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ w^*-convergente a una función $g \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Pero vimos que w^*-convergencia implica convergencia puntual y así necesariamente $g = f$, lo cual es una contradicción. $\square$

De lo anterior es inmediato que $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ es un álgebra. En efecto, si $f, g \in H^p(\mathbb{D}^N)$, vimos que existen sucesiones de polinomios analíticos $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ que convergen en la topología w^* de $L^\infty(\mathbb{T}^N)$ a f y g, respectivamente. De la caracterización anterior es inmediato que $p_n q_n \xrightarrow{w^*} fg$ y así $fg \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$.

Requeriremos el siguiente resultado, bien conocido.

Proposición 2.2.7. Propiedad de Gleason del polidisco *(cf. [Rud80]) Para cada $h \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ y cada $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{D}^N$ existen $g_1, \ldots, g_N \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ tales que*

$$h(z) = h(\lambda) + \sum_{i=1}^{N} (z_i - \lambda_i) g_i(z), \qquad z \in \mathbb{D}^N$$

y

$$\|g_i\|_\infty \leq M_\lambda \|h\|_\infty, \qquad i = 1, \ldots, N;$$

donde M_λ es una constante que depende solamente de λ.

Una subálgebra en particular de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ recibirá especial atención. Se trata del *álgebra del polidisco*, que denotaremos $A(\mathbb{D}^N)$, y consiste del espacio las funciones continuas en $\overline{\mathbb{D}}^N$ que son analíticas en $\mathbb{D}^N$. Es bien conocido que la aplicación $f \to f|\mathbb{T}^N$ es un isomorfismo isométrico de $A(\mathbb{D}^N)$ sobre la subálgebra de $C(\mathbb{T}^N)$ formada por las funciones g continuas en $\mathbb{T}^N$, cuyos coeficientes de Fourier, $\hat{g}(\nu)$, son nulos para todo $\nu \notin \mathbb{Z}_+^N$. De hecho, si los coeficientes de Fourier de $g \in C(\mathbb{T}^N)$ satisfacen la condición indicada y $f = \tilde{g}$, entonces $f|\mathbb{T}^N = g$ y $f_r \to g$ uniformemente en $\mathbb{T}^N$.

No se hará distinción entre el álgebra del disco y la subálgebra de $C(\mathbb{T}^N)$ consistente de sus valores frontera. Es fácil ver que $A(\mathbb{D}^N)$ es la clausura (con la norma del supremo) de $\mathcal{P}_+$ en $C(\mathbb{D}^N)$.

2.3 Elementos de álgebras de funciones

Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Un *álgebra de funciones* A, en X, es una subálgebra cerrada de $C(X)$ que contiene las funciones constantes y separa puntos de X. Si A es un álgebra de funciones en X y $\mathcal{M}_A$ su espacio de ideales maximales, la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico de A sobre un álgebra de funciones definidas en el espacio compacto de Hausdorff $\mathcal{M}_A$. El espacio X se sumerge homeomorficamente en $\mathcal{M}_A$ por la aplicación $x \to \delta_x$, donde $\delta_x(f) = f(x)$ para cada f en A.

Sea A un álgebra de funciones en el espacio X y ρ un elemento de $\mathcal{M}_A$. Una *medida representante* de ρ es una medida de probabilidad μ en X tal que

$$\rho(f) = \int f \, d\mu,$$

para cada f en A. El conjunto M_ρ formado por las medidas representantes de ρ, es un subconjunto convexo y w^*-compacto de $M(X)$. Escribiremos $A^\perp$ para designar el espacio

$$A^\perp = \left\{\nu \in M(X) : \int f\, d\nu = 0, f \in A\right\}.$$

En particular, si $A = A(\mathbb{D}^N)$, escribiremos M_z ($z \in \mathbb{D}^N$) para designar el conjunto de las medidas en $M(\mathbb{T}^N)$, que son medidas representantes del funcional multiplicativo $f \to f(z)$, $f \in A(\mathbb{D}^N)$.

Diremos que una medida $\mu \in M(\mathbb{T}^N)$ es *absolutamente continua* (respecto a M_0) si $\mu \ll \rho$ para alguna medida $\rho \in M_0$. Una medida $\mu \in M(\mathbb{T}^N)$ es *singular* (respecto a M_0) si $\mu \perp \rho$ para cada medida $\rho \in M_0$.

Recordemos (cf. [Con91, V.17]) que una *banda de medidas* es un subespacio $\mathcal{B}$ de $M(X)$, cerrado en la topología de la norma, tal que si $\mu \in \mathcal{B}$ y ν es una medida en X absolutamente continua con respecto a μ, entonces $\nu \in \mathcal{B}$. Para cada subconjunto $\mathcal{S}$ de $M(X)$, la *banda generada* por $\mathcal{S}$ es la menor banda conteniendo a $\mathcal{S}$.

En particular (ver [Con91, V.17.11]), si $\mathcal{S}$ es un conjunto de medidas cerrado y convexo y $\mathcal{B}$ es la banda generada por $\mathcal{S}$, entonces $\nu \in \mathcal{B}$ si y sólo si existe una medida η en $\mathcal{S}$ tal que $\nu \ll \eta$. Luego, tomando $\mathcal{S} = M_0$, vemos que $\mu \in M(\mathbb{T}^N)$ es absolutamente continua si y sólo si μ está en la banda generada por M_0. Denotaremos esta banda por $\mathcal{B}_0$.

Es fácil ver que $\mathcal{B}_0$ es justamente la banda generada por las medidas representantes de puntos en $\mathbb{D}^N$. Así pues, nuestra terminología coincide con la de [BDØ73], [KP90], [KOP95] y [Ion98]. En efecto, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1. *La banda de medidas $\mathcal{B}$ generada por el conjunto $\mathcal{S} = \bigcup_{w \in \mathbb{D}^N} M_w$ es igual a $\mathcal{B}_0$.*

Prueba. Es claro que $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$. Para ver la otra inclusión obsérvese que si $z, w \in \mathbb{D}^N$ y μ es una medida absolutamente continua respecto a una medida $\rho_w \in M_w$, entonces μ es absolutamente continua con respecto a alguna medida $\rho_z \in M_z$.

En efecto, sean $z, w \in \mathbb{D}^N$ y escójase $c > 0$ tal que $P(z,\zeta) > cP(w,\zeta)$ para todo $\zeta \in \mathbb{T}^N$. Si ρ_w es una medida en M_w defínase

$$\rho_z = (P(z,\cdot) - cP(w,\cdot))m + c\rho_w.$$

Entonces, $\rho_z \in M_z$, $\rho_w \ll \rho_z$ y se tiene que si $\mu \ll \rho_w$ entonces $\mu \ll \rho_z$.

En particular, si $\mu \in M_w$ para un $w \in \mathbb{D}^N$ entonces μ es absolutamente continua respecto a alguna medida representante de 0 y así $\mu \in M_0$. $\square$

Requeriremos los siguientes resultados bien conocidos.

Teorema 2.3.2. Descomposición de Lebesgue. *(cf. [Con91, V.17.4]) Si $\mathcal{B}$ es una banda de medidas en un espacio compacto X y $\nu \in M(X)$, entonces $\nu = \nu_a + \nu_s$, donde $\nu_a \in \mathcal{B}$ y $\nu_s \perp \mu$ para cada $\mu \in \mathcal{B}$. Las medidas ν_a y ν_s son únicas.*

La descomposición anterior de ν es llamada *descomposición de Lebesgue* de ν respecto a $\mathcal{B}$.

Si A es un álgebra de funciones en X y $\mathcal{B}$ es una banda de medidas en X, entonces $\mathcal{B}$ es una *banda reductora* (para A) si para cada $\mu \in A^\perp$, con descomposición de Lebesgue $\mu = \mu_a + \mu_s$, $\mu_a \in \mathcal{B}$ y $\mu_s \perp \eta$ para cada $\eta \in \mathcal{B}$; se tiene que μ_a y μ_s pertenecen ambas a $A^\perp$.

Con esta notación establecemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3. Teorema General de F. y M. Riesz. *(cf. [Con91, V.18.2]) Si A es un álgebra de funciones y ρ es un funcional lineal multiplicativo sobre A, la banda generada por las medidas representantes de ρ, es una banda reductora.*

La siguiente terminología es análoga a la de [Rud80, Ch.9]. Una sucesión $\{f_n\}$ en $A(\mathbb{D}^N)$ se dice una *sucesión de Montel* si es uniformemente acotada y $f_n(z) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cada $z \in \mathbb{D}^N$. Por el teorema de Montel para familias normales, cada sucesión de Montel $\{f_n\}$ converge uniformemente a cero en cada compacto de $\mathbb{D}^N$ y lo mismo es cierto para las derivadas $D^\alpha f_n$, para cada multi-índice α.

Una medida $\mu \in M(\mathbb{D}^N)$ es una *medida de Henkin* si

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}^N} f_n \, d\mu = 0,$$

para cada sucesión de Montel $\{f_n\}$.

Adicionalmente requeriremos la siguiente caracterización de las medidas en $\mathcal{B}_0$. Para $N = 2$, el resultado fue probado en [BDØ73] y [Bek74] y en el caso general en [Kos84] (cf. también [Pta98]).

Proposición 2.3.4. *Sea $\mu \in M(\mathbb{T}^N)$, $\mu \in \mathcal{B}_0$ si y sólo si $f_n \to 0$ en la topología w^* de $L^\infty(|\mu|)$ para cada sucesión de Montel $\{f_n\}$ en $A(\mathbb{D}^N)$.*

2.4 Elementos de álgebras duales

El conocido artículo de S. Brown [Bro78], donde se establece la existencia de subespacios invariantes no triviales para operadores subnormales, marca el inicio de la exitosa aplicación de las *técnicas de álgebras duales* a la búsqueda de subespacios invariantes en diversas situaciones. El resumen de Bercovici, Foias y Pearcy [BFP85] es la referencia ya clásica al respecto. Presentamos a continuación los conceptos básicos de álgebras duales.

Definición 2.4.1. *(cf. [Con91, I.2.8]) Un álgebra de Banach con unidad $\mathcal{A}$ es un* álgebra dual, *si existe un espacio de Banach $\mathcal{A}_*$ cuyo dual sea isométricamente isomorfo a $\mathcal{A}$, tal que la multiplicación en $\mathcal{A}$ sea separadamente w^*-continua, es decir, para cada $a \in \mathcal{A}$ las aplicaciones $x \to ax$ y $x \to xa$ son w^*-continuas. Nos referiremos a $\mathcal{A}_*$ como a un* predual *de $\mathcal{A}$.*

El ejemplo básico de álgebra dual es justamente $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, el espacio de operadores lineales acotados sobre $\mathcal{H}$. Recordemos (cf. por ejemplo [Con91, I.1]) que el espacio de los operadores de la *Clase Traza Finita*, denotado $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, está formado por los operadores $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle |A| e_n, e_n \rangle < \infty,$$

donde $|A|$ denota la única raíz cuadrada positiva del operador A^*A y $\{e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Es fácil ver que la definición anterior es independiente de la base ortonormal elegida. De hecho $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ es un ideal propio de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ contenido, por tanto, en el ideal de los operadores compactos y conteniendo los operadores de rango finito, como una subvariedad densa.

Con la norma definida por

$$\|A\|_1 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \langle |A| e_n, e_n \rangle,$$

el espacio $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach separable y

$$\mathrm{tr} A \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \langle A e_n, e_n \rangle,$$

define en $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ (independientemente de la base ortonormal $\{e_n\}$) un funcional lineal definido positivo.

A partir del siguiente teorema concluimos que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un álgebra dual.

Teorema 2.4.2. *(cf. [Con91, I.1.17]) Para cada $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ defínase $F_T : \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ por*

$$F_T(A) \equiv \mathrm{tr}(TA) = \mathrm{tr}(AT).$$

El funcional lineal F_T es continuo para cada $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y la aplicación $T \to F_T$ es un isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})^*$.

En adelante identificaremos $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ con el dual de $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. La dualidad

$$\mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}, \qquad (A, T) \to \langle A, T\rangle = \mathrm{tr}(AT),$$

induce en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ una topología w^*. Es fácil ver que la topología w^* de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ coincide con la topología débil de operadores (WOT), en subconjuntos acotados de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y como por el Principio de Acotación Uniforme, las sucesiones WOT convergentes deben ser acotadas, se sigue que una sucesión en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ converge en la topología w^* si y sólo si es WOT-convergente.

La teoría general de topologías w^* se aplica, en particular, a las álgebras duales. Revisemos alguna terminología. Nuestra referencia al respecto es [Con90]. Si $\mathfrak{X}$ es un espacio de Banach y $\mathfrak{X}^*$ su dual, para $\mathcal{S} \subset \mathfrak{X}$ y $\mathcal{M} \subset \mathfrak{X}^*$ escribimos

$$\mathcal{S}^\perp \equiv \{x^* \in \mathfrak{X}^* : \langle x, x^*\rangle = 0, x \in \mathcal{S}\},$$

y

$$^\perp\mathcal{M} \equiv \{x \in \mathfrak{X} : \langle x, x^*\rangle = 0, x^* \in \mathcal{M}\}.$$

Es bien conocido (cf. [Con90, Th.III.10.2]) que si $\mathcal{M}$ subespacio cerrado de $\mathfrak{X}$, entonces $(\mathfrak{X}/\mathcal{M})^*$, el dual del espacio cociente $\mathfrak{X}/\mathcal{M}$, es isométricamente isomorfo a $\mathcal{M}^\perp$. Luego, si $\mathcal{A}$ es un álgebra dual con predual $\mathcal{A}_*$ y $\mathcal{M}$ es una subálgebra con unidad w^*-cerrada de $\mathcal{A}$, entonces

$$\left(\mathcal{A}_*/{}^\perp\mathcal{M}\right)^\star = \left({}^\perp\mathcal{M}\right)^\perp = \mathrm{cl}_{w^*}\mathcal{M} = \mathcal{M}.$$

Consideraremos dos casos en particular. Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ escribiremos $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ para referirnos a la menor subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, con unidad y w^*-cerrada, que contiene a $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ está formado por los elementos de la N-upla de operadores $T = (T_1, \dots, T_N)$, escribiremos $\mathcal{A}_T$ para designar a $\mathcal{A}_\mathcal{S}$. Es inmediato, de la observación anterior, que $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ es un álgebra dual y que

$$\left(\mathcal{C}_1(\mathcal{H})/{}^\perp\mathcal{A}_\mathcal{S}\right)^* = \mathcal{A}_\mathcal{S}.$$

El segundo caso que consideraremos es en realidad un caso particular. El espacio $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ es una subálgebra w^*-cerrada de $L^\infty(\mathbb{T}^N)$ (la cual puede verse como un álgebra de operadores actuando en $L^2(\mathbb{T}^N)$), y $L^\infty(\mathbb{T}^N)$ es el espacio dual de $L^1(\mathbb{T}^N)$. Así pues, vemos que

$$\left(L^1(\mathbb{T}^N)/{}^\perp H^\infty(\mathbb{D}^N)\right)^* = H^\infty(\mathbb{D}^N).$$

Nótese que si $\mathfrak{X}$ es un espacio de Banach y $\mathcal{M}$ es un subespacio w^*-cerrado de $\mathfrak{X}^*$, la topología w^* inducida en $\mathcal{M}$ por la dualidad

$$\mathfrak{X}/{}^\perp\mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{C}, \qquad (x + \mathcal{M}, x^*) \to \langle x, x^* \rangle,$$

y la topología relativa en $\mathcal{M}$ como subespacio de $(\mathfrak{X}^*, w^*)$ coinciden.

Estamos interesados en homeomorfismos entre álgebras duales que sean w^*-continuos.

Definición 2.4.3. *(cf. [Con91, I.2.9] Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras duales y $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal. Diremos que Φ es un* homomorfismo de álgebras duales *si es un homomorfismo de álgebras de Banach que es también w^*-continuo. La aplicación Φ es un* isomorfismo de álgebras duales *si es además, un homeomorfismo de $(\mathcal{A}, w^*)$ y $(\mathcal{B}, w^*)$.*

Los siguientes resultados permiten identificar homomorfismos (isomorfismos) de álgebras duales.

Proposición 2.4.4. *([BCP79, Pro.2.5]) Sean $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ espacios de Banach y $\Phi : \mathfrak{X}^* \to \mathfrak{Y}^*$ una aplicación lineal. Se tiene que Φ es w^*-continua si y sólo si existe una aplicación lineal $\Phi_* : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ tal que*

$$\langle \Phi_*(y), x^* \rangle = \langle y, \Phi(x^*) \rangle, \qquad x^* \in \mathfrak{X}^*, y \in \mathfrak{Y}.$$

Si esto ocurre, Φ_* es acotado y $\Phi = (\Phi_*)^*$.

Proposición 2.4.5. *([BCP79, Th.2.3]) Sean $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ espacios de Banach separables y $\Phi : \mathfrak{X}^* \to \mathfrak{Y}^*$ una aplicación lineal. Se tiene que Φ es w^*-continua si y sólo si es w^*-secuencialmente continua.*

Proposición 2.4.6. *([BCP79, Pro.2.7]) Sean $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ espacios de Banach y $\Phi : \mathfrak{X}^* \to \mathfrak{Y}^*$ una aplicación lineal w^*-continua cuyo kernel es trivial y cuyo rango es cerrado. Entonces Φ es un homeomorfismo w^*.*

Capítulo 3

Representaciones generadas por N-uplas polinomialmente acotadas

3.1 Representaciones generadas por N-uplas

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert infinito dimensional, complejo y separable, sea $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ el espacio de los operadores acotados definidos en $\mathcal{H}$ y sea $T = (T_1, \cdots, T_N)$ una N-upla de operadores sobre $\mathcal{H}$ que conmutan entre sí. Diremos que $T = (T_1, \ldots, T_N)$ es *polinomialmente acotada* si existe un número $M \geq 1$ tal que

$$\|p(T_1, \ldots, T_N)\| \leq M\|p\|_\infty,$$

para cada polinomio $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$, donde

$$\|p\|_\infty = \sup\{|p(z)| : z \in \mathbb{D}^N\}.$$

Nos referiremos a la clase de tales N-uplas de operadores como $PB^N(\mathcal{H})$.

La conocida desigualdad de von Neumann prueba que cada contracción es polinomialmente acotada. Asimismo, el teorema de Ando permite ver que también lo es cada par de contracciones que conmutan. De hecho, en ambos casos lo son con una constante $M = 1$. Para $N > 2$ es conocido que éste no es el caso. Sin embargo, es hasta ahora desconocido si cada N-upla de contracciones es polinomialmente acotada.

Consideraremos *representaciones* de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$, esto es homomorfismos de álgebras

$$\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

tales que $\Phi(1) = I$. Particularmente estamos interesados en representaciones de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ que sean continuas cuando damos a $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ y a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sus topologías w^*, es decir, homomorfismos de las álgebras duales $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Nótese que tales representaciones w^*-continuas son necesariamente acotadas. En efecto, si Φ es w^*-continua la imagen por Φ de la bola unitaria de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ es w^*-compacta y por tanto acotada.

Diremos que una N-upla $T = (T_1, \ldots, T_N)$, de operadores que conmutan entre sí, genera la representación Φ de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ si $\Phi(\pi_i) = T_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, donde las funciones π_i $(i = 1, \ldots, N)$ son las funciones coordenadas, esto es: $\pi_i(z) = \pi_i(z_1, \ldots, z_N) = z_i$, para cada $z \in \mathbb{D}^N$. En ocasiones escribiremos $\Phi(f) = f(T)$ para $f \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$.

En el caso de una variable, el clásico cálculo funcional de Sz.-Nagy y Foias es una herramienta fundamental que ha resultado exitosa al estudiar una contracción T actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En efecto, la conocida descomposición de T en una parte unitaria y una completamente no unitaria, lleva a considerar particularmente contracciones T completamente no unitarias, y en tal caso construir la representación contractiva, w^*-continua de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ generada por T (cf.[BFP85] y [SNF68]).

Varios autores han estudiado el problema de construir representaciones w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ generadas por N-uplas de operadores. En 1971 E. Briem, A. M. Davie y B. K. Øksendal construyeron representaciones contractivas, w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D}^2)$ generadas por pares de contracciones completamente no unitarias (cf. [BDØ73]). En 1989 M. Kosiek y M. Ptak (cf., [KP90], ver también [KOP95] y [Oct94]) extendieron la construcción anterior para obtener una representación contractiva, w^*-continua de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ generada por una N-upla $T = (T_1, \ldots, T_N)$ de contracciones que conmutan entre sí, asumiendo que ésta satisface la desigualdad de von Neumann y es *(conjuntamente) absolutamente continua*, es decir, para cada par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$ existe una medida $\mu(x, y)$ asociada al funcional

$$p \to \langle p(T_1, \ldots, T_N)x, y \rangle,$$

absolutamente continua con respecto a alguna medida μ_z, *representante* de algún punto $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{D}^N$. Vimos (ver Proposición 2.3.1), que esto es equivalente a pedir que las medidas $\mu(x, y)$ estén en $\mathcal{B}_0$, la banda generada por M_0.

Previamente, en 1980, C. Apostol (cf., [Apo80]) construyó representaciones w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ generadas por N-uplas de operadores $T = (T_1, \dots, T_N)$, polinomialmente acotadas que cumplen una condición, llamada en [KO97] *condición de Apostol.* Dicha condición establece que para cada $j = 1, \dots, N$ y para cada par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\langle p(T_1, \dots, T_N)T_j^n x, y\rangle| : p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N],\ \|p\|_\infty \leq 1\} = 0.$$

Recientemente, A. Octavio y M. Kosiek (cf. [KO97]) reformularon la condición de Apostol, en términos de una topología que introducen en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Concretamente, dados una N-upla de contracciones que conmutan $T = (T_1, \dots, T_N)$, y un par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$, se define la seminorma $\rho_{x,y}$ por

$$\rho_{x,y}(S) = \sup\{|\langle p(T_1, \dots, T_N)Sx, y\rangle| : p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N],\ \|p\|_\infty \leq 1\},$$

para cada $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. La familia de seminormas $\{\rho_{x,y} : x, y \in \mathcal{H}\}$, define una topología vectorial localmente convexa en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ denominada A-topología. En estos términos, una N-upla $T = (T_1, \dots, T_N)$, satisface la condición de Apostol si para cada $j = 1, \dots, N$, la sucesión $\{T_j^n\}$ converge a cero en la A-topología.

El resultado principal de [KO97] es que una N-upla $T = (T_1, \dots, T_N)$, de contracciones que conmutan y satisfacen la desigualdad de von Neumann es (conjuntamente) absolutamente continua si y sólo si satisface la condición de Apostol.

Adicionalmente, J. Eschmeier en [Esc97], siguiendo ideas de [Mla69], construye representaciones w^*-continuas de $H^\infty(B)$ (B es la bola unitaria en $\mathbb{C}^N$), generadas por N-uplas de operadores completamente no unitarios, que conmutan y satisfacen una desigualdad de von Neumann en B. Previamente, también siguiendo ideas de [Mla69], W. S. Li (cf.[Li92]) construyó representaciones w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D})$ generadas por operadores polinomialmente acotados y más recientemente A. Ionescu lo hace para pares polinomialmente acotados de operadores(cf. [Ion98]).

3.2 La clase $ACPB^N(\mathcal{H})$

Sea $T = (T_1, \dots, T_N) \in PB^N(\mathcal{H})$. La correspondencia $p \to p(T)$, definida del modo natural para los polinomios $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$, extiende a un homomorfismo norma continuo

$$\Psi : A(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Diremos que el homomorfismo Ψ es *generado* por T. Por el Teorema de Hahn Banach, para cada par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$, existen medidas $\mu(x,y) \in M(\mathbb{T}^N)$ tales que

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_{\mathbb{T}^N} f\, d\mu(x,y), \qquad f \in A(\mathbb{D}^N),\ x, y \in \mathcal{H}.$$

Una familia $\{\mu(x,y) : x, y \in \mathcal{H}\}$, cumpliendo esta condición, se dice una familia de *medidas representantes* para Ψ. Nótese que el teorema de Hahn Banach permite adicionalmente seleccionar medidas representantes que satisfagan la desigualdad $\|\mu(x,y)\| \leq \|\Psi\|\,\|x\|\|y\|$.

Si el homomorfismo norma continuo $\Psi : A(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, generado por T, tiene una familia de medidas representantes $\{\mu(x,y) : x, y \in \mathcal{H}\}$ que son absolutamente continuas, diremos que T es *absolutamente continuo.* Si Ψ tiene una familia de medidas representantes que son singulares diremos que T es *singular.*

El siguiente resultado es una versión de un teorema de Mlak [Mla69] que nos permite descomponer el homomorfismo Ψ, en una parte absolutamente continua y una singular, de modo análogo a como fue hecho, para contextos diferentes, en [Esc97] y [Li92].

Teorema 3.2.1. Descomposición de Mlak. *Sea $T \in PB^N(\mathcal{H})$. Existen subespacios $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de $\mathcal{H}$ invariantes para T, tales que $\mathcal{H}$ es la suma directa de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, $T|\mathcal{M}$ es absolutamente continua y $T|\mathcal{N}$ es singular.*

Prueba. Sea $\Psi : A(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, el homomorfismo de álgebras norma continuo generado por T y sea $\{\mu(x,y) : x, y \in \mathcal{H}\}$, una familia de medidas representantes para Ψ tales que

$$\|\mu(x,y)\| \leq \|\Phi\|\,\|x\|\,\|y\|, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Para cada par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$ sea

$$\mu(x,y) = \mu_a(x,y) + \mu_s(x,y),$$

la descomposición de Lebesgue de $\mu(x,y)$. Se tiene que $\|\mu(x,y)\| = \|\mu_a(x,y)\| + \|\mu_s(x,y)\|$.

Sean $\Psi_a, \Psi_s : A(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ las aplicaciones definidas por

$$\langle \Psi_a(f)x, y\rangle = \int_{\mathbb{T}^N} f\, d\mu_a(x,y), \qquad \langle \Psi_s(f)x, y\rangle = \int_{\mathbb{T}^N} f\, d\mu_s(x,y),$$

para $f \in A(\mathbb{D}^N)$ y $x, y \in \mathcal{H}$.

Veamos que Ψ_a y Ψ_s son lineales. Obsérvese que para cada $x_1, x_2, y \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\mu(x_1+x_2,y)-(\mu(x_1,y)+\mu(x_2,y)) = [\mu_a(x_1+x_2,y)-(\mu_a(x_1,y)+\mu_a(x_2,y))]$$
$$+ [\mu_s(x_1+x_2,y)-(\mu_s(x_1,y)+\mu_s(x_2,y))],$$

es la descomposición de Lebesgue de una medida en $A(\mathbb{D}^N)^\perp$, luego por el Teorema General de F. y M. Riesz

$$\mu_a(x_1+x_2,y)-(\mu_a(x_1,y)+\mu_a(x_2,y)) \in A(\mathbb{D}^N)^\perp,$$

y

$$\mu_s(x_1+x_2,y)-(\mu_s(x_1,y)+\mu_s(x_2,y)) \in A(\mathbb{D}^N)^\perp.$$

Luego

$$\int_{\mathbb{T}^N} f\,d\mu_a(x_1+x_2,y) = \int_{\mathbb{T}^N} f\,d\mu_a(x_1,y) + \int_{\mathbb{T}^N} f\,d\mu_a(x_2,y)$$

y

$$\int_{\mathbb{T}^N} f\,d\mu_s(x_1+x_2,y) = \int_{\mathbb{T}^N} f\,d\mu_s(x_1,y) + \int_{\mathbb{T}^N} f\,d\mu_s(x_2,y),$$

para cada $f \in A(\mathbb{D}^N)$. De modo similar se completa la prueba de que Ψ_a y Ψ_s son lineales.

Claramente $\|\Psi_a\| \leq \|\Psi\|$ y $\|\Psi_s\| \leq \|\Psi\|$. Veamos que además Ψ_a y Ψ_s son multiplicativos.

Sean $f, g \in A(\mathbb{D}^N)$ y $x, y \in \mathcal{H}$. Se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}^N} fg\,d\mu(x,y) = \langle \Psi(f)x, \Psi(g)^*y\rangle = \int_{\mathbb{T}^N} f\,d\mu(x, \Psi(g)^*y).$$

Luego,

$$g\mu(x,y) - \mu(x,\Psi(g)^*y) = [g\mu_a(x,y) - \mu_a(x,\Psi(g)^*y)]$$
$$+ [g\mu_s(x,y) - \mu_s(x,\Psi(g)^*y)],$$

es la descomposición de Lebesgue de una medida en $A(\mathbb{D}^N)$. Así

$$\int_{\mathbb{T}^N} fg\,d\mu_a(x,y) = \langle \Psi_a(f)x, \Psi(g)^*y\rangle = \int_{\mathbb{T}^N} g\,d\mu(\Psi_a(f)x, y),$$

para $f, g \in A(\mathbb{D}^N)$ y $x, y \in \mathcal{H}$. Cada una de estas afirmaciones continúa siendo cierta si reemplazamos $\mu_a(x,y)$ y $\Psi_a(f)$ por $\mu_s(x,y)$ y $\Psi_s(f)$ respectivamente. Se sigue entonces que para cada $f \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ y cada par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$,

$$f\mu_a(x,y) - \mu(\Psi_a(f)x, y) = [f\mu_a(x,y) - \mu_a(\Psi_a(f)x,y)] - \mu_s(\Psi_a(f)x,y),$$

y

$$f\mu_s(x,y) - \mu(\Psi_s(f)x,y) = -\mu_a(\Psi_s(f)x,y) + [f\mu_s(x,y) - \mu_s(\Psi_s(f)x,y)],$$

son las descomposiciones de Lebesgue de medidas en $A(\mathbb{D}^N)^\perp$. Así obtenemos

$$\langle \Psi_a(gf)x,y\rangle = \int_{\mathbb{T}^N} g\, d\mu_a(\Psi_a(f)x,y) = \langle \Psi_a(g)\Psi_a(f)x,y\rangle,$$

para cada $f,g \in A(\mathbb{D}^N)$ y cada par $x,y \in \mathcal{H}$. Otra vez, todo continúa siendo cierto si reemplazamos Ψ_a y μ_a por Ψ_s y μ_s respectivamente y entonces, tenemos que Ψ_a y Ψ_s son multiplicativos.

El mismo argumento anterior prueba también que

$$\langle \Psi_s(g)\Psi_a(f)x,y\rangle = \int_{\mathbb{T}^N} g\, d\mu_s(\Psi_a(f)x,y) = 0,$$

y

$$\langle \Psi_a(g)\Psi_s(f)x,y\rangle = \int_{\mathbb{T}^N} g\, d\mu_a(\Psi_s(f)x,y) = 0,$$

para cada $f,g \in A(\mathbb{T}^N)$ y cada $x,y \in \mathcal{H}$. Así Ψ_a y Ψ_s se anulan mutuamente.

Por construcción Ψ_a es absolutamente continua, Ψ_s es singular y $\Psi = \Psi_a + \Psi_s$. Sea $\mathcal{M} = \Psi_a(1)\mathcal{H}$ y $\mathcal{N} = \Psi_s(1)\mathcal{H}$. Veamos que estos subespacios $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ satisfacen las conclusiones del teorema.

Efectivamente, $\Psi_a(1)$ y $\Psi_s(1)$ son proyecciones, así que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son ciertamente subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. La identidad

$$x = \Psi(1)x = \Psi_a(1)x + \Psi_s(1),$$

muestra que $\mathcal{H} = \mathcal{M} + \mathcal{N}$. Además, si $y = \Psi_a(1)x_1$ y $y = \Psi_s(1)x_2$ para ciertos $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ entonces $\Phi_s(1)y = \Psi_a(1)y = 0$ y $y = \Psi(1)y = \Psi_a(1)y + \Psi_s(1)y = 0$. Así tenemos, $\mathcal{H} = \mathcal{M} \dotplus \mathcal{N}$ como se requiere.

Si $y \in \mathcal{M}$, $y = \Psi_a(1)x$ para un $x \in \mathcal{H}$ así que para cada $j = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned} T_j y = T_j \Psi_a(1)x &= \Psi(\pi_j)\Psi_a(1)x \\ &= \Psi_a(\pi_j)\Psi_a(1)x + \Psi_s(\pi_j)\Psi_a(1)x \\ &= \Psi_a(\pi_j)x = \Psi_a(1)\Psi_a(\pi_j)x \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

y así $T_j\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ y similarmente $T_j\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ para cada $j = 1, \ldots, N$. $\square$

Nótese que la descomposición indicada $\Psi = \Psi_a + \Psi_s$ es única. En efecto, supóngase que $\Psi = \hat{\Psi}_a + \hat{\Psi}_s$, con $\hat{\Psi}_a$ absolutamente continua y $\hat{\Psi}_s$ singular. Sean $\{\nu_a(x,y) : x,y \in \mathcal{H}\}$ y $\{\nu_s(x,y) : x,y \in \mathcal{H}\}$ las correspondientes familias de medidas representantes, absolutamente continuas y singulares respectivamente. Para cada $x,y \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\mu(x,y) - (\nu_a(x,y) + \nu_a(x,y)) = (\mu_a(x,y) - \nu_a(x,y)) + (\mu_s(x,y) - \nu_s(x,y)),$$

es la descomposición de Lebesgue de una medida en $A(\mathbb{D}^N)^\perp$ y por tanto $\Psi_a = \hat{\Psi}_a$ y $\Psi_s = \hat{\Psi}_s$.

El teorema anterior lleva a considerar la clase de N-uplas polinomialmente acotadas de operadores que conmutan entre sí y son absolutamente continuas. Denotemos esta clase como $ACPB^N(\mathcal{H})$. Veremos que ésta es, justamente, la clase que genera representaciones de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$.

3.3 Existencia de representaciones

Comenzamos con la siguiente observación elemental, análoga a [Esc97, Lemma1.1].

Lema 3.3.1. *Sea $\Psi : A(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un homomorfismo de álgebras norma continuo. El homomorfismo Ψ, extiende a un homomorfismo de álgebras w^*-continuo $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, con $\|\Psi\| = \|\Phi\|$, si y sólo si $\Psi(f_k) \xrightarrow{w^*} 0$ para cada sucesión Montel $\{f_k\}$ en $A(\mathbb{D}^N)$.*

Prueba. La necesidad es inmediata. Para ver que la condición es también suficiente recordemos que $H(\mathbb{D}^N)$, el espacio de las funciones analíticas en $\mathbb{D}^N$con la topología de convergencia uniforme sobre compactos de $\mathbb{D}^N$es un espacio de Fréchet, con una métrica d invariante por traslaciones.

Si escribimos

$$\mathcal{B} = \{f \in H(\mathbb{D}^N) : \|f\|_\infty \leq 1\},$$

y

$$\mathcal{B}_0 = \{f \in A(\mathbb{D}^N) : \|f\|_\infty \leq 1\},$$

nuestras hipótesis dicen que para cada $x,y \in \mathcal{H}$ la aplicación

$$\mathcal{B}_0 \to \mathbb{C}, \qquad f \to \langle \Psi(f)x, y \rangle,$$

es d-uniformemente continua y podemos extenderla a una aplicación d-continua definida en $\mathcal{B}$ y por linealidad a $H^\infty(\mathbb{D}^N)$.

Sea $\Lambda_{x,y}$ esta aplicación en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Vemos que $\Lambda_{x,y}$ es w^*-continua. En efecto, sea $\{f_n\}$ sucesión en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ con $f_n \xrightarrow{w^*} 0$, podemos siempre suponer que $\|f_n\|_\infty \leq 1$ y entonces claramente $\Lambda_{x,y}(f_n) \to 0$.

Además para $f \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$, $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\Lambda_{x_1+x_2,y}(f) &= \Lambda_{x_1,y}(f) + \Lambda_{x_2,y}(f),\\
\Lambda_{x,y_1+y_2}(f) &= \Lambda_{x,y_1}(f) + \Lambda_{x,y_2}(f),\\
\Lambda_{\lambda x,y}(f) &= \lambda\Lambda_{x,y}(f),\\
\Lambda_{x,\lambda y}(f) &= \overline{\lambda}\Lambda_{x,y}(f);
\end{aligned}$$

y así para cada $f \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ existe un único $\Phi(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que

$$\Lambda_{x,y}(f) = \langle \Phi(f)x, y\rangle, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Además, para cada $f \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ existe una sucesión $\{f_n\}$ en $A(\mathbb{D}^N)$ con $f_n \xrightarrow{w^*} f$ y $\|f_n\| \leq \|f\|$, luego

$$|\langle \Phi(f)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} |\langle \Psi(f_n)x, y\rangle| \leq \|\Psi\|\,\|f\|\,\|x\|\,\|y\|,$$

y así $\|\Phi(f)\| \leq \|\Psi\|\,\|f\|$ y $\|\Phi\| \leq \|\Psi\|$. Como Φ extiende Ψ se tiene que $\|\Psi\| = \|\Phi\|$.

Finalmente, si $\{f_n\}$ sucesión en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ con $f_n \xrightarrow{w^*} 0$, podemos suponer que $\|f_n\| \leq 1$ y ver que $\langle \Phi(f_n)x, y\rangle \to 0$ y así $\Phi(f_n) \xrightarrow{w^*} 0$ lo que prueba que efectivamente Φ es w^*-continuo y concluye la prueba. □

Obsérvese que realmente es suficiente considerar sucesiones de polinomios que convergen a cero en cada punto de $\mathbb{D}^N$.

A continuación presentamos el resultado de C. Apostol ([Apo80]) que establece la existencia de representaciones w^*-continuas de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ generadas por N-uplas $T \in PB^N(\mathcal{H})$, que satisfacen la referida condición de Apostol. Nuestra prueba, válida en el contexto menos general al que nos hemos restringido, es completamente elemental y diferente a la construcción de [Apo80].

Proposición 3.3.2. *Sea $T \in PB^N(\mathcal{H})$. Si T satisface la condición de Apostol, entonces T genera una representación w^*-continua de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$.*

Prueba. Sea $T = (T_1, \ldots, T_N) \in PB^N(\mathcal{H})$ tal que

$$\|p(T)\| \leq M\|p\|_\infty,$$

para cada $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$. Supóngase que T satisface la condición de Apostol, es decir para cada $j = 1, \ldots, N$ y cada par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\sup\left\{|\langle p(T)T_j^n x, y\rangle| : p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N], \|p\|_\infty \leq 1\right\} \to 0,$$

si $n \to \infty$.

Sea $\{p_k\}$ una sucesión de Montel de polinomios en $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$. Basta ver que $p_k(T)$ converge a 0 en la topología w^* de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, ó equivalentemente $p_k(T) \xrightarrow{WOT} 0$ cuando $k \to \infty$. Podemos asumir que $\|p_k\|_\infty \leq 1$ y para simplificar notaciones consideraremos el caso $N = 2$.

Para razonar por contradicción, supongamos que existen $x, y \in \mathcal{H}$ de norma 1 y $0 < \delta < 1$ tales que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumpla que

$$|\langle p_k(T)x, y\rangle| \geq 3\delta.$$

Para cada $f \in A(\mathbb{D}^N)$, escribiremos, a lo largo de esta prueba, f^r $(0 < r < 1)$ para designar la función definida por $f^r(\zeta) = f(r\zeta)$ $(\zeta \in \mathbb{T}^N)$ para $r \in (0, 1)$. Como $\|f^r - f\|_\infty \to 0$, si $r \to 1$, fijemos un $r \in (0, 1)$ con

$$|\langle p_k^r(T)x, y\rangle| \geq 2\delta.$$

Usando la condición de Apostol fijemos además un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle p(T)T_j^n x, y\rangle| \leq \delta/2,$$

para todo polinomio p con $\|p\|_\infty \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$ y $j = 1, \ldots, N$.

Escribamos

$$p_k^r(z, w) = q_k(z, w) + z^n s_k(z, w), \qquad (z, w) \in \mathbb{T}^N,$$

donde q_k es un polinomio de grado a lo más $n - 1$, respecto a la variable z. Así pues, podemos escribir

$$q_k(z, w) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ki}(w)z^i,$$

donde cada a_{ki} es un polinomio en w. De hecho, para cada $w \in \mathbb{T}$, $a_{ki}(w)$ es el i-ésimo coeficiente de Fourier de la aplicación $p_k^r(\cdot, w)$, esto es,

$$a_{ki}(w) = \int_{\mathbb{T}^N} p_k^r(\zeta, w)\overline{\zeta}^i \, dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^N} p_k(r\zeta, rw)\overline{\zeta}^i \, dm(\zeta).$$

Como $p_k \to 0$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}^N$, vemos que $\|a_{ki}\|_\infty \to 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Asúmase pues que $\|a_{ki}\|_\infty \leq \delta/4n^2$ para cada k. Se tiene entonces que $\|q_k\|_\infty \leq \delta/4$ y $\|s_k\|_\infty \leq 1 + \delta/4$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$ escribamos

$$a_{ki}(w) = b_{ki}(w) + w^n c_{ki}(w), \qquad w \in \mathbb{T}^N,$$

con b_{ki} polinomio en w de grado a lo más $n-1$. Si

$$b_{ki}(w) = \sum_{j=1}^{n-1} d_{kij} w^j, \qquad w \in \mathbb{T}^N,$$

con $d_{kij} = \int_{\mathbb{T}^N} a_{ki}(\zeta)\overline{\zeta}^j \, dm(\zeta)$ el j-ésimo coeficiente de Fourier de a_{ki}, se ve que $|d_{kij}| \leq \delta/4n^2$ y así $\|b_{ki}\|_\infty \leq \delta/4n$ y $\|c_{ki}\|_\infty \leq \delta/2n$.

Tenemos pues que

$$q_k(z, w) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ki}(w) z^i = \sum_{i=0}^{n-1} b_{ki}(w) z^i + w^n \sum_{i=0}^{n-1} c_{ki}(w) z^i,$$

y si escribimos $t_k(z, w) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{ki}(w) z^i$ y $u_k(z, w) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{ki}(w) z^i$ vemos que

$$p_k^r(z, w) = t_k(z, w) + w^n u_k(z, w) + z^n s_k(z, w),$$

con $\|t_k\|_\infty \leq \delta/4$ y $\|u_k\|_\infty \leq \delta/2$ y entonces

$$\begin{aligned} 2\delta \leq |\langle p_k^r(T)x, y\rangle| &\leq |\langle t_k(T)x, y\rangle| + |\langle u_k(T)T_2^n x, y\rangle| + |\langle s_k(T)T_1^n x, y\rangle| \\ &\leq \|t_k\|_\infty + (\delta/2)\delta/2 + (1 + \delta/4)\delta/2 \\ &< 2\delta, \end{aligned}$$

y la contradicción prueba lo indicado. □

Requeriremos un teorema de descomposición para medidas de Henkin, análogo al correspondiente para medidas de Henkin definidas en la esfera unitaria de $\mathbb{C}^N$. La prueba es similar a la de este caso y se incluye en detalle para comodidad del lector (cf. [Rud80, Th.9.2.1], ver también [Hed90]).

Teorema 3.3.3. Descomposición de Valskii. *Si μ es una medida de Henkin, entonces existen $\nu \in A(\mathbb{T}^N)^\perp$ y $g \in L^1(\mathbb{T}^N)$ tales que $\mu = \nu + gm$.*

Prueba. Escribiremos, en esta prueba, A para designar el álgebra del polidisco $A(\mathbb{D}^N)$ y A^* para su dual. Si $\mu \in M(\mathbb{T}^N)$, sea $\|\mu\|_{A^*}$ su norma como un funcional lineal sobre A y $\|\mu\|$ su variación total.

Verifiquemos el siguiente hecho.

Afirmación. Si λ es una medida de Henkin y $\epsilon > 0$, existe $h \in L^1(\mathbb{T}^N)$ tal que $\|h\|_1 \leq \|\lambda\|$ y $\|\lambda - hm\|_{A^*} < \epsilon$.

Para probar esto sea $u = P[\lambda]$ la integral de Poisson de λ, y sea como es usual $u_r(\zeta) = u(r\zeta)$, donde $\zeta \in \mathbb{T}^N$ y $0 < r < 1$. Afirmamos que

$$\lim_{r\to 1} \|\lambda - u_r m\|_{A^*} = 0. \tag{3.1}$$

Como $\|u_r\|_1 \leq \|\lambda\|$, (3.1) implica que $h = u_r$ tiene las propiedades deseadas para un r suficientemente cerca de 1.

Asúmase, para buscar una contradicción, que (3.1) es falso. Entonces existe un $\delta > 0$, una sucesión creciente de números positivos $\{r_n\}$ con $r_n \to 1$ y una sucesión $\{f_n\}$ en A con $\|f_n\| \leq 1$, tales que

$$\left| \int_{\mathbb{T}^N} f_n \, d\lambda - \int_{\mathbb{T}^N} f_n u_{r_n} \, dm \right| \geq \delta, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Como $P(rw,\zeta) = P(r\zeta, w)$, usando el teorema de Fubini, vemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^N} f(w) u_r(w) \, dm(w) &= \int_{\mathbb{T}^N} f(w) \left(\int P(rw,\zeta) \, d\lambda(\zeta) \right) dm(w) \\
&= \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{T}^N} f(w) P(rw,\zeta) \, dm(w) \right) d\lambda(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{T}^N} f(w) P(r\zeta, w) \, dm(w) \right) d\lambda(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}^N} f(r\zeta) \, d\lambda(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}^N} f_r(\zeta) \, d\lambda(\zeta),
\end{aligned}$$

para cada $f \in A$ y $0 < r < 1$. De este modo vemos que (3.2) se puede escribir como

$$\left| \int_{\mathbb{T}^N} [f_n(\zeta) - f_n(r_n\zeta)] \, d\lambda(\zeta) \right| \geq \delta \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Pero si $g_n(z) = f_n(z) - f_n(r_n z)$, para $z \in \overline{\mathbb{D}}^N$, entonces $\{g_n\}$ es una sucesión de Montel y como λ es una medida de Henkin se tiene que $\int_{\mathbb{T}^N} g_n \, d\lambda \to 0$ cuando $\lambda \to 0$ y esto contradice (3.3).

Ahora completamos la prueba del teorema. Elíjanse $\epsilon_n > 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ tales que $\epsilon_1 > \|\mu\|_{A^*}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$. Sea $\mu_1 = \mu$ y asúmase como hipótesis de inducción, que existe, para $k \geq 1$, una medida de Henkin μ_k con $\|\mu_k\|_{A^*} < \epsilon_k$. Considerando μ_k como un funcional definido sobre A y usando el teorema de Hahn Banach encontramos $\hat{\mu}_k$, una extensión de μ_k a $C(\mathbb{T}^N)$ con la misma norma. Sea ahora $\nu_k = \mu_k - \hat{\mu}_k$. Es claro que $\nu_k \in A^{\perp}$ y

$$\|\mu_k - \nu_k\| = \| - \hat{\mu}_k\| = \|\mu_k\| < \epsilon_k.$$

Por la afirmación probada anteriormente, aplicada a $\mu_k - \nu_k$, tenemos que existe $h_k \in L^1(\mathbb{T}^N)$ tal que $\|h_k\|_1 < \epsilon_k$ y

$$\|\mu_k - \nu_k - h_k m\|_{A^*} < \epsilon_{k+1}.$$

Definimos ahora $\mu_{k+1} = \mu_k - \nu_k - h_k m$, para completar la construcción por inducción.

Es inmediato ver que para $k = 1, 2, 3, \dots$ tenemos

$$\mu = \mu_{k+1} + \sum_{n=1}^{k} \nu_n + \sum_{n=1}^{k} h_n m.$$

Sea $g = \sum_1^{\infty} h_n$. Entonces $g \in L^1(\mathbb{T}^N)$, $\|g\|_1 \leq \sum_1^{\infty} \epsilon_n$ y

$$\mu - gm = \mu_{k+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n - \sum_{n=k+1}^{\infty} h_n m.$$

Como $\nu_n \in A^{\perp}$,

$$\|\mu - gm\|_{A^*} \leq \|\mu_{k+1}\|_{A^*} + \sum_{k+1}^{\infty} \|h_n\|_1. \tag{3.4}$$

El lado derecho de (3.4) tiende a 0 cuando $k \to \infty$. Luego $\mu - gm \in A^{\perp}$ y concluye la prueba. □

A continuación presentamos nuestro resultado principal en el cual damos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de representaciones w^*-continuas de $H^{\infty}(\mathbb{D}^N)$ generadas por N-uplas polinomialmente acotadas.

Teorema 3.3.4. *Sea $T \in PB^N(\mathcal{H})$ una N-upla, generando el homomorfismo norma continuo $\Psi : A(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La N-upla T genera una representación w^*-continua de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$.*

2. *Para cada sucesión de Montel $\{f_n\}$ en $A(\mathbb{D}^N)$,*

$$\Psi(f_n) \xrightarrow{w^*} 0.$$

3. *La N-upla T es absolutamente continua.*

4. *La N-upla T satisface la condición de Apostol.*

Prueba. La equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) es el Lemma 3.3.1. La construcción de la Proposición 3.3.2 prueba (4) $\Rightarrow$ (1). Probaremos la equivalencia (2) $\Leftrightarrow$ (3) y la implicación (1) $\Rightarrow$ (4).

(2) $\Rightarrow$ (3). Si (2) es cierto, Ψ posee una familia de medidas representantes de Henkin. Sea $\{\mu(x,y) : x, y \in \mathcal{H}\}$ tal familia de medidas de Henkin. Escribiremos $\mu(x,y) = \nu(x,y) + g_{x,y}m$ con $\nu(x,y) \in A(\mathbb{D}^N)$ y $g_{x,y} \in L^1(\mathbb{T}^N)$ dadas por la descomposición de Valskii de $\mu(x,y)$. Como

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_{\mathbb{T}^N} f \, d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{T}^N} f g_{x,y} \, dm,$$

para cada $f \in A(\mathbb{D}^N)$, la familia $\{g_{x,y}m : x, y \in \mathcal{H}\}$ es justamente, una familia de medidas representantes de Ψ, absolutamente continuas.

(3) $\Rightarrow$ (2) Sea $\{\mu(x,y) : x, y \in \mathcal{H}\}$ una familia de medidas representantes de Ψ absolutamente continuas y $\{f_n\}$ una sucesión de Montel, entonces

$$\langle \Psi(f_n)x, y\rangle = \int f_n \, d\mu(x,y) \to 0, \qquad x, y \in \mathcal{H},$$

por la Proposición 2.3.4.

(1) $\Rightarrow$ (4) Si T genera una representación $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ w^*-continua y la condición de Apostol es falsa entonces para algún $j \in \{1, \ldots, N\}$ y un par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$ existe un $\epsilon > 0$ y una sucesión de polinomios $\{p_k\}$ con $\|p_k\|_\infty \leq 1$ y

$$|\langle p_k(T_1, \ldots, T_N) T_j^{n_k} x, y\rangle| > \epsilon, \tag{3.5}$$

para una sucesión creciente de enteros positivos $\{n_k\}$.

Sea $h_k(z) = z_j^{n_k}$ para $z \in \mathbb{D}^N$. Como $h_k \xrightarrow{w^*} 0$, entonces también $p_k h_k \xrightarrow{w^*} 0$ y así

$$|\langle p_k(T_1, \ldots, T_N) T_j^{n_k} x, y \rangle| \to 0,$$

lo cual contradice 3.5. $\square$

Nota: Si T genera una representación de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$, w^*-continua y $\{\mu(x,y) : x, y \in \mathcal{H}\}$ es una familia de medidas representantes con $\mu(x,y) = \mu_a(x,y) + \mu_s(x,y)$, su descomposición de Lebesgue para cada par $x, y \in \mathcal{H}$; la familia $\{\mu_a(x,y) : x, y \in \mathcal{H}\}$ es también una familia de medidas representantes. En efecto, sea $\mu(x,y) = \nu(x,y) + g_{x,y} m$ con $\nu(x,y) \in A(\mathbb{D}^N)^\perp$ y $g_{x,y} \in L^1(\mathbb{T}^N)$ la descomposición de Valskii de $\mu(x,y)$, así pues $\mu(x,y) - g_{x,y} m \in A(\mathbb{D}^N)^\perp$ y

$$\mu(x,y) - g_{x,y} m = [\mu_a(x,y) - g_{x,y} m] + \mu_s(x,y),$$

es su descomposición de Lebesgue y por el Teorema General de F. y M. Riesz $\mu_a(x,y) - g_{x,y} m \in A(\mathbb{D}^N)^\perp$. Luego

$$\int_{\mathbb{T}^N} f \, d\mu_a(x,y) = \int_{\mathbb{T}^N} f g_{x,y} \, dm = \int_{\mathbb{T}^N} f \, d\mu(x,y),$$

para cada $f \in A(\mathbb{D}^N)$.

Así pues, si $T \in ACPB^N(\mathcal{H})$ genera el homomorfismo $\Psi : A(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, siempre podemos suponer que Ψ tiene una familia de medidas representantes $\{\mu(x,y) : x, y \in \mathcal{H}\}$, absolutamente continuas tales que

$$\|\mu(x,y)\| \leq \|\Psi\| \, \|x\| \|y\|, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Concluimos, presentando el resultado principal de este Capítulo que recoge las propiedades de las representaciones de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ generadas por N-uplas en $ACPB^N(\mathcal{H})$.

Teorema 3.3.5. *Sea $T = (T_1, \ldots, T_N) \in ACPB^N(\mathcal{H})$ generando el homomorfismo norma continuo $\Psi : A(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Existe un único homomorfismo de álgebras*

$$\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{A}_T,$$

con las siguientes propiedades:

1. *Para cada $j = 1, \ldots, N$, $\Phi(\pi_j) = T_j$.*

2. *Se tiene que* $\Phi|A(\mathbb{D}^N) = \Psi$*, el homomorfismo de álgebras norma continuo generado por* T*.*

3. *El homomorfismo* Φ *es* w^**-continuo.*

4. *Se tiene que* $\|\Psi\| = \|\Phi\|$*.*

5. *El rango de* Φ *es* w^**-denso en* $\mathcal{A}_T$*, el álgebra dual generada por* $T = (T_1, \ldots, T_N)$*.*

6. *Existe una aplicación lineal, acotada, uno a uno*

$$\Phi_* : \mathcal{Q}_T \to L^1(\mathbb{T}^N)/^{\perp}H^\infty(\mathbb{D}^N),$$

tal que $(\Phi_*)^* = \Phi$*.*

7. *Si* Φ *es acotado inferiormente, el rango de* Φ *es* $\mathcal{A}_T$ *y* Φ *es un isomorfismo de las álgebras duales* $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ *y* $\mathcal{A}_T$*. En este caso* Φ_* *es un isomorfismo lineal, inversible, del espacio* $\mathcal{Q}_T$ *sobre* $L^1(\mathbb{T}^N)/^{\perp}H^\infty(\mathbb{D}^N)$*.*

Prueba. En el Teorema 3.3.4 se probó que cada $T \in ACPB^N(\mathcal{H})$ genera una representación w^*-continua de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$, la cual extiende el homomorfismo norma continuo $\Psi : A(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ generado por T. Tal representación es claramente única, pues $A(\mathbb{D}^N)$ es w^*-denso en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Se cumplen pues las propiedades (1), (2) y (3).

Como Φ extiende a Ψ se tiene que $\|\Psi\| \leq \|\Phi\|$. Si $f \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ con $\|f\|_\infty \leq 1$, sea $\{f_n\}$ una sucesión en $A(\mathbb{D}^N)$ con $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ y $f_n \xrightarrow{w^*} f$. Como para cada par $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\langle \Phi(f_n)x, y\rangle \to \langle \Phi(f)x, y\rangle,$$

y

$$|\langle \Phi(f_n)x, y\rangle| = |\langle \Psi(f_n)x, y\rangle| \leq \|\Psi\|\,\|x\|\,\|y\|,$$

entonces $|\langle \Phi(f)x, y\rangle| \leq \|\Psi\|\,\|x\|\,\|y\|$ $(x, y \in \mathcal{H})$ y así $\|\Phi\| \leq \|\Psi\|$, lo que prueba (4).

La afirmación (5) es inmediata al observar que

$$\mathcal{A}_T = \mathrm{cl}_{w^*}\{\Psi(p) : p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]\}.$$

Finalmente, (6) se sigue de la Proposición 2.4.4 y (7) es consecuencia de la Proposición 2.4.6. $\square$

Capítulo 4

Las clases $\mathbb{A}^N(\mathcal{H})$ y $\mathbb{A}_p^N(\mathcal{H})$

4.1 Conceptos básicos

Para una contracción T absolutamente continua, las técnicas de álgebras duales han resultado particularmente exitosas, en el caso en el cual el cálculo funcional de Sz.-Nagy y Foias es una isometría. De hecho, en este caso la representación $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, generada por T, es un isomorfismo de las álgebras duales $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ y $\mathcal{A}_T$ (la menor subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, con unidad y w^*-cerrada, que contiene la contracción T).

La denominada *técnica de Scott Brown* permite, bajo estas condiciones, mostrar que los elementos de $\mathcal{Q}_T = \mathcal{C}_1(\mathcal{H})/{}^\perp\mathcal{A}_T$, el predual de $\mathcal{A}_T$ son justamente las clases que contienen los operadores de rango uno. Este hecho ha conducido a una rica teoría para tales contracciones, y en particular, a obtener subespacios invariantes no triviales para tales T (cf. [BFP85]).

En el caso de operadores polinomialmente acotados diversos progresos han sido hechos en esta dirección (cf. [Li92] y [LP95]). Asimismo, se han han considerado N-uplas de contracciones que conmutan entre sí (ver [Pta98] y las referencias allí citadas). En este Capítulo consideraremos la clase $ACPB^N(\mathcal{H})$ y en este contexto introducimos las definiciones que generalizan a esta situación las ideas indicadas.

En primer lugar, de modo análogo a [LP95], definimos la clase $\mathbb{A}^N(\mathcal{H})$ formada por las N-uplas $T \in ACPB^N(\mathcal{H})$ tales que la representación w^*-continua $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, generada por T, sea acotada inferiormente, esto es, existe una constante $m > 0$ tal que $m\|u\|_\infty \leq \|\Phi(u)\|$ para toda $u \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Claramente Φ tiene kernel trivial y su rango es cerrado. Se sigue inmediatamente del Teorema 3.3.5 que si $T \in \mathbb{A}^N(\mathcal{H})$, Φ es un isomorfismo de las álgebras duales $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ y $\mathcal{A}_T$ (la menor subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ con unidad y w^*-cerrada que contiene los elementos de T).

Con la notación del Teorema 3.3.5, sea Φ_* la aplicación de $\mathcal{Q}_T$, el predual de $\mathcal{A}_T$, a $L^1(\mathbb{T}^N)/^\perp H^\infty(\mathbb{D}^N)$, el predual de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$, tal que $\Phi = (\Phi_*)^*$.

Como es usual escribiremos $x \otimes y$ $(x, y \in \mathcal{H})$ para designar el operador de rango uno definido por

$$x \otimes y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad z \to \langle z, y\rangle x.$$

Sea $[x \otimes y]$ el elemento de $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})/^\perp \mathcal{A}_T$ que contiene $x \otimes y$. Obsérvese que $\Phi_*(x \otimes y)$ es el funcional w^*-continuo en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ tal que

$$\langle \Phi_*([x \otimes y]), u\rangle = \langle [x \otimes y], \Phi(u)\rangle = \mathrm{tr}\,((x \otimes y)\Phi(u)) = \langle \Phi(u)x, y\rangle,$$

para cada $u \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Así pues, permitiéndonos el usual abuso de notación, en adelante dados $x, y \in \mathcal{H}$, el símbolo $x \otimes y$ designará, tanto el operador de rango uno indicado, como el funcional w^*-continuo

$$x \otimes y : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathbb{C}, \qquad f \to \langle \Phi(f)x, y\rangle.$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{D}^N$, el funcional

$$\mathcal{E}_\lambda : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathbb{C}, \qquad u \to u(\lambda),$$

es w^*-continuo y escribiremos $[L_\lambda]$ para el elemento de $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})/^\perp \mathcal{A}_T$ tal que $\Phi_*([L_\lambda]) = \mathcal{E}_\lambda$. Obsérvese que

$$u(\lambda) = \langle \mathcal{E}_\lambda, u\rangle = \langle \Phi_*([L_\lambda]), u\rangle = \langle [L_\lambda], \Phi(u)\rangle,$$

para cada $u \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$.

Análogamente a [BFP85] y [LP95], consideraremos las clases $\mathbb{A}^N_{p,q}(\mathcal{H})$, ($p, q$ cardinales con $1 \le p, q \le \aleph_0$). Específicamente, diremos que $T \in \mathbb{A}^N(\mathcal{H})$ es de clase $\mathbb{A}^N_{p,q}(\mathcal{H})$ si para cada familia $\{[L_{ij}]\}$, $(0 \le i < p,\ 0 \le j < q)$ de elementos de $\mathcal{Q}_T$, existen vectores $\{x_i\}_{0 \le i < p}$ y $\{y_i\}_{0 \le j < q}$ en $\mathcal{H}$ tales que

$$[L_{ij}] = [x_i \otimes y_j] \qquad (0 \le i < p, 0 \le j < q).$$

Si $p = q$ escribimos $\mathbb{A}_p^N(\mathcal{H})$ en lugar de $\mathbb{A}_{p,p}^N(\mathcal{H})$.

Nótese que $T \in \mathbb{A}_{p,q}^N(\mathcal{H})$ si y sólo si para cada familia $\{L_{ij}\}$ $(0 \le i < p,\ 0 \le j < q)$, de elementos de $L^1(\mathbb{T}^N)/^{\perp}H^{\infty}(\mathbb{D}^N)$, existen vectores $\{x_i\}_{0\le i<p}$ y $\{y_i\}_{0\le j<q}$ en $\mathcal{H}$ tales que

$$L_{ij} = x_i \otimes y_j \qquad (0 \le i < p, 0 \le j < q).$$

Esto indica en particular que nuestras definiciones coinciden con las de [BHGP88].

Para el caso de una contracción, hay una extensa teoría de estructura para la clase $\mathbb{A}_{\aleph_0}(\mathcal{H})$ (cf. [BFP85, Chapther IV,V y VI]). En esta teoría de estructura, como se indica en [LP95], las propiedades $X_{\theta,\gamma}$, $0 \le \theta \le 1$ juegan un papel fundamental.

Para efectos de completar la exposición recordemos (cf.[BFP85]) las siguientes definiciones. Para $0 \le \theta < \gamma \le 1$, consideremos el conjunto $\mathcal{X}_\theta(\mathcal{A}_T)$, formado por los $[L] \in \mathcal{Q}_T$ para los cuales existen sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$, en la bola unitaria cerrada de $\mathcal{H}$, que cumplen las siguientes condiciones:

$$\limsup_{n\to\infty} \|[x_n \otimes y_n] - [L]\| \le \theta,$$

y

$$\|[x_n \otimes w]\| + \|[w \otimes y_n]\| \to 0, \qquad w \in \mathcal{H}.$$

Es bien conocido (cf. [BFP85]) que $\mathcal{X}_\theta(\mathcal{A}_T)$ es un subconjunto absolutamente convexo y cerrado de $\mathcal{Q}_T$. Diremos que $\mathcal{A}_T$ tiene la *propiedad* $X_{\theta,\gamma}$ si el conjunto $\mathcal{X}_\theta(\mathcal{A}_T)$ contiene a $(\mathcal{Q}_T)_\gamma$, la bola cerrada de radio γ centrada en el origen de $\mathcal{Q}_T$.

Exactamente igual que en el caso considerado en [LP95], de un operador polinomialmente acotado, usando [BFP85, Ths. 3.7 y 9.22], obtenemos inmediatamente:

Teorema 4.1.1. *(cf. [LP95, Th.2.1]) Si $T \in ACPB^N(\mathcal{H})$ y $\mathcal{A}_T$ tiene la propiedad $X_{\theta,\gamma}$ para algunos $0 \le \theta < \gamma \le 1$, entonces $T \in \mathbb{A}_{\aleph_0}^N(\mathcal{H})$ y $\mathcal{A}_T$ es reflexiva.*

4.2 Espectro dominante y subespacios invariantes

De modo análogo al caso de una variable, al considerar N-uplas T de contracciones diversas condiciones sobre la N-upla, y en particular sobre alguno de los espectros asociados a la N-upla, dan criterios para decidir si T satisface la propiedad $X_{0,1}$.

Recordemos que un subconjunto $\Delta \subset \mathbb{D}^N$ es *dominante* para $\mathbb{T}^N$ si

$$\sup_{z\in\Delta} |h(z)| = \|h\|_\infty$$

para cada $h \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$.

Recordemos también algunos elementos de la terminología básica sobre el espectro conjunto de una N-upla de operadores (cf. [Cur88]). Si $T = (T_1, \ldots, T_N)$ es una N-upla de operadores actuando en $\mathcal{H}$, que conmutan entre sí, diremos que T es *inversible por la izquierda* si existe una N-upla de operadores $A_1, \ldots, A_N$ (que no necesariamente conmutan entre sí) tal que

$$A_1T_1 + \cdots + A_NT_N = I,$$

donde I denota el operador identidad en $\mathcal{H}$. Similarmente definimos *inversibilidad a la derecha* de una N-upla. El *espectro izquierdo (derecho)* de T, denotado $\sigma_l(T)$ $(\sigma_r(T))$, consiste de las N-uplas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ de números complejos tales que $(T_1-\lambda_1, \ldots, T_N-\lambda_N)$, no es inversible por la izquierda (derecha). Nótese que $\sigma_r(T)^* = \sigma_l(T^*)$, donde $\sigma_r(T)^*$ designa el conjunto de los λ tales que $\overline{\lambda} \in \sigma_r(T)$.

Definimos el *espectro esencial izquierdo* de T, que denotaremos por $\sigma_{le}(T)$, como el conjunto de los $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ en $\mathbb{C}^N$ para los cuales existe una sucesión ortonormal de vectores $\{e_n\}$ en $\mathcal{H}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{N} \|(T_i - \lambda_i)e_n\| \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. Definimos el *espectro esencial derecho* de T por

$$\sigma_{re}(T) = \sigma_{le}(T^*).$$

La unión de los espectros izquierdo y derecho (esencial) es llamada el *espectro de Harte (esencial)*. Escribiremos $\sigma_H(T)$ para la unión de $\sigma_l(T)$ y $\sigma_r(T)$ y $\sigma_{He}(T)$ para la unión de $\sigma_{le}(T)$ y $\sigma_{re}(T)$.

Es bien conocido, que si $\lambda \in \sigma_H(T) \setminus \sigma_{He}(T)$, entonces λ es un autovalor. Para ver esto tómese $\lambda \in \sigma_l(T) \setminus \sigma_{le}(T)$ y considérese el operador

$$R = (T_1 - \lambda_1) \oplus (T_2 - \lambda_2) \oplus \cdots \oplus (T_N - \lambda_N),$$

actuando en la suma directa de N copias de $\mathcal{H}$. Como $\lambda \notin \sigma_{le}(T)$, el operador R tiene rango cerrado. Luego, como $\lambda \in \sigma_l(T)$, debe ocurrir que $\ker(R) \neq (0)$, pero

$$\ker(R) = \bigcap_{j=1}^{N} \ker(T_j - \lambda_j).$$

Un argumento similar funciona para el espectro derecho. Así pues, si $\lambda \in \sigma_H(T) \setminus \sigma_{He}(T)$ podemos asociar un subespacio no trivial invariante de T con λ. Luego, en términos del problema de encontrar subespacios invariantes comunes no triviales para la N-upla T, podemos asumir que $\sigma_H(T) = \sigma_{He}(T)$.

Recordemos además, que la representación $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es de clase $C_{0\cdot}$, si para cada sucesión $\{h_n\}$ en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ tal que $h_n \xrightarrow{w^*} 0$, se cumple que $h_n(T) \to 0$ en la topología fuerte de operadores (SOT). La representación Φ es de clase $C_{\cdot 0}$, si cuando $h_n \xrightarrow{w^*} 0$, se tiene que $h_n(T)^* \xrightarrow{SOT} 0$.

Si la representación Φ es generada por $T \in ACPB^N(\mathcal{H})$, se tiene que Φ es clase $C_{0\cdot}$ (respectivamente de clase $C_{\cdot 0}$) si y sólo si cada T_i $(i = 1, \ldots, N)$ es de clase $C_{0\cdot}$ (de clase $C_{\cdot 0}$) (ver [Apo80]). Adicionalmente diremos que Φ es de clase C_{00} si es de clase $C_{0\cdot}$ y también de clase $C_{\cdot 0}$.

El siguiente hecho es bien conocido.

Proposición 4.2.1. *(cf. [Esc94, Lemma 1.1]) Sea $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ una representación w^*-continua. Si Φ es de clase $C_{0\cdot}$ y $\{y_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{H}$ que converge débilmente a cero, entonces para todo $x \in \mathcal{H}$*

$$\lim_{n\to\infty} x \otimes y_n = 0.$$

Si Φ es de clase $C_{\cdot 0}$ y $\{x_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{H}$ que converge débilmente a cero, entonces para todo $y \in \mathcal{H}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \otimes y = 0.$$

En el caso que acá consideramos, $T \in ACPB^N(\mathcal{H})$, obtenemos resultados análogos a los correspondientes para N-uplas de contracciones. Requeriremos el siguientes resultado.

Proposición 4.2.2. *(cf. [BFP85, Pro. 8.2.2]) Sea $\mathfrak{X}$ un espacio de Banach complejo, sea M un número positivo y sea E un subconjunto de $\mathfrak{X}$ tal que*

$$\|\phi\| \leq M \sup_{x\in E} |\phi(x)|, \qquad \phi \in \mathfrak{X}^*,$$

entonces $\overline{\text{aco}}E$*, la clausura de la cubierta absolutamente convexa de* E *contiene a* $(\mathfrak{X})_{1/M}$*, la bola cerrada centrada en el origen de* X *con radio* $1/M$*.*

Si $\Delta \subseteq \mathbb{D}^N$ es dominante. Supóngase que para cada $\lambda \in \Delta$ existen sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ en la bola unitaria cerrada de $\mathcal{H}$ tales que

$$\|\mathcal{E}_\lambda - x_n \otimes y_n\| \to 0,$$

y

$$\|x_n \otimes w\| + \|w \otimes y_n\| \to 0,$$

para todo $w \in \mathcal{H}$, entonces también se tiene que

$$\|[L_\lambda] - [x_n \otimes y_n]\| \to 0,$$

y

$$\|[x_n \otimes w]\| + \|[w \otimes y_n]\| \to 0,$$

para todo $w \in \mathcal{H}$ y cada $\lambda \in \Delta$. Sea $E = \{[L_\lambda] : \lambda \in \Delta\}$, nuestra suposición dice que $E \subseteq \mathcal{X}_0(\mathcal{A}_T)$ y como Δ es dominante, para cada $u \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ se tiene que

$$\|\Phi(u)\| \leq \|\Phi\| \, \|u\|_\infty = \|\Phi\| \sup_{\lambda \in \Delta} |u(\lambda)| = \|\Phi\| \sup_{\lambda \in \Delta} |\langle [L_\lambda], \Phi(u) \rangle|,$$

así que, por la Proposición 4.2.2,

$$(\mathcal{Q}_T)_{1/\|\Psi\|} \subseteq \overline{\text{aco}}\, E,$$

y como $\mathcal{X}_0(\mathcal{A}_T)$ es cerrado y absolutamente convexo, entonces

$$(\mathcal{Q}_T)_{1/\|\Psi\|} \subseteq \mathcal{X}_0(\mathcal{A}_T),$$

y $\mathcal{A}_T$ tiene la propiedad $X_{0,1/\|\Phi\|}$.

Usemos esta observación para probar nuestro resultado, en el cual damos condiciones necesarias para la existencia de subespacios invariantes no triviales para N-uplas en la clase $\mathbb{A}^N(\mathcal{H})$.

Teorema 4.2.3. *Sea* $T \in \mathbb{A}^N(\mathcal{H})$ *generando la representación* w^**-continua*

$$\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

En cada una de las siguientes situaciones $\mathcal{A}_T$ *tiene la propiedad* $X_{0,1/\|\Psi\|}$ *y en consecuencia* $T \in \mathbb{A}^N_{\aleph_0}(\mathcal{H})$ *y el álgebra* $\mathcal{A}_T$ *es reflexiva.*

1. Si $\sigma_{le}(T) \cap \mathbb{D}^N$ *es dominante para* $\mathbb{T}^N$ *y* Φ *es de clase* $C_{0\cdot}$.

2. Si $\sigma_{re}(T) \cap \mathbb{D}^N$ *es dominante para* $\mathbb{T}^N$ *y* Φ *es de clase* $C_{\cdot 0}$.

Prueba. Supóngase que $\Delta = \sigma_{le}(T) \cap \mathbb{D}^N$ es dominante. Para cada $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \Delta$ existe una sucesión ortonormal $\{x_n\}$ en $\mathcal{H}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_i - \lambda_i)x_n\| = 0, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Sea $u \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ con $\|u\|_\infty \leq 1$. Por la propiedad de Gleason del polidisco (cf. 2.2.7) existen $v_1, \ldots, v_N \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ tales que

$$u(z) = u(\lambda) + \sum_{i=1}^{N} (z_i - \lambda_i)v_i(z), \qquad z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{D}^N$$

y

$$\|v_i\|_\infty \leq M_\lambda \|u\|_\infty \leq M_\lambda,$$

para una constante M_λ que depende sólo de λ.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |(x_n \otimes x_n - \mathcal{E}_\lambda)u| &= |\langle \Phi(u)x_n, x_n\rangle - u(\lambda)| \\ &= |\sum_{i=1}^{N} \langle \Phi(v_i)(T_i - \lambda_i)x_n, x_n\rangle| \\ &\leq M_\lambda \|\Psi\| \sum_{i=1}^{N} \|(T_i - \lambda_i)x_n\|; \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |(x_n \otimes y)u| &= |\langle \Phi(u)x_n, y\rangle| \\ &= |u(\lambda)\langle x_n, y\rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle \Phi(v_i)(T_i - \lambda_i)x_n, y\rangle| \\ &\leq |u(\lambda)\langle x_n, y\rangle| + M_\lambda \|\Phi\| \, \|y\| \sum_{i=1}^{N} \|(T_i - \lambda_i)x_n\|; \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathcal{H}$.

Así $|(x_n \otimes x_n - \mathcal{E}_\lambda)u| \to 0$, y $|(x_n \otimes y)u| \to 0$ para cada $y \in \mathcal{H}$, cuando $n \to \infty$, uniformemente para $u \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ con $\|u\|_\infty \leq 1$. Por tanto $\|x_n \otimes x_n - \mathcal{E}_\lambda\| \to 0$ y

$\|x_n \otimes y\| \to 0$ para cada $y \in \mathcal{H}$. Si Φ es de clase $C_{0\cdot}$, por la Proposición 4.2.1, $\|x \otimes x_n\| \to 0$ para cada $x \in \mathcal{H}$ y por la observación que precede al Teorema se tiene (1).

La prueba de (2) es similar. $\square$

Corolario 4.2.4. *Sea $T \in \mathbb{A}^N(\mathcal{H})$ generando la representación $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ w^*-continua. En cada una de las siguientes situaciones T posee subespacios invariantes no triviales.*

1. *Si $\sigma_l(T) \cap \mathbb{D}^N$ es dominante para $\mathbb{T}^N$ y Φ es de clase $C_{0\cdot}$.*

2. *Si $\sigma_r(T) \cap \mathbb{D}^N$ es dominante para $\mathbb{T}^N$ y Φ es de clase $C_{\cdot 0}$.*

4.3 La clase $\mathbb{A}^N_{\aleph_0}(\mathcal{H})$ y la propiedad $X_{\theta,\gamma}$

En el caso de una contracción T, es bien conocido que (cf. [BFP85, Th. 6.3]) $T \in \mathbb{A}_{\aleph_0}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\mathcal{A}_T$ tiene la propiedad $X_{\theta,\lambda}$, para algunos $0 \leq \theta < \lambda \leq 1$. El siguiente problema fue planteado en [Oct95, Problem 4.3] para $N = 2$.

Problema 4.3.1. *Sea $T = (T_1, \ldots, T_N)$ una N-upla de contracciones que conmutan y generan una representación isométrica Φ. Si T es de clase $\mathbb{A}_{\aleph_0}$ ¿ tiene $\mathcal{A}_T(\mathcal{H})$ necesariamente la propiedad $X_{\theta,\gamma}$ para algunos $0 \leq \theta < \gamma \leq 1$? ¿ es la propiedad $X_{0,1}$ equivalente a la propiedad $X_{\theta,\gamma}$ para cada $0 \leq \theta < \gamma \leq 1$?*

La prueba del teorema que da una respuesta parcial a ese problema en [Oct95], contiene un error. Por otra parte, para el caso de un operador $T \in ACPB^1(\mathcal{H})$, C. Pearcy y W. S. Li plantean la siguiente cuestión:

Problema 4.3.2. *[LP95, Problem 2.4] Si $T \in ACPB^1(\mathcal{H})$ genera una representación Φ de norma M y $T \in \mathbb{A}^1_{\aleph_0}(\mathcal{H})$, ¿ tiene $\mathcal{A}_T$ necesariamente la propiedad $X_{\theta,\gamma}$ para algunos $0 \leq \theta < \gamma \leq 1/M$?*

Esto conduce a preguntarnos:

Problema 4.3.3. *Si $T \in ACPB^N(\mathcal{H})$ genera una representación Φ de norma M y $T \in \mathbb{A}^N_{\aleph_0}(\mathcal{H})$, ¿ tiene $\mathcal{A}_T$ necesariamente la propiedad $X_{\theta,\gamma}$, para algunos $0 \leq \theta < \gamma \leq 1/M$?*

Para $T \in ACPB^1(\mathcal{H}) \cap C_{00}$ en [LP95, Th. 2.14] se da una respuesta afirmativa. En esta sección damos una respuesta parcial al Problema 4.3.3 usando técnicas de [Oct95] y [Esc98]. Recordemos (cf. [BHGP88]) que si $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es una representación y $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ un subespacio cerrado, $\mathcal{M}$ es *invariante* para Ψ si $\Psi(u)(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ para todo $u \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ y $\mathcal{M}$ es *semi-invariante* para Φ si puede ser escrito en la forma $\mathcal{M} = \mathcal{U} \ominus \mathcal{V}$, para $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subespacios invariantes para Φ con $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$. Si $\mathcal{M}$ es semi-invariante para Φ, denotaremos por $\Phi_\mathcal{M}$ la *compresión* de Φ a $\mathcal{M}$, esto es, la aplicación $H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{M})$ dada por

$$\Phi_\mathcal{M}(u) = P_\mathcal{M}\Phi(u)|\mathcal{M}, \qquad u \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$$

donde $P_\mathcal{M}$ designa la proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}$. Se tiene que $\mathcal{M}$ es semi-invariante si y sólo si $\Psi_\mathcal{M}$ es multiplicativo (cf. [Pis96, Th.1.7]).

Si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de puntos de $\mathbb{D}^N$ y $\{e_n\}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$, la representación $\Psi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definida por

$$\Psi(u)e_n = u(\lambda_n)e_n, \qquad u \in H^\infty(\mathbb{D}^N),\ n \in \mathbb{N};$$

se denomina *representación diagonal* asociada a $\{\lambda_n\}$ y $\{e_n\}$. Si $\{\lambda_n\}$ es dominante para $\mathbb{D}^N$, la representación indicada tiene la siguiente propiedad (ver la prueba de [BHGP88, Th. 3.1]): para todo funcional w^*-continuo L definido en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$, existen sucesiones de vectores $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ en la bola unitaria de $\mathcal{H}$, tales que

$$\|L - x_n \otimes y_n\| \to 0,$$

y

$$\|x_n \otimes w\| + \|w \otimes y_n\| \to 0, \qquad w \in \mathcal{H}.$$

Es inmediata a partir de [BHGP88, Th.4.4] (ver también [Esc98]) la siguiente proposición que requeriremos en lo que sigue.

Proposición 4.3.4. *Sea $T \in \mathbb{A}^N_{\aleph_0}(\mathcal{H})$ generando la representación w^*-continua*

$$\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Para cada sucesión $\{\lambda_n\}$ de puntos de $\mathbb{D}^N$, hay un subespacio $\mathcal{M}$ semi-invariante para Φ y una base ortonormal $\{e_n\}$ de $\mathcal{M}$ tal que la compresión $\Phi_\mathcal{M}$ de Φ a $\mathcal{M}$ es la representación diagonal asociada a $\{\lambda_n\}$ y $\{e_n\}$.

Para $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, un punto de $\mathbb{D}^N$, fijemos $\phi_\lambda : \mathbb{D}^N \to \mathbb{D}^N$ la aplicación definida por

$$\phi_\lambda(z) = (\phi_{\lambda_1}(z_1), \ldots, \phi_{\lambda_N}(z_N)),$$

donde $\phi_{\lambda_i} : \mathbb{D}^N \to \mathbb{D}^N$, $(i = 1, \ldots, N)$, es la transformación de Möbius

$$\phi_{\lambda_i}(z) = \frac{z - \lambda_i}{1 - \overline{\lambda_i} z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Sea

$$R_\lambda : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to H^\infty(\mathbb{D}^N), \qquad f \to f \circ \phi_\lambda.$$

Nótese que R_λ es un isomorfismo de álgebras duales, que podemos escribir como $S_\lambda^* = R_\lambda$ para un operador acotado $S_\lambda : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$. Obsérvese que S_λ es una isometría y que $S_\lambda(\mathcal{E}_\lambda) = \mathcal{E}_0$.

Si $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es una representación w^* continua, sea $\Phi_\lambda = \Phi \circ R_\lambda$. Claramente Φ_λ es también una representación w^* continua. Escribiremos $x \otimes_\lambda y$ para el funcional

$$H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathbb{C}, \qquad u \to \langle \Phi_\lambda x, y \rangle,$$

para cada par $x, y \in \mathcal{H}$. Vemos que $S_\lambda(x \otimes y) = x \otimes_\lambda y$. Usaremos T_λ para designar la N-upla $(\Psi_\lambda(\chi_1), \ldots, \Psi_\lambda(\chi_N))$.

Veamos ahora nuestro resultado.

Teorema 4.3.5. *Sea T una N-upla de contracciones que conmutan entre sí, son polinomialmente acotadas, generan una representación $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ w^*-continua de norma M y son de clase $\mathbb{A}^N_{\aleph_0}(\mathcal{H})$. Supóngase que para algunos índices $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, T_i^* y T_j son de clase $C_{0\cdot}$. Entonces Φ satisface la propiedad $X_{0,1/M}$.*

Prueba. Para cada $\lambda \in \mathbb{D}^N$, consideremos el funcional w^*-continuo

$$\mathcal{E}_\lambda \colon H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathbb{C}, \qquad f \to f(\lambda).$$

Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión dominante para $\mathbb{T}^N$. Por la Proposición 4.3.4, existe un subespacio $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ semi-invariante para Φ y una base ortonormal $\{e_n\}$ de $\mathcal{M}$, tales que la compresión $\Phi_\mathcal{M}$ de Φ a $\mathcal{M}$ es justamente la representación diagonal asociada a $\{\lambda_n\}$ y $\{e_n\}$. Como $\{\lambda_n\}$ es dominante para $\mathbb{D}^N$, por las observaciones que preceden a la Proposición

4.3.4, para cada funcional w^*-continuo L en $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ con $\|L\| \leq 1$ y cada $\epsilon > 0$, existen vectores $x, y \in \mathcal{H}$ con $\|x\|, \|y\| \leq 1$, tales que

$$\|L - x \otimes y\| < \epsilon.$$

En particular consideremos los funcionales w^*-continuos

$$\mathcal{E}_0^{(k)} \colon H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathbb{C}, \qquad f \to \left(\frac{\partial^{2k} f}{\partial z_i^k \partial z_j^k} \right)(0)/(k!)^2.$$

Como $\|\mathcal{E}_0^{(k)}\| \leq 1$, existen sucesiones de vectores $\{u_k\}$ y $\{v_k\}$, en la bola cerrada unitaria de $\mathcal{H}$, tales que

$$\|\mathcal{E}_0^{(k)} - u_k \otimes v_k\| \to 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Definimos $x_k = T_i^k u_k$ y $y_k = (T_j^*)^k v_k$. Entonces $\|x_k\|, \|y_k\| \leq 1$ y para cada $w \in \mathcal{H}$

$$\langle \Phi(f) x_k, w \rangle = \langle \Phi(f) u_k, (T_i^*)^k \, w \rangle \to 0,$$

y

$$\langle \Phi(f) w, y_k \rangle = \langle T_j^k w, \Phi(f)^* v_k \rangle \to 0,$$

si $k \to \infty$ uniformemente para f en la bola cerrada unitaria de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Así pues, $\|x_k \otimes w\| \to 0$ y $\|w \otimes y_k\| \to 0$ para todo $w \in \mathcal{H}$.

Además como

$$\begin{aligned} x_k \otimes y_k(f) &= \langle \Phi(f) x_k, y_k \rangle \\ &= \langle \Phi(f) T_i u_k, \left(T_j^*\right)^k v_k \rangle \\ &= \langle \Phi(\pi_i^k \pi_j^k f) u_k, v_k \rangle \\ &= u_k \otimes v_k(\pi_i^k \pi_j^k f), \end{aligned}$$

y $\mathcal{E}_0^{(k)}(\pi_i^k \pi_j^k f) = \mathcal{E}_0(f)$ para todo $f \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$, se tiene que

$$|\mathcal{E}_0(f) - x_k \otimes y_k(f)| = |\mathcal{E}_0^{(k)}(\pi_i^k \pi_j^k f) - u_k \otimes v_k(\pi_i^k \pi_j^k f)| \leq \|\mathcal{E}_0^{(k)} - u_k \otimes v_k\|,$$

para toda $f \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$ con $\|f\|_\infty \leq 1$. Luego, $\|\mathcal{E}_0 - x_k \otimes y_k\| \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Sea ahora $\lambda \in \mathbb{D}^N$ arbitrario. Claramente la N-upla T_λ satisface las hipótesis del teorema y así, por lo probado anteriormente, existen sucesiones $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$, en la bola unitaria cerrada de $\mathcal{H}$, tales que

$$\|\mathcal{E}_0 - x_k \otimes_\lambda y_k\| \to 0,$$

$$\|x_k \otimes_\lambda w\| \to 0, \qquad w \in \mathcal{H} \text{ y}$$

$$\|w \otimes_\lambda y_k\| \to 0, \qquad w \in \mathcal{H}.$$

Pero entonces $x_k \otimes w = S_\lambda^{-1}(x_k \otimes_\lambda w) \to 0$ para todo $w \in \mathcal{H}$, $w \otimes y_k = S_\lambda^{-1}(w \otimes_\lambda y_k) \to 0$ para todo $w \in \mathcal{H}$ y

$$\|\mathcal{E}_\lambda - x_k \otimes y_k\| = \|S_\lambda^{-1}(\mathcal{E}_0 - x_k \otimes_\lambda y_k)\| \to 0.$$

Por la observación que precede al Teorema 4.2.3 se tiene que $\mathcal{A}_T$ tiene la propiedad $X_{0,1/M}$.

□

Corolario 4.3.6. *Sea T una N-upla de contracciones que conmutan entre sí, son polinomialmente acotadas, generan una representación $\Phi : H^\infty(\mathbb{D}^N) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ w^*-continua de norma M y son de clase $\mathbb{A}_{\aleph_0}^N(\mathcal{H})$. Supóngase que para algunos índices $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, T_i^* y T_j son de clase $C_{0\cdot}$; entonces, $\mathcal{A}_T$ satisface la propiedad $X_{\theta,\gamma}$, para algunos $0 \leq \theta < \gamma \leq M$, si y sólo si $\mathcal{A}_T$ satisface la propiedad $X_{0,1/M}$.*

Bibliografía

[Apo80] C. Apostol. Functional calculus and invariant subspaces. *J. Operator Theory*, 2:159–190, 1980.

[BCP79] S. Brown, B. Chevreau, and C. Pearcy. Contractions with rich spectrum have invariant subspaces. *J. Operator Theory*, 1:123–136, 1979.

[BDØ73] E. Briem, A. Davie, and B. Øksendal. Functional calculus for commuting contractions. *J. London Math. Soc.*, 7:709–718, 1973.

[Bek74] O. Bekken. Rational approximation on product sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 191:301–316, 1974.

[BFP85] H. Bercovici, C. Foias, and C. Pearcy. *Dual Algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory*, volume 56 of *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1985.

[BHGP88] H. Bercovici, C. Hernandez-Garcidiego, and V. Paulsen. Universal compressions of representations of $H^\infty(G)$. *Math. Ann.*, 281:177–191, 1988.

[Bro78] S. Brown. Some invariant subspaces for subnormal operators. *Integral Equations Operator Theory*, 1:310–333, 1978.

[Con90] J. Conway. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag, New York, 2da. edition, 1990.

[Con91] J. Conway. *The theory of subnormal operators*, volume 38 of *Math. Surveys and Monographs.* AMS, Providence, Rhode Island, 1991.

[Cur88] R. Curto. Applications of several complex variables to multiparameter spectral theory. In *Surveys of recent results in operator theory*, volume 2, pages 25–90. Longman, London, 1988.

[Esc94] J. Eschmeier. Representations of $H^\infty(G)$ and invariant subspaces. *Math. Ann.*, 298:167–186, 1994.

[Esc97] J. Eschmeier. Invariant subspaces for spherical contractions. *Proc. London Math. Soc.*, 75:157–176, 1997.

[Esc98] J. Eschmeier. $C_{0,0}$- representations of $H^\infty(G)$ with dominanting Harte spectrum. In E. Albrecht and M. Mathieu, editors, *Banach Algebras 1997*. Walter de Gruyter, 1998.

[Hed90] H. Hedenmalm. Closed ideals in the bidisc algebra. *Arkiv för Matematik*, 28(1):111–117, 1990.

[Ion96] A. Ionescu. Expanding the joint spectrum of pairs of commuting contractions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124:3711–3719, 1996.

[Ion98] A. Ionescu. A functional calculus for pairs of commuting polynomially bounded operators. *Houston Journal of Mathematics*, 24(1):97–104, 1998.

[KO] M. Kosiek and A. Octavio. Wold-type for N-tuples of commuting contractions. Por aparecer en Studia Math.

[KO97] M. Kosiek and A. Octavio. Representations of $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ and absolute continuity for N-tuples of contractions. *Houston J. Math.*, 23:529–537, 1997.

[KOP95] M. Kosiek, A. Octavio, and M. Ptak. On the reflexivity of pair of contractions. *Proc. Math. Soc.*, 123:1229–1236, 1995.

[Kos84] M. Kosiek. Representations generated by a finite number of Hilbert space operators. *Ann. Polon. Math.*, 44:309–315, 1984.

[KP90] M. Kosiek and M. Ptak. Reflexivity of N-tuples of contractions with rich joint left essential spectrum. *Integral Equations Operator Theory*, 13:395–420, 1990.

[Li92] W. S. Li. On polynomially bounded operators I. *Houston Journal of Mathematics*, 18(1):73–96, 1992.

[LP95] W. S. Li and C. Pearcy. On polynomially bounded operators II. *Houston Journal of Mathematics*, 21(4):719–733, 1995.

[Mla69] W. Mlak. Descompositions and extensions of operator valued representations of function algebras. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 3:181–193, 1969.

[Oct91] A. Octavio. *Dual algebras generated by commuting contractions.* PhD thesis, The University of Michigan, 1991.

[Oct94] A. Octavio. Coisometric extension and functional calculus for pair of contractions. *J. Operator Theory*, 31:67–82, 1994.

[Oct95] A. Octavio. Membership in the class $\mathbb{A}_{\aleph_0}^{(2)}$. *Contemporary Mathematics*, 185:273–281, 1995.

[Pis96] G. Pisier. *Similarity Problems and Completely Bounded Maps*, volume 1618 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Pis97] G. Pisier. A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction. *J. Amer. Math. Soc.*, 10:351–369, 1997.

[Pta98] M. Ptak. *On the reflexivity of multigenerator algebras.* Number 178 in Dissertationnes Mathematicae. Polska Akademia Nauk. Instytut Mat., 1998.

[Rud69] W. Rudin. *Function Theory in Polydiscs.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[Rud74] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw Hill, New York, second edition, 1974.

[Rud80] W. Rudin. *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980.

[SNF68] B. Sz.-Nagy and C. Foias. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces.* North-Holland, Amsterdam, 1968.

Currículum Vitae

Datos Personales

Nombre	Gerardo Antonio Chacón Guerrero
Lugar y Fecha de Nacimiento	San Cristóbal, 23 de febrero de 1960
Nacionalidad	Venezolana

Estudios realizados

Escuela Normal "J.A. Román Valecillos", Bachiller Docente.

Universidad Católica del Táchira, Licenciado en Educación Mención Física y Matemáticas.

Universidad de los Andes, Magister Scientiarum en Matemáticas.

Cargos Desempeñados

1977-1982	Maestro de Educación Primaria, Colegio Cristo Rey.
1982-1989	Profesor por horas, Colegio Cristo Rey.
1983-1989	Profesor, Universidad Católica del Táchira.
Desde 1989	Profesor, Universidad de los Andes.
1997-2000	Estudiante Graduado, I.V.I.C.

Campo en que ha trabajado y publicado

Análisis Funcional

Honores y Distinciones

Becario de la Universidad de los Andes