Una **deducción** o **DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA** es una sucesión coherente de pasos que, tomando como verdadero un conjunto de premisas llamado hipótesis, permite asegurar la veracidad de una tesis. Estos pasos deben estar fundamentados en la aplicación de reglas de deducción (fundadas ya sea en axiomas o en teoremas anteriormente demostrados o en reglas básicas de deducción del sistema en cuestión). El hecho de no conocer ninguna demostración de un teorema no implica su no veracidad; sólo la demostración de la negación de este resultado implica que es falso.

Aunque en general no existe un procedimiento único de demostración de teoremas, sí existen diferentes tipos de demostraciones que son utilizados comúnmente en matemáticas: 1) Método directo, 2) Método contrarrecíproco 3) Reducción al absurdo

EJEMPLOS

1) Probemos que, para todo entero n, si n es par, entonces n^2 es par.

Demostración: (METODO DIRECTO)
Sea n un número entero par. Entonces 2 es factor de n, por tanto se puede expresar como $n = 2m$ para algún entero *m*. Se sigue que $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$.
Ahora, $4m^2$ se puede escribir como $2(2m^2)$ donde $2m^2$ es también un entero, por lo que $2(2m^2)$ es par y como $2(2m^2) = n^2$, llegamos a que n^2 es par, que era lo que queríamos demostrar.

2) Para todo entero n, si n^2 es par, entonces n es par.

Demostración: (METODO CONTRARECIPROCO)
La proposición a probar es $P(n) \rightarrow Q(n)$, donde $P(n)$ es "n^2 es par", $Q(n)$ es "n es par" y n es un entero arbitrario. El contrarrecíproco es $\sim Q(n) \rightarrow \sim P(n)$, es decir, si n es impar entonces n^2 es impar. Vamos a demostrar esto último. Para ello hemos de asumir la veracidad de que "n es impar" y llegar a demostrar que
"n^2 es impar" es cierto.
Sea n un entero impar, entonces $n = 2m+1$, donde m es un entero.
Ahora, $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ donde $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$ así $2m^2 + 2m$ es un número entero, por lo tanto n^2 es impar

3) Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.
Demostración: (REDUCCION AL ABSURDO)

Este es un buen ejemplo de demostración por contradicción. Suponemos que $\sqrt{2}$ es racional y llegamos a una contradicción.
Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, por lo tanto $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ donde m y n son números enteros, con n≠0.

Podemos suponer que la fracción $\frac{m}{n}$ es una fracción reducida (irreducible), es decir, que m y n no tienen factores en común. (Si tuvieran factores en común, simplificamos)
Ahora:

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}\rightarrow 2=\frac{m^2}{n^2}\rightarrow 2n^2=m^2,\ m^2 es\ par\rightarrow m^2\ es\ par\ \left\langle por\ demostración\ \ anterior\right\rangle$$

Así, $m=2p,\ p\in Z,\ luego\ m^2=4p^2$
Sustituyendo este resultado en la ecuación $2n^2=m^2$ tenemos:

$$2n^2=4p^2\rightarrow n^2=2p^2\rightarrow n^2\ es\ \ par\rightarrow n\,es\ par$$

Hemos demostrado que tanto m como n son los dos pares, es decir, tienen un divisor en común: el 2, lo cual es una contradicción porque partimos de la suposición de que m y n no tienen factores comunes. Por tanto, hemos deducido como cierta una proposición y su negación, situación que da lugar a la contradicción, con lo que hemos probado el teorema.

4) Demostrar que, para cualquier par de enteros x e y, el producto xy es par si y sólo si x es par o y es par.
Demostración:
Primero probamos, utilizando el método directo, que si x es par o y es par, entonces el producto xy es par.
Supongamos que x es par, es decir, x=2n, para algún entero n. Entonces
xy=2ny, por lo tanto, xy es par. El mismo argumento nos servirá para el caso en el que supongamos que y es par.

Ahora probamos la implicación en sentido contrario: si xy es par, entonces x es par o y es par. Utilizaremos la demostración mediante el contrarrecíproco: si x e
y son impares, entonces xy es impar.
Sean x e y dos enteros impares: x=2n+1 e y=2m+1, con n, m enteros.
Entonces xy=(2n+1)(2m+1)=4mn+2n+2m+1=2(2mn+n+m)+1,entonces xy es impar.
Con lo que queda demostrado.

5) Si $a\ y\ b$ son números racionales, entonces $a+b$ es un número racional.
Demostración:
Por hipótesis como $a\ y\ b$ son números racionales, entonces se pueden escribir de la forma $a=\frac{p}{q}\ \ y\ \ b=\frac{r}{s},\ \ con\quad q\ y\ \ s\neq 0\ \ (\ p,q,r\ \ y\ \ \ s\in\mathbb{Z}$
Ahora realizando la suma de esas expresiones tenemos,
$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs}$, como la suma de números enteros da enteros, igualmente el producto entonces el numerador y denominador son números enteros.
Por lo tanto $\frac{ps+qr}{qs}=\frac{u}{v}$ es un número racional.

6) Dada la ecuación $ax^2 + b\,x + c = 0$, demuestre que $x = \dfrac{-b \ \pm\ \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$

Demostración:

Sea $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ la ecuación cuadrática con $a \neq 0$, dividiendo ambos lados entre "*a*",

$\dfrac{a\,x^2 + b\,x + c}{a} = \dfrac{0}{a}$ entonces $\dfrac{a\,x^2}{a} + \dfrac{b\,x}{a} + \dfrac{c}{a} = 0$, luego

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$ entonces $x^2 + \dfrac{b}{a}x = -\dfrac{c}{a}$, completando cuadrados en el lado izquierdo

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 = -\dfrac{c}{a} + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$, luego

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 = -\dfrac{c}{a} + \dfrac{b^{2}}{4a^{2}}$, donde

$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{-4ac + b^{2}}{4a^{2}}$, eliminando el exponente y aplicando conmutatividad

$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{b^{2} - 4ac}{4a^{2}}}$, entonces $x = -\dfrac{b}{2a} \pm \sqrt{\dfrac{b^{2} - 4ac}{4a^{2}}}$, simplificando radicales

$x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^{2} - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$,entonces $x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$

Sea $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ la ecuación cuadrática con $a \neq 0$,dividiendo ambos lados entre "*a*",

$\dfrac{a\,x^2 + b\,x + c}{a} = \dfrac{0}{a}$ entonces $\dfrac{a\,x^2}{a} + \dfrac{b\,x}{a} + \dfrac{c}{a} = 0$, luego

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$ entonces $x^2 + \dfrac{b}{a}x = -\dfrac{c}{a}$, completando cuadrados en el lado izquierdo

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$, luego

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$, donde

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$, eliminando el exponente y aplicando conmutatividad

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$, entonces $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, simplificando radicales

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$,entonces $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Por suma de fracciones con igual denominador Por suma de fracciones con igual denominador

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

7) Demuestre que la mujer es igual a problemas

Demostración:

Para conseguir una mujer, necesitas tiempo y dinero, por lo tanto

$mujer=tiempo\times dinero$ (i)

El tempo es considerado oro, por lo tanto el tiempo es dinero,

$tiempo=dinero$

Sustituyendo tiempo en (i),tenemos

$mujer=dinero\times dinero$

Entonces,

$mujer=(dinero)^2$

Pero el dinero es la raíz de todos los problemas,

$dinero=\sqrt{problemas}$

Sustituyendo,

$mujer=\left(\sqrt{problemas}\right)^2$

Simplificando,

$\boxed{mujer=problemas}$