Aplicaciones de Máximos y Mínimos

Los métodos para calcular los máximos y mínimos de las funciones se pueden aplicar a la solución de algunos problemas prácticos. Estos problemas pueden expresarse verbalmente o por escrito. Para resolverlos hay que transformar sus enunciados en fórmulas, funciones o ecuaciones. Como hay muchos tipos de problemas en las aplicaciones, es difícil enunciar reglas específicas para encontrar sus soluciones. Sin embargo, puede desarrollarse una estrategia general para abordar tales problemas. la siguiente guía es de utilidad.

GUÍA PARA RESOLVER PROBLEMAS APLICADOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1.- Leer cuidadosamente el problema varias veces y pensar en los hechos dados y en las cantidades desconocidas que se tratan de encontrar.

2.- De ser posible, hacer un croquis o un diagrama que incluya los datos pertinentes introduciendo variable para las cantidades desconocidas. Las palabras como *qué, encontrar, cuánto, dónde o cuándo* suelen estar asociadas a las cantidades desconocidas.

3.- Enunciar los hechos conocidos y las relaciones entre las variables.

4.- Determinar cual es la variable que se desea optimizar (minimizar o maximizar según el caso) y expresar ésta como una función de una de las otra variables.

5.- Encontrar los números críticos de la función obtenida en el paso 4 e investigar si corresponden a máximos o mínimos.

6.- Verificar si hay máximos o mínimos en la frontera del dominio de la función que se obtuvo en el paso 4.

7.- No desanimarse si no se puede resolver algún problema. **Adquirir habilidad para resolver problemas aplicados toma una gran cantidad de esfuerzo y práctica. ¡Hay que seguir intentando!**

La solución de los siguientes problemas ilustra el uso de la Guía

Problema 1 *Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de* $16cm$ *de ancho y* $21cm$ *de largo, recortando un cuadrado en cada esquina y doblando, los lados hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.*

Solución. Aplicando el paso 2 de la Guía, comenzaremos por trazar un croquis del cartón como se muestra en la figura 1, en donde la letra x denota la longitud del lado del cuadrado que se va a recortar en cada esquina. Nótese que $0 \leq x \leq 8$. Usando el paso 3, escribimos los datos conocidos (el tamaño del rectángulo) en los lugares apropiados de la figura

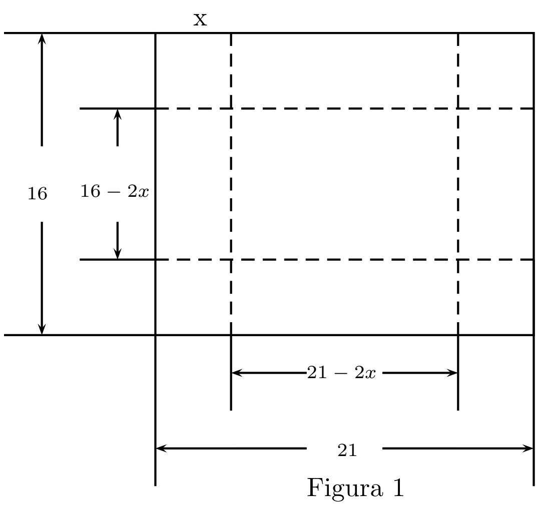

Figura 1

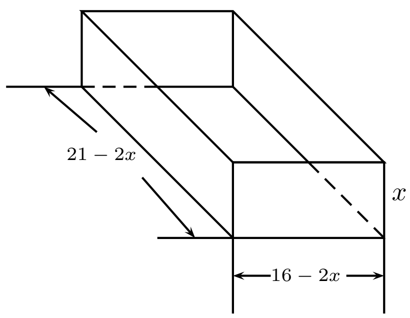

Figura 2

Después (paso 4), se ve que lo que se desea maximizar es el volumen V de la caja que se formará doblando a lo largo de las líneas punteadas (ver Figura 2). Continuando con el paso 4 de la Guía, expresamos V como una función de la variable x.

$$V = x(16 - 2x)(21 - 2x) = 2(168x - 37x^2 + 2x^3).$$

Esta ecuación expresa V como una función de x cuyo dominio es $[0, 8]$. Buscamos ahora los números críticos para probar si son máximos o mínimos (paso 5). Derivando con respecto a x e igualando a cero,

$$\frac{dV}{dx} = 4(3x - 28)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3, \quad x = \frac{28}{3}.$$

Entonces, los números críticos son $\frac{28}{3}$ y 3. Como $\frac{28}{3}$ está fuera del dominio de la función, el único número crítico es 3. Usando el Criterio de la Segunda Derivada comprobamos que en $x = 3$ V tiene un máximo local

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 4(6x - 37) \Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2}|_{x=3} = -76 < 0.$$

Finalmente se ve si hay valores extremos en la frontera del dominio de la función (paso 6). Como $DomV(x) = [0, 8]$ entonces calculamos la imagen de $x = 3$, $x = 0$, $x = 8$.

$$V(3) = 450, \qquad V(0) = 0, \qquad V(8) = 0.$$

Por lo tanto, para obtener una caja de volumen máximo debe recortarse un cuadrado de 3cm de cada lado de la esquina de la hoja de cartón.

Problema 2 *Se desea elaborar un pequeño recipiente cilíndrico sin tapa que tenga un volumen de* $24\pi cm^3$*. El material que se usa para la base cuesta tres veces más que el que se emplea para la parte cilíndrica. Suponiendo que en la construcción no se desperdicia material, calcular las dimensiones del recipiente cilíndrico que hacen que el costo de material de fabricación sea mínimo.*

Solución. Comenzaremos por trazar un esquema del recipiente, como se muestra en la Figura 3, en la que r denota el radio de la base (en cm), y h la altura (en cm).

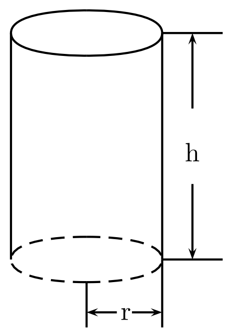

Figura3

Como el volumen es de $24\pi cm^3$ tenemos la siguiente ecuación $\pi r^2 h = 24\pi$ lo que nos da una relación entre r y h (paso 3)

$$h = \frac{24}{r^2}$$

El objetivo es minimizar el costo C del material utilizado para construir el recipiente (paso 4). Si a denota el costo por centímetro cuadrado del material a emplear para la parte curva, entonces el centímetro cuadrado del material que se use para la base costará $3a$ por cm^2. Por lo tanto, el costo del material para la parte cilíndrica es $a(2\pi rh)$ y el del material para la base es $3a(\pi r^2)$. En consecuencia, el costo C de todo el material es

$$C = 3a(\pi r^2) + a(2\pi rh) = a\pi(3r^2 + 2rh)$$

como $h = \frac{24}{h^2}$ entonces $C = a\pi\left(3r^2 + \frac{48}{r}\right)$ donde $r > 0$. Como a es fijo, esta ecuación expresa C como una función de una variable r (paso 4). Ahora derivamos a C respecto de r

$$\frac{dC}{dr} = a\pi\left(6r - \frac{48}{r^2}\right) = 6a\pi\left(\frac{r^3 - 8}{r^2}\right)$$

al hacer $\frac{dC}{dr} = 0$ obtenemos a 2 como único punto crítico. Usando el Criterio de la Primera Derivada se demuestra que C alcanza su valor mínimo cuando $r = 2cm$. El valor correspondiente a la altura es $h = 6cm$ (se obtiene al sustituir $r = 2$ en $h = \frac{24}{r^2}$). Ya que el dominio de la función es el intervalo $(0, +\infty)$ no puede haber valores extremos en la frontera.

Terminamos esta sección con una bella lista de ejercicios. He colocado la respuesta a cada uno de los ejercicios, si no coincide con lo que usted cree es la solución estoy dispuesto a debatirlo. También los he clasificado por nivel de dificultad para que sea más cómodo a la hora de estudiar.

Ejercicios

1. Encuentre dos números reales cuya diferencia sea 40 y su producto sea mínimo. **Solución.** 20 y -20

2. Encuentre dos números reales positivos cuya suma sea 40 y su producto sea máximo. **Solución.** 20 y 20

3. Se quiere construir una caja de base cuadrada y sin tapa que tenga un volumen de $4dm^3$. Encuentre las dimensiones que hacen que la cantidad de material necesario sea mínima (ignore el espesor del material y lo que se desprecia en la construcción).
   Solución. las dimensiones son 2 y 1

4. Resuelva el ejercicio 3 suponiendo que la caja tiene tapa.
   Solución. las dimensiones son $\sqrt[3]{4}$ y $\sqrt[3]{4}$

5. Las páginas de un libro deben tener cada una $600cm^2$de área con márgenes de $2cm$ abajo y a los lados, y $3cm$ arriba. Encuentre las dimensiones de la página que permiten la mayor área posible.
   Solución. las dimensiones son $4\sqrt{30}$ y $5\sqrt{30}$

6. Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal, sin tapa, que tenga capacidad de $1m^3$. Encuentre las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material necesario sea mínima, suponiendo que no se desprecia nada en la construcción.
   Solución. $r = h = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$

7. Una lamina rectangular de $30cm$ de ancho va a convertirse en un canal para agua doblando hacia arriba dos de sus lados hasta formar ángulos rectos con la base. Cuál debe ser el ancho de las partes dobladas para que el canal tenga una capacidad máxima.
   Solución. 7.5

8. La resistencia de una viga de sección rectangular es directamente proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura. Encuentre las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco cilíndrico de radio a.
   Solución. las dimensiones son $\frac{2a}{3}\sqrt{3}$ y $\frac{2a}{3}\sqrt{6}$

9. Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = x^2 + 1$ más cercano al punto $(3, 1)$.
   Solución. $(1, 2)$

10. Encuentre la abscisa del punto sobre la gráfica de $y = x^3$ más cercano al punto $(4, 0)$.
    Solución. $x = 1$

11. A la $1:00$ p.m. el barco A se encuentra 30 millas al Sur del barco B y viaja hacia el Norte a 15 millas por hora. El barco B viaja hacia el Oeste a 10 millas por hora. A qué hora será mínima la distancia entre los barcos y cuál será dicha distancia.
    Solución. $t = 1\frac{5}{13}$ horas y $d = \sqrt{277}$ millas

12. Una cerca de 8 pies de altura colocada al nivel del piso corre paralela a un edificio alto. La cerca se encuentra a 1 pie del edificio. Encuentre la longitud de la escalera más corta que pueda colocarse en el suelo y recargarse en el edificio por encima de la cerca.
Solución. $5\sqrt{5}$

13. Sea a el radio de un semicírculo. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en dicho semicírculo, si se requiere que dos de los vértices del rectángulo estén sobre el diámetro.
Solución. $b = a\sqrt{2}$ y $h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

14. En el ejercicio 7 de novatos suponga que los lados del canal forman un ángulo de 120 grados con la base.
Solución. la longitud es 10

15. Demuestre que el rectángulo de área máxima con perímetro dado p es un cuadrado.

16. Un veterinario cuenta con $30cm$ de tela metálica y quiere construir seis jaulas para perros construyendo primero una barda alrededor de una región rectangular y luego dividiendo la región en seis rectángulos iguales mediante cinco bardas paralelas a uno de los lados. Cuáles son las dimensiones de la región rectangular con las que el área total es máxima.
Solución. las dimensiones son $\frac{15}{7}$ y $7,5$

17. Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de $10mts$. Calcule aproximadamente la longitud mínima de un cable que pueda ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo, entre los postes, y luego hasta la punta del otro poste.
Solución. $17.2mts$

18. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima con dos de sus vértices en el eje x y los otros dos arriba del eje x sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$.
Solución. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ y $\frac{8}{3}$

19. Sea a el lado de un triángulo equilátero. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que pueda inscribirse en él, manteniendo dos de los vértices del rectángulo sobre uno de los lados del triángulo.
Solución. $b = \frac{a}{2}$ y $h = \frac{a}{4}\sqrt{3}$

20. Encuentre el volumen máximo de un cono circular recto que pueda inscribirse en una esfera de radio a.
Solución. $V = \frac{32\pi a^3}{81}$

21. Encuentre el volumen máximo de un cilindro circular recto que pueda inscribirse en una esfera de radio a.
Solución. $V = \frac{4\pi a^3}{3}\sqrt{3}$

22. Se desea construir un vaso de papel en forma de cono circular recto que tenga un volumen de $36\pi cm^3$. Encuentre las dimensiones que requieran menor cantidad de papel (ignore cualquier desperdicio que pueda haber).
Solución. las dimensiones son $r = 3\sqrt{2}$ y $h = 6$

23. Un oleoducto va a conectar dos puntos A y B que se encuentran a $5km$ uno del otro en riberas opuestas de un rio recto de $1500m$ de ancho. El oleoducto irá bajo el agua de A a un punto C en la ribera opuesta y luego sobre el suelo de C a B. El costo por kilómetro de tubería bajo el agua es cuatro veces el costo sobre tierra. Encuentre la posición de C que minimizará el costo de construcción del oleoducto.
Solución. El punto C debe colocarse perpendicularmente a A.

24. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de $4m$. Encuentre las dimensiones del rectángulo para el cual el área de la ventana es máxima.
Solución. las dimensiones son aproximadamente $0,93$ y $0,59$

25. Un productor vende cierto artículo a los distribuidores a 20 centavos cada uno si le piden menos de 50. Si le piden 50 o más de 50 (hasta 600) el precio por artículo se reduce a razón de 2 centavos por el número pedido. Cuál es el tamaño del pedido que produce mayor cantidad de dinero al productor.
Solución. 500 unidades

26. Se va a repartir un alambre de $36cm$ de largo en dos pedazos. Uno de los pedazos se doblará para formar un triángulo equilátero y el otro para formar un rectángulo dos veces más largo que ancho. Cómo debe partirse el alambre para que el área combinada de las dos figuras sea (a)mínima; (b)máxima.
Solución. (a)sólo podemos construir un rectángulo. (b) $x = 19,2cm$, lo que significa que podemos construir un triángulo de lado $9,65cm$ y un rectángulo de dimensiones $5,6cm$ y $2,8cm$

27. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden a y su base b. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que pueda inscribirse en el triángulo manteniendo un lado del rectángulo sobre la base del triángulo.
Solución. $\frac{b}{2}$ y $\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{4}$

28. Encuentre el cuarto lado que debe tener un trapecio cuyos otros tres lados no paralelos tienen longitud 8, para que su área sea máxima.
Solución. 12

29. El dueño de una huerta de manzanas calcula que si se siembran 50 árboles por hectárea entonces cada árbol maduro dará unas 600 manzanas al año. Por cada árbol más que se siembre por hectárea el número de manzanas producidas por un árbol disminuirá en 6. Cuántos árboles deben sembrarse por hectárea para obtener el mayor número de manzanas posibles.
Solución. 75 por hectárea.

30. Una compañía de bienes raíces es dueña de 180 apartamentos que se ocupan en su totalidad cuando la renta se fija en 3000 pesos mensuales. La compañía cuenta que por cada 100 pesos de aumento en la renta se desocupan 5 apartamentos. Cuál es la renta mensual con la que la compañía obtendría el mayor ingreso bruto.
Solución. la renta deberá ser de 3300 pesos mensuales.

31. Aplique el Criterio de la Primera Derivada para demostrar que la distancia mínima de un punto (x_1, y_1) a la recta $ax + by + c = 0$ está dada por
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

32. Demuestre que la distancia mínima de un punto (x_1, y_1) a la gráfica de una función derivable f se alcanza a lo largo de una recta normal a la gráfica. Es decir, a lo largo de una recta perpendicular a la recta tangente y que pasa por el punto de tangencia.