

MODELOS ANALÍTICOS DE OPERADORES Y ÁLGEBRAS DUALES

GERARDO CHACÓN

ABSTRACT. Es bien conocido que una contracción T actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $T^n \rightarrow 0$ en la topología fuerte de operadores, es unitariamente equivalente a la restricción de la traslación hacia atrás, de multiplicidad infinita, a un subespacio invariante.

Si $T = (T_1, \dots, T_n)$ es una n -upla de operadores que conmutan entre sí actuando en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ presentamos, siguiendo a [2], condiciones para representar T como la restricción de los adjuntos de los operadores multiplicación por las variables en un espacio de Hilbert de funciones analíticas con kernel reproductivo C definidas en un dominio D .

Se exploran extensiones de las técnicas de álgebras duales usando los modelos indicados.

1. INTRODUCCIÓN

A partir de la teoría de dilatación de Sz.-Nagy y Foias se obtiene un modelo de funciones analíticas para contracciones. EL siguiente resultado es bien conocido.

Teorema 1.1. [10] *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert (complejo, separable, infinito dimensional) y T una contracción actuando en $\mathcal{H}$ tal que $T^n \rightarrow 0$ en la topología fuerte de operadores, entonces T es unitariamente equivalente a la restricción del operador traslación hacia atrás (de multiplicidad infinita) a un subespacio invariante.*

Existen generalizaciones de estos resultados para n -uplas de operadores. Una reciente aproximación al problema es desarrollada en [2] donde se estudia la cuestión de encontrar condiciones necesarias y suficientes para representar n -uplas de operadores que conmutan entre sí, como restricciones de la n -upla de los operadores multiplicación por las funciones coordenadas, en espacios de funciones analíticas sobre un dominio D contenido en $\mathbb{C}^n$.

Bajo las condiciones para la validez del dicho modelo se plantea la cuestión de si es posible definir un análogo al cálculo funcional de Sz.-Nagy y Foias para funciones analíticas y acotadas a este contexto. En este artículo se define la extensión de dicho cálculo funcional en el espacio de los multiplicadores del espacio de funciones analíticas que sirven de modelo. Se prueba

Date: Febrero 2002.

Trabajo a ser presentado en las XV Jornadas de Matemáticas. Homenaje a Misha Cotlar.

que este cálculo es continuo cuando damos a los espacios de operadores las topologías w^* que se obtienen al considerarlos como álgebras duales.

Finalmente se estudian posibles extensiones de las técnicas de álgebras duales para probar la existencia de subespacios invariantes no triviales a la situación que presentamos.

2. MODELOS ANALÍTICOS

Sea D un dominio abierto de $\mathbb{C}^n$. Usaremos la siguiente notación: $\tilde{D} = \{\bar{z} : z \in D\}$ y para $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ escribimos $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Consideraremos espacios de Hilbert $\mathcal{D}$ de funciones analíticas en D que satisfagan las siguientes condiciones.

- (1) El espacio $\mathcal{D}$ es invariante para los operadores Z_j , ($j = 1, \dots, n$) multiplicación por las funciones coordenadas,

$$Z_j(f)(z) = z_j f(z), \quad f \in \mathcal{D}, z = (z_1, \dots, z_n) \in D.$$

Tales operadores son acotados (como consecuencia de la siguiente condición y del Teorema del Gráfico Cerrado).

- (2) Para cada $z \in D$ el funcional evaluación $f \mapsto f(z)$ es continuo en $\mathcal{D}$, en consecuencia por el teorema de representación de Riesz existe K_z en $\mathcal{D}$ tal que $f(z) = \langle f, K_z \rangle$ para cada $f \in \mathcal{D}$. De hecho, como es bien conocido, se dice que $\mathcal{D}$ es un espacio de funciones analíticas con *núcleo reproductivo*. Escribiremos

$$C(z, w) = K_{\bar{w}}(z), \quad z \in D, w \in \tilde{D}$$

- (3) $C(z, w) \neq 0$ para todo $z \in D, w \in \tilde{D}$.
 (4) $\mathcal{D}$ contiene a los polinomios los cuales son densos en $\mathcal{D}$.
 (5) $\frac{1}{C}$ es un polinomio.

En las condiciones indicadas nos referiremos a $\mathcal{D}$ como un D -espacio. El prototipo de D -espacio es el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ de las funciones analíticas f definidas en el disco unitario tales que

$$\|f\|^2 = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty.$$

En este caso

$$C(z, w) = \frac{1}{1 - zw}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Es elemental verificar que si $\{e_k\}$ es una base ortonormal para $\mathcal{D}$ se tiene que

$$C(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(z) \tilde{e}_k(w), \quad z \in D, w \in \tilde{D}.$$

Como los monomios $\{z^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ forman una base (en general no ortogonal) de $\mathcal{D}$, por el método de ortogonalización de Gram-Schmidt podemos

obtener una base ortonormal $\{e_k\}$ de $\mathcal{D}$ consistente de polinomios. Sea

$$f_m(z, w) = \sum_{k=m}^{\infty} e_k(z) \frac{1}{C}(z, w) \tilde{e}_k(w), \quad z \in D, w \in \tilde{D}.$$

Es claro que $f_0(z, w) = 1$ y $f_m(z, w) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} e_k(z) \frac{1}{C}(z, w) \tilde{e}_k(w)$ para todo $z \in D, w \in \tilde{D}$ y los f_m son polinomios, lo que permite definir de modo natural los operadores $f_m(T, T^*)$.

Sea $T = (T_1 \dots, T_n)$ una n -upla de operadores que conmutan entre si actuando en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Escribimos

$$M_{z_i} = Z_j \otimes I_{\mathcal{H}} : \mathcal{D} \otimes \mathcal{H} \mapsto \mathcal{D} \otimes \mathcal{H}.$$

Con las notaciones dadas se tiene el modelo indicado.

Teorema 2.1. [2, Corollary 15] *Sea $\mathcal{D}$ un D -espacio. Sea $T = (T_1 \dots, T_n)$ una n -upla de operadores que conmutan entre si actuando en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- (1) $T^* = (T_1^*, \dots, T_n^*)$ es unitariamente equivalente a la restricción de la n -upla $M_z^* = (M_{z_1}^*, \dots, M_{z_n}^*)$ a un subespacio invariante.
- (2) La n -upla T satisface las siguientes condiciones:
 - (a) $\frac{1}{C}(T, T^*) \geq 0$.
 - (b) $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m(T, T^*)h, h \rangle = 0$ para cada $h \in \mathcal{H}$.

El modelo reduce al clásico modelo de Sz.-Nagy y Foias para contracciones e incluye diversas generalizaciones (cf. [2]).

3. MULTIPLICADORES Y CÁLCULO FUNCIONAL

A partir del modelo para una contracción T , Sz.-Nagy y Foias obtienen el conocido cálculo funcional que permite definir $f(T)$ para cada f en $H^\infty(\mathbb{D})$, el espacio de las funciones analíticas y acotadas en el disco unitario.

Recordemos que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ el espacio de los operadores acotados definidos en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es el espacio dual del espacio de Banach $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ de los operadores de clase traza en $\mathcal{H}$. Asimismo $H^\infty(\mathbb{D})$ es el dual de $L^1(\mathbb{T})/{}^\perp H^\infty(\mathbb{D})$.

Cuando dotamos a los espacios $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $H^\infty(\mathbb{D})$ de las topologías w^* correspondientes a las dualidades indicadas el cálculo funcional de Sz.-Nagy y Foias es continuo (cf. [4],[5] y [10]). A fin de obtener un cálculo funcional que generalice al modelo indicado consideraremos el álgebra de los *multiplicadores* del espacio $\mathcal{D}$ de funciones analíticas.

Definición 3.1. Un *multiplicador* de $\mathcal{D}$ es una función analítica f definida en D tal que $fg \in \mathcal{D}$ para cada $g \in \mathcal{D}$.

El teorema del gráfico cerrado implica que el operador T_f definido por $T_f(g) = fg$, ($g \in \mathcal{D}$) es acotado. El álgebra de tales multiplicadores será

denotada por $\mathcal{M}$. Identificaremos $f \in \mathcal{M}$ con el operador T_f y escribiremos $\|f\|_{\mathcal{M}} = \|T_f\|$. Nótese que

$$T_f^* K_z = \overline{f(z)} K_z, \quad f \in \mathcal{M}, z \in D,$$

y como

$$|f(z)| = \frac{\|T_f^* K_z\|}{\|K_z\|} \leq \|T_f^*\| = \|T_f\| = \|f\|_{\mathcal{M}},$$

se tiene que cada multiplicador es una función analítica y acotada en D . En el caso de $H^\infty(\mathbb{D})$ ambos espacios coinciden pero en general esto no es cierto (cf. [3]).

Proposición 3.2. *El álgebra de multiplicadores $\mathcal{M}$ es una subálgebra w^* -cerrada de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ y en consecuencia es un álgebra dual.*

Prueba. Como consecuencia del Teorema de Krein-Smulian se tiene que (cf. [8, Cor.2.5.10]) un subespacio de un espacio dual es w^* -cerrado si y sólo si lo es su intersección con la bola unitaria del espacio, además las topologías w^* y WOT coinciden en conjuntos acotados (cf. [8, Th.4.6.14]).

Si $\mathcal{H}$ es separable (cf. [8, 4.6.2]) la bola unitaria de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es metrizable para la topología WOT (y para la topología SOT), luego es suficiente considerar una sucesión $\{\varphi_k\}$ en la bola unitaria de $\mathcal{M}$ con $M_{\varphi_k} \xrightarrow{\text{WOT}} T$ para un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ con $\|T\| \leq 1$ y verificar que $T \in \mathcal{M}$.

En particular $\langle \varphi_k f, K_z \rangle \rightarrow \langle T f, K_z \rangle$ para cada $f \in \mathcal{D}$ y cada $z \in D$. Sea $\varphi(z) = T \mathbf{1}(z)$ para cada $z \in D$ (donde $\mathbf{1}$ es la función constante con valor 1 en D). Ciertamente tenemos $\varphi_k(z) \rightarrow \varphi(z)$ y en consecuencia $\varphi_k(z)f(z) \rightarrow \varphi(z)f(z)$ para cada $z \in D$ y cada $f \in \mathcal{D}$. Luego $T f(z) = \varphi(z)f(z)$ para todo $z \in D$ lo que prueba que $T = M_\varphi$ con $\varphi \in \mathcal{M}$. $\square$

Asumamos que se satisfacen las hipótesis que permiten identificar la n -upla T^* con la restricción de la n -upla M_z^* a un subespacio invariante. Es inmediato que M_z es una dilatación de T , es decir

$$T_j = P_{\mathcal{H}} M_{z_j} |_{\mathcal{H}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Definimos ahora el prometido cálculo funcional.

Definición 3.3. Para $f \in \mathcal{M}$, sea $f(T)$ el operador

$$f(T)h = P_{\mathcal{H}} M_f h, \quad h \in \mathcal{H}.$$

Nuestro resultado principal es la siguiente generalización del resultado mencionado de Sz.-Nagy y Foias.

Teorema 3.4. *La aplicación*

$$\Phi_T : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad f \mapsto f(T),$$

es w^ - w^* continua.*

Prueba. Es suficiente verificar (cf. [6, Th.2.3]) que si $\{\varphi_k\}$ es una sucesión en $\mathcal{M}$ con $\varphi \xrightarrow{w^*} 0$ entonces $\Phi_T(\varphi_k) \xrightarrow{w^*} 0$. Podemos asumir que $\|\varphi_k\| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y como las topologías w^* y WOT coinciden en conjuntos acotados (cf. [8, Th.4.6.14]), será suficiente ver que $\langle \Phi_T(\varphi_k)f, g \rangle \rightarrow 0$ para cada $f, g \in \mathcal{H}$ o equivalentemente $\langle \varphi_k f, g \rangle \rightarrow 0$ para cada $f, g \in \mathcal{H}$ y esto es inmediato pues

$$\varphi \rightarrow \langle \varphi f, g \rangle = \text{tr}((f \otimes g)M_\varphi)$$

es w^* -continuo. $\square$

4. MODELOS EN EL POLIDISCO

Recordemos (cf. [4]) que un operador T está en la clase C_0 si $T^*n \rightarrow 0$ en la topología fuerte de operadores y T está en la clase C_0 si T^* está en la clase C_0 .

En el caso unidimensional el siguiente resultado de Sz.-Nagy y Foias (ver [10] o [4, Th. 2.2.]) permite para efectos de la existencia de subespacios invariantes no triviales asumir que T pertenece a alguna de las clases C_0 o C_0 .

Teorema 4.1. *Sea T una contracción en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y asúmase que para cada $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$ tenemos*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k x\| \neq 0 \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^{*k} x\|,$$

entonces T es quasimilar a un operador unitario.

En [7] Kosiek y Octavio introducen las clases K_0 y K_0 generalizaciones multidimensionales de las referidas clases C_0 y C_0 . Siguiendo la idea de [7] introducimos clases más restrictivas, adecuadas para nuestro propósito.

Requeriremos la usual notación de multi-índices: si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ escribimos $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ y si $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ escribimos $T^* = (T_1^*, \dots, T_n^*)$, $T^\alpha = T_1^{\alpha_1} \dots T_n^{\alpha_n}$ y $T^{*\alpha} = T_1^{*\alpha_1} \dots T_n^{*\alpha_n}$.

Diremos que una n -upla $T = (T_1, \dots, T_n)$ de contracciones que conmutan actuando en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ pertenece a la clase $s-K_0$ si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|\alpha|=k} \|T^\alpha x\| = 0, \quad x \in \mathcal{H}.$$

El límite indicado efectivamente existe pues si $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ y $|\alpha| = k + 1$ entonces $T^\alpha = T_i T^\beta$ para un $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ con $|\beta| = k$ y algún $i \in \{1, \dots, n\}$; luego para cada $x \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\|T^\alpha x\| = \|T_i T^\beta x\| \leq \|T^\beta x\| \leq \max_{|\beta|=k} \|T^\beta x\|,$$

y así

$$\max_{|\alpha|=k+1} \|T^\alpha x\| \leq \max_{|\beta|=k} \|T^\beta x\|.$$

Adicionalmente diremos que T pertenece a la clase $s-K_0$ si T^* pertenece a $s-K_0$. Las clases así definidas poseen las propiedades análogas a las de

las clases K_0 y $K_{\cdot 0}$ de [7]. Es fácil verificar que $T = (T_1, \dots, T_n)$ está en la clase $s\text{-}K_0$ si y sólo si cada T_j ($j = 1, \dots, n$) está en la clase C_0 .

Como en [7] entendemos la extensión de la noción de quasisimilaridad en varias variables en el siguiente sentido. La n -upla $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ es *quasisimilar* a la n -upla $U = (U_1, \dots, U_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ si existen operadores $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ uno a uno y con rango denso tales que para cada $j = 1, \dots, n$, $XT_j = U_jX$ y $T_jY = YU_j$.

El siguiente resultado generaliza el Teorema 4.1 a varias variables y es el análogo de [7, Th.2.2]. La prueba es similar y se incluye para completar la exposición.

Teorema 4.2. *Sea $T = (T_1, \dots, T_n)$ con $T_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\|T_j\| \leq 1$ para $j = 1, \dots, n$ tal que para cada $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$ se cumpla*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|\alpha|=k} \|T^\alpha x\| \neq 0 \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|\alpha|=k} \|T^{*\alpha} x\|,$$

entonces T posee subespacios invariantes no triviales o es quasimilar a una n -upla de operadores unitarios.

Prueba. Definimos una nueva norma en $\mathcal{H}$ por medio de la fórmula

$$\|x\|' = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|\alpha|=k} \|T^\alpha x\|.$$

Es inmediato verificar que $\|\cdot\|'$ es realmente una norma y que $\|x\|' \leq \|x\|$ para cada $x \in \mathcal{H}$. Sea $\mathcal{K}$ la completación de $\mathcal{H}$ en la nueva norma y $X : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ el operador inclusión el cual es claramente uno a uno y tiene rango denso. Para un j fijo tenemos que $\|T_j x\|' = \|x\|'$, por tanto T_j extiende a un operador unitario U_j sobre $\mathcal{K}$.

Si $\ker(T_j^*) \neq 0$ entonces se trata de un subespacio hiperinvariante no trivial para T_j^* y por tanto T^* (y también T) poseen subespacios invariantes no triviales. Asumamos pues $\ker(T_j^*) = (0)$, se sigue que el rango de U_j es denso en $\mathcal{K}$ y se verifica inmediatamente que $U_j X = XT_j$.

Con un argumento similar aplicado a T_j^* en lugar de T_j obtenemos un operador unitario V_j actuando en un espacio $\mathcal{K}'$ y un operador $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}'$ uno a uno y de rango denso tal que $V_j W = W T_j^*$. Escribimos $Z = W^*$ y $U_j' = V_j$. Se tiene que $T_j Z = Z U_j'$.

Sea $Y = Z Z^* X^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$. Claramente se trata de un operador uno a uno de rango denso. Finalmente

$$\begin{aligned} T_j Y = T_j Z Z^* X^* &= Z U_j' Z^* X^* \\ &= Z (X Z U_j'^{-1})^* \\ &= Z (U_j^{-1} U_j X Z U_j'^{-1})^* \\ &= Z (U_j^{-1} X T_j Z U_j'^{-1})^* \\ &= Z (U_j^{-1} X Z U_j' U_j'^{-1})^* \\ &= Z (U_j^{-1} X Z)^* = Z Z^* X^* U_j = Y U_j \end{aligned}$$

□

Como cada operador unitario posee subespacios hiperinvariantes no triviales y como la quasisimilaridad preserva la propiedad de poseer subespacios invariantes no triviales (ver [4] y [7]) obtenemos:

Teorema 4.3. (cf. [7, Th.2.3]) Sea $T = (T_1, \dots, T_n)$ una n -upla de contracciones que conmutan entre si actuando en $\mathcal{H}$; entonces, ó bien T posee un subespacio no trivial invariante común ó T pertenece al menos a una de las clases s - K_0 . y s - K_0 .

Prueba. Considérese

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathcal{H} : \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|\alpha|=k} \|T^\alpha x\| = 0 \right\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{S}$ es un subespacio invariante común para los T_j , $j = 1, \dots, n$. Si $\mathcal{S} = \mathcal{H}$ entonces T pertenece a la clase s - K_0 . Si $\mathcal{S} = (0)$ consideramos el subespacio

$$\mathcal{S}_* = \left\{ x \in \mathcal{H} : \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|\alpha|=k} \|T^{*\alpha} x\| = 0 \right\},$$

el cual es un subespacio invariante común para los T_j^* , $j = 1, \dots, n$ (y por tanto $\mathcal{S}^\perp$ es invariante para los T_j). Si $\mathcal{S}_* = \mathcal{H}$ entonces T está en la clase s - K_0 y finalmente si $\mathcal{S}_* = (0)$ estamos en el caso del Teorema 4.2. □

En el caso de una contracción T , bajo la hipótesis $T \in C_0$, el Teorema 1.1 afirma que T^* es unitariamente equivalente a la restricción de M_z^* , el adjunto del operador multiplicación por la variable independiente, a un subespacio invariante del espacio $H^2(\mathbb{D}, \mathcal{H}) = H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathcal{H}$ de las funciones analíticas $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{H}$ tales que

$$\|f\|^2 = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(re^{it})\|_{\mathcal{H}}^2 dt < \infty.$$

Consideremos el caso multi-dimensional. Sea $D = \mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$ el polidisco unitario. Sea $\mathcal{D} = H^2(\mathbb{D}^n)$ el espacio de Hardy sobre $\mathbb{D}^n$, es decir la completación del espacio de los polinomios en $L^2(\sigma)$ donde σ es la medida normalizada de Lebesgue en $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$ la frontera de Shilov de D , o equivalentemente (cf. [9]) el espacio de las funciones analíticas $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|^2 = \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) < \infty.$$

Se tiene que

$$C(z, w) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - z_i w_i}, \quad z = (z_1, \dots, z_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in D.$$

Claramente $H^2(\mathbb{D}^n)$ es un D -espacio. Si elegimos en $\mathcal{D}$ la base ortonormal standard de los monomios $\{z^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ (que asumiremos enumerada según

un orden tal que si $|\alpha| < |\beta|$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ entonces α precede a β en dicho orden), tenemos que los polinomios f_α definidos en las notas que preceden al Teorema 2.1 son de la forma

$$f_\alpha(z, w) = \sum_{\beta \geq \alpha} z^\beta \frac{1}{C}(z, w) w^\beta.$$

Sea $T = (T_1, \dots, T_n)$ una n -upla de contracciones que conmutan, asumimos en primer lugar la condición de positividad $\frac{1}{C}(T, T^*) \geq 0$. En el caso $n = 1$ se trata simplemente de la afirmación que T es una contracción. Si adicionalmente T está en la clase $s\text{-}K_0$ se ve inmediatamente que $\langle f_\alpha(T, T^*)h, h \rangle \rightarrow 0$ si $|\alpha| \rightarrow \infty$ para cada $h \in \mathcal{H}$. En efecto cada $f_\alpha(T, T^*)$ es una suma (finita) de monomios de la forma $T^\beta T^{*\beta}$ con $\beta > \alpha$.

Aplicando el Teorema 2.1 obtenemos el siguiente resultado. Hemos identificado, como es usual el espacio $H^2(\mathbb{D}^n) \otimes \mathcal{H}$ con el espacio $H^2(\mathbb{D}^n, \mathcal{H})$ de las funciones analíticas $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathcal{H}$ tales que

$$\|f\|^2 = \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}^n} \|f(r\zeta)\|_{\mathcal{H}}^2 d\sigma(\zeta) < \infty.$$

Teorema 4.4. *Sea $T = (T_1, \dots, T_n)$ una n -upla de contracciones que conmutan tales que $\frac{1}{C}(T, T^*) \geq 0$ y T pertenece a la clase $s\text{-}K_0$, entonces T^* es unitariamente equivalente a la n -upla M_z^* actuando en el espacio $H^2(\mathbb{D}^n, \mathcal{H})$.*

5. SUBESPACIOS INVARIANTES

Bajo las hipótesis indicadas en el Teorema 4.4 consideremos el problema de encontrar subespacios invariantes no triviales para la n -upla T .

Es inmediato observar que el álgebra $\mathcal{M}$ de los multiplicadores de $H^2(\mathbb{D}^n)$ es justamente el espacio $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ de todas las funciones analíticas y acotadas en el polidisco. Recordemos que si $\varphi \in \mathcal{M}$, por definición

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}} = \sup \{ \|\varphi f\| : f \in H^2(\mathbb{D}^n), \|f\| \leq 1 \},$$

y que $\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_{\mathcal{M}}$. Como

$$\|\varphi f\|^2 = \int_{\mathbb{T}^n} |\varphi(\zeta) f(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) \leq \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|^2,$$

para cada $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ se tiene realmente que $\|\varphi\|_{\mathcal{M}} = \|\varphi\|_\infty$. (Hemos identificado las funciones φ y f de $H^2(\mathbb{D}^n)$ con los correspondientes elementos de $H^2(\mathbb{T}^n)$ obtenidos tomando límites hacia puntos de $\mathbb{T}^n$, cf. [9]).

Bajo las condiciones indicadas considerando $\mathcal{H}$ como un subespacio de $H^2(\mathbb{D}^n, \mathcal{H})$ consideremos el homomorfismo $w^*\text{-}w^*$ continuo definido en 3.1,

$$\Phi_T : H^\infty(\mathbb{D}^n) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad \varphi \mapsto \varphi(T),$$

por $\varphi(T) = P_{\mathcal{H}} M_\varphi h$, ($h \in H^2(\mathbb{D}^n, \mathcal{H})$) donde M_φ es el operador multiplicación por φ .

Recordemos, aplicado a nuestra situación, el principio básico de la técnica de Scott Brown para determinar la existencia de subespacios invariantes no triviales (cf. [1], [4], [5] y [6]). Si $f, g \in \mathcal{H}$ el funcional

$$f \otimes g : H^\infty(\mathbb{D}^n) \mapsto \mathbb{C}, \quad \varphi \rightarrow \langle \varphi(T)f, g \rangle,$$

define un elemento del predual de $H^\infty(\mathbb{D}^n)$. Por otra parte para cada $\lambda \in \mathbb{D}^n$ el funcional

$$\mathcal{E}_\lambda : H^\infty(\mathbb{D}^n) \mapsto \mathbb{C}, \quad \varphi \rightarrow \varphi(\lambda),$$

también es w^* -continuo. Si para un $\lambda \in \mathbb{D}^n$ existen $f, g \in \mathcal{H}$ no nulos tales que $\mathcal{E}_\lambda = f \otimes g$ vemos fácilmente que

$$Y = \bigvee \{ \varphi(T)f : f \in \ker \mathcal{E}_\lambda \},$$

es un subespacio invariante no trivial para T .

Es más, si para cada matriz $(L_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}}$ con entradas en el predual de $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ existen sucesiones $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ y $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que

$$L_{j,k} = f_j \otimes g_k, \quad j, k \in \mathbb{N},$$

decimos que Φ_T tiene la propiedad $\mathbb{A}_{\mathbb{N}_0}$. Es conocido que si Φ_T posee la propiedad $\mathbb{A}_{\mathbb{N}_0}$ el rango de Φ_T (y en particular T) poseen un retículo rico de subespacios invariantes.

En [1] es probado el siguiente resultado.

Teorema 5.1. [1, Th.2.2] *Sea G un dominio acotado de $\mathbb{C}^n$ que cumple la propiedad de Gleason, $\mathcal{B}(G)$ una subálgebra w^* -cerrada de $H^\infty(G)$, y $\Phi : H^\infty(G) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un homomorfismo de álgebras w^* -continuo con $\|\Phi\| = 1$. Si $\sigma_e(T) \cap G$ es dominante para $\mathcal{B}(G)$ (donde $T = (T_1, \dots, T_n) = (\Phi(\pi_1), \dots, \Phi(\pi_n))$) entonces Φ tiene la propiedad $\mathbb{A}_{\mathbb{N}_0}$.*

A partir de este resultado se concluye inmediatamente:

Teorema 5.2. *Sea $T = (T_1, \dots, T_n)$ una n -upla de contracciones que conmutan tales que $\frac{1}{C}(T, T^*) \geq 0$ y T pertenece a la clase $s\text{-}K_0$. Si $\sigma_e(T)$ es dominante para $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ entonces $\Phi_T : H^\infty(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, la representación w^* - w^* continua generada por T , posee la propiedad $\mathbb{A}_{\mathbb{N}_0}$.*

A partir del resultado anterior y del Teorema 4.3 obtenemos:

Corolario 5.3. *Sea $T = (T_1, \dots, T_n)$ una n -upla de contracciones que conmutan tales que $\frac{1}{C}(T, T^*) \geq 0$. Si $\sigma_e(T)$ es dominante para $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ entonces T posee subespacios invariantes no triviales.*

REFERENCES

- [1] E. Albrecht and B. Chevreau. *Invariant subspaces for certain representations of $H^\infty(G)$* . Functional Analysis, Editors: Bierstedt, Pietsch, Ruess, Vogt. Marcel Dekker, Inc., New York, 1993, 293-305.
- [2] C. Ambrozie, M. Engliš and V. Müller. *Operator tuples and analytic models over general domains in $\mathbb{C}^n$* . Preprint.
- [3] W. Arveson. *Subalgebras of C^* -algebras III. Multivariable operator theory*. Acta Math. 181 (1998), No. 2, 159-228.

- [4] H. Bercovici. *Notes on invariant subspaces*. Bull. Math. Soc. 23 (1990), 1-36.
- [5] H. Bercovici, C. Foias and C. Pearcy. *Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory*. CBMS-NSF Lectures Notes. No. 56, AMS, Providence, 1985.
- [6] S. Brown, B. Chevreau, C. Pearcy. *Contractions with rich spectrum have invariant subspaces*. J. Operator Theory. 1 (1979), 123-136.
- [7] M. Kosiek and A. Octavio. *Wold-type extension for N -tuples of commuting contractions*. Studia Math. 137 (1999), No. 1, 81-91.
- [8] G. Pedersen. *Analysis Now*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [9] W. Rudin. *Function Theory in Polydiscs*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- [10] B. Sz.-Nagy and C. Foias. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces*. North-Holland, Amsterdam, 1970.

GERARDO CHACÓN, UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, TÁCHIRA
E-mail address: `gchacon@cantv.net`