CAPÍTULO V

5.1 Ejercicios resueltos de Punto y Recta

1) Determine las proyecciones diédricas de los siguientes segmentos de recta:

- AB: mide 25 mm y es perpendicular al plano horizontal de proyección. B más alto que A(10, 40, 15).
- BC: mide 60 mm y es paralela al plano horizontal de proyección. C se encuentra a la derecha de A y sobre el plano vertical.
- CD: mide 40 mm y forma 60° con el plano vertical de proyección. El punto D(??, ??, 40) está a la derecha de C y tiene mayor vuelo que éste.
- DE: es perpendicular al plano lateral de proyección.
- EF: forma 60° con el plano horizontal y 30° con el plano vertical de proyección. El punto F(90, ??, 00) es de menor vuelo que el punto E.

Solución (Fig. 5.1)

En primer lugar es necesario hallar las proyecciones del punto A, para lo cual se miden 10 milímetros sobre la línea de tierra, a partir del punto marcado como origen de coordenadas y hacia la derecha, trazando luego una referencia perpendicular a dicha línea sobre la cual se miden los valores de las coordenadas Y y Z del punto A. En vista de que tales valores son positivos en el ejemplo, el vuelo (Y) de A debe ser medido por debajo de la línea de tierra, en tanto que la cota (Z) de dicho punto se ha de medir por encima de ella; el resultado es las proyecciones diédricas A^h (iconografía) y A^v (ortografía) del punto A.

El segmento AB es perpendicular al plano horizontal, es decir, se halla en posición *de pié* por lo que la proyección horizontal del punto B – así como la de cualquier otro punto perteneciente a la recta definida por el segmento AB – se confunde pon la proyección horizontal de A. Por otra parte, la proyección vertical del segmento AB es otro segmento A^vB^v perpendicular a la línea de tierra, cuya longitud es igual a la del segmento AB, ya que éste se proyecta en verdadero tamaño sobre el plano vertical por ser paralelo a él.

En vista de que el segmento de recta BC es paralelo al plano horizontal de proyección y de que el punto C se encuentra sobre el plano vertical y a la derecha de A, se concluye que su posición es *horizontal*, por lo que la proyección sobre PH se halla en verdadero tamaño. Así, haciendo centro en B^h y con radio igual al tamaño del segmento BC (60 mm) se traza un arco que corta a la línea de tierra en un punto que constituye la proyección horizontal C^h del punto C, pues todo punto perteneciente a PV se proyecta sobre PH en la línea de tierra. La proyección vertical del segmento BC es un segmento paralelo a la línea de tierra; C^v se halla en el corte entre éste y una referencia vertical trazada por C^h .

El segmento de recta CD se encuentra en posición *horizontal*. Esto se desprende de dos circunstancias específicas: en primer lugar, la cota del punto D es igual a la del punto C (40 mm) y , segundo, la recta forma un ángulo distinto de cero y de 90° con el plano vertical. La proyección horizontal de CD se traza por C^h formando un ángulo de 60° con la línea de tierra hacia la derecha de C y en la dirección de mayor vuelo con una longitud de 40 mm, dando lugar a la proyección horizontal de D. Al igual que en el segmento BC, la proyección vertical resulta paralela a la línea de tierra, con C^v sobre una referencia vertical trazada por D^h .

Es evidente que un segmento perpendicular al plano lateral es también *paralelo a la línea de tierra*. Tal es el caso del segmento DE en este ejemplo, cuyas proyecciones diédricas son segmentos también paralelos a la línea de tierra de una longitud desconocida. Sin embargo, se observa que el segmento EF está en posición *de perfil*, puesto que la suma de los valores de los ángulos que forma con PH y PV es igual a 90. Ello implica que la primera coordenada (X) de E es igual a al primera coordenada de F, resolviéndose así el problema al trazar una referencia perpendicular a la línea de tierra en X =90 mm, la cual corta a las proyecciones diédricas de la recta paralela a la línea de tierra trazada por D generando las proyecciones E^h y E^v del punto E.

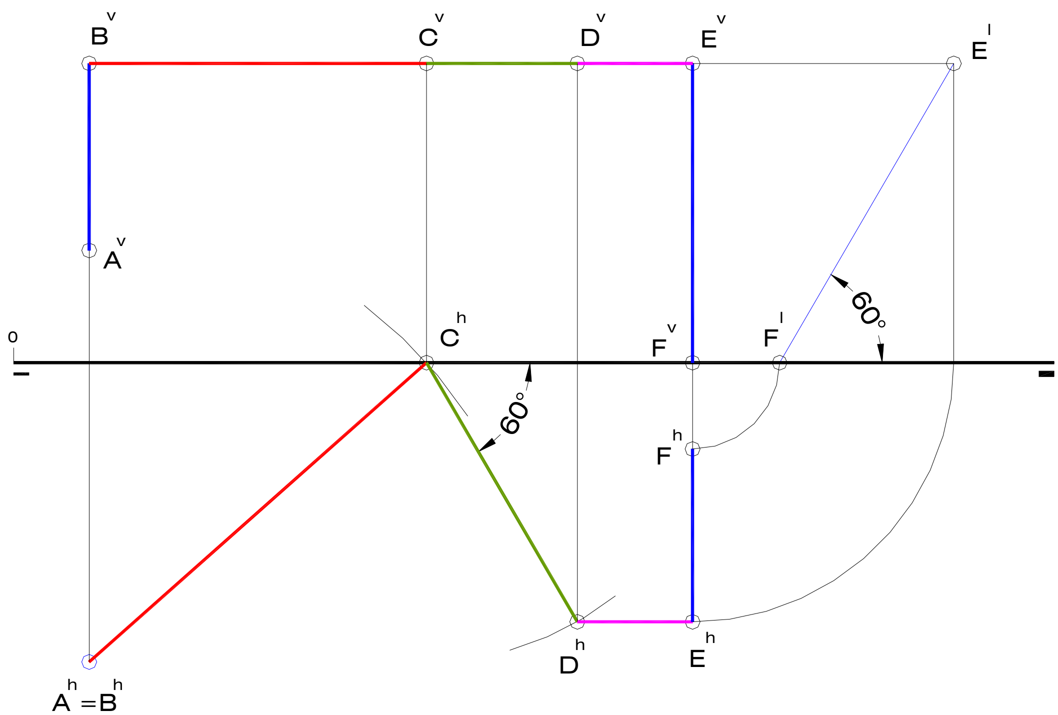

Fig. 5.1

Para definir al segmento EF es necesario realizar la proyección lateral del punto E con el fin de determinar la proyección lateral del segmento, ya que para ello se cuenta con los ángulos que forma EF con los planos de proyección PV y PH. De manera que se traza por E^l una línea que forme 60° con la horizontal (o 30° con la vertical) y a la izquierda, por ser F de menor vuelo que E. Como la cota del punto F es igual a cero, el corte entre la línea así trazada y la línea de tierra representa la proyección lateral del punto F. Finalmente, se hallan las proyecciones diédricas de F, recordando que F^v se encuentra sobre la línea de tierra.

2) Determine las proyecciones diédricas de los siguientes segmentos de recta:

- AB: frontal que mide 45 mm. B a la derecha de A(10, -15, -40) y de mayor cota.
- BC: paralela a ambos planos de proyección (PV y PH). C a la derecha de B. C(70, ??, ??).
- CD: perpendicular al plano vertical de proyección que mide 50 mm. D en la cuarta región (anterior-inferior).
- DE: de perfil que mide 80 mm y forma 45° con PH. E en la segunda región (posterior-superior).

Solución (Fig. 5.2)

Primero es necesario hallar las proyecciones del punto A, el cual se ubica en la tercera región (posterior-inferior) como se deduce al observar que los valores de vuelo y cota son negativos. En consecuencia, la proyección vertical de A se encuentra a 40 mm de la línea de tierra y por debajo de ésta, en tanto que la proyección vertical va a ubicarse a 15 mm de la mencionada línea y por arriba de ella.

Estando el segmento de recta AB en posición *frontal*, su verdadero tamaño se encuentra proyectado sobre el plano vertical, lo mismo que el ángulo α que forma con el horizontal. Por esta razón, se ha de trazar por A^v una línea recta que forme 45° con la línea de tierra y con una longitud de 45 mm, con lo cual se obtiene la proyección vertical del extremo B, a la derecha y con mayor cota que A. Es necesario aclarar que si bien el valor absoluto de la cota de A es mayor que el valor absoluto de la cota de B, en términos relativos la cota de éste último punto es mayor que la de aquél, dado que se encuentra más *alto* en la dirección del eje Z.

El siguiente segmento es paralelo a los planos de proyección PV y PH, es decir, paralelo a la línea de tierra. No es necesario conocer su longitud puesto que el problema ofrece como un dato el valor de la primera coordenada del extremo C. Así pues, se deben trazar paralelas a la línea de tierra por las proyecciones diédricas del punto B, las cuales cortan a una referencia perpendicular a dicha línea - trazada en X =70 mm - en las proyecciones C^v y C^v del punto C. Nótese que los segmentos AB y BC se encuentran por entero en la tercera región del espacio.

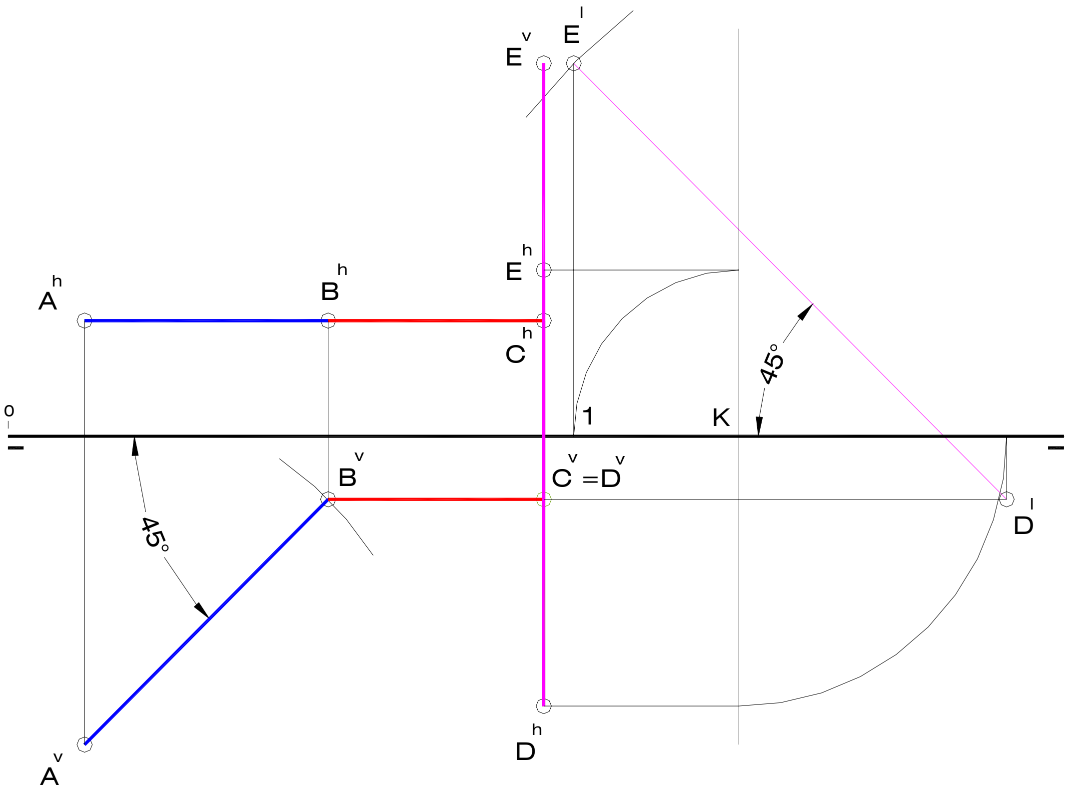

Fig. 5.2

Para construir la proyección horizontal de CD, el cual se encuentra en posición *de punta*, se debe trazar por C^h una perpendicular a la línea de tierra con una longitud de 50 mm. De las dos soluciones posibles (con mayor vuelo que C o con menor vuelo que C) debe tomarse aquella que satisfaga la condición del problema, es decir, que de como resultado al punto D en la cuarta región; dicha solución es la de mayor vuelo. La obtención de la proyección vertical de D no reviste mayor dificultad, dado que se confunde con la proyección vertical del punto C.

El segmento de recta DE es de perfil, lo que implica que su verdadero tamaño y los ángulos que forma con PV y PH deben de ubicarse en la proyección lateral. Para ello se ha trazado una línea perpendicular a la línea de tierra a una distancia arbitraria a la derecha de las proyecciones de D que representa al plano lateral en proyecciones diédricas. La proyección lateral de D debe estar por debajo de la línea de tierra por ser un punto de la cuarta región del espacio (cota negativa). A continuación, se traza una línea recta que forme 45° (valor del ángulo formado entre el segmento y el plano horizontal de proyección) con la línea de tierra y con una longitud de 80 mm, la cual constituye la proyección lateral del segmento DE. De las cuatro soluciones posibles se escoge aquella que arroja como resultado al punto E en la segunda región (por encima de PH y por detrás de PV), es decir, la solución de mayor cota y menor vuelo que D.

La proyección vertical de E se halla trazando por E^l una paralela a la línea de tierra que corte a la línea de referencia del punto D; recuérdese que todos los puntos de una recta de perfil tienen igual coordenada X. La proyección vertical E^v se determina de la siguiente manera: trazar por E^l una perpendicular a la línea de tierra que la corta en 1, luego dibujar un cuarto de circunferencia de centro en K, punto de corte entre la representación diédrica del plano lateral y la línea de tierra, y radio K1; la solución correcta para este arco es la dibujada por encima de la línea de tierra, al igual que la proyección vertical de E (punto de la segunda región). Finalmente debe trazarse una paralela a LT por el extremo del arco, la cual cortará a la línea de referencia del punto D en E^h .

3) Halle las trazas de las rectas definidas por los siguientes segmentos

$$a\begin{Bmatrix} 1(00,50,30) \\ 2(40,-10,-40) \end{Bmatrix} \quad b\begin{Bmatrix} 3(20,-10,-30) \\ 4(50,-50,-05) \end{Bmatrix} \quad c\begin{Bmatrix} 5(10,10,20) \\ 6(10,40,35) \end{Bmatrix}$$

Determine el verdadero tamaño y los ángulos α y β del segmento 12 aplicando giro.
Determine el verdadero tamaño y los ángulos α y β del segmento 34 aplicando abatimiento.

Solución (Fig. 5.3)

Una vez representadas las proyecciones diédricas de cada uno de los segmentos, es posible establecer la posición relativa de cada uno ellos con respecto a los planos de proyección PV y PH. El segmento 12 pertenece a una recta oblicua "a" descendente hacia delante; el segmento 34 define una recta oblicua "b" ascendente hacia delante; finalmente, el segmento 56 se halla en posición de perfil.

El punto de traza horizontal TH de una recta es el punto común a ésta y al plano horizontal de proyección, por lo que la proyección vertical TH^v de ese punto se encuentra en el corte entre la proyección vertical de la recta y la línea de tierra. Basta luego con trazar por TH^v una referencia perpendicular a LT que corta a la proyección horizontal de la recta en TH^h, proyección horizontal del punto de traza horizontal. Análogamente, el punto común a la proyección horizontal de la recta y a LT es la proyección horizontal TV^h del punto de traza vertical TV, dado que éste tiene vuelo igual a cero. Finalmente, el corte entre una referencia perpendicular a LT trazada por TV^h y la proyección vertical de la recta constituye la proyección ortográfica del punto TV. Este es el procedimiento seguido para determinar los puntos de traza de las rectas "a" y "b" (Fig. 5.3-a y Fig. 5.3-b).

Para determinar el verdadero tamaño y los ángulos α y β del segmento 12 (Fig. 5.3-a) es necesario aplicar dos giros: uno en torno a un eje de punta y otro en torno a un eje de pié; para mayor simplicidad se ha asumido que ambos ejes pasan por el punto 1. En la primera operación, la proyección vertical de 2 describe un movimiento circular hasta ubicarse a igual distancia de LT que la proyección vertical del punto 1, dando lugar a $2'^v$. La proyección horizontal del punto 2' (punto 2 luego del giro) se obtiene en el corte entre una referencia perpendicular a LT trazada por $2'^v$ y una paralela a LT trazada por 2^h, debido a que la proyección horizontal de 2 realiza un movimiento lineal en la dirección del eje X. De esta manera, el segmento definido por las proyecciones horizontales de los puntos 1 y 2’ representa el verdadero tamaño del segmento original 12, ya que 12’ es un segmento en posición horizontal. Por esta misma razón, el ángulo formado entre la proyección horizontal de 12’ y LT es igual al ángulo β formado entre el segmento 12 y PH. Siguiendo un procedimiento análogo, el giro en torno a un eje de pié que pasa por 1 produce un segmento 12’’ en posición frontal, por lo que el verdadero tamaño de 12 es representado por la proyección horizontal de 12’’ y el ángulo formado entre éste y LT corresponde al ángulo α de 12.

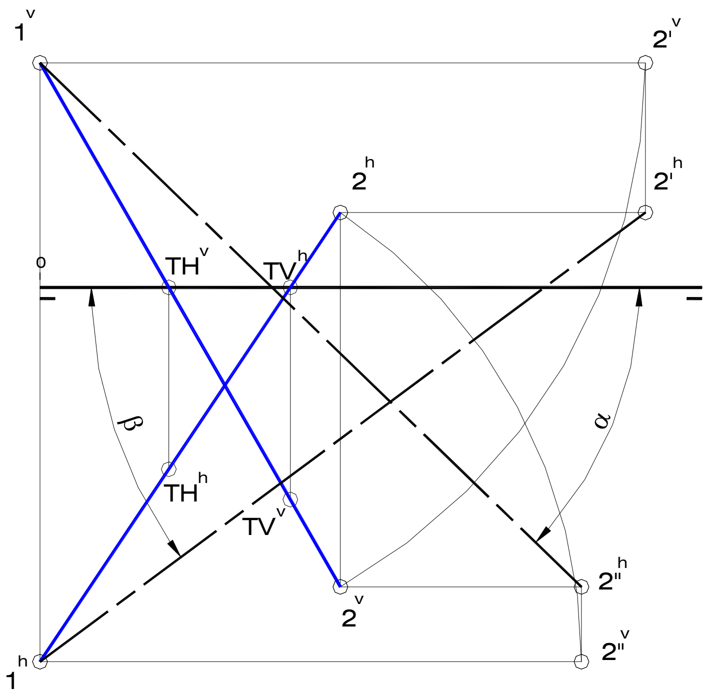

Fig. 5.3-a

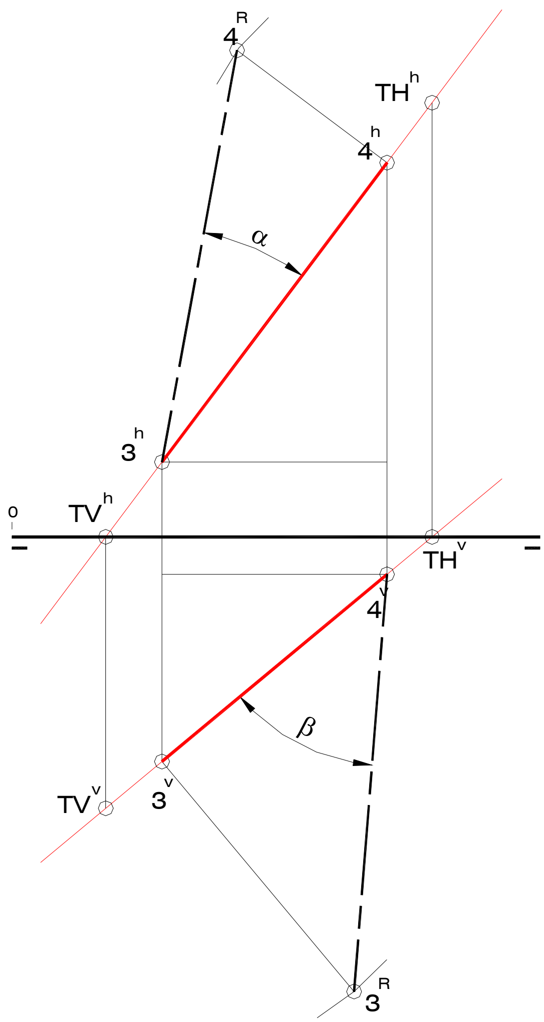

Fig. 5.3-b

Para responder a la última pregunta del problema se deben construir los dos triángulos de abatimiento del segmento 34. Uno de ellos está conformado por la proyección horizontal del segmento 34, la diferencia de cota entre sus extremos y el verdadero tamaño. Para construirlo se traza una perpendicular a la proyección horizontal del segmento por el extremo de mayor cota – 4 en el ejemplo – y se consigna sobre ella la diferencia de cota entre 2 y 4, dando lugar a 4^R. El segmento definido por este punto y la proyección horizontal del otro extremo, es decir 3, representa el verdadero tamaño del segmento de recta 34, en tanto que el ángulo formado entre éste y la proyección horizontal corresponde al ángulo α de la recta “b”. De manera análoga, debe construirse en otro triángulo de abatimiento con miras a la determinación del ángulo β; el procedimiento seguido se explica por sí mismo en la figura 5.3-b.

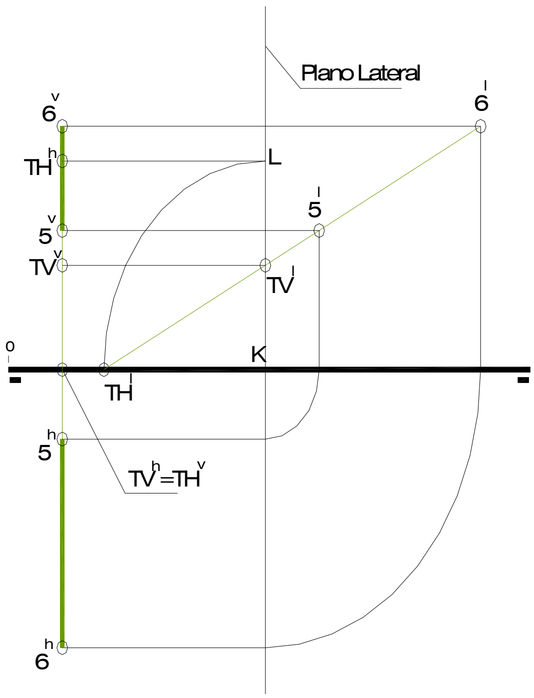

Fig. 5.3-c

En el caso de la recta "c" (Fig. 5.3-c) el procedimiento seguido para hallar los puntos de traza de las rectas "a" y "b" no es aplicable, dada la confusión que genera el hecho de que todos los puntos de la recta tienen idéntica abcisa. En tal circunstancia, es conveniente generar una nueva proyección de la recta, lateral en el ejemplo, para así determinar los puntos de traza. El procedimiento seguido es el siguiente: en primer lugar se determinan los puntos de corte entre la proyección lateral de la recta y LT y entre aquella y la representación diédrica del plano lateral auxiliar, puntos que constituyen las proyecciones laterales de TH y TV, respectivamente. Seguidamente, por TV^l se dibuja una referencia paralela a LT que corta a la proyección vertical de la recta en TV^v, para luego trazar un cuarto de circunferencia de centro en K (corte entre la representación diédrica del plano lateral y LT) y radio KTH^l, tomando la solución de menor vuelo, pues es evidente que el punto TH se encuentra en la parte negativa del plano horizontal de proyección. Trazando por L una paralela a LT se obtiene, en el corte con la proyección horizontal de la recta "c", la proyección icnográfica TH^h del punto de traza horizontal. Por último, las proyecciones TV^v y TH^v se confunden sobre LT, al igual que las proyecciones diédricas de la recta "c".

4) Determine la doble proyección ortogonal de los siguientes segmentos de recta:

- AB: forma 30° con el plano horizontal y 45° con plano vertical de proyección. El punto B(40, ??, ??) con mayor cota y mayor vuelo que A(10, 20, 15)y a su derecha.
- BC: mide 50 mm, C(70, 30, ??) de menor cota que B. Aplique cambio de plano.
- CD: forma 30° con el plano horizontal de proyección. D(110, 50, ??). El segmento es descendente de izquierda a derecha. Aplique giro.

Solución (Fig. 5.4)

La determinación del segmento AB pasa por el trazado de ambos triángulos de abatimiento, ya que los ángulos que el segmento forma con PH y PV son conocidos. Sin embargo, el verdadero tamaño de AB no se suministra como un dato, por lo que se asume una longitud arbitraria para hallar las proyecciones de un segmento AX, perteneciente a la misma recta que define el segmento AB. Así pues, se construye una circunferencia de diámetro AX cualquiera y se traza por uno de los extremos del diámetro horizontal un par de líneas rectas que formen 45° y 30° con dicho diámetro. Luego, se unen los puntos de corte entre las líneas así trazadas y la circunferencia, dando lugar a los triángulos de

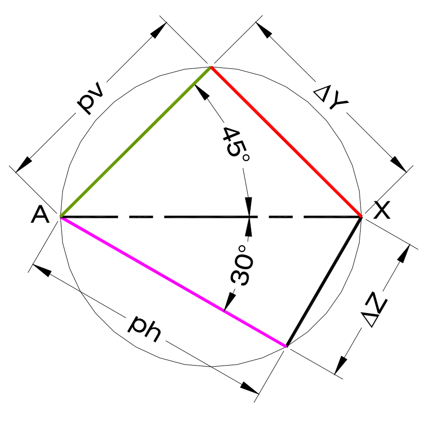

Fig. 5.4-a

abatimiento correspondientes al segmento AX ((Fig. 5.4-a).

Para hallar la proyección vertical del punto X se traza un arco de circunferencia de centro en A^v y radio igual a la longitud de la proyección vertical del segmento AX (pv en el triángulo de abatimiento) y se dibuja una línea paralela a LT situada a una distancia ΔZ por encima A^V (El punto B tiene mayor cota que el punto A); el corte entre el arco dibujado y esta línea es la proyección vertical de X.

Con centro en A^h y con radio igual a la proyección horizontal de AX (ph) se construye un arco de circunferencia; el corte entre éste y una referencia perpendicular a LT trazada por X^v da como resultado la proyección horizontal de X, tomando la solución de mayor vuelo como lo indica el enunciado del problema. Es necesario prolongar las proyecciones del segmento AX hasta cortar una referencia perpendicular a LT trazada en X=40 mm, pues los puntos resultantes constituyen la doble proyección ortogonal del punto B (Fig. 5.4-b).

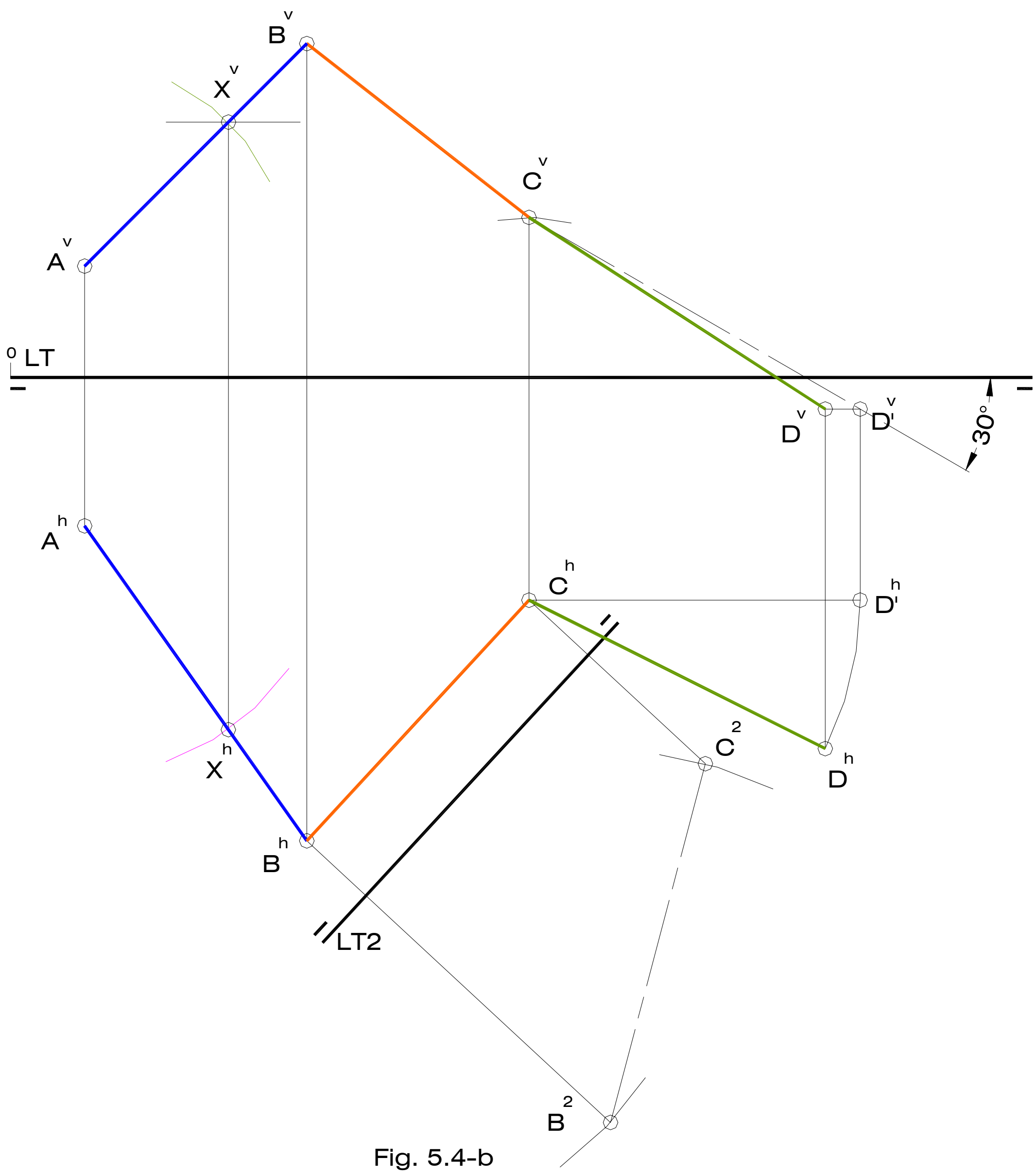

Fig. 5.4-b

La proyección vertical del segmento BC es desconocida, ya que también lo es la coordenada Z del punto C. Para resolver esta incógnita se introduce un nuevo plano vertical de proyección, cuya intersección con PH es una nueva línea de tierra LT2 situada a cualquier distancia de la proyección horizontal de BC y paralela a ella. Seguidamente se construyen por B^h y C^h unas referencias perpendiculares a LT2 y se consigna sobre la primera la longitud de la cota de B a partir de LT2, obteniéndose así la proyección auxiliar B^2 y la posibilidad de usar el verdadero tamaño de BC para encontrar C^2, ya que en el sistema LT2 dicho segmento se encuentra en posición frontal. Así pues, se construye un arco de circunferencia de centro en B^2 y radio igual a 50 mm, el cual corta a la referencia perpendicular a LT2 que pasa por C^h en C^2. La distancia entre éste punto y LT2 representa la cota de C en ambos sistemas, por lo que se debe copiar, usando el compás, sobre la referencia de C a partir de LT para obtener la proyección vertical C^v.

El caso del segmento CD es similar al anterior pero debe ser resuelto aplicando giro. Este movimiento debe realizarse en torno a un eje de pié – que pase por uno de los extremos del segmento, C por ejemplo - con el fin de obtener un segmento CD' en posición frontal, ya que el ángulo que se suministra como dato es el ángulo α. En primer lugar se dibuja un arco de centro en C^h y radio igual a la proyección horizontal de CD, el cual corta a una paralela a LT trazada por C^h en el D'^h . Seguidamente, se traza por C^v una línea (proyección vertical de CD') que forme 30° (α) con LT, la cual corta a una referencia perpendicular a LT trazada por D'^h en un punto que constituye la proyección vertical de D'. Por último, se traza por D'^v una paralela a LT que corta a la referencia del punto D en D^h.

5) Determine la doble proyección ortogonal del segmento AB sabiendo que:
- Forma 30° con el plano horizontal de proyección .
- El punto B se encuentra en la región posterior-superior.
- A(20, 55, 20); B(50, 70, ??)

Aplique giro en la resolución del problema. Halle las proyecciones del punto P perteneciente a la recta definida por AB, el cual dista 30 mm de B y se encuentra a la derecha de éste.

Solución (Fig. 5.5)

Como se deduce del análisis de las coordenadas de A y B, la proyección vertical del segmento es desconocida, en tanto que el ángulo suministrado como dato es el formado entre el segmento en el espacio y la proyección horizontal (conocida).

Se presentan dos alternativas para determinar la proyección faltante del punto B: la construcción del triángulo de abatimiento formado por el verdadero tamaño, la proyección horizontal de AB y la diferencia de cota entre estos puntos, ya que el ángulo α es conocido, y el giro del segmento en torno a un eje de pié.

El problema debe ser resuelto aplicando giro, de acuerdo con el enunciado, por lo que se supone un eje de giro de pié que pasa por el punto A. Con centro en A^h y radio igual a la proyección horizontal de AB, se dibuja un arco que corta a una paralela a LT trazada por A^h en la proyección horizontal del punto B'. Seguidamente, se construye por A^v una línea que forme 30° (α) con LT, la cual corta a una referencia perpendicular a LT dibujada por B'^h, dando lugar a la proyección vertical de B'. Para hallar la proyección de B sobre el plano vertical bastará con buscar el punto de corte entre una paralela a LT trazada por B'^v y la referencia perpendicular a LT correspondiente al punto B.

En vista de que la proyección vertical del segmento AB' se encuentra en verdadero tamaño, debe determinarse sobre su prolongación la proyección vertical de P', midiendo 30 mm a la derecha de B'. Luego, se traza una paralela a LT por P'^v que corta a la proyección vertical de la recta definida por el segmento AB en P^v. Finalmente, bastará con alinear en forma perpendicular a LT para encontrar P^h sobre la proyección horizontal de la mencionada recta.

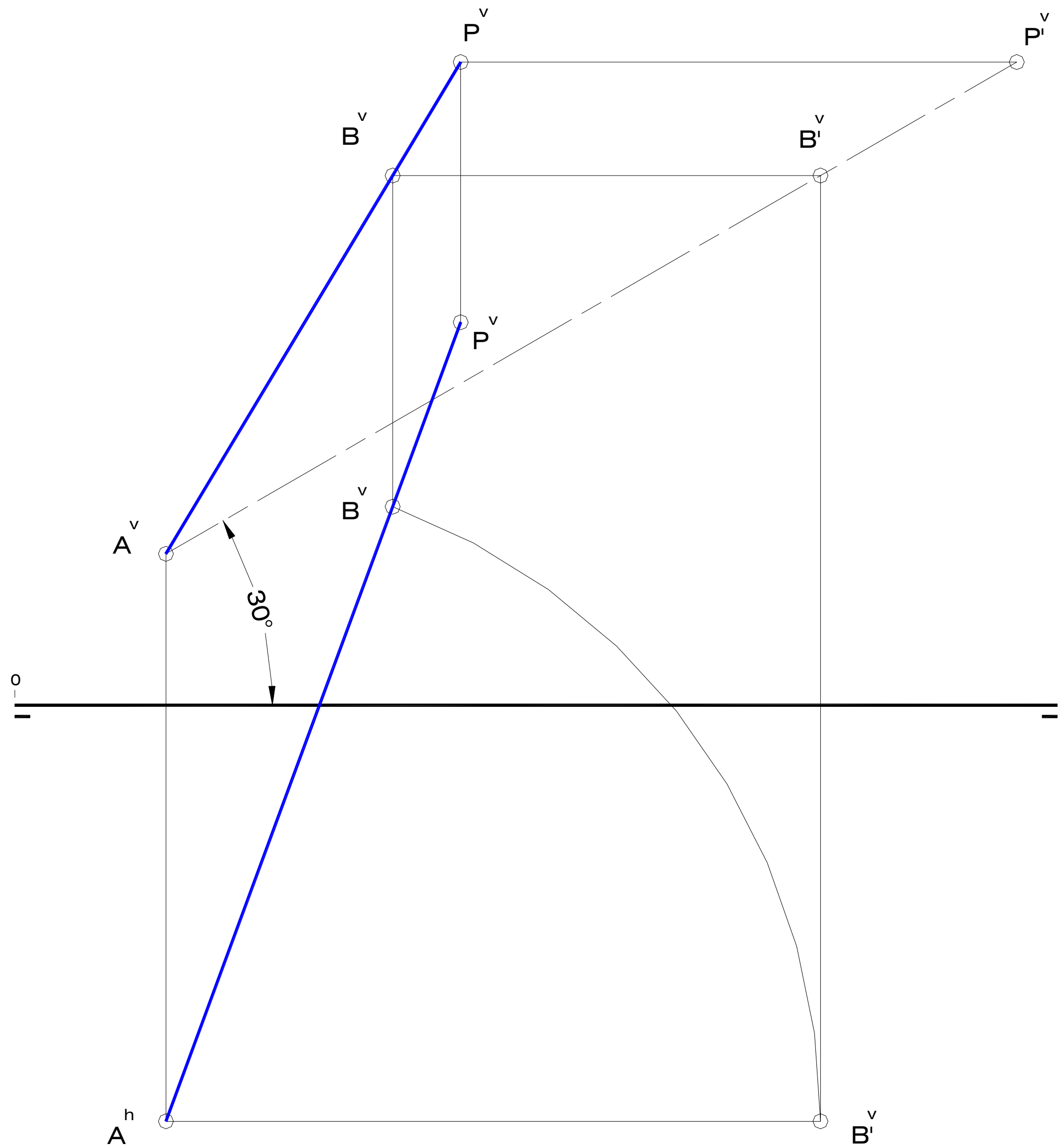

Fig. 5.5

6) Determine la doble proyección ortogonal del segmento de recta AB, el cual forma 45° con el plano horizontal y 30° con plano vertical de proyección y mide 55 mm. El punto B con mayor cota y menor vuelo que A(10, 25, 20) y a la derecha de éste. Aplique giro en la resolución del problema.

Solución (Fig. 5.6)

En primer lugar se construyen las proyecciones diédricas de un segmento frontal AB’ de longitud 55 mm, el cual forma un ángulo de 45° con PH (B’ de mayor cota y a la derecha). Luego, se hallan las proyecciones de un segmento de recta AB” de igual longitud, pero en posición horizontal, formando 30° con PV (B” de menor vuelo y a la derecha); estos segmentos son el resultado de girar el segmento original AB en torno a un eje de pié y uno de punta, respectivamente. Para obtener la proyección horizontal del punto B bastará con trazar un arco de circunferencia de centro en A^h y radio $A^hB'^h$, el cual corta a una paralela a la línea de tierra trazada por B''^h en el punto buscado (B^h). Análogamente, el corte entre un arco de circunferencia de centro en A^v y radio $A^vB''^v$ y una paralela a LT dibujada por B'^v resulta en la proyección vertical del punto B, con lo cual queda definido el segmento de recta buscado.

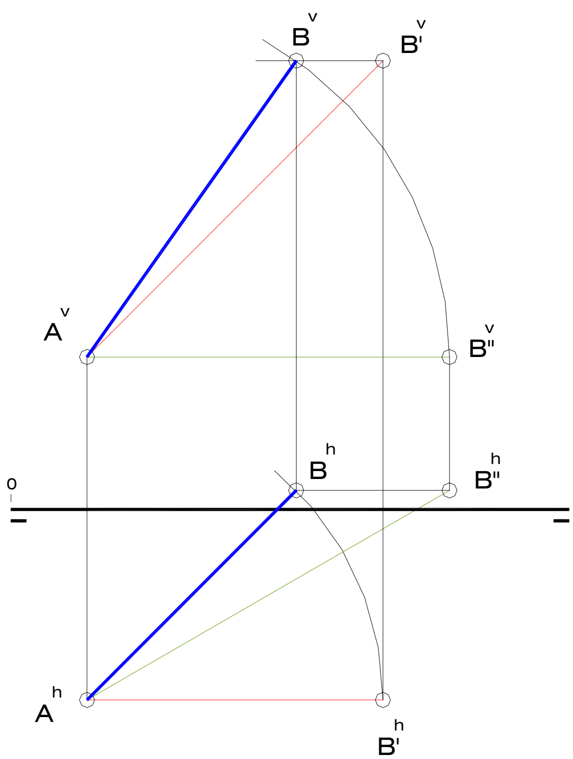

Fig. 5.6

5.2 Ejercicios resueltos de Plano

1) Construya la doble proyección ortogonal de una hexágono regular ABCDEF, sabiendo que se encuentra contenido en el plano δ, siendo M el punto medio del lado AB y N el punto medio del lado ED. Indique las trazas del plano δ.

$$\delta\begin{Bmatrix} M(30,20,50) \\ N(70,20,15) \\ 1(??,20??) \end{Bmatrix}$$

Solución (Fig. 5.7)

A partir de la inspección de las coordenadas de los puntos M, N y 1 que definen el plano δ, es fácil darse cuenta de que dicho plano es uno en posición *frontal*, ya que los vuelos de cada uno de esos puntos tienen el mismo valor. En consecuencia, la proyección vertical del hexágono ABCDEF resulta ser un polígono con las mismas características, es decir, el hexágono se proyecta en *verdadero tamaño* sobre el plano vertical de proyección. Por otra parte, la proyección horizontal del polígono se reduce a un segmento de línea recta confundida con la traza horizontal del plano δ, recta ésta que es paralela a LT y tiene cota igual acero.

Se procede entonces a construir un hexágono regular a partir de los puntos M^v y N^v, puntos medios de las proyecciones verticales de los lados AB y ED del hexágono. Para ello se determina en primer lugar el punto medio O^v del segmento M^vN^v, quien viene a ser la proyección vertical del centro del polígono, puesto que los lados AB y ED son opuestos. Seguidamente, se dibuja una circunferencia de centro en O^v y diámetro M^vN^v, la cual es tangente a cada uno de los lados en sus puntos medios (circunferencia inscrita en el hexágono). A continuación se construye por Ov una línea recta que forme 30° con una paralela a M^vN^v y que corta a la circunferencia en los puntos medios P^v y Q^v de las proyecciones verticales de los lados BC y EF, respectivamente. Luego, si se trazan por tales puntos líneas perpendiculares al segmento que ellos definen, se obtendrán las proyecciones verticales de las rectas que contienen a los lados BC y EF, las cuales van a cortar a unas perpendiculares a M^vN^v dibujadas por los extremos de este segmento, en los puntos B^v y E^v.

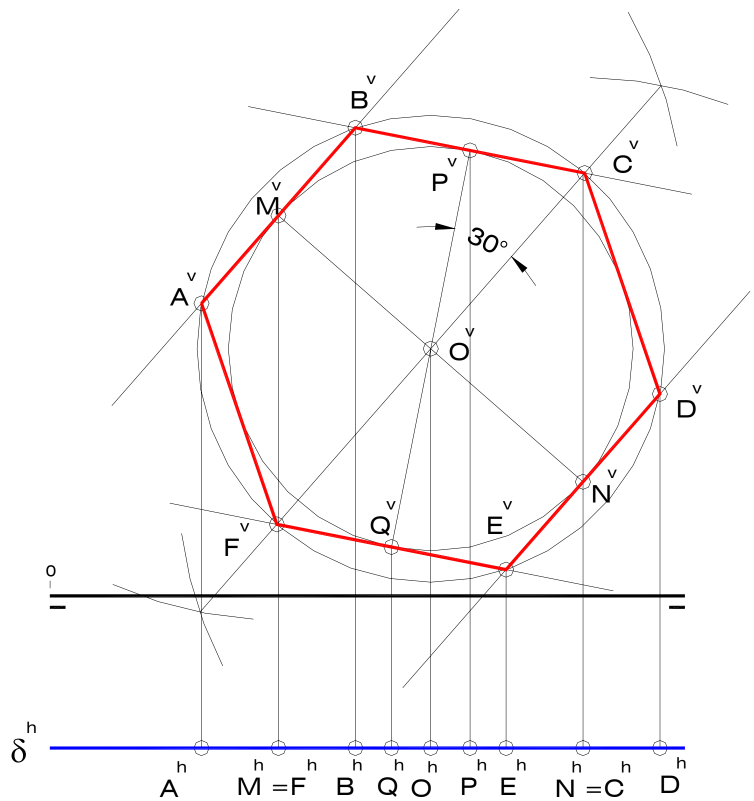

Fig. 5.7

Finalmente, bastará con construir una circunferencia de centro en O^v y radio O^vB^v = O^vE^v para obtener las proyecciones verticales de los demás vértices del hexágono, como se deduce de la Fig. 5.7.

Las proyecciones horizontales de todos y cada uno de los puntos relevantes del polígono, así como de todos los puntos pertenecientes al plano δ, se ubican sobre la traza horizontal de éste, dado el ángulo de 90° que forma con el plano horizontal de proyección. La traza vertical del plano es una recta impropia (en el infinito) por el paralelismo existente entre δ y el plano vertical de proyección.

2) Determine la doble proyección ortogonal de un pentágono regular ABCDE apoyado en un plano perpendicular a los planos de proyección, sabiendo que O(30,40,40) es el centro y que sobre la recta “m” se encuentra uno de los lados del polígono. Indique las trazas del plano.

$$.m\begin{Bmatrix} 1(??,10,20) \\ 2(??,00,40) \end{Bmatrix}$$

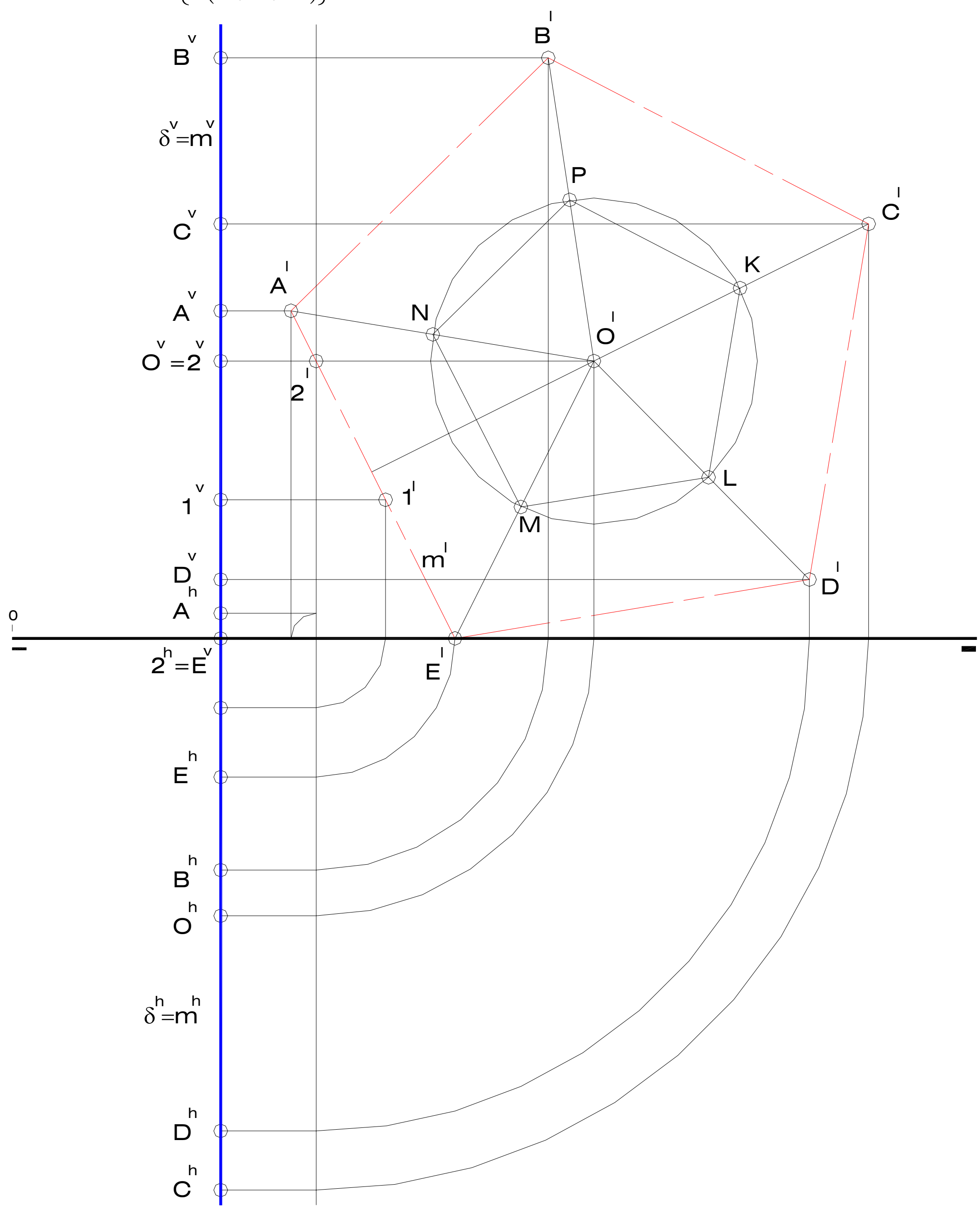

Fig. 5.8

Solución (Fig. 5.8)

La posición de un plano perpendicular a los planos de proyección es *de perfil* o paralelo al plano lateral, pues los planos de proyección principales en el sistema diédrico son PV y PH. Sobre la base de este razonamiento se concluye que las coordenadas X de los puntos 1 y 2 que definen a la recta "m" tienen un valor de 30 mm, ya que todos los puntos pertenecientes a una plano de perfil tienen idéntica abcisa. De lo anterior se desprende la necesidad de construir una proyección lateral en la cual aparezca el polígono ABCDE representado con su verdadera forma y dimensiones, es decir, en verdadero tamaño.

Una vez obtenidas las proyecciones laterales de O y de la recta "m", se procede a construir la proyección lateral del pentágono ABCDE, trazando por O^l una perpendicular a m^l y seleccionando sobre ella un punto K, vértice de un pentágono auxiliar KLMNP que tiene por centro a la proyección lateral de O. Las prolongaciones de los segmentos O^lM y O^lN cortan a la proyección lateral de la recta "m" en los puntos A^l y E^l los cuales constituyen uno de los lados de la proyección lateral del polígono buscado, para luego, aplicando semejanza de figuras planas, completar la mencionada proyección.

Las proyecciones diédricas de los puntos A, B, C, D y E se ubican a igual distancia del origen de coordenadas sobre las trazas del plano δ, las cuales vienen a ser una recta de punta y una de pié de coordenada X = 30 mm, confundidas en la doble proyección ortogonal en una misma perpendicular a la línea de tierra.

3) Determine las proyecciones diédricas de un triángulo equilátero ABC contenido en un plano δ, el cual es perpendicular al plano horizontal y forma 30° con el plano vertical de proyección (origen de trazas a la izquierda). El punto O(30,15,20) es el centro del polígono y el lado AB se encuentra sobre PV. Se recomienda no aplicar abatimiento o cambio de plano.

Solución (Fig. 5.9)

Una vez representada la doble proyección ortogonal del punto O, se procede a construir las trazas del plano δ, el cual es *proyectante horizontal*. Para ello, se taza por O^h una línea que forme 30° con LT y que corte a ésta a la derecha de O en el origen de trazas K; dicha línea no es más que la traza horizontal del plano.

La traza vertical de δ se obtiene al levantar por K una perpendicular a LT, ya que tiene una posición de pié.

En vista de que el lado AB se encuentra sobre PV, se concluye que pertenece a la traza vertical del plano δ, por lo tanto, la altura CM del triángulo ABC tiene una posición horizontal. Así, el corte entre la traza vertical de δ y una recta horizontal del mismo plano trazada por O resulta en el punto M. Si se copia el doble de la longitud OM (en proyecciones) sobre dicha horizontal a partir de O y a su derecha, se obtiene el vértice C del triángulo.

Es necesario construir aparte un triángulo equilátero de altura igual al varadero tamaño de CM (Ver Apéndice), con la finalidad de obtener la longitud de los lados. Una vez efectuada esta operación, se procede a copiar la mitad de dicha longitud sobre la traza vertical del plano δ a cada lado (arriba y abajo) de M^v, pues, como ya se ha indicado, la mencionada traza contiene al lado AB del triángulo, cuyo punto medio es M. De esta manera se obtienen las proyecciones verticales de A y B, recordando que las proyecciones horizontales de dichos puntos se confunden con la de los puntos M y K, por ser la traza vertical una recta de pié.

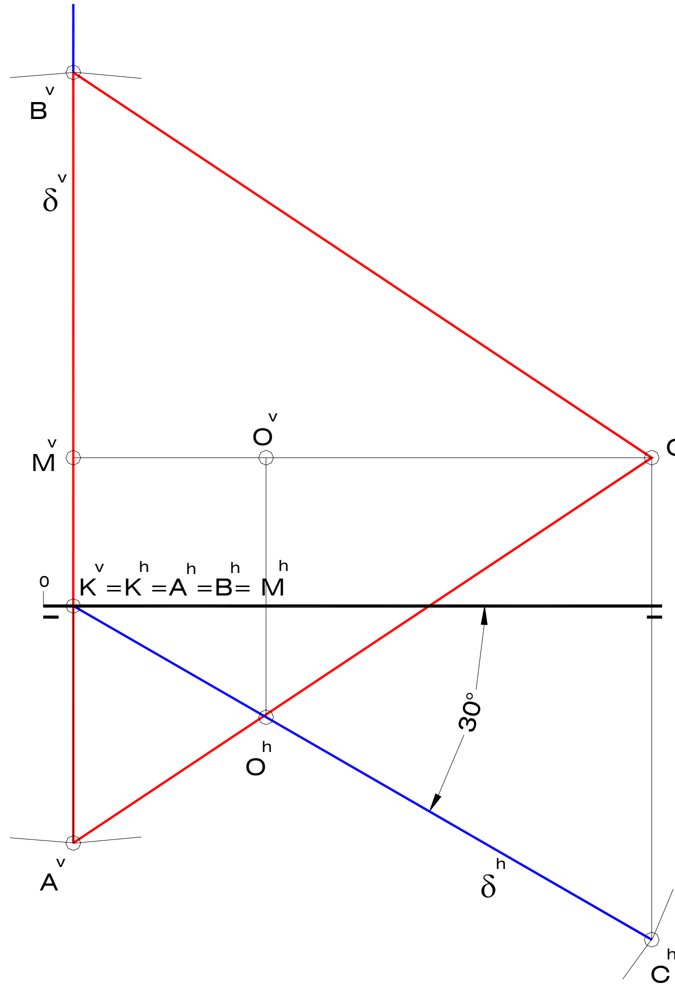

Fig. 5.9

4) Construya la doble proyección ortogonal de un pentágono regular ABCDE contenido en un plano ω que forma 45° con el plano horizontal de proyección. A(10, 25, 25) es uno de los vértices y O(26, 25, 25) es el centro del polígono. Indique las trazas del plano ω. Se recomienda no aplicar abatimiento o cambio de plano.

Solución (Fig. 5.10)

El plano que contiene al polígono pedido posee rectas paralelas a LT, como lo es el segmento AO; por otra parte, dicho plano forma un ángulo distinto de cero o 90° con PH. Ambas características indican claramente que ω es un plano paralelo a LT o proyectante lateral, ya que las rectas paralelas a LT solo pueden formar parte de planos frontales, que forman 90° con PH, planos horizontales, que son paralelos a PH, o de planos paralelos a LT, los cuales resultan ser oblicuos, como es el caso de ω, con respecto a ambos planos de proyección.

El problema puede ser resuelto sin necesidad de aplicar alguno de los métodos utilizados en la determinación del verdadero tamaño de polígonos. Esto debido a que el segmento AO, y por lo tanto la altura definida por A y el punto medio M del lado CD, tiene una posición notable, por ser paralela a LT. Lo mismo puede decirse de la diagonal BD y el lado CD, segmentos que son de perfil.

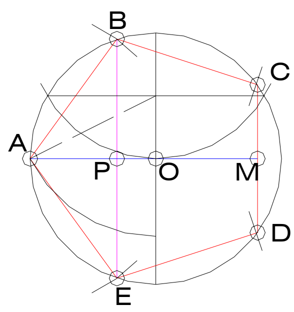

Fig. 5.10-a

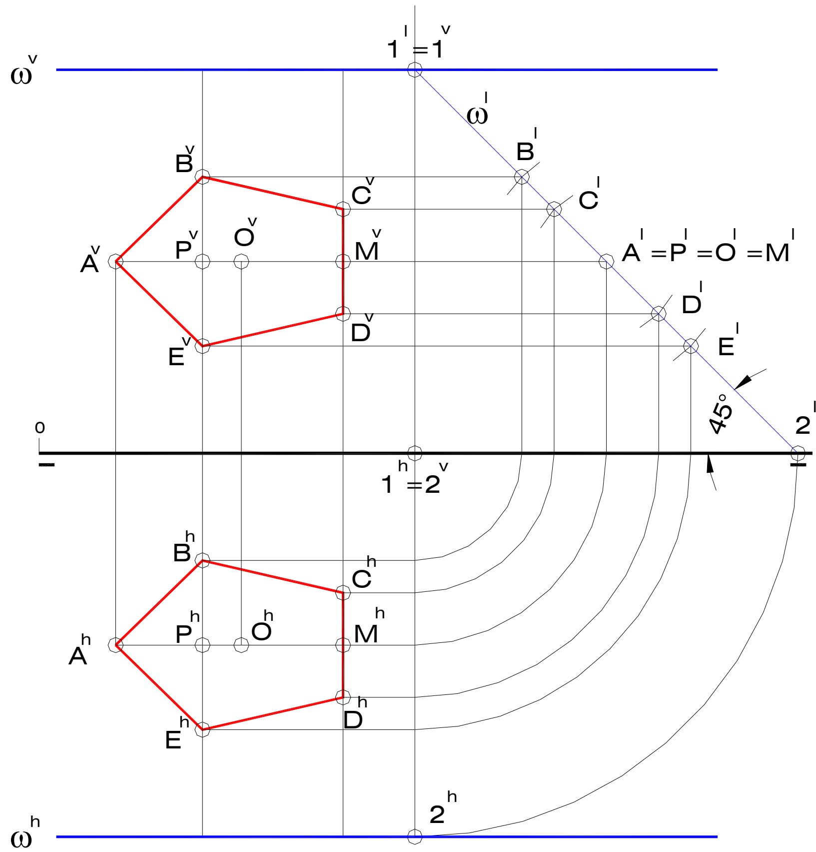

Fig. 5.10-b

El procedimiento comienza por la construcción de un pentágono auxiliar de radio igual al segmento OA (Fig. 5.10-a) aplicando el algoritmo descrito en el Apéndice. Luego, se traslada la longitud AM de la figura auxiliar a las proyecciones diédricas del segmento AO (ambas en verdadero tamaño) obteniéndose las proyecciones de M, punto medio del lado CD. Seguidamente, se determinan las proyecciones laterales de A, O y M, las cuales se confunden en un mismo punto por el que pasa la traza lateral del plano ω formando 45° con la línea de tierra. Esta traza lateral corta a la referencia empleada para obtener la proyecciones laterales en un punto 1 perteneciente a la traza vertical del plano; luego, por 1^v se dibuja una paralela a LT que representa a ω^v. Análogamente, la traza lateral corta a PH en 2, por lo que la proyección lateral de 2 se halla en el punto común a ω^l y a la línea de tierra; luego, la traza horizontal del plano ω pasa por 2^h y es también paralela a LT.

A continuación es necesario copiar la longitud del segmento AP del pentágono auxiliar, partiendo de las proyecciones de A y sobre la recta definida por A y O (paralela a LT). Luego, se consigna la longitud de la semidiagonal del pentágono (PB=PE) a partir de B y a cada lado de la proyección lateral de P sobre la recta de perfil del plano que pasa por este punto, obteniéndose así los vértices B y E, primero en la proyección lateral y luego en proyecciones diédricas.

Finalmente y siguiendo un procedimiento similar, se copia la longitud MC (o MD) sobre la recta de perfil que pasa por el punto M y cada lado de éste, para definir de esta manera los vértices faltantes C y D.

5) Halle las trazas del plano γ determinado por las rectas paralelas “m” y “n”

$$m\begin{Bmatrix}1(25,15,30)\\2(45,35,10)\end{Bmatrix}\qquad n\begin{Bmatrix}3(40,05,25)\\4(??,??,??)\end{Bmatrix}$$

- Determine la doble proyección ortogonal de los puntos P(15, ??, 22) y Q(??, 30, 17), ambos pertenecientes al plano γ.
- Construya las proyecciones diédricas de la recta “r” definida por el segmento AB, contenido en el plano γ.

$$r\begin{Bmatrix}A(40,50,??)\\B(10,10,??)\end{Bmatrix}$$

Solución (Fig. 5.11)

En primer lugar es necesario determinar las proyecciones diédricas de los puntos de traza de las rectas “m” y “n”, ésta última paralela a “m” y pasa por el punto 3, lo que implica que las proyecciones de “n” son paralelas a las proyecciones homónimas de “m”.

La traza horizontal del plano γ está determinada por los puntos de traza horizontal TH y TH’, en tanto que la traza vertical de γ lo está a través de los puntos de traza vertical TV y TV’. Ambas trazas del plano deben converger en un punto sobre LT.

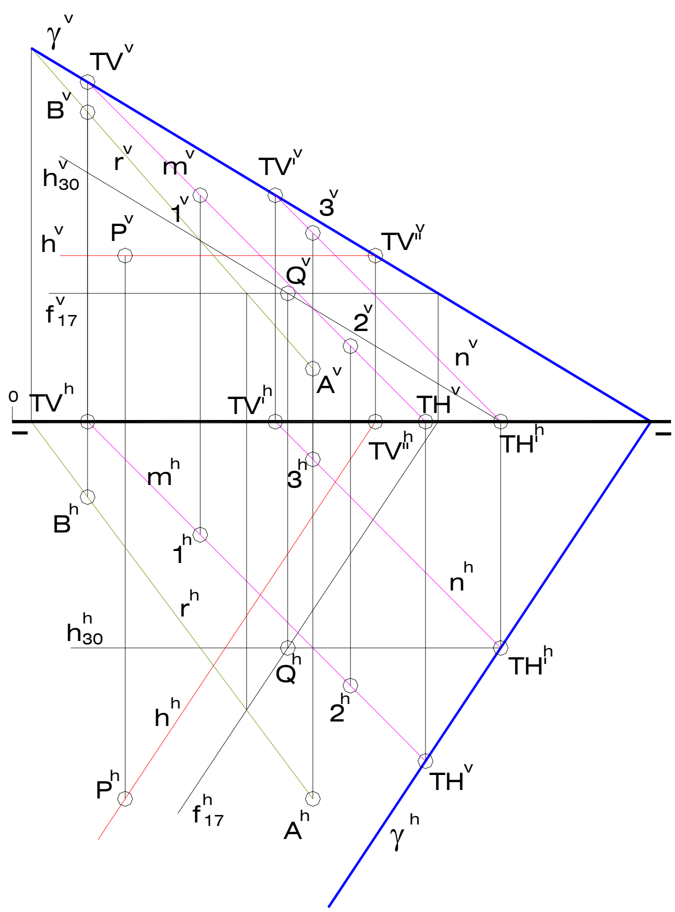

Fig. 5.11

Para encontrar la proyección faltante (horizontal) del punto P debe construirse una recta cualquiera perteneciente a γ y que pase por P. Sea esta recta una horizontal "h" del plano γ; la proyección vertical de "h" es paralela a LT y corta a γ^v en la proyección vertical del punto TV' (traza vertical de la recta "h"), cuya proyección horizontal se sitúa sobre LT. Luego, por ésta se traza una paralela a γ^h que representa a la recta "h" en proyección horizontal. El punto de corte entre h^h y una referencia perpendicular a LT trazada por P^v resulta en la proyección horizontal de P.

En vista de que se desconoce la coordenada X del punto Q, la determinación de sus proyecciones diédricas pasa por la construcción de una recta horizontal del plano de cota igual a 17 mm (cota de Q) y una frontal, también del plano γ, de vuelo igual a 30 mm (vuelo de Q); luego, los puntos comunes a las proyecciones homónimas de ambas rectas son las proyecciones del punto Q buscado.

De acuerdo con lo señalado en el Capítulo II, si una recta pertenece a un plano entonces deberá cortar a por lo menos dos de la rectas de ese plano. En el ejercicio, se conoce la proyección horizontal del segmento AB, de manera que se deben buscar los puntos de corte entre esta proyección y las proyecciones horizontales de otras dos recta del plano γ, como por ejemplo la frontal de vuelo 17 mm – usada para hallar las proyecciones de Q – y la traza vertical de γ, ésta última sobre LT en proyección horizontal. Luego, alineando en forma perpendicular a LT se obtienen, sobre las proyecciones verticales correspondientes ($f^v{}_{17}$ y γ^v), los puntos comunes buscados, los cuales definen la proyección vertical de la recta "r". Finalmente, bastará con trazar los respectivos alineamientos para encontrar A^v y B^v.

6) Defina las trazas del plano δ y encuentre las proyecciones de:
- Una frontal "f" del plano de vuelo 10 mm.
- Una horizontal "h" del plano de cota –20 mm.
- Un triángulo ABC contenido en δ, sabiendo que el lado AB es frontal, mide 35 mm y se encuentra a 15 mm por delante de PV (B a la derecha); el lado AC es horizontal, mide 45 mm y tiene cota igual a 40 mm (C de mayor cota).

$$\delta\begin{Bmatrix} 1(10,00,00) \\ 2(40,20,40) \\ 3(60,45,15 \end{Bmatrix}$$

Solución (Fig. 5.12)

Las trazas de cualquier plano están compuestas por los puntos de traza homónimos de las infinitas rectas pertenecientes a aquél. Ambas trazas de un plano – la vertical y la horizontal – se cortan en un punto de cota y vuelo igual acero, es decir, en un punto sobre la línea de tierra. Obsérvese que 1, uno de los puntos que determinan al plano δ del ejemplo, cumple con esta característica, por lo que únicamente se requieren un punto de traza vertical y uno de traza horizontal de cualquiera de las rectas que están contenidas en δ. Así pues, se hallan los puntos TV y TH, puntos de traza de la recta que define el segmento 23; la recta definida por 1 y TV es la traza vertical δ^v del plano, en tanto que la recta determinada por 1 y TH constituye la traza horizontal δ^h. Es importante recordar que la proyección vertical de la traza horizontal del plano se encuentra sobre LT, al igual que la proyección horizontal de la traza vertical.

La proyección horizontal de la recta frontal "h" es paralela a LT y se encuentra a una distancia de 10 de ésta; siendo una recta del plano δ, su traza horizontal TH' se encuentra sobre la traza horizontal de δ. La proyección vertical de "f" es paralela a la traza vertical del plano y pasa por la proyección vertical de TH'.

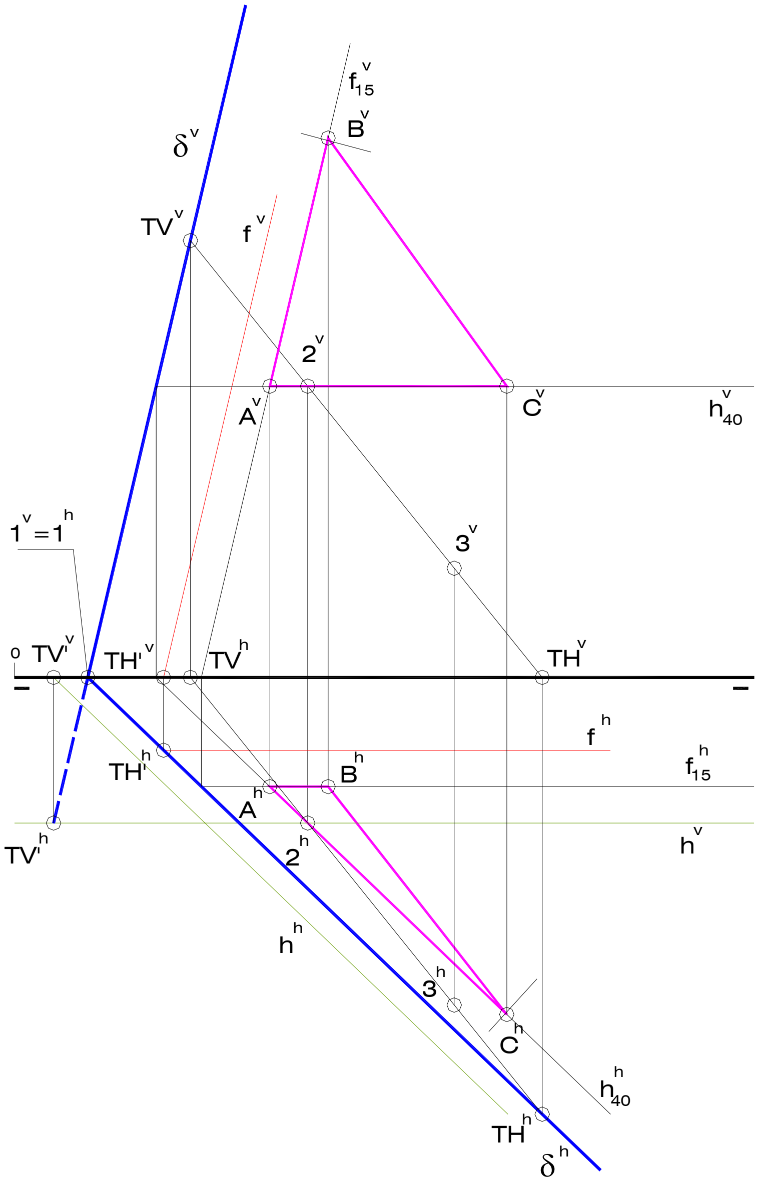

Fig. 5.12

De manera análoga, la proyección vertical de la recta “h” es una paralela a LT situada a 20 mm por debajo de ésta (cota negativa) que corta a la traza vertical del plano δ en el punto TV’. La proyección horizontal de “h” es paralela a la traza horizontal δh y pasa por la proyección horizontal de TV’, ésta última sobre la línea de tierra.

Al leer cuidadosamente el enunciado del problema, se concluye que el vértice A del triángulo ABC pedido es el punto común a la recta frontal del plano de vuelo 15 mm (f_{15}) y a la recta horizontal del plano de cota 40 mm (h_{40}). Estas rectas se construyen siguiendo un procedimiento similar al empleado en la determinación de las rectas “h” y “f”. Luego, se procede a consignar las longitudes de los lados AB y AC del triángulo sobre las correspondientes rectas, recordando que esta operación debe realizarse en la proyección que se encuentra en verdadero tamaño, vale decir, en la proyección horizontal de la recta h_{40} para el segmento AC y en la proyección vertical de la recta f_{15} para el segmento AB. De esta manera se completan las proyecciones del triángulo ABC y se finaliza la resolución del ejercicio.

7) Construya la doble proyección ortogonal de un cuadrado ABCD contenido en un plano δ dado por una de sus rectas de máxima inclinación "m". Se sabe que el vértice A del polígono se encuentra sobre el plano horizontal de proyección y que el vértice C tiene vuelo igual a cero. La longitud de la diagonal del cuadrado es de 50 mm. Resuelva el problema aplicando cambio de plano y tome la solución de mayor vuelo para C.

$$m\begin{Bmatrix} 1(35,12,22) \\ 2(55,38,06) \end{Bmatrix} \quad A(40,??,??)$$

Solución (Fig. 5.13)

Como es sabido, las rectas de máxima inclinación de un determinado plano δ son perpendiculares a las rectas frontales contenidas en él; de igual forma, son perpendiculares a la traza vertical de dicho plano, por ser ésta recta la frontal de vuelo cero. Por otra parte, la traza vertical del plano δ debe pasar por los puntos de traza vertical de las rectas pertenecientes a δ, incluyendo obviamente a las de máxima inclinación. De manera pues que bastará con trazar una perpendicular a la proyección vertical de "m" por su punto de traza vertical TV para obtener la traza vertical del plano δ. Luego, el punto de corte K entre esta recta y la línea de tierra viene a ser el origen de trazas del plano en cuestión, punto por el que también pasa la traza horizontal, por lo que la recta definida por K^h y la proyección horizontal de la traza horizontal de "m" constituye la recta común al plano δ y a PH, es decir, la traza horizontal δ^h (Fig. 5.13-a).

Siendo el punto A un punto sobre PH, debe pertenecer a la traza horizontal del plano δ y tener cota igual a cero, por lo que su proyección vertical A^v se encuentra sobre la línea de tierra. Por otra parte, como el vértice C tiene vuelo igual a cero, se entiende que pertenece a la traza vertical del plano δ.

Para encontrar el resto de los vértices del cuadrado ABCD resulta necesario generar una nueva proyección en la que sea posible obtener el verdadero tamaño del polígono. En esa nueva proyección deben aparecer los elementos del plano δ que conducen a la solución del problema, es decir, el punto A y la traza vertical δv del plano.

El primer plano de proyección auxiliar debe ser perpendicular a las rectas frontales o a las rectas horizontales del plano δ. En la figura 5.13-a se ha construido perpendicular a la traza horizontal de δ, lo que se traduce en un segunda línea de tierra LT2 también perpendicular a dicha traza. La nueva proyección A^2 del punto A se obtiene trazando una referencia perpendicular a LT2 y consignando sobre ella, a partir de LT2, la cota del punto. Aplicando un procedimiento similar se obtienen las nuevas proyecciones (TV^2 y K^2) de dos puntos pertenecientes a la traza vertical del plano δ.

Dado que en el sistema LT2 el plano δ es proyectante vertical, su proyección sobre el primer plano auxiliar se reduce a una recta δ^2 definida por las nuevas proyecciones de A, TV y K. La línea de tierra LT3 correspondiente a un tercer sistema en el que δ tiene una posición notable, debe ser paralela a δ^2 , de manera que las proyecciones A^3, K^3 y TV^3 se obtienen trazando por A^2, K^2 y TV^2, respectivamente, líneas de referencia perpendiculares a LT3 y consignando a partir de ésta los vuelos del segundo sistema. La segunda proyección auxiliar así encontrada ofrece el verdadero tamaño de cualquier figura contenida δ, pues éste plano tiene una posición horizontal en el sistema LT3.

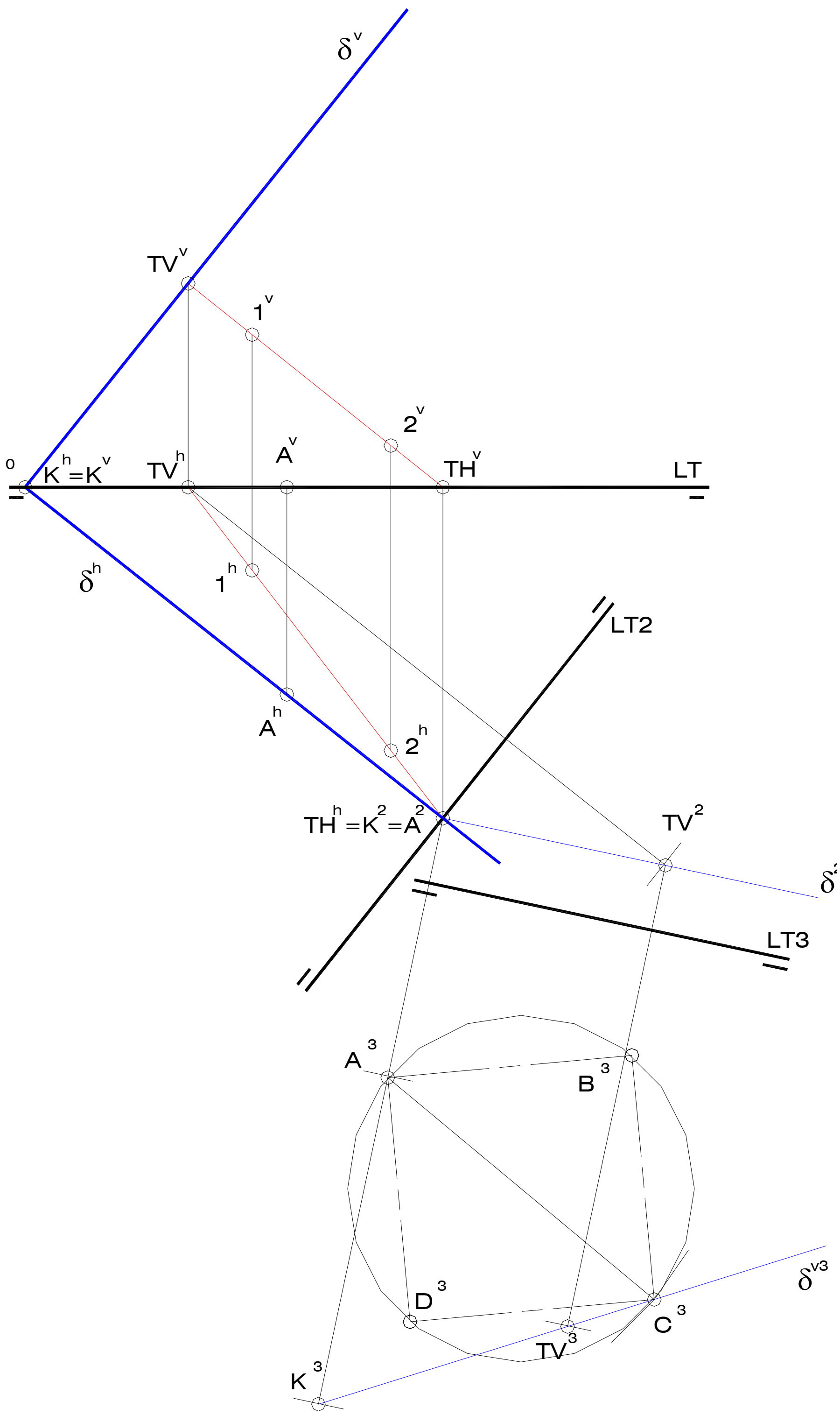
δ^v
TV^v
1^v
2^v
A^v
0
K^h=K^v
TV^h
TH^v
LT
δ^h
1^h
LT2
A^h
2^h
TH^h=K^2=A^2
TV^2
δ2
LT3
A^3
B^3
D^3
C^3
TV^3
K^3
δ^v3

Fig. 5.13-a

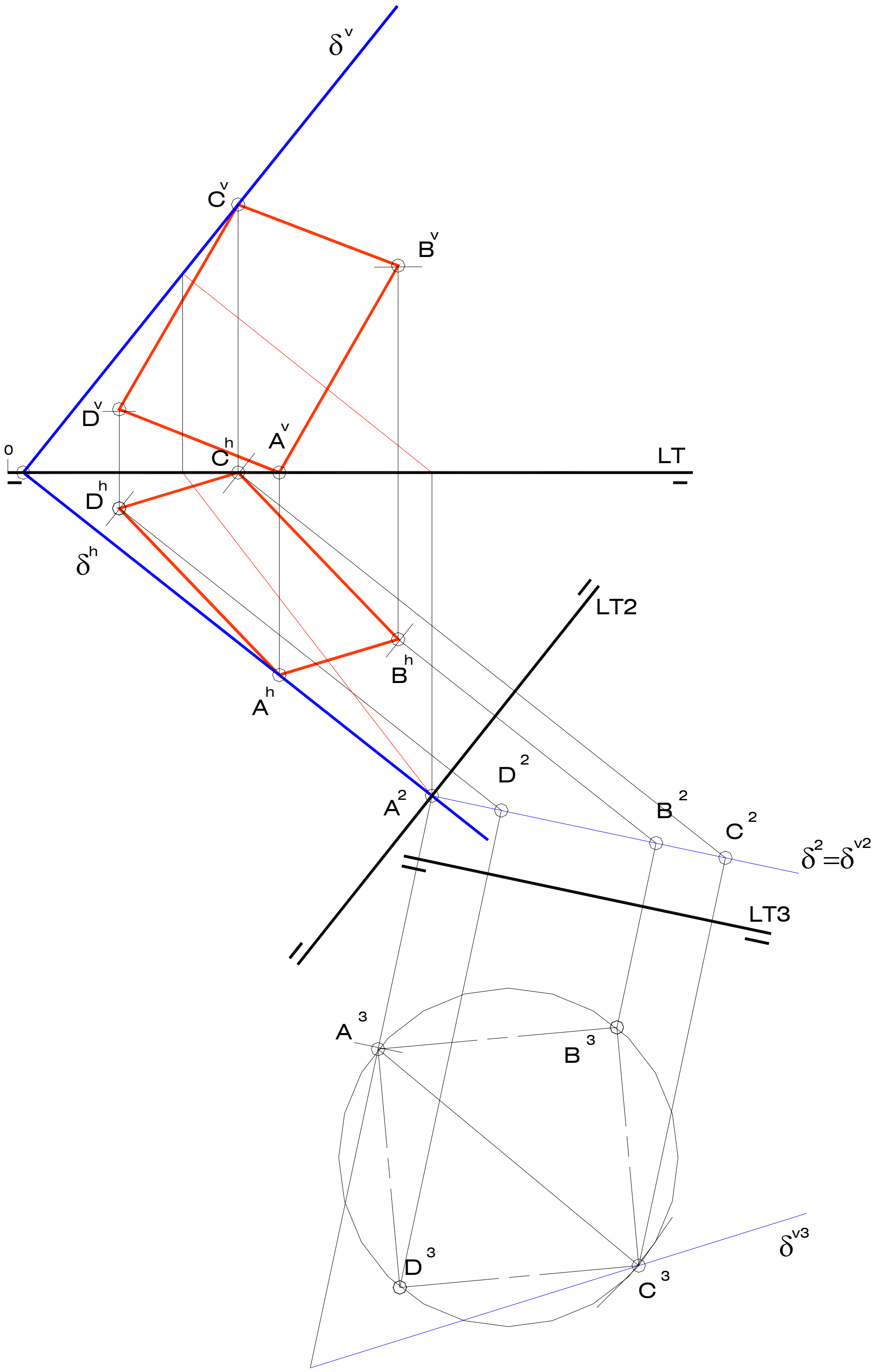
δ^v
C^v
B^v
D^v
A^v
C^h
0
LT
D^h
δ^h
LT2
B^h
A^h
D^2
A^2
B^2
C^2
$\delta^2=\delta^{v2}$
LT3
A^3
B^3
D^3
C^3
δ^{v3}

Fig. 5.13-b

Trazando un arco de centro en A^3 y radio igual a la longitud de la diagonal del cuadrado ABCD (50 mm) se obtiene, en el corte con la línea recta definida por TV^3 y K^3, la segunda proyección auxiliar C^3 del vértice C. Hecho esto se procede a dibujar el cuadrado $A^3B^3C^3D^3$, verdadero tamaño del cuadrado ABCD pedido (Fig. 5.13-a).

Para encontrar las proyecciones auxiliares B^2, C^2 y D^2 basta con hallar los puntos de corte entre referencias perpendiculares a LT3 trazadas por B^3, C^3 y D^3, respectivamente, y la traza del plano δ en el primer plano auxiliar, es decir, δ^2. Posteriormente se dibujan líneas de referencia perpendiculares a LT2 por las proyecciones B^2, C^2 y D^2, consignando sobre ellas, a partir de LT2, los vuelos correspondientes del sistemas LT3, dando así lugar a las proyecciones horizontales de los puntos A, B y C (Fig. 5.13-b).

Para obtener las proyecciones verticales de los vértices del cuadrado se puedes aplicar distintos métodos. Uno de ellos consiste en poner en práctica la condición de pertinencia de punto a plano, valiéndose de rectas contenidas en δ que pasen por los puntos B, C y D. Otro método consiste en copiar la cota de cada uno de estos puntos del segundo al primer sistema de proyección, método que se aplicado en la solución que muestra la Fig. 5.13-b.

8) Determine la doble proyección ortogonal de un pentágono ABCDE contenido en un plano δ, sabiendo que sobre la recta "m" se encuentra el lado AB del polígono y que el lado DE tiene vuelo igual acero. B se encuentra a la derecha de A. Aplicar abatimiento.

$$m\begin{Bmatrix} A(35{,}16{,}00) \\ 1(70{,}37{,}00) \end{Bmatrix}$$

Solución (Fig. 5.14)

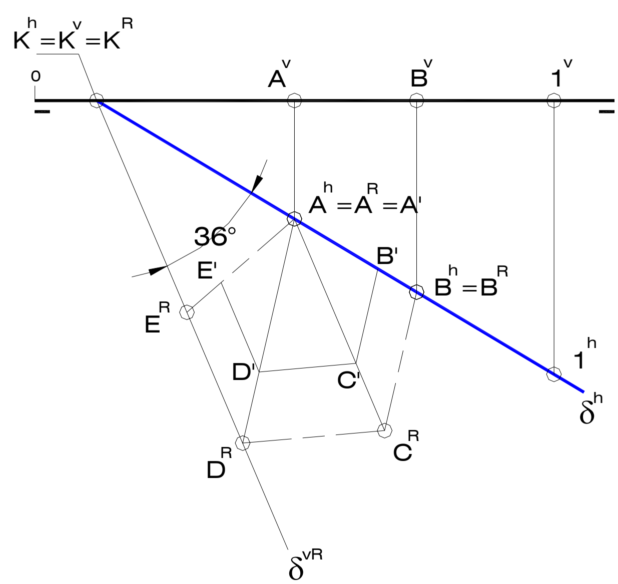

Fig. 5.14-a

Dado que el lado AE se encuentra sobre la traza horizontal del plano δ con B a la derecha de A - pues es evidente que la recta "m" tiene cota igual a cero - y que el lado DE pertenece a la traza vertical de dicho plano, el ángulo formado entre las mencionadas trazas debe ser igual a 72°, valor éste igual al del ángulo que forman los lados AB y DE del pentágono en cuestión.

En consecuencia, es imprescindible construir en primer lugar el verdadero tamaño del polígono abatido sobre PH. Como no se conoce la longitud de los lados se procede dibujando un pentágono regular A'B'C'D'E' de longitud de lado arbitraria, haciendo coincidir a A' con A^R y al lado A'B' con la traza horizontal (eje de abatimiento) del plano. Luego, trazando por el punto K (origen de trazas) una paralela al lado D'E' se obtiene la traza vertical del plano δ abatida sobre PH y, aplicando semejanza entre figuras planas, se logran los vértices B^R, C^R, D^R, E^R y F^R del verdadero tamaño del polígono pedido, sabiendo que el lado D^RE^R se halla sobre δ^{vR} (Fig. 5.14-a).

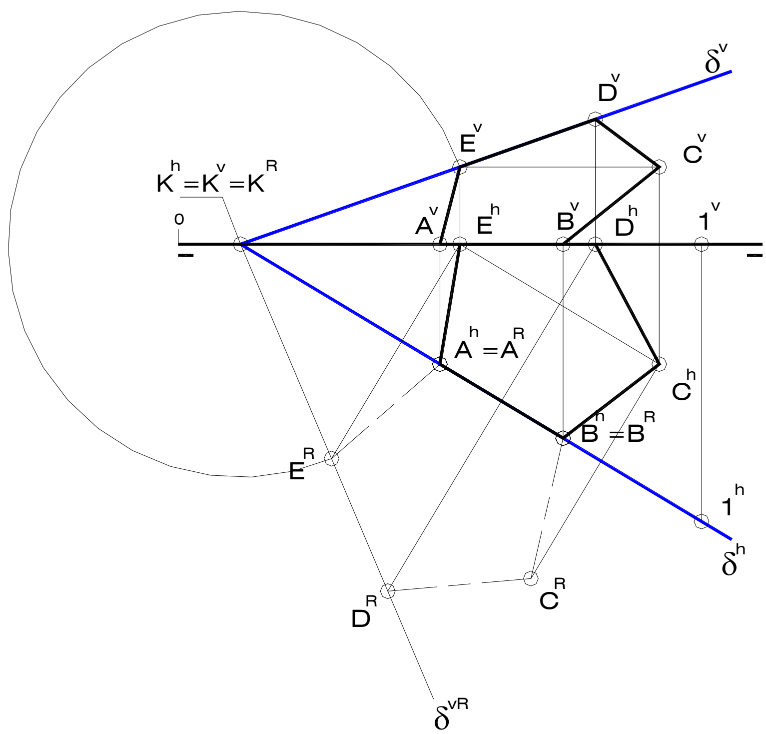

Fig. 5.14-b

Es evidente que la proyección horizontal del punto B coincide con B^R, ya que el eje de abatimiento es la traza horizontal de δ. Por otra parte, las proyecciones horizontales de D y E se obtienen en los cortes entre unas perpendiculares a δ^h trazadas por D^R y E^R, respectivamente, y la línea de tierra, dado que ambos vértices poseen vuelo igual a cero.

Para obtener la proyección vertical de E se procede de la siguiente forma: en primer lugar se construye un arco de centro en el punto K – origen de trazas, por lo que $K^h=K^v=K^R$ - y radio igual al segmento KE^R, luego, se construye una perpendicular a LT que pase por la proyección horizontal de D; el punto de corte entre el arco y la perpendicular viene a ser E^v. Todo esto es posible gracias a que la longitud del segmento KE se encuentra en verdadero tamaño en proyección vertical.

La recta determinada por el origen de trazas K y el punto E es la traza vertical δ^v del plano, luego, trazando por D^h una perpendicular a LT se obtiene D^v sobre δ^v.

Finalmente, es posible hallar la doble proyección ortogonal del vértice C aprovechando el hecho de que, por la posición que tiene el pentágono en el problema, el segmento EC es horizontal, de manera que, bastará con hallar el punto común entre una paralela a δ^h trazada por E^h y una perpendicular a δh trazada por C^R, para encontrar la proyección horizontal de C.; luego, C^v se halla en una paralela a LT trazada por E^v (Fig. 5.14-b).

9) Determine la doble proyección ortogonal de un triángulo equilátero ABC contenido en un plano δ, sabiendo que la longitud de sus lados es de 35 mm, que el vértice B se encuentra sobre el plano horizontal de proyección y que A se halla en la bisectriz del ángulo formado entre las partes positivas de las trazas del plano δ. Tome la solución de menor vuelo para el punto B y aplique abatimiento en la resolución del problema.

$$\delta\begin{Bmatrix} 1(15,00,00) \\ 2(60,00,50) \\ 3(70,45,00) \end{Bmatrix} \qquad A(60,??,??)$$

Solución (Fig. 5.15)

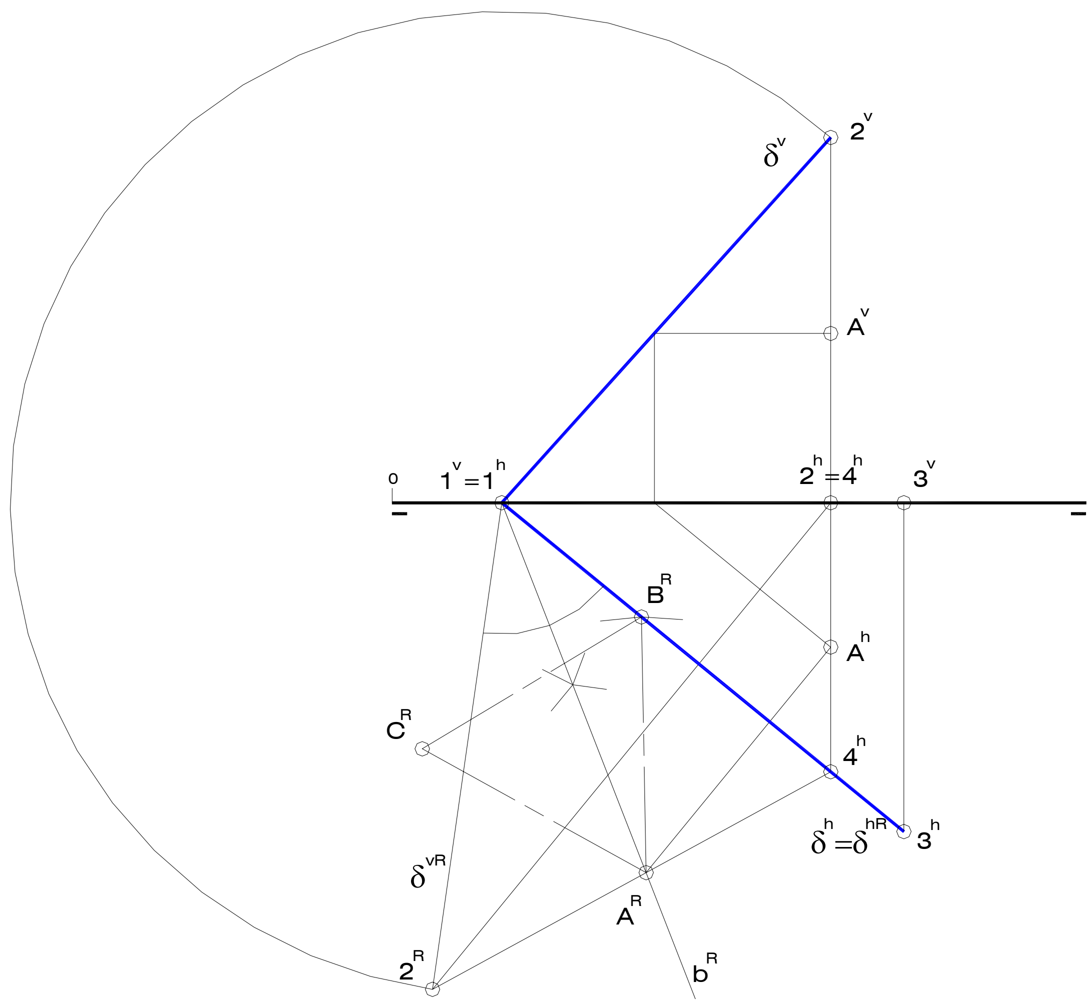

Fig. 5.15-a

Abatiendo el punto 2 en torno a la traza horizontal del plano se obtiene 2^R, el cual define junto al punto 1 (origen de trazas) a la traza vertical del plano δ abatida sobre PH. En vista de que la traza horizontal de δ ha sito tomada como eje de abatimiento, permanece inmóvil en el proceso, de manera que $\delta^h = \delta^{hR}$.

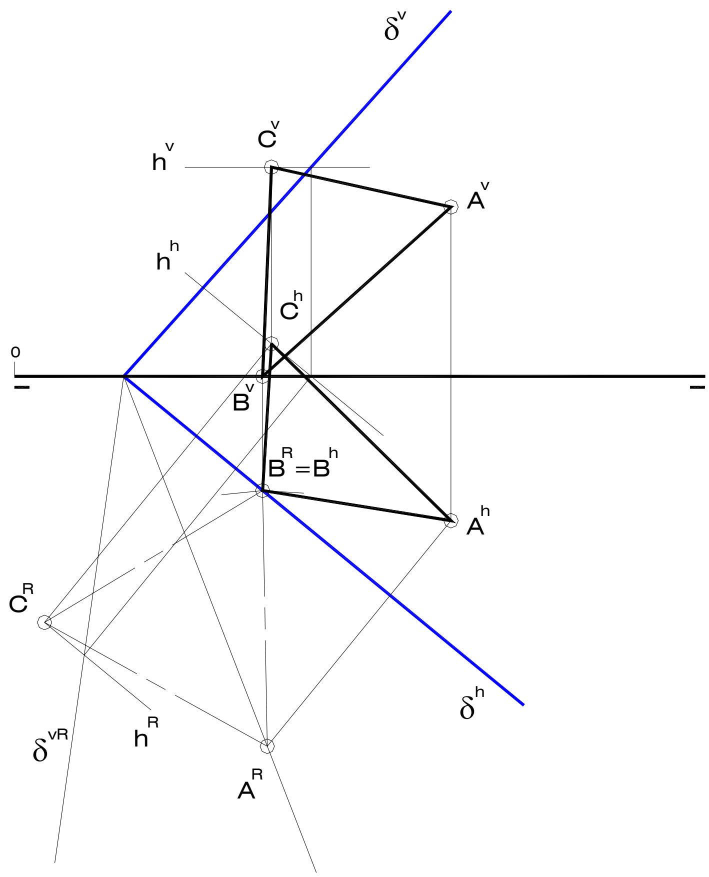

Fig. 5.15-b

Si el punto A tiene un valor de 60 mm en su coordenada X, es posible aseverar que dicho punto pertenece a la recta de perfil del plano δ cuyos puntos tienen coordenada X igual a 60 mm. De manera que, si se abate el segmento de perfil definido por los puntos 2 y 4 y se determina la bisectriz del ángulo formado entre las partes positivas de ambas trazas abatidas del plano δ, es posible hallar, en el corte de ambos elementos obtenidos, al punto A abatido (A^R) sobre PH.

Seguidamente, se procede a l trazado del verdadero tamaño del triángulo ABC, para lo cual se traza un arco de centro en A^R y radio igual a 35 mm, arco éste que corta a la traza horizontal abatida del plano δ en B^R; luego, trazando arcos de igual radio que el anterior y haciendo centro sucesivamente en A^R y B^R se obtiene a C^R (Fig. 5.15-a).

Para determinar la proyección horizontal del punto A basta con trazar una perpendicular al eje de abatimiento, que corte a la proyección horizontal de la recta de perfil del plano de abcisa igual a 60 mm, definida por los puntos 2^h y 4^h. Luego, mediante el uso de una recta horizontal del plano es posible obtener la proyección vertical del punto A.

La proyección horizontal de B coincide con B^R, puesto que dicho punto se halla sobre el eje de abatimiento. Por esta misma razón, su cota es igual a cero, tal que la proyección vertical de B yace sobre la línea de tierra.

Finalmente, para encontrar la doble proyección ortogonal del vértice faltante, es decir C, se puede emplear la recta horizontal del plano δ sobre la cual dicho punto se encuentra. Esta recta horizontal resulta ser paralela a la traza horizontal del plano tanto en el verdadero tamaño como en la proyección horizontal, siendo paralela a la línea de tierra en la proyección vertical. (Fig. 5.15-b).

10) Determine la doble proyección ortogonal de un hexágono regular ABCDEF de lado 25 mm contenido en un plano γ paralelo a la línea de tierra. El punto B se encuentra sobre el plano horizontal de proyección y a la derecha de A. Aplique giro en dos etapas: la primera en torno a una recta de pié de abcisa 50 mm y vuelo 25 mm.

Cota de la traza vertical de γ: 35 mm.
Vuelo de la traza horizontal de γ: 50 mm.
$A(15, ??, 05)$

Solución (Fig. 5.16)

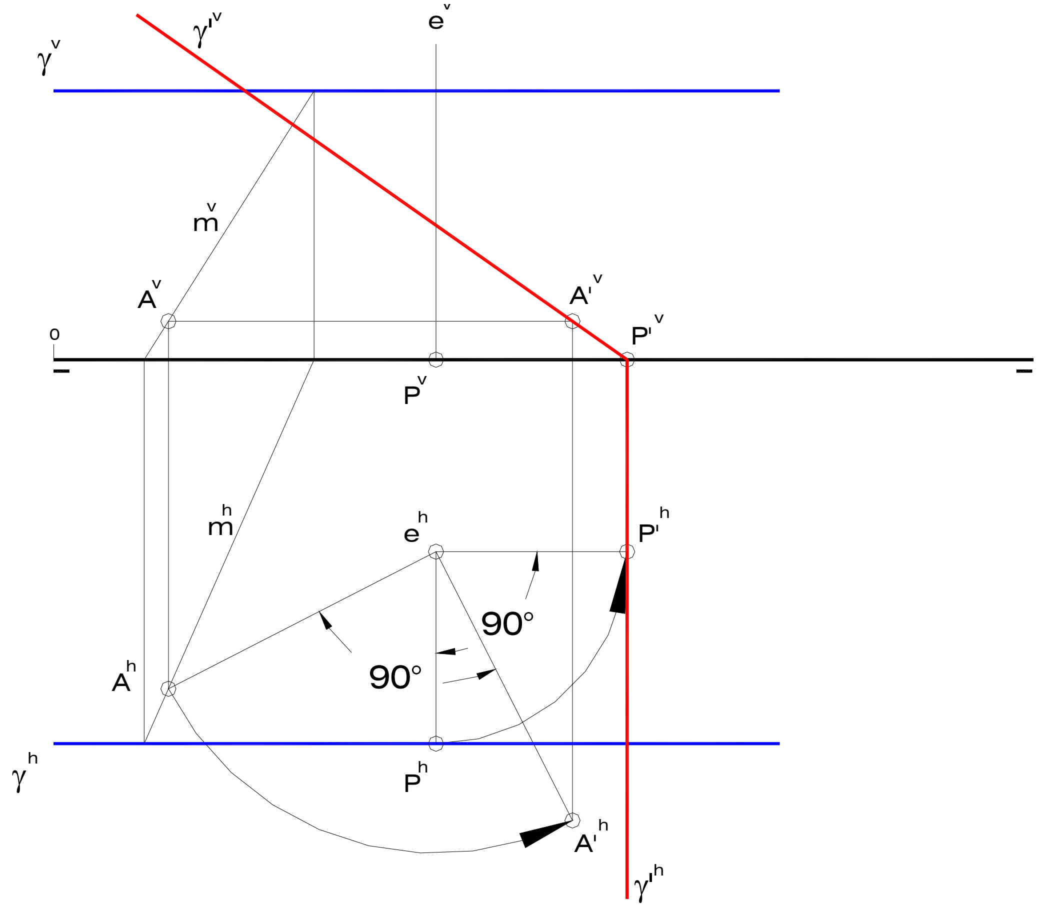

Fig. 5.16-a

El primer paso en la resolución de este problema consiste en la construcción de las trazas del plano γ, ambas paralelas a la línea de tierra, partiendo de los valores de cota y vuelo de γ^v y γ^h, respectivamente. Luego, aplicando la condición de pertenencia de punto a plano, es posible encontrar la proyección horizontal del vértice A empleando una recta cualquiera “m” contenida en γ.

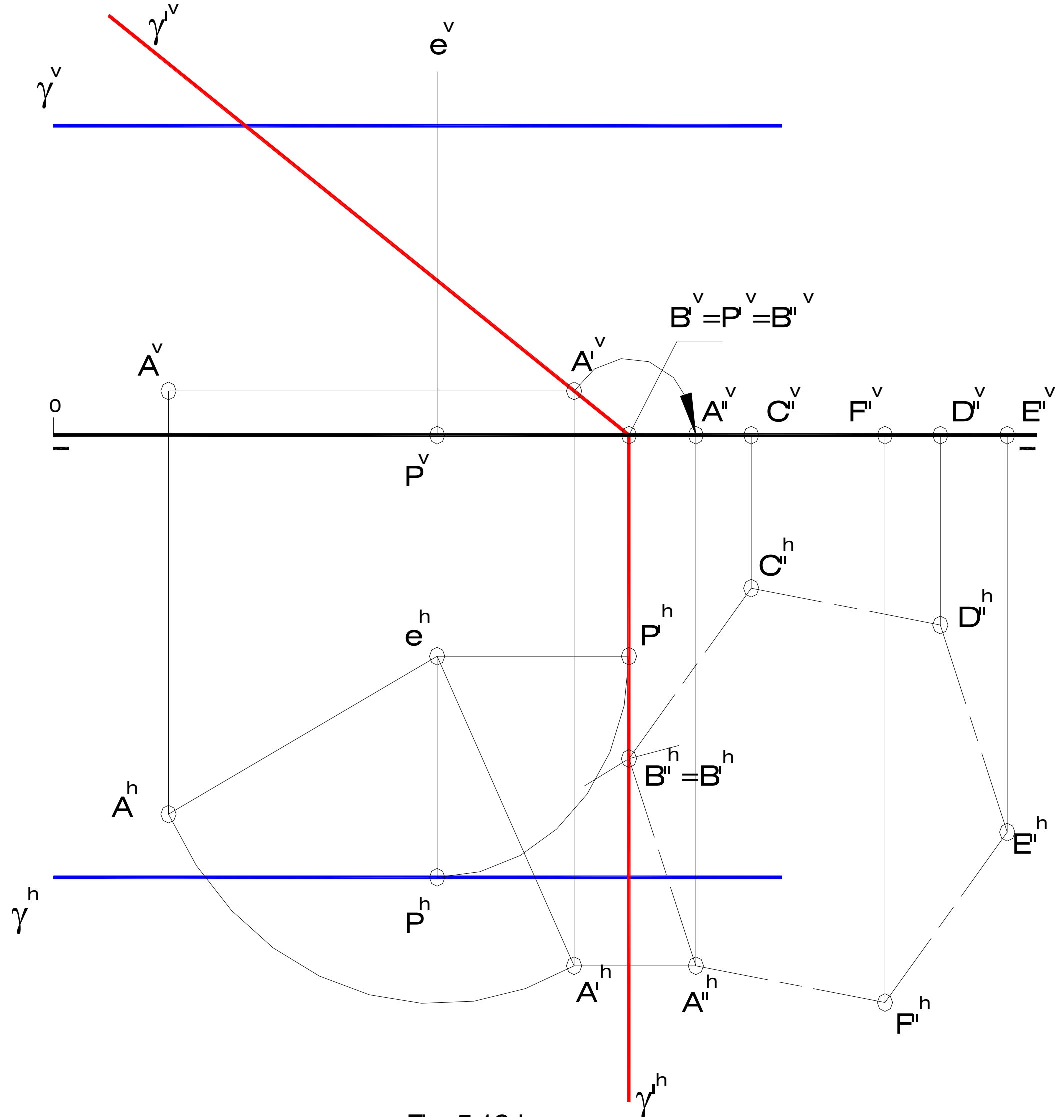

Fig. 5.16-b

Una vez determinado el eje de giro “e” (recta de pie de abcisa 50 mm y vuelo 25 mm) se procede a hallar las trazas del plano γ’ y la doble proyección ortogonal de A’; ambos elementos corresponden a las nuevas posiciones del plano γ y del punto A, respectivamente. Para ello se traza por A y una recta perpendicular al eje de rotación, la cual tiene una posición horizontal, y se dibuja un cuarto de circunferencia con centro en la proyección horizo0ntal de dicho eje, puesto que el giro de cada uno de los elementos del plano objetivo debe girar un ángulo de 90° para lograr un nuevo plano que sea proyectante vertical. Para encontrar la traza horizontal del plano γ’ es conveniente realizar el giro del punto P, el cual se ubica sobre la traza horizontal de γ y sobre la recta de máxima pendiente de éste plano que corta al eje de rotación; esta operación da lugar al punto P’, por el cual pasa la traza horizontal (de punta) del plano γ’. La traza vertical de este nuevo plano queda definida por P’v y A’v (Fig. 5.16-a).

El siguiente paso es la segunda etapa del giro, esta vez en torno a una recta de punta. En aras de la simplificación del procedimiento se ha tomado como segundo eje de giro la traza horizontal del plano γ’, de manera que el resultado es el abatimiento de este plano sobre PH, generando un nuevo punto A''. Partiendo de la proyección horizontal de A'' es posible dibujar el hexágono regular A''B''C''D''E''F'', ya que este polígono se encuentra sobre el plano horizontal de proyección y, en consecuencia, en verdadero tamaño. Para ello es necesario construir un arco de centro en A''^h y radio 25 mm (lado del hexágono) que corta a γ'^h en B''^h (recuérdese que Y'^h es el eje de giro de la segunda etapa, por lo que no cambia de posición). Una vez conocido uno de los lados del hexágono se realiza el trazado del resto de los lados del polígono (Fig. 5.16-b).

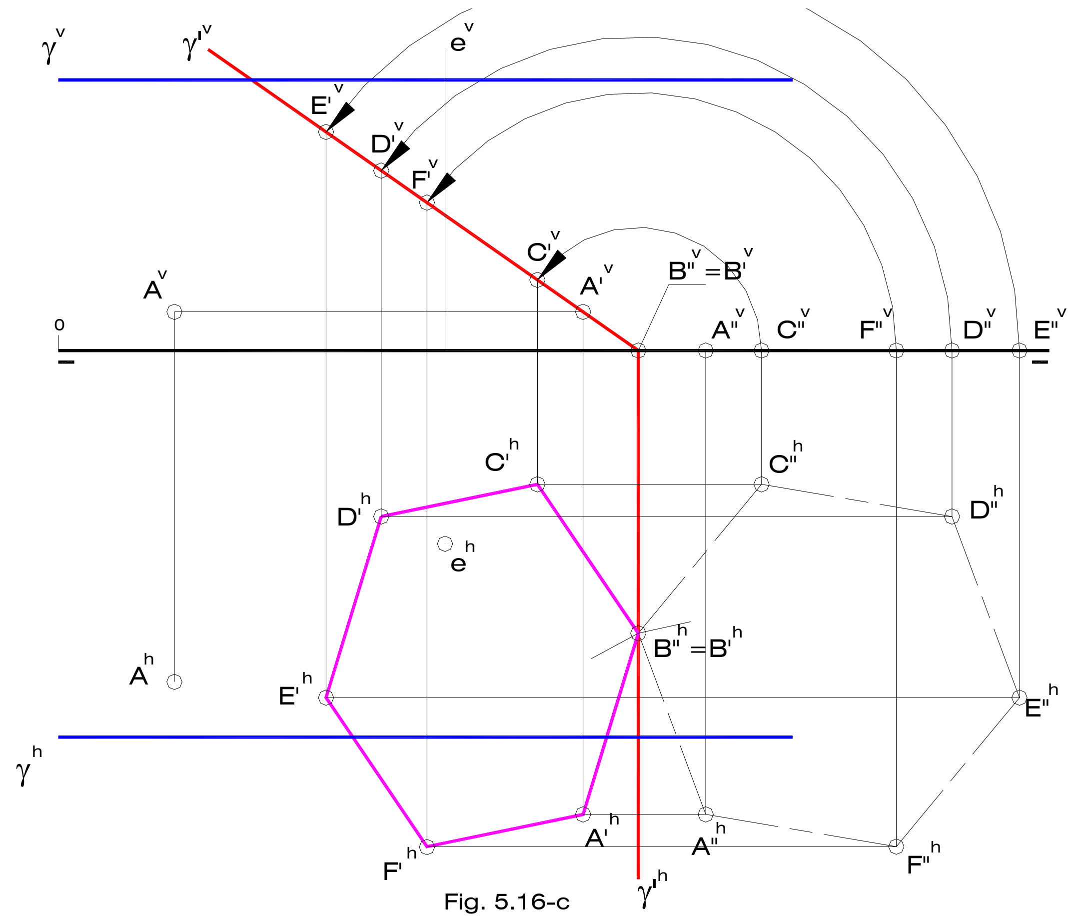

Fig. 5.16-c

Siguiendo un procedimiento inverso con respecto al empleado para obtener el punto A'', se obtiene la doble proyección ortogonal de los puntos B', C', D', E' y E': las proyecciones verticales sobre la traza vertical del plano γ' y las proyecciones horizontales formando un hexágono irregular (Fig. 5.16-c). Para encontrar las proyecciones horizontales de los vértices del hexágono pedido se construyen cuartos de circunferencia de centro en la proyección horizontal del primer eje de giro "e" y de radios $e^hB'^h$, $e^hC'^h$, $e^hD'^h$, $e^hE'^h$ y $e^hF'^h$. Luego, en los cortes entre las referencias perpendiculares a LT correspondientes a B, C, D, E y F y unas paralelas a LT trazadas por las proyecciones verticales de los puntos B', C', D', E' y F', respectivamente, se obtienen las proyecciones verticales de aquellos puntos, con lo cual se completa la doble proyección ortogonal del hexágono ABCDEF, contenido en el plano paralelo a la línea de tierra γ.

Resulta evidente que la aplicación del giro a la determinación del verdadero tamaño de una figura plana, contenida en planos en posición accidental y paralelos a la línea de tierra, conlleva a un procedimiento sustancialmente más largo y engorroso que el que debe seguirse si se aplicara abatimiento. Por este motivo no se hace mayor énfasis en el estudio y en la ejecución de problemas empleando este método, en la mayor parte de los cursos formales de Sistemas de Representación dictados en la Universidad de Los Andes.

Lo más conveniente es dejar en manos del estudiante la decisión de cuál método indirecto emplear, previo el razonamiento y evaluación de las características que presenta un ejercicio en particular.

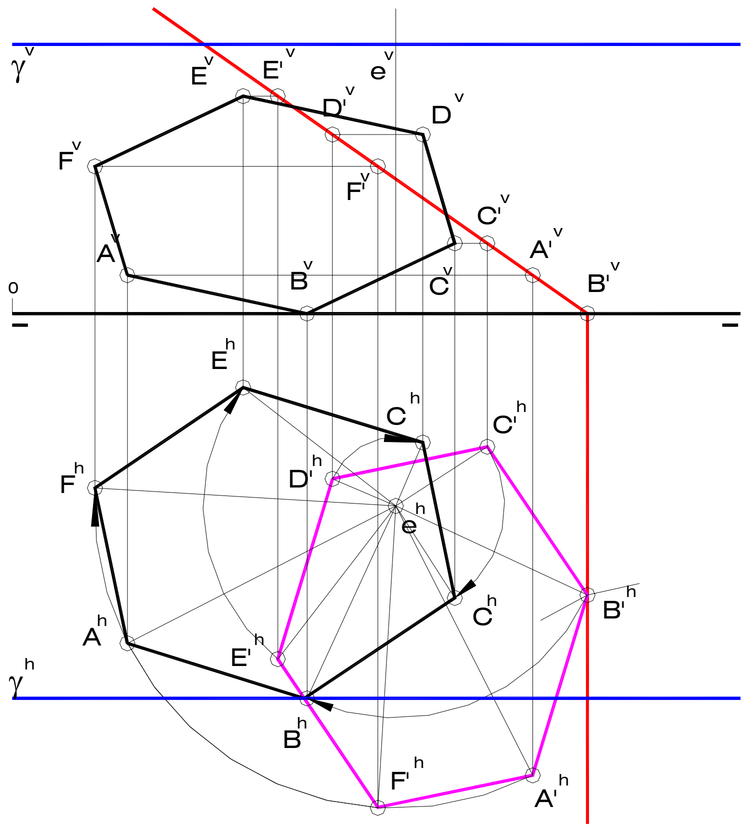

Fig. 5.16-d

5.3 Ejercicios resueltos de Relaciones Geométricas

1) Construya la doble proyección ortogonal de los siguientes elementos geométricos:

- Una recta "m" paralela a los planos δ y γ que pase por el punto A.
- Un plano π perpendicular a los planos δ y γ y que pase por el punto A.
- La recta de intersección entre los planos δ y π.
- La recta de intersección entre los planos γ y π.

$$\delta\begin{Bmatrix}1(35,25,00)\\2(25,00,30)\\3(60,00,00)\end{Bmatrix}\ \gamma\begin{Bmatrix}4(10,20,00)\\5(55,00,40)\\6(30,00,00)\end{Bmatrix}\ A(40,20,25)$$

Solución (Fig. 5.17)

Los puntos que definen al plano δ permiten la construcción directa de sus trazas, puesto que uno de ellos (el punto 1) se encuentra sobre el plano horizontal, otro (el punto 2) se sitúa sobre el plano vertical y el tercero (el punto 3) pertenece a la línea de tierra. La misma situación se presenta con el plano γ.

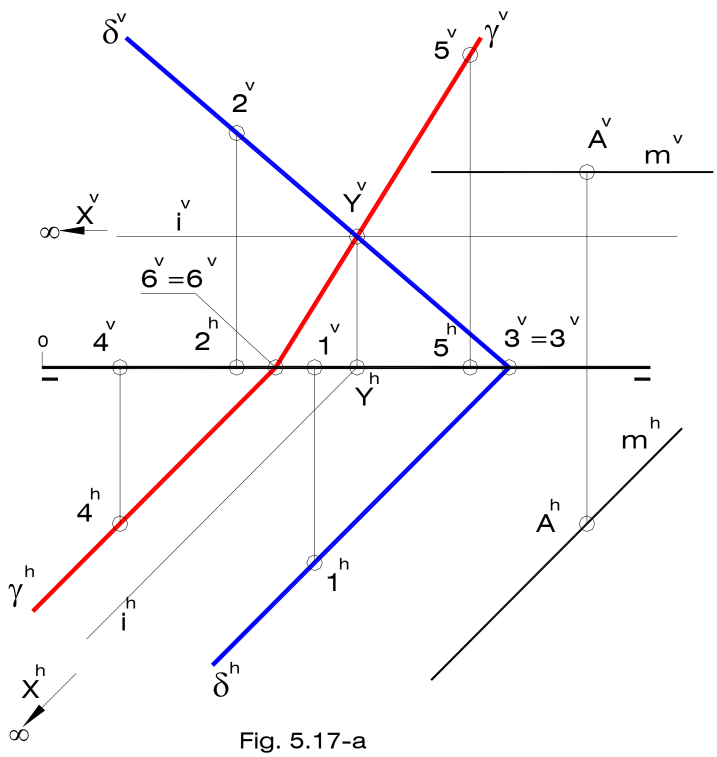

Fig. 5.17-a

Dado que la recta "m" es paralela a ambos planos δ y γ, debe ser paralela a la recta de intersección de estos planos, recta ésta que se define por los puntos X y Y, comunes a las trazas homónimas de δ y γ. Como las trazas horizontales de ambos planos son paralelas entre sí el punto X es impropio (se encuentra en el infinito), lo cual implica que la recta de intersección "i" entre los planos δ y γ es una recta horizontal, paralela también a las trazas horizontales de estos planos.

Así pues, las proyecciones diédricas de la recta “m” serán paralelas a las proyecciones homónimas de la recta “i” y pasarán por las proyecciones homónimas del punto A (Fig. 5.17-a).

Siendo “m” una recta horizontal, el plano π debe tener una posición proyectante horizontal, pues en el enunciado se especifica que π es perpendicular a la recta “m”. Por tal motivo, la traza horizontal de este plano pasa por A^h y forma 90° con m^h; luego, la traza vertical se dibuja por el punto de corte entre π^h y la línea de tierra, en forma perpendicular a ésta.

Para encontrar las rectas de intersección entre el plano π y los planos δ y γ, es decir, las rectas i_1 e i_2, respectivamente, bastará con encontrar los puntos comunes a las trazas homónimas. Así, el punto Q, común a las trazas horizontales de π y δ y P, punto de corte entre las trazas verticales de esos mismos planos, definen la recta de intersección i_1. De manera análoga, los puntos S (corte entre las trazas horizontales de π y γ) y R (punto común a las trazas horizontales de π y γ) determinan la recta de intersección i_2 (Fig. 5.17-b).

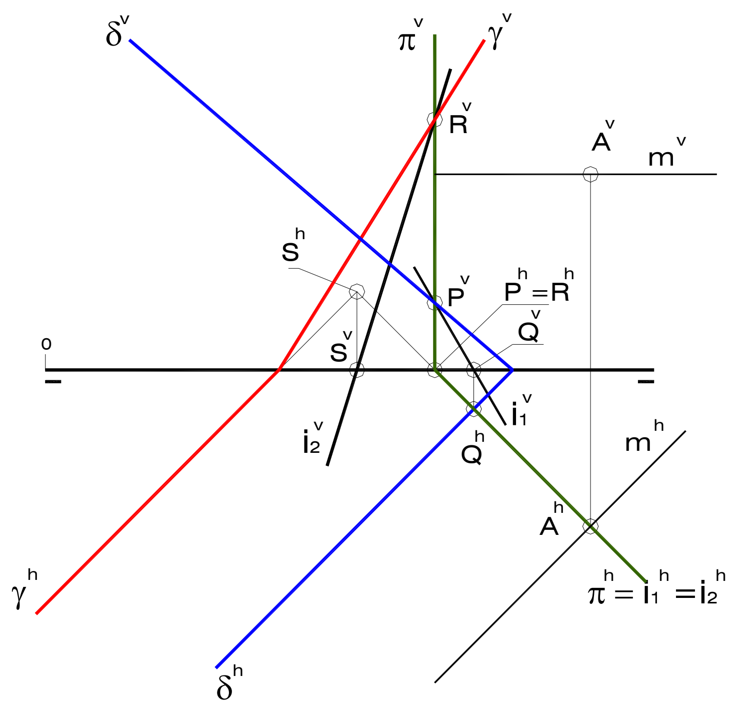

Fig. 5.17-b

2) Determine las proyecciones diédricas de la recta de intersección producida entre los planos δ y γ, sabiendo que es paralela al plano horizontal. Analice e indique la visibilidad.

$$\delta\begin{cases} A(10,25,15) \\ B(32,50,50) \\ C(50,30,35) \end{cases} \qquad \gamma\begin{cases} P(08,??,35) \\ Q(25,15,45) \\ R(45,30,35) \end{cases}$$

Solución (Fig. 5.18)

En los datos del ejercicio puede observarse cómo el plano γ no está determinado, pues únicamente se conocen las proyecciones diédricas de dos de los puntos Q y R y la proyección vertical de P. Sin embargo, se conoce la posición de la recta de intersección – paralela al plano horizontal de proyección horizontal de proyección – lo que permite hallarla sabiendo que pertenece al plano δ, plano éste que está perfectamente definido por los puntos A y B.

Ahora bien, no se conoce ninguno de los puntos de la recta de intersección entre los planos δ y γ, pero es posible encontrar uno de ellos si se determina el punto de intersección entre la recta QR y el plano δ. Para ello se ha aplicado el método del plano proyectante, considerando la existencia de una recta "t" perteneciente a δ y cuya proyección vertical coincide con la proyección vertical de la recta definida por el segmento QR. Dicha recta "t" corta a los segmentos AB y AC en los puntos 1 y 2, respectivamente, por lo que las proyecciones horizontales de estos puntos – 1^h sobre A^hB^h y 2^h sobre A^hC^h – determinan la proyección horizontal de la recta "t"; luego, el punto de corte entre "t" y la recta definida por el segmento QR viene a ser el punto de intersección buscado (X en la figura 5.18-a).

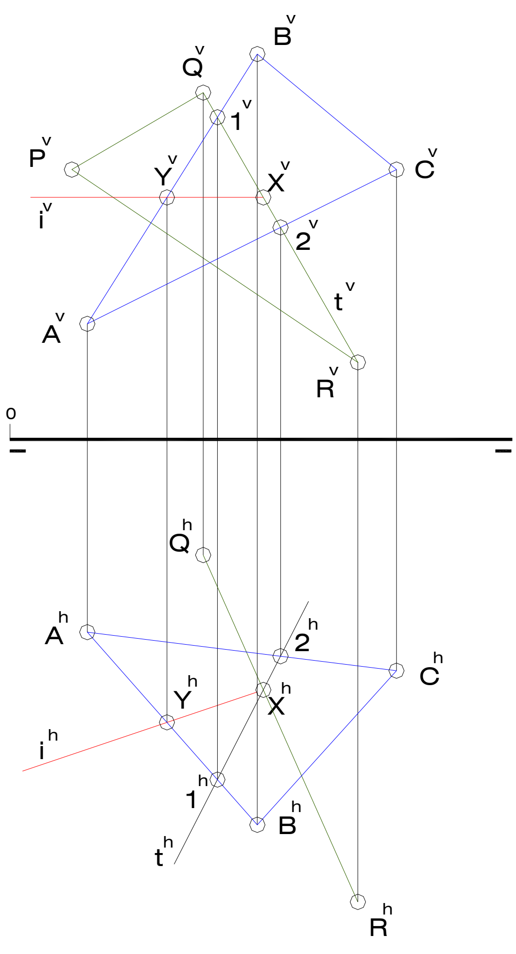

Fig. 5.18-a

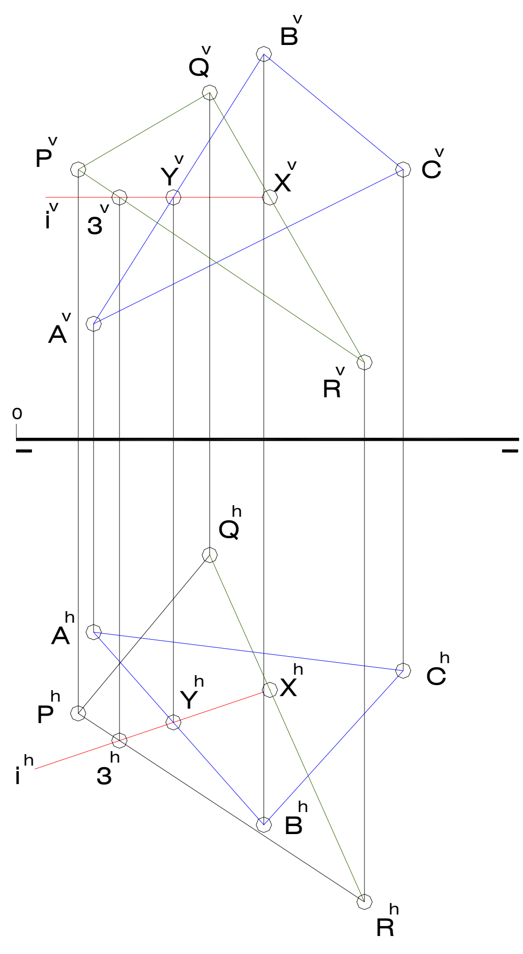

Fig. 5.18-b

Seguidamente se construye la recta de intersección "i" entre los planos δ y γ, es decir, una recta horizontal que pase por el punto X y pertenezca al plano δ, comenzando por el trazado de la proyección vertical, la cual es paralela a LT . Luego, buscando el punto de corte entre i^h y la proyección horizontal de una recta cualquiera del plano δ - punto Y en la Fig. 5.18-a – se completa la proyección vertical de "i", determinada por la proyección vertical de dicho punto y por X^v.

La recta “i” define junto a la recta QR al plano γ, por lo que es posible ahora encontrar la proyección faltante del punto P. Para ello se ubica el punto 3^v común a las proyecciones verticales de la recta “i” y del segmento PR; luego, se busca la proyección horizontal de 3 sobre la proyección horizontal de “i”, de manera que al unir R^h con 3^h se obtiene la proyección horizontal de segmento RP (Fig. 5.18-b).

Para determinar la visibilidad del conjunto en la proyección horizontal se ha tomado a los segmentos BC y QR como objetos del análisis. El corte entre las proyecciones horizontales de ambos segmentos representa a 4^h (sobre BC) y 5^h (sobre QR). En vista de que el punto 4 tiene mayor cota que 5, se concluye que el triángulo ABC se encuentra por encima del triángulo PQR del lado de i^h en el que se encuentran 4^h y 5^h; del otro lado de la proyección horizontal de “i” tal situación se invierte (Fig. 5.18-c).

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior – puntos 6 y 7 en la Fig. 5.18-c - se realiza el análisis de la visibilidad del conjunto formado por los triángulos ABC y PQR en la proyección vertical.

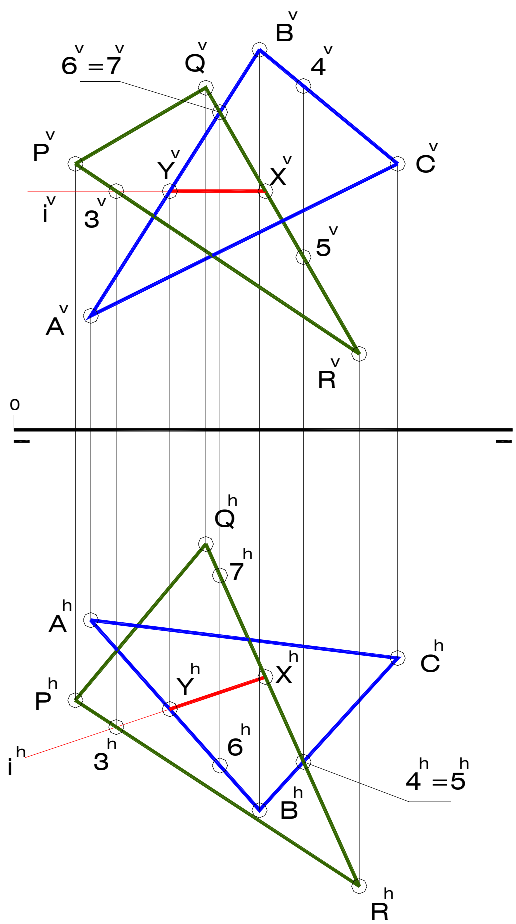

Fig. 5.18-c

3) Determine la menor distancia entre el punto A y la recta de intersección entre los planos δ y γ.

$$\delta\begin{cases}1(20,25,00)\\2(10,00,30)\\3(45,00,00)\end{cases}\gamma\begin{cases}4(80,00,30)\\5(10,15,00)\\3(45,00,00)\end{cases}A(30,26,25)$$

Solución (Fig. 5.19)

El primer paso en la resolución de este problema es, evidentemente, la determinación de la recta de intersección entre los planos dados. Es un hecho cierto que el punto 3 es uno de los puntos de la mencionada recta, pues constituye el origen de trazas de ambos planos. Sin embargo, no es posible encontrar de manera directa algún otro punto sobre la recta de intersección de los planos δ y γ, de manera que se hace necesario buscar otras rectas en cada plano o construir un plano paralelo a uno de los originales; ésta última operación es la que se ha llevado a cabo, como se muestra en la Fig. 5.19-a.

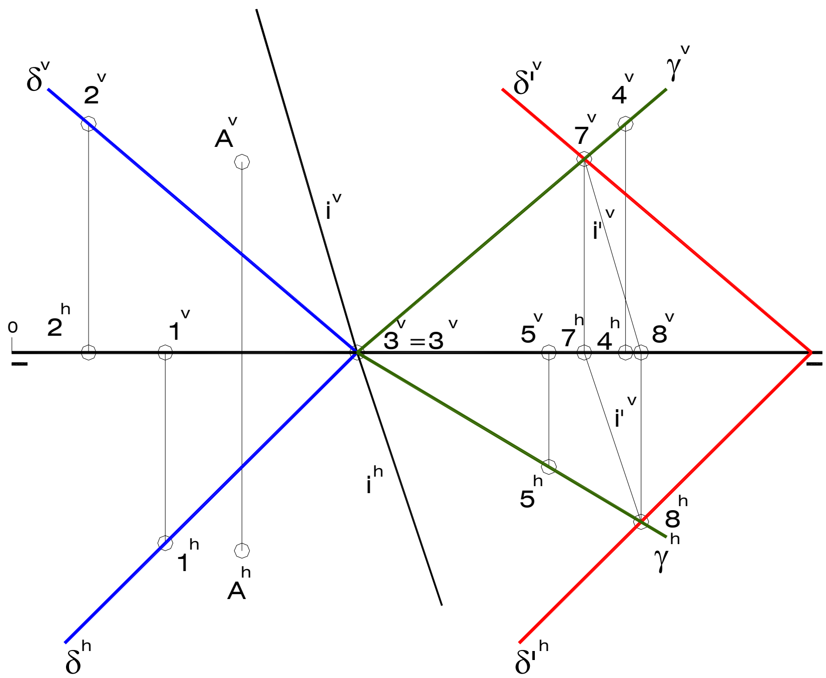

Fig. 5.19-a

La recta de intersección – definida por los puntos 7 y 8 – "i'" entre el plano γ y un plano δ', paralelo a aquél, es paralela a la recta de intersección "i" entre δ y γ, pues las rectas de intersección entre dos planos paralelos entre sí y un tercer plano son siempre paralelas.

Así pues, se construyen las proyecciones diédricas de la recta "i" paralelas a las proyecciones homónimas de "i'", pasando por las proyecciones del punto 3.

La menor distancia entre el punto A y la recta "i" se mide sobre una recta "p" perpendicular a "i" que pase por A. Para construir esta recta "p" es necesario construir un plano perpendicular a la recta "i" que pase por el punto A; este plano contiene a todas las rectas del espacio que pasan por A y forman ángulo recto con la recta "i", y se genera mediante una recta frontal "f" y una horizontal "h", ambas perpendiculares a "i".

El punto de intersección K entre la recta "i" y el plano formado por "f" y "h" es también el punto común a "i" y a la recta "p". Luego, el verdadero tamaño – determinado aplicando abatimiento – del segmento AK es la menor distancia buscada.

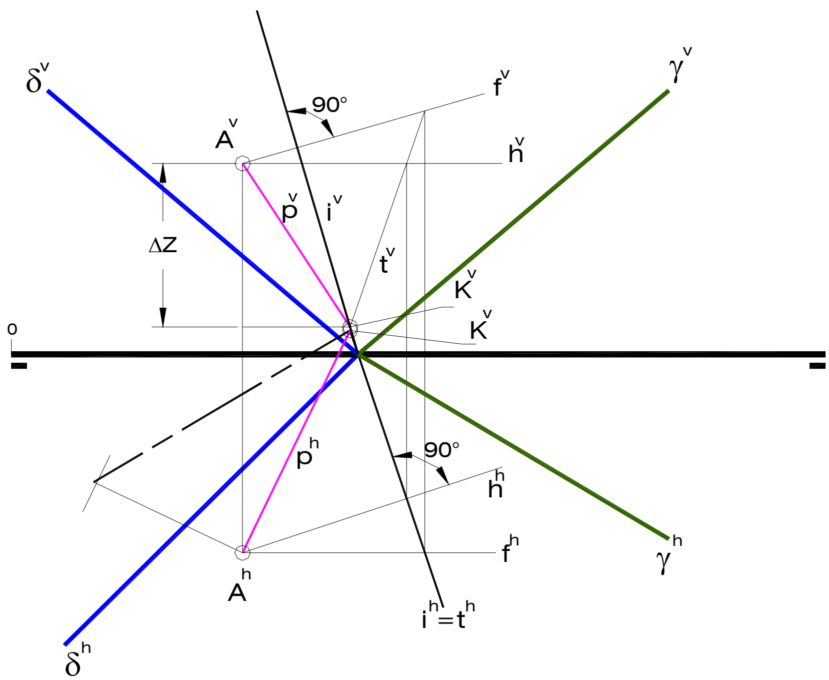

Fig. 5.19-b

4) Determine el ángulo formado entre la recta "m" y el plano δ.

$$\delta\begin{cases}1(20{,}25{,}00)\\2(10{,}00{,}30)\\3(45{,}00{,}00)\end{cases}\qquad m\{A(15{,}-05{,}35);B(40{,}26{,}35)\}$$

Solución (Fig. 5.20)

El primer paso en la resolución de este problema es la construcción de un plano π perpendicular a δ que contenga a la recta "m". Para ello se construye por cualquier punto de esta recta – B en la Fig. 5.20-a - una recta "p" perpendicular al plano δ, recta ésta que define junto a la reta "m" al nuevo plano π.

El ángulo ϕ formado entre "m" y δ es igual al que se forma entre la recta "m" y la recta de intersección entre los planos δ y π. Para hallar esta recta bastará con encontrar los puntos de intersección entre las rectas "p" y "m" y el plano δ, I y K respectivamente, lo cual se ha realizado aplicando el método del plano proyectante (Fig. 5.20-a y 5.20-b).

Dado que el plano π resulta ser oblicuo con respecto a ambos planos de proyección, resulta imprescindible construir una nueva proyección para obtener el ángulo ϕ en verdadera magnitud. Como la recta "m" es una recta en posición horizontal es posible tomarla como eje de abatimiento, en torno a la cual gira el punto I para producir la proyección I^R. Luego, en vista de que K se halla sobre el eje de abatimiento, K^R coincide con K^h, por lo que el verdadero tamaño de ϕ es el ángulo formado entre el segmento K^RI^R y m^R, ésta última proyección coincidente con m^h (Fig. 5.20-c).

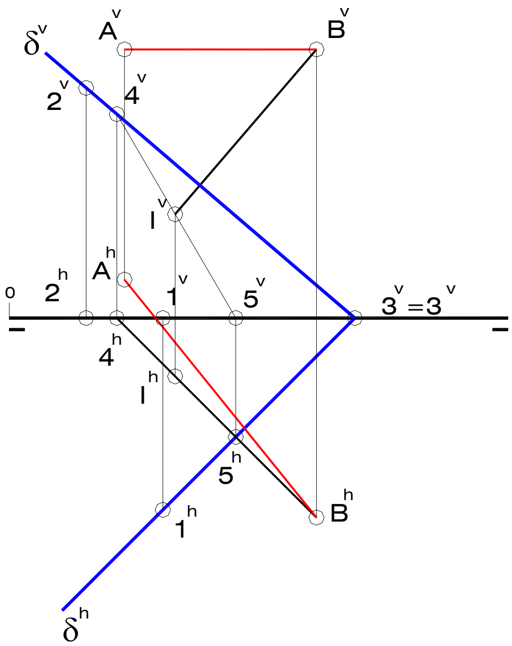

Fig. 5.20-a

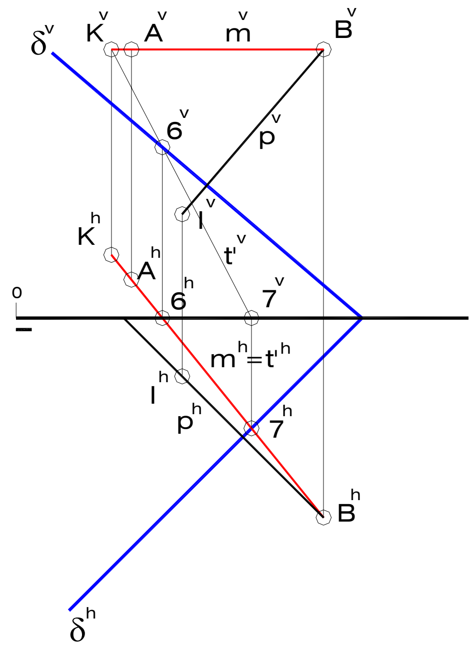

Fig. 5.20-b

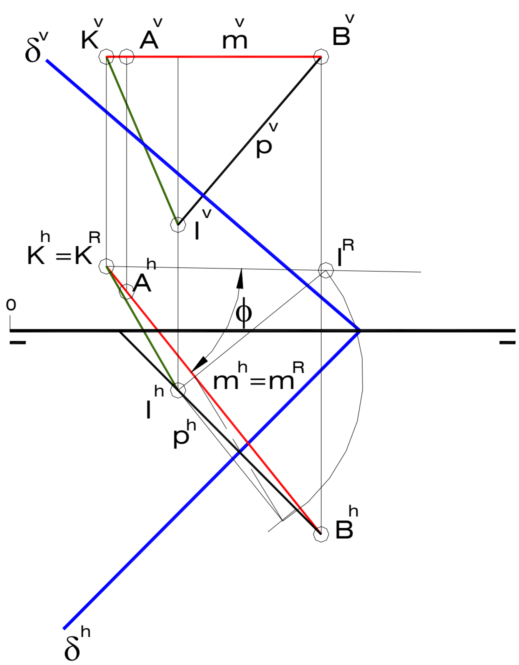

Fig. 5.20-c

5) Determine la doble proyección ortogonal de la recta perpendicular común a las rectas “a” y “b”. Aplique el primer método.

$$a\{A(19,32,51);B(52,05,30)\}$$

$$b\{C(15,-05,31);B(45,22,12)\}$$

Solución (Fig. 5.21)

La aplicación del primer método - expuesto en el Capítulo III – para encontrar la perpendicular común a dos rectas, consiste en la construcción de un plano δ paralelo a una de dichas rectas y que contenga a la otra. Para ello se dibujan las proyecciones de una recta "c", que pase por un punto cualquiera X de la recta escogida ("b" en la Fig. 5.21-a), paralelas a las proyecciones homónimas de la otra recta ("a"); el plano determinado por "b" y "c" es el plano δ. En vista de que las proyecciones verticales de las rectas "b" y "c" se confunden, se deduce que el plano por ellas formado es proyectante vertical.

A continuación se selecciona un punto cualquiera de la recta "a" – recta que no pertenece al plano δ - y se construye por ese punto una recta una recta "m" perpendicular a la plano δ, recta ésta que resulta ser frontal en el ejercicio, dado que, como ya se ha indicado, el plano δ es proyectante vertical. Dicha recta "m" posee la dirección de la perpendicular común a las rectas "a" y "b". Seguidamente, se procede a determinar el punto de intersección I entre la recta "m" y el plano δ (Fig. 5.21-b).

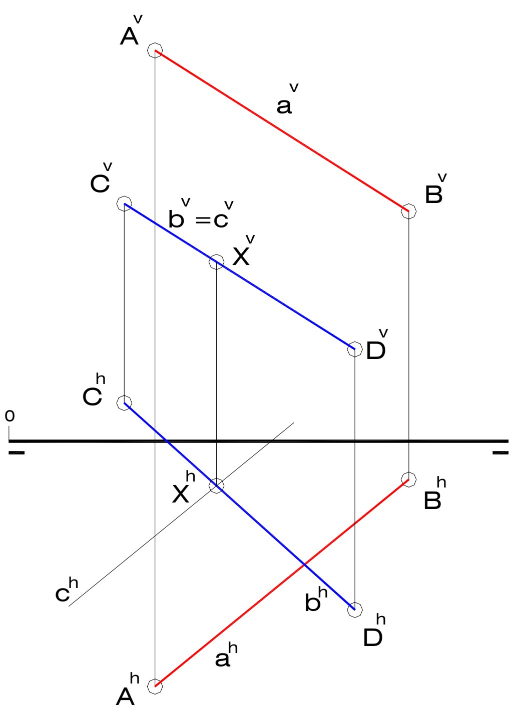

Fig. 5.21-a

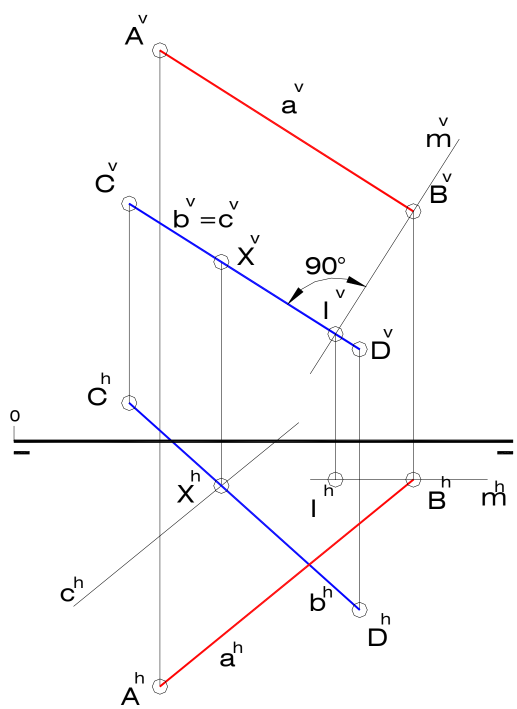

Fig. 5.21-b

A continuación se construye una recta "d" que sea paralela a la recta "a" y pase por el punto de intersección I entre la recta "m" y el plano δ. Dicha recta "d" corta a la recta "b" en el punto R, por el cual pasa la perpendicular común "p" paralela a la recta "m".

El punto Q, común a las rectas "p" y "a", define, junto con el punto R al segmento de la perpendicular común cuya longitud es igual a la menor distancia que hay entre las rectas "a" y "b". Siendo la recta "p" una recta frontal en el ejercicio, el verdadero tamaño de esa distancia no es más que la proyección vertical del segmento QR.

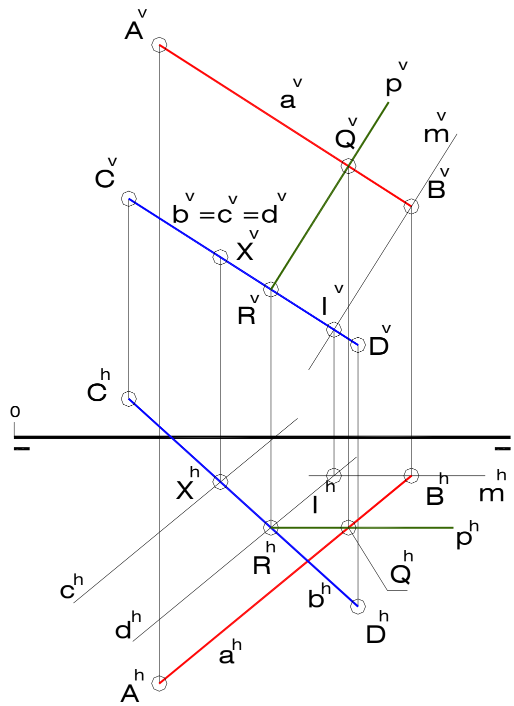

Fig. 5.21-c

6) Determine las proyecciones diédricas de un triángulo isósceles ABC, sabiendo que:

- El lado AB es paralelo al plano γ, forma 45° con PH y mide 30mm (B a la derecha de A y de menor cota y mayor vuelo que éste).
- Los lados iguales del triángulo son AC y BC.

$$\gamma \begin{cases} 1(50{,}15{,}00) \\ 2(60{,}00{,}30) \\ 3(25{,}00{,}00) \end{cases} \qquad A(10{,}15{,}40) \qquad C(45{,}20{,}??)$$

Solución (Fig. 5.22)

En primer lugar hay que determinar una recta “r” que forme 45° con PH y pertenezca al plano γ, ya que si el lado AB es paralelo a γ también lo será con respecto a una de sus rectas. En el ejemplo existen dos direcciones posibles para “r” de las cuales se toma aquélla que sea descendente hacia atrás de izquierda a derecha, pues es la solución que permite obtener al punto B siguiendo la orientación del enunciado, según la cual B se encuentra a las derecha de A y de menor cota y vuelo que éste (Fig. 5.22-a).

Seguidamente, se construye una recta “m” paralela a “r” por el punto A, sobre la cual se ha de encontrar el punto B midiendo 30mm a partir de A y a su derecha. Esta operación debe ser realizada en verdadero tamaño, abatiendo previamente un segmento AP de la recta “m”, en el que P es un punto arbitrario (Fig. 5.22-b).

En vista de que los lados AC y BC del triángulo son iguales, es posible afirmar que el vértice C equidista de A y B y, en consecuencia, se encuentra sobre el plano mediador μ del segmento AB. Este plano, determinado por las rectas notables “f” y “h” en la Fig. 5.22-c, pasa por el punto medio M de dicho segmento y es perpendicular a él. Finalmente, es posible hallar las proyecciones diédricas de C partiendo de los valores de sus coordenadas y

Y, sabiendo que pertenece al mencionado plano mediador de AB; esto se ha realizado empleando la recta frontal del plano μ que pasa por el punto C.

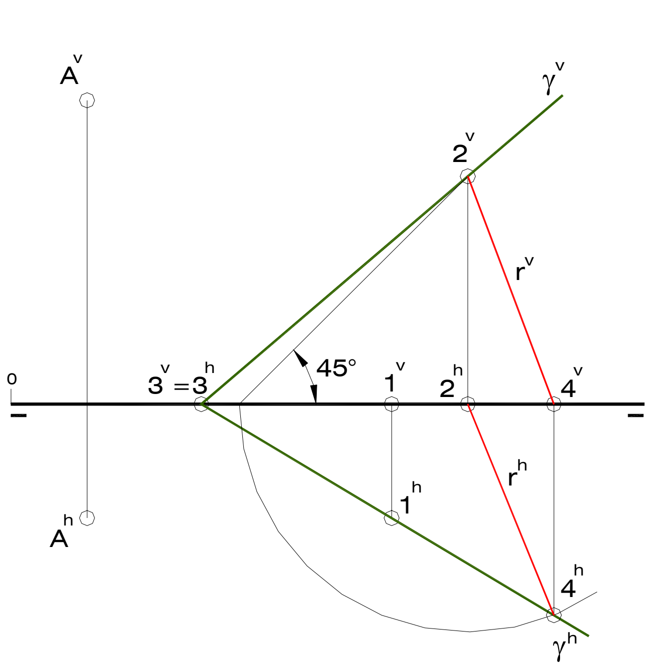

Fig. 5.22-a

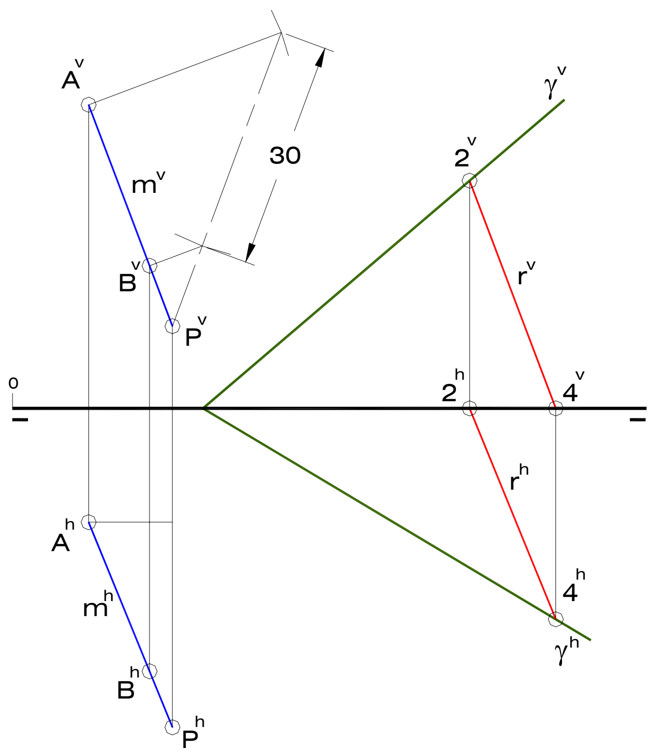

Fig. 5.22-b

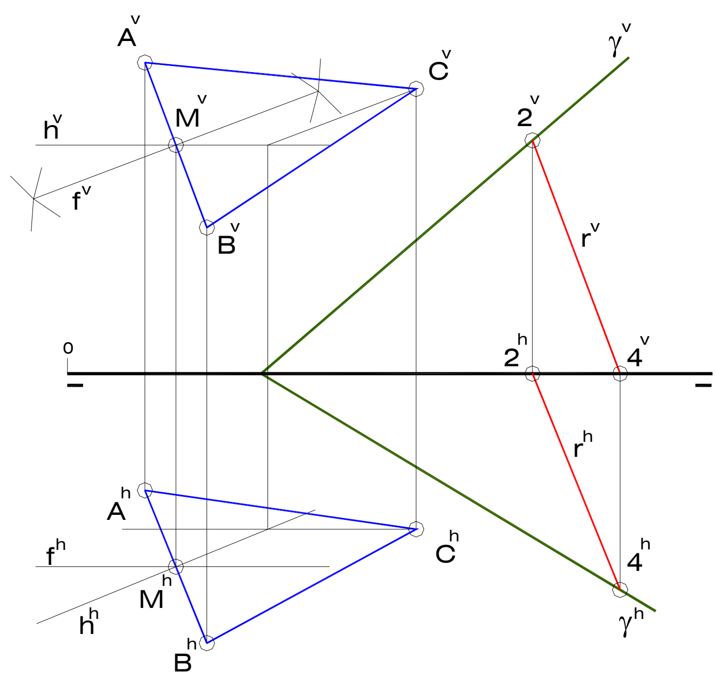

Fig. 5.22-c

5.4 Ejercicios resueltos de Poliedros

1) Determine la doble proyección ortogonal de un prisma recto de base triangular equilátera ABC contenida en el plano γ, sabiendo que la circunferencia que circunscribe a dicha base es tangente a las trazas de γ. Tome la solución de mayor radio para esta circunferencia. Analice e indique la visibilidad del poliedro.

$$\gamma\begin{cases}1(35{,}20{,}00)\\2(45{,}00{,}30)\\3(10{,}00{,}00)\end{cases}\qquad A_1(05{,}45{,}55)$$

Solución (Fig. 5.23)

Dado que las aristas laterales del prisma son perpendiculares al plano que contiene a la base ABC, el vértice A se encuentra en la intersección entre una recta perpendicular al plano γ y éste último (Fig. 5.23-a).

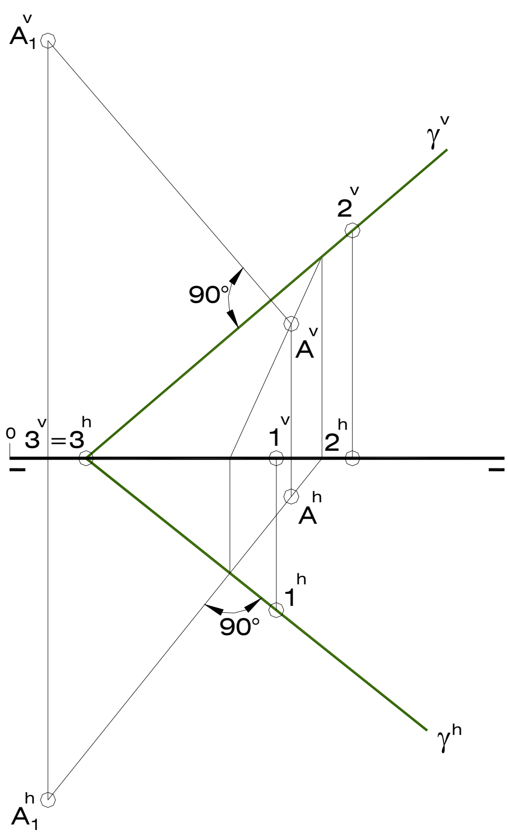

Fig. 5.23-a

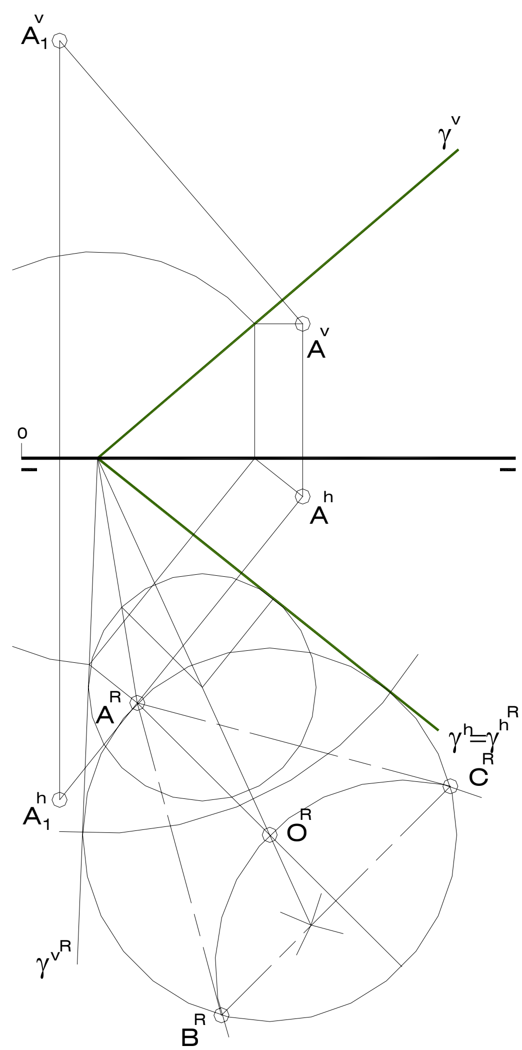

Fig. 5.23-b

Una vez conocido el punto A y abatido el plano γ sobre uno de los planos de proyección es posible realizar el trazado, en verdadero tamaño, de la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC, pues se sabe que pasa por A^R y que es tangente a las trazas abatidas del plano γ. Para ello se ha seguido el procedimiento mostrado en el numeral siete del apartado A.3.3 del Apéndice (Construir una circunferencia que es tangente a las rectas "t" y "s" y pasa por un punto A), como se puede observar en la Fig. 5.23-b.

Las proyecciones diédricas de los vértices B y C se han hallado mediante el trazado de las proyecciones de las rectas horizontales del plano γ que pasan por los puntos señalados (Fig. 5.23-c). El resto de los vértices del prisma se obtienen aplicando paralelismo entre rectas. Finalmente es necesario determinar cuáles son las aristas invisibles en ambas proyecciones: AC en proyección horizontal, ya que C es el vértice de menor cota, y AB en proyección vertical, en vista de que A es el vértice de menor vuelo (Fig. 5.23-d).

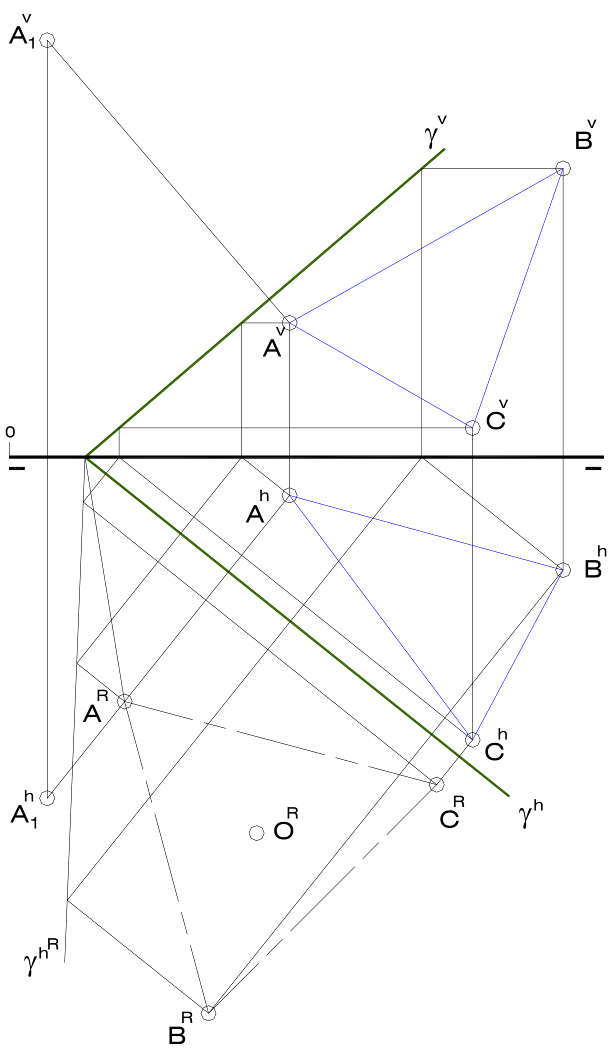

Fig. 5.23-c

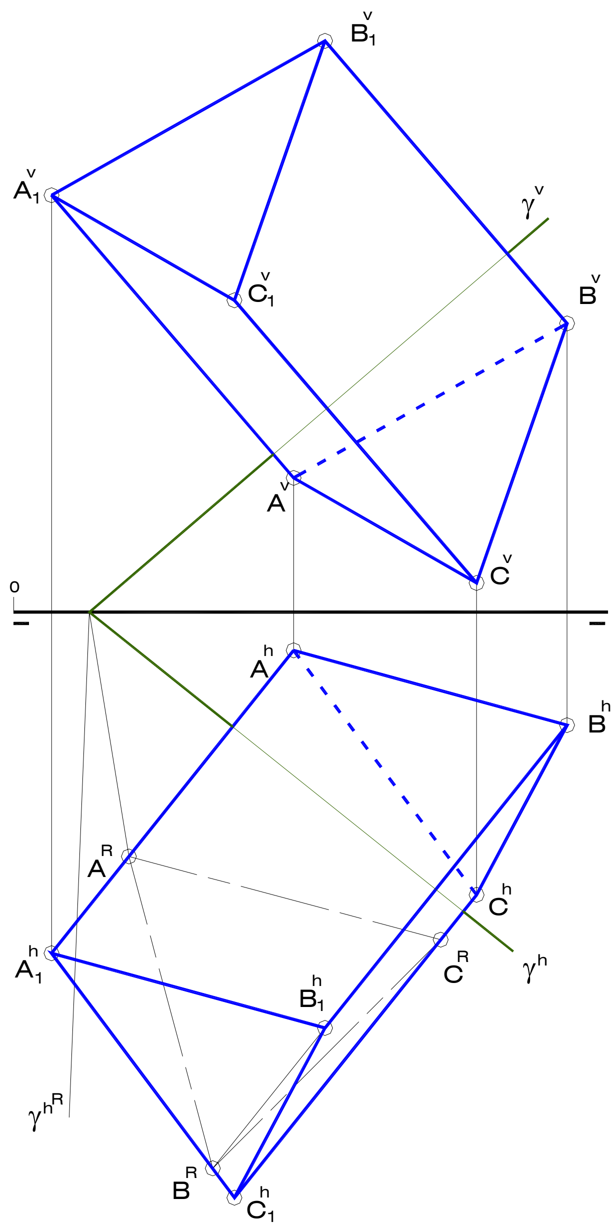

Fig. 5.23-d

2) Construya la doble proyección ortogonal de un prisma recto de base cuadrada ABCD, sabiendo que el punto X se encuentra sobre la arista C_1D_1. D de mayor vuelo que A. Analice e indique la visibilidad del sólido.

$$A(38{,}24{,}00) \quad B(13{,}40{,}20) \quad X(58{,}47{,}40)$$

Solución (Fig. 5.24)

La arista de bese superior C_1D_1, sobre la cual se encuentra el punto X, pertenece a una recta “m” paralela al segmento AB. Es posible construir el plano que contiene a la cara lateral ADA_1D_1 del prisma, ya que este plano π pasa por A y es perpendicular a AB; luego, el resultado de la intersección entre la recta “m” y el plano π es el vértice de base superior D_1, tal y como se muestra en la Fig. 5.24-a.

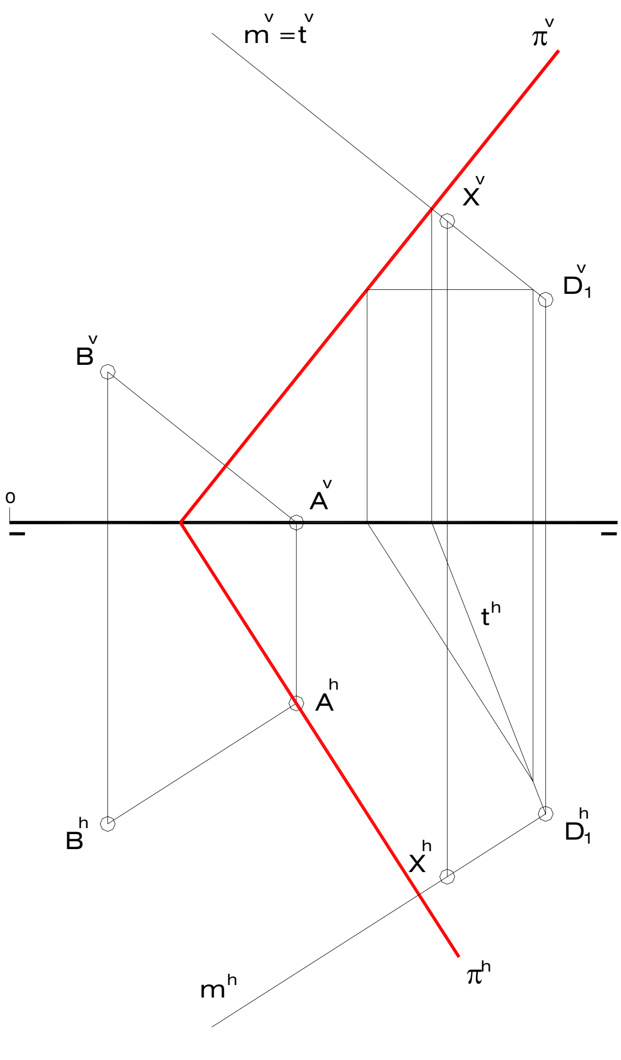

Fig. 5.24-a

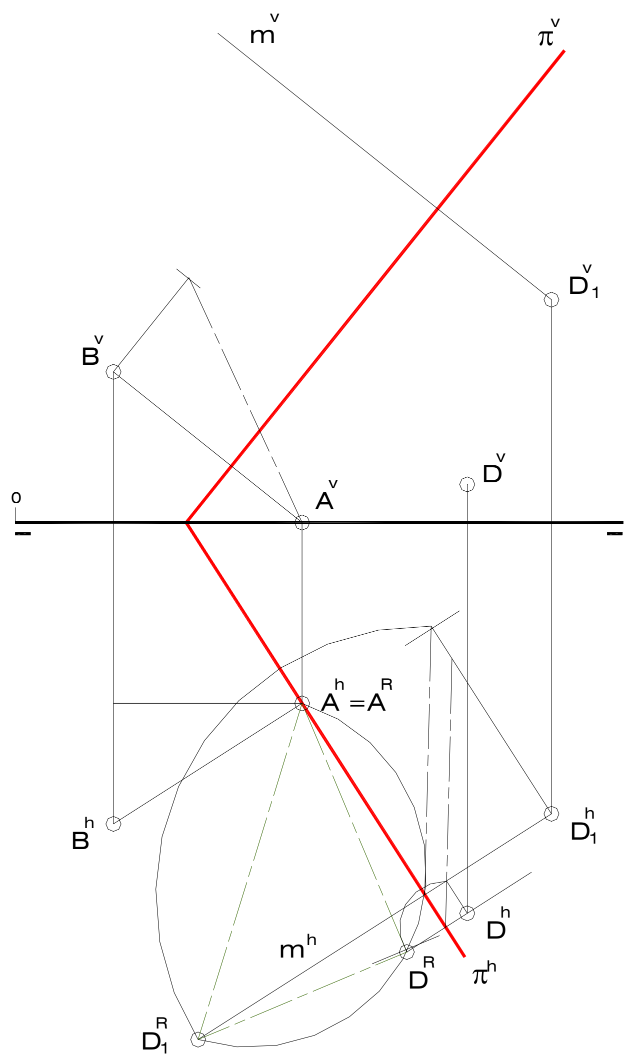

Fig. 5.24-b

Para construir la cara lateral ADA_1D_1 es necesario aplicar un método indirecto – abatimiento en el ejemplo – que permita obtener el verdadero tamaño de cualquier figura contenida en el plano π. Siendo dicha cara lateral un rectángulo, es seguro que D^R se halla sobre una semicircunferencia de diámetro igual al segmento $A^RD_1^R$, ya que esta semicircunferencia es el arco capaz de 90°. Por otra parte, la longitud de la arista AD es la misma que la de la arista AB, la cual se ha encontrado aplicando abatimiento de segmentos de recta, de manera que si se traza un arco de centro en A^R y radio igual a esta longitud se obtiene, en el corte con la semicircunferencia, a D^R. Es preciso asegurarse de obtener la solución que el enunciado indica, es decir, aquella en la que el vértice D es de mayor vuelo que A (Fig. 5.24-b).

Una vez encontrada la doble proyección ortogonal de D, se procede a hallar la de los demás vértices del poliedro aplicando paralelismo entre rectas (Fig. 5.24-c).

Finalmente, debe realizarse el análisis de visibilidad correspondiente, del cual se desprende que el vértice de menor cota es A, por lo que las proyecciones horizontales de las aristas convergentes en A se dibujan con línea de trazos, al igual que las proyecciones verticales de las aristas convergentes en A_1, por ser éste el vértice de menor vuelo (Fig. 5.24-d).

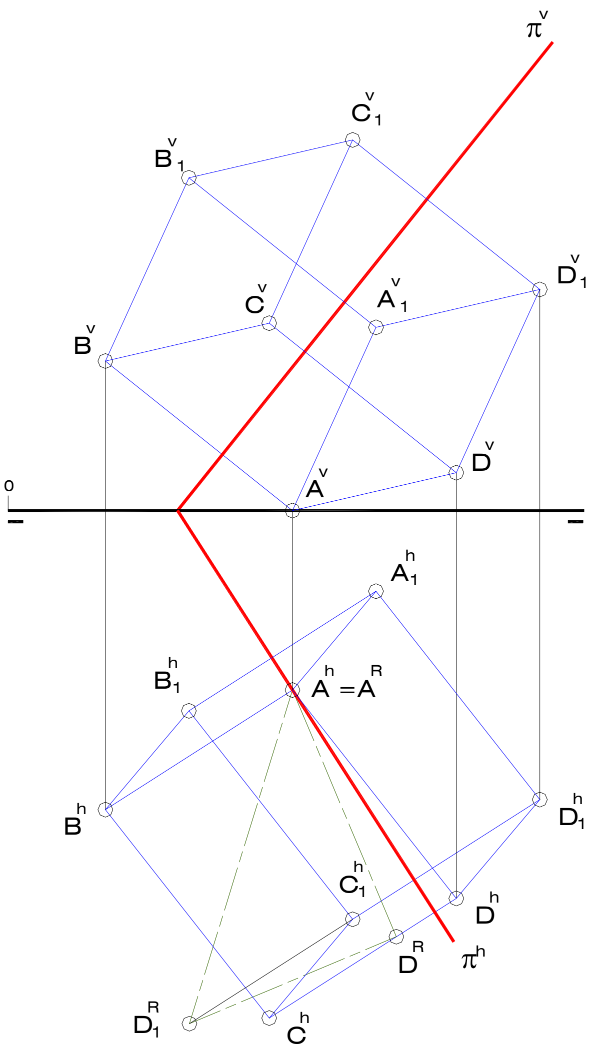

Fig. 5.24-c

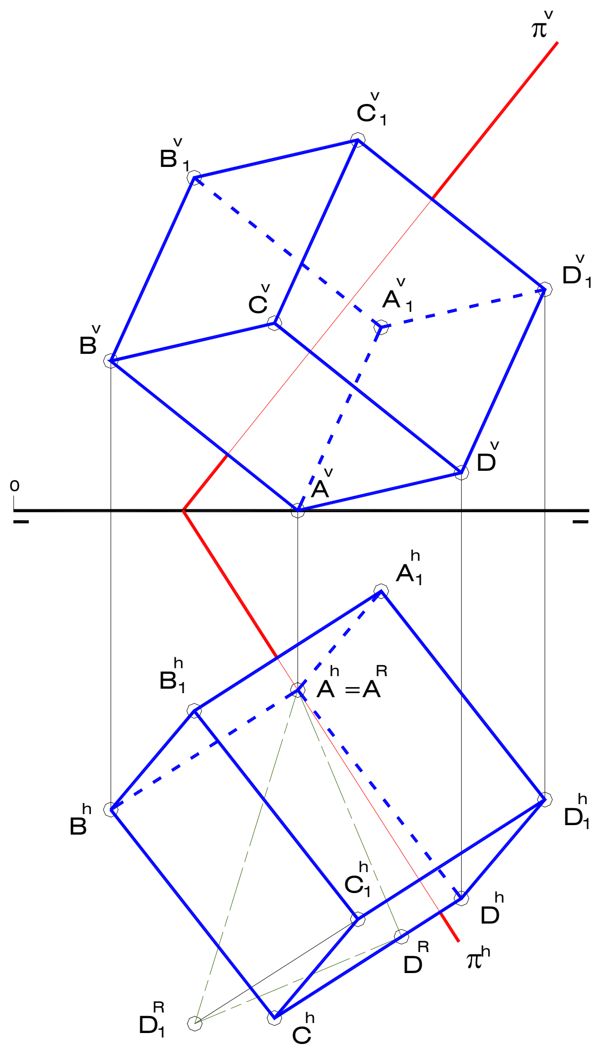

Fig. 5.24-d

3 Construya la doble proyección ortogonal de una pirámide recta de base pentagonal regular ABCDE apoyada en el plano δ, sabiendo que el punto V es el vértice principal del sólido y que el punto X se encuentra sobre la arista lateral AV. Analice e indique la visibilidad de las aristas de la pirámide.

$$\delta \begin{cases} 1(63,00,50) \\ 2(47,38,00) \\ 3(23,00,00) \end{cases} \quad X(28,30,26) \quad V(13,50,50)$$

Solución (Fig. 5.25)

Es evidente que, dada la condición de sólido recto de la pirámide, el eje OV es perpendicular al plano δ, siendo O el punto de intersección entre dicho eje y δ. Por otra parte, como X se encuentra sobre la arista AV, A resulta ser la intersección entre la recta definida por los puntos V y X y el plano δ (Fig. 5.25-a).

Los puntos O y A hacen posible la construcción del verdadero tamaño del pentágono regular ABCDE, previo el abatimiento del plano que lo contiene sobre uno de los planos de proyección, el vertical en el ejemplo (Fig. 5.25-b).

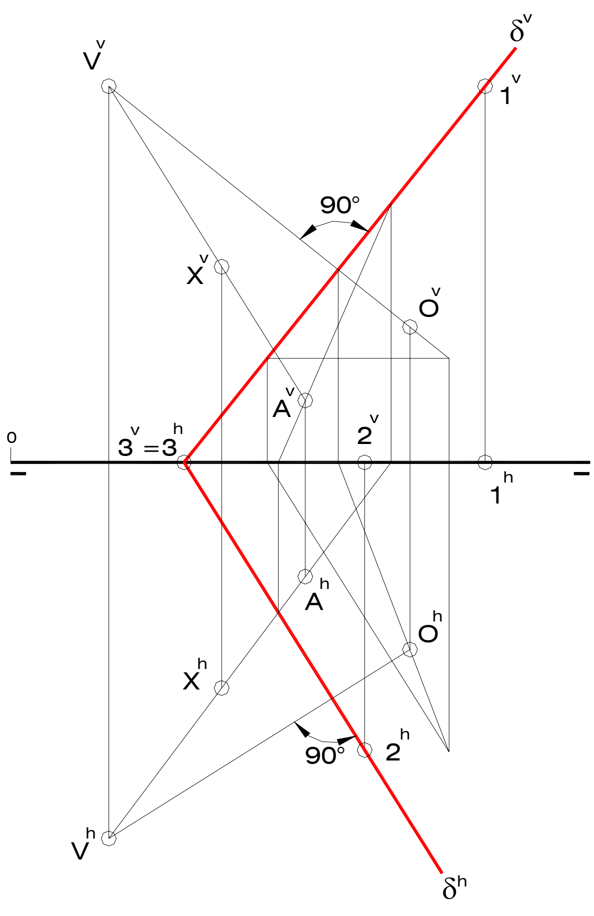

Fig. 5.25-a

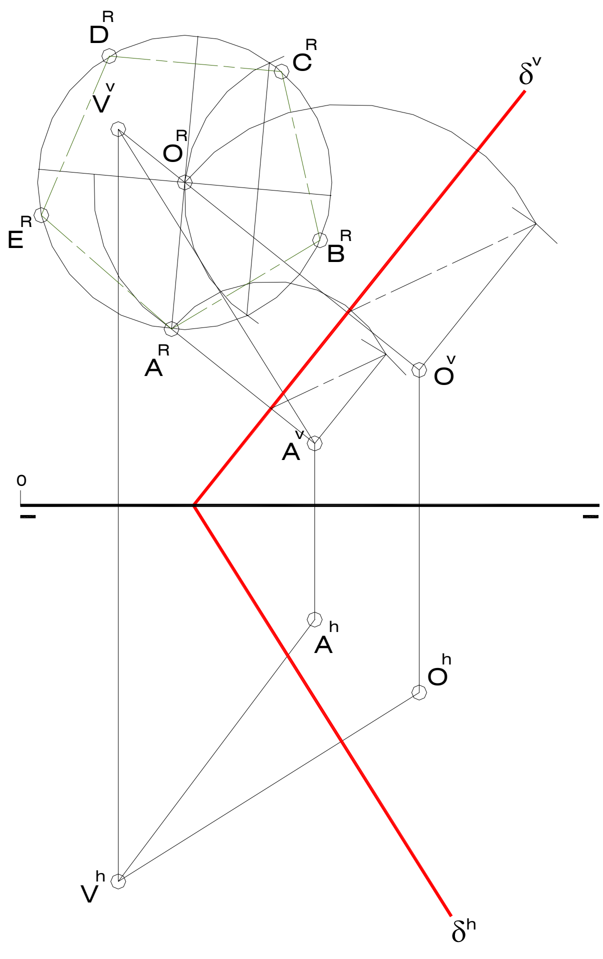

Fig. 5.25-b

Las proyecciones diédricas del polígono base de la pirámide, cuyos lados son las aristas básicas, quedan determinadas una vez que se hallan las proyecciones de los vértices B, C, D y E, lo cual se ha realizado siguiendo un procedimiento análogo al empleado para abatir los puntos A y O, pero en sentido inverso, tal y como se muestra en la Fig. 5.25-c.

Las aristas laterales del poliedro son los segmentos definidos por V y cada uno de los vértices básicos, con lo cual se completan los elementos constitutivos del sólido, quedando como último paso el análisis de visibilidad de las aristas. Siendo B el vértice de menor vuelo, las aristas que en él convergen son invisibles en proyección vertical; lo propio ocurre en la proyección horizontal con las aristas convergentes en el vértice E, ya que éste es el de menor cota (Fig. 5.25-d).

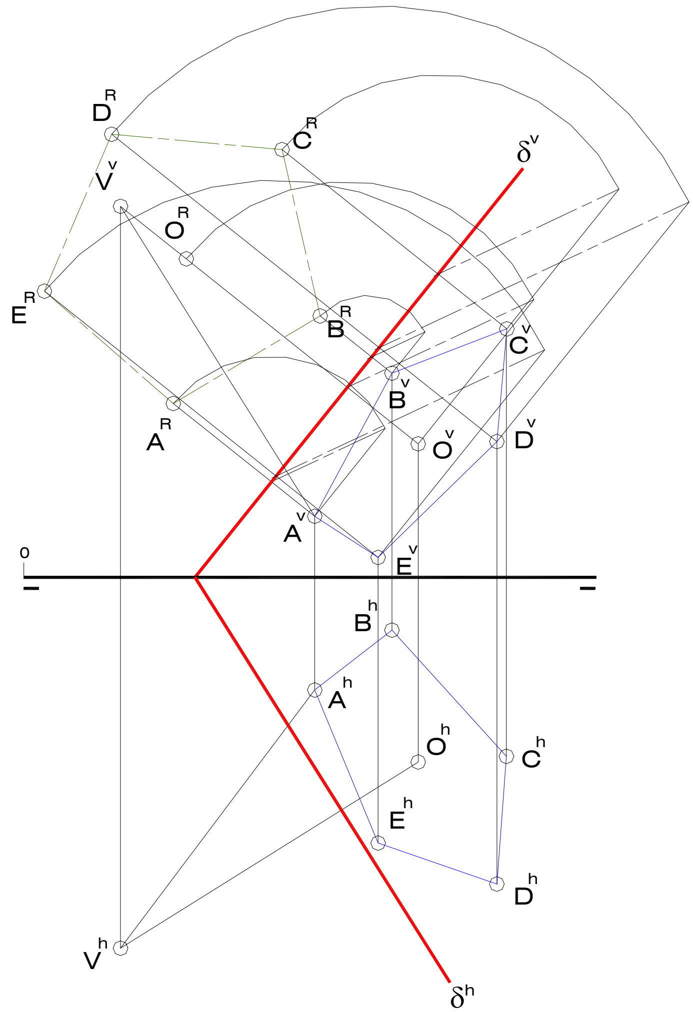

Fig. 5.25-c

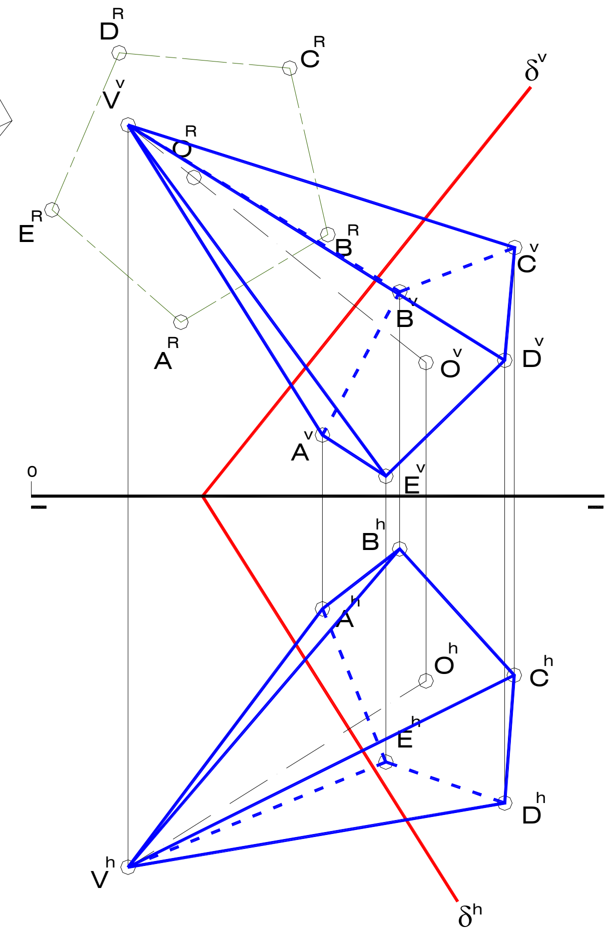

Fig. 5.25-d

4) Construya la doble proyección ortogonal de una pirámide recta de base hexagonal regular ABCDEF contenida en un plano δ que forma 45° con el plano horizontal de proyección (origen de trazas a la derecha). La altura del sólido es de 45mm. Analice e indique la visibilidad del poliedro

$$A(25,07,25) \quad D(40,28,05)$$

Solución (Fig. 5.26)

El plano δ que contiene al hexágono ABCDEF pasa por la recta definida por el segmento AD (diagonal del hexágono) y forma un ángulo de 45° con PH, por lo que debe ser tangente a un cono de vértice en un punto cualquiera de la recta definida por AD – A en el ejemplo – y de base sobre PH, cuyas generatrices forman un ángulo de 45° con éste plano. En consecuencia, la traza horizontal de δ debe pasar por el punto de traza horizontal de la recta definida por AD y ser tangente a la circunferencia base del mencionado cono. De las dos posibles soluciones se ha tomado la que produce el origen de trazas a la derecha (Fig. 5.26-a).

Si se conoce la diagonal AD del hexágono es posible encontrar el resto de sus vértices. Para hacerlo se ha abatido el plano δ y se ha trazado el hexágono $A^R B^R C^R D^R E^R F^R$, verdadero tamaño del hexágono buscado (Fig. 5.26-b). Casualmente resulta que los lados CD y FA, así como también la diagonal BE, son horizontales, lo cual facilita en gran medida la obtención de las proyecciones del polígono.

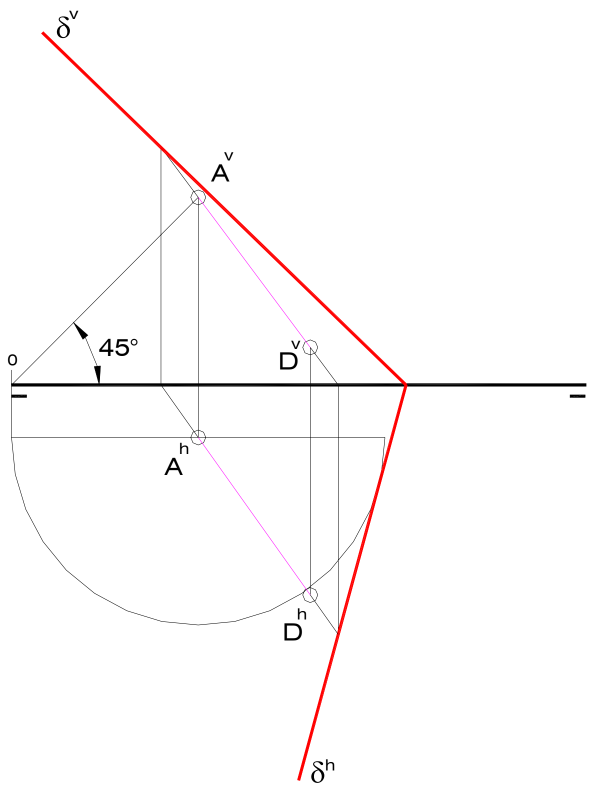

Fig. 5.26-a

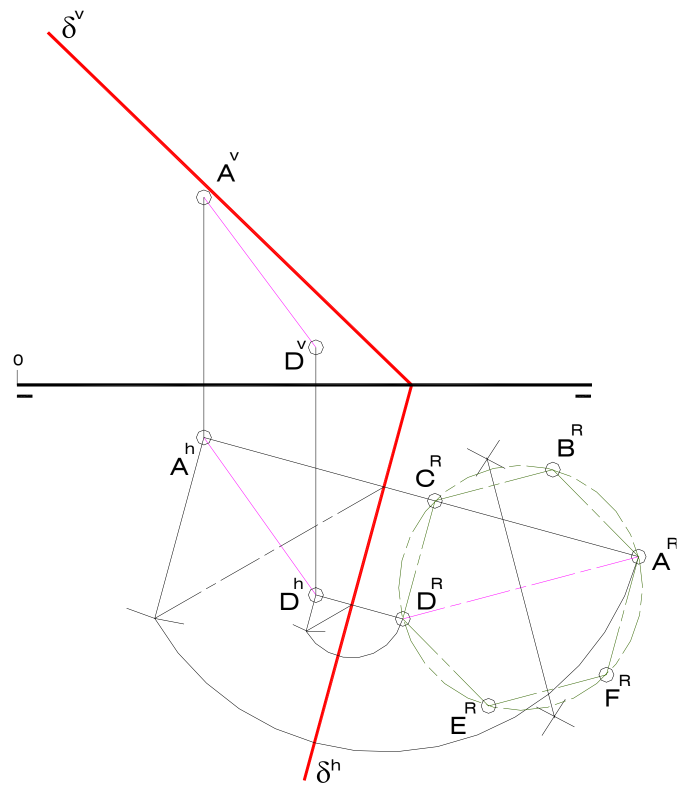

Fig. 5.26-b

Una vez hallada la doble proyección ortogonal de los vértices básicos B, C, E y F y del centro de la base (punto medio de la diagonal AD), es preciso encontrar las proyecciones del vértice principal V de la pirámide. Para ello se construye una recta “e” perpendicular al plano δ y que pase por el punto O, recta ésta que constituye el eje del sólido y sobre la cual se va a encontrar V.

Resulta evidente que la recta “e” es oblicua con respecto a ambos planos de proyección, por lo tanto, si se quiere medir sobre ella el valor de la altura de la pirámide (45mm), se debe aplicar uno de los métodos estudiados – abatimiento de segmentos de recta en el ejemplo – determinando en primer lugar el verdadero tamaño de un segmento comprendido entre O y otro punto cualquiera X de la recta “e”. Luego, se consigna la longitud de 45mm sobre dicho verdadero tamaño a partir de O y se obtiene el punto V buscado (Fig. 5.26-c).

Por último, es necesario realizar el análisis de la visibilidad de las aristas del sólido; de él se desprende que las aristas BC, CE, DE, CV y DV son invisibles en proyección horizontal, ya que C y D son los vértices de menor cota; de manera análoga, dado que A y B son los vértices de menor vuelo, las aristas que convergen en ellos son invisibles en proyección vertical, a excepción de aquellas que forman parte de la línea de contorno aparente correspondiente (Fig. 5.26-d),

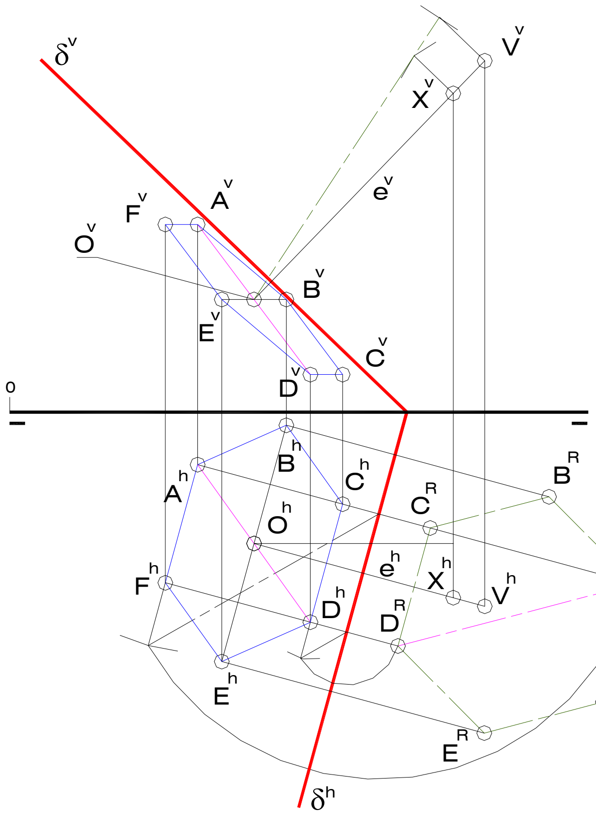

Fig. 5.26-c

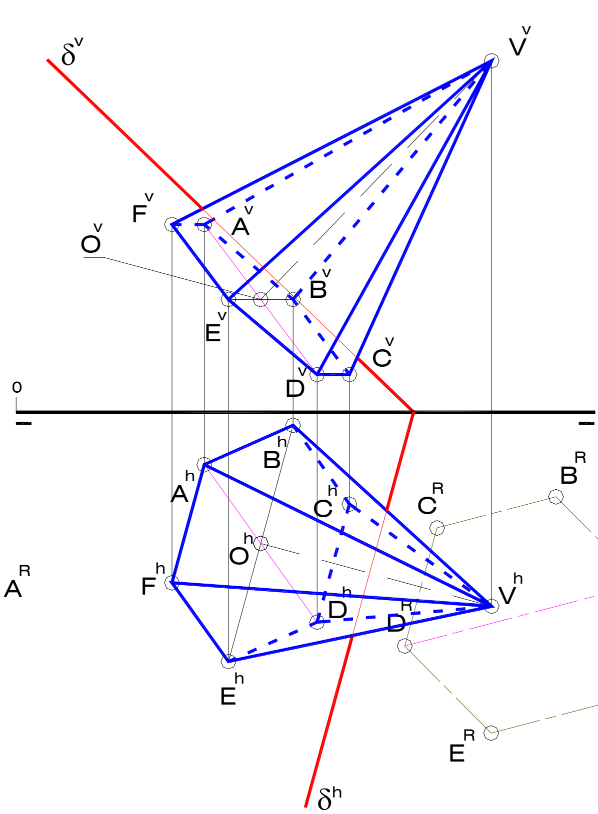

Fig. 5.26-d

5) Construya la doble proyección ortogonal de un tetraedro ABCD, sabiendo que sobre la recta “m” se encuentra la altura O_1D del poliedro, siendo O_1 el centro de la cara ABC y D más alto que éste último. La arista AB forma 45° con la traza vertical del plano que contiene a la cara ABC (B a la derecha y de mayor cota que A). La altura del sólido es de 30mm. Analice e indique la visibilidad del poliedro.

$$m[O_1(30,21,20),1(30,40,51)]$$

Solución (Fig. 5.27)

El primer paso que se ha dado en la resolución de este problema es la determinación del vértice D del tetraedro, consignando sobre la recta “m” la longitud de la altura “h” del sólido, a partir de O_1 y en sentido ascendente; esta operación se ha realizado en una proyección lateral auxiliar, dada la condición de recta de perfil que tiene la recta “m”.

Resulta conveniente destacar que el paso anterior bien podría ser realizado al final del procedimiento, una vez encontrada la doble proyección ortogonal de la cara ABC, la cual se encuentra contenida en un plano γ que pasa por el punto O_1 (centro de la cara ABC) y que es perpendicular a la recta “m”. Este plano es paralelo a la línea de tierra y se ha construido partiendo de su traza lateral (Fig. 5.27-a).

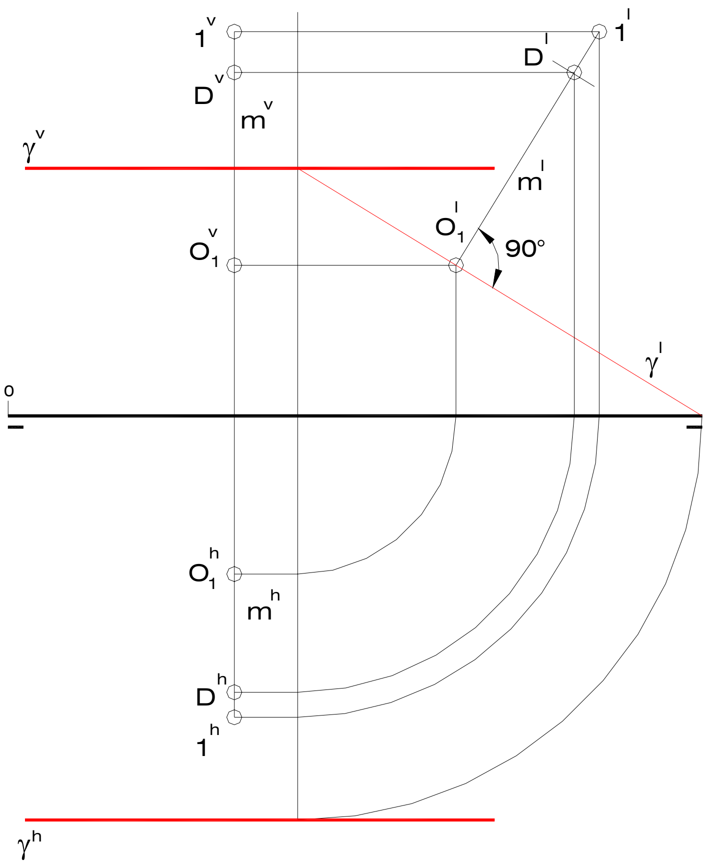

Fig. 5.27-a

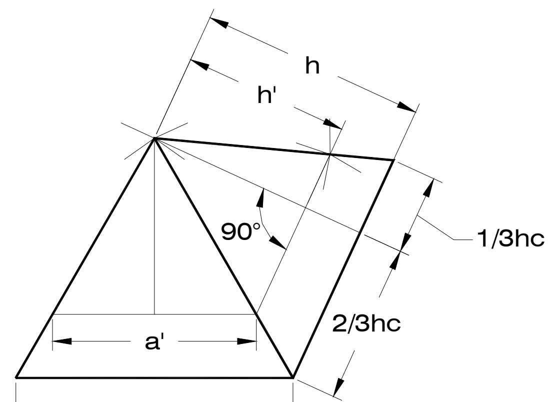

Fig. 5.27-b

En este problema, al igual que en cualquier otro problema de construcción de poliedros regulares, es preciso dibujar la sección principal del sólido con la finalidad de obtener todas las dimensiones lineales importantes. Sin embargo, la sección principal que posee las dimensiones del tetraedro cuyas dimensiones se desean hallar no puede ser trazada de manera directa, por lo que se ha dibujado una sección principal que corresponde a un tetraedro de longitud de arista arbitraria "a", consignando luego la altura "h" de 30mm y generando, mediante semejanza de figuras planas, la sección principal adecuada, tal y como se muestra en la Fig. 5.27-b.

Una vez abatido el punto O_1 se procede a dibujar el verdadero tamaño de la cara ABC, sabiendo que el radio de la circunferencia de la circunscribe es igual a dos tercios de la altura de cara del tetraedro. Es necesario recordar que el lado $A^R B^R$ forma 45° con la traza vertical abatida, con B^R a la derecha y más cerca del eje de abatimiento (B de mayor cota que A), por lo que debe ser perpendicular al diámetro de la circunferencia que pasa por C, el cual forma 45° con γ^{vR}. Seguidamente, se procede a buscar las proyecciones diédricas de los vértices A, B y C siguiendo un procedimiento inverso al empleado para abatir a O_1 (Fig. 5.27-c).

Finalmente, debe realizarse el acostumbrado análisis de visibilidad mediante la comparación de la cota y el vuelo de los vértices del poliedro. Es fácil notar que el vértice de menor vuelo es el punto C, de manera que la proyección vertical de la arista BC debe ser dibujada con línea de trazos, pues dicha arista es invisible en esa proyección. Lo propio ocurre con la proyección horizontal de la arista AB, ya que A es el vértice de menor cota)Fig. 5.27-d).

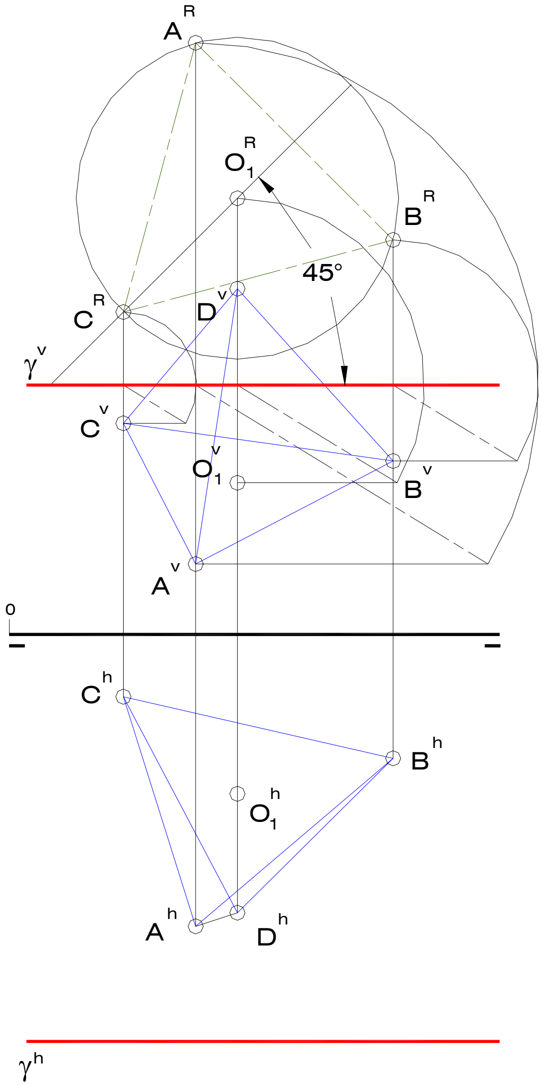

Fig. 5.27-c

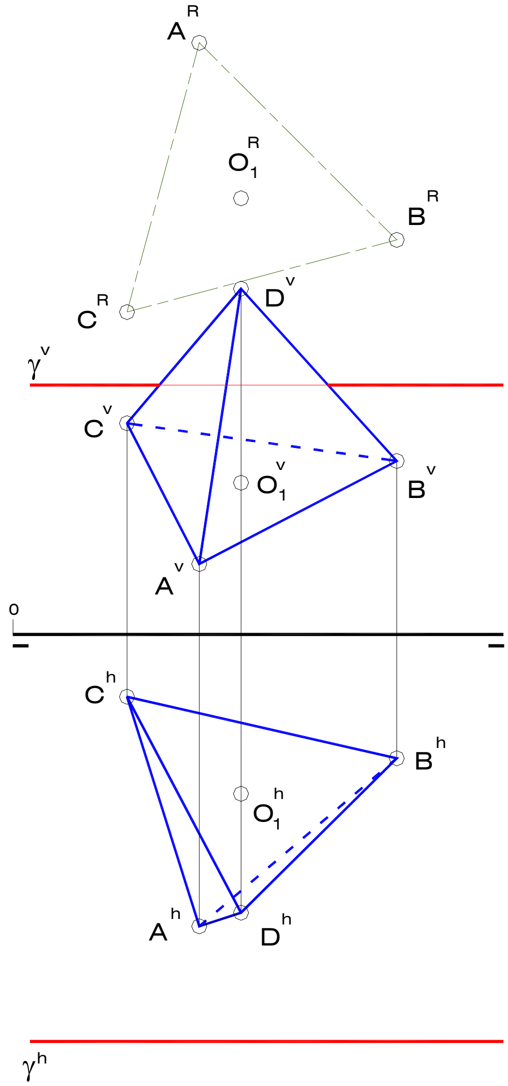

Fig. 5.27-d

6) Construya la doble proyección ortogonal de un tetraedro ABCD sabiendo que N es el punto medio de la altura O_1D del poliedro, M es el punto medio de la arista AD y que el plano que contiene a la sección principal que pasa por la arista AD es proyectante vertical. Tome la solución de mayor vuelo para el vértice D. Analice e indique la visibilidad del sólido.

$M(25{,}20{,}18) \quad N(38{,}20{,}28)$

Solución (Fig. 5.28)

Dado que los puntos M y N pertenecen a AD y a la altura del poliedro O_1D, respectivamente, el plano δ que contiene a la sección principal del sólido que pasa por la arista AD (ADX, siendo X el punto medio de la arista BC) contiene al segmento MN. De acuerdo con el enunciado del problema, este plano δ es proyectante vertical, de manera que su traza vertical se confunde con la proyección vertical de la recta definida por MN. Si se genera una nueva proyección sobre un plano paralelo a δ es posible construir el verdadero tamaño de la sección principal ADX (Fig. 5.28-a).

Para dibujar la sección principal del sólido es preciso construir en primer lugar una que corresponda a una longitud de arista arbitraria "a'" (Fig. 5.28-b). Sobre ella se identifican M' y N', puntos medios de la arista A'D' y de la altura O_1'D', respectivamente, y se consigna el verdadero tamaño del segmento MN (t) a partir de M' y en la dirección del segmento M'N'. Luego, aplicando semejanza de figuras planas, se obtiene la sección principal correspondiente al tetraedro cuyas proyecciones se han de construir.

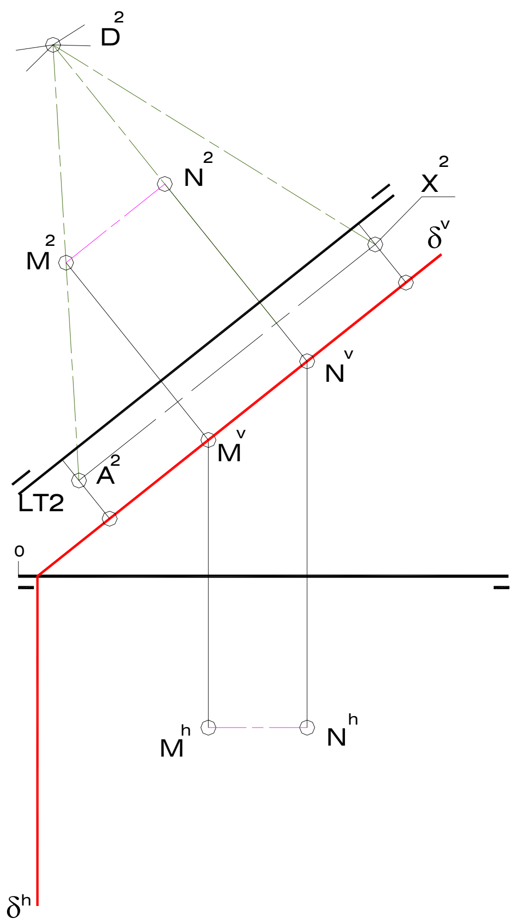

Fig. 5.28-a

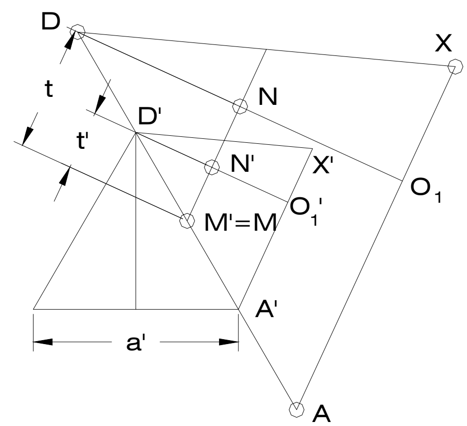

Fig. 5.28-b

Una vez halladas las proyecciones diédricas de los puntos A, D y X se procede a construir una recta perpendicular al plano δ que pase por X – punto medio de la arista BC – sobre la cual se encuentran los vértices B y C del tetraedro. Dado que dicha recta es frontal, es posible copiar sobre ella la mitad de la longitud de las aristas del sólido a cada lado de X en proyección vertical, dando lugar a las proyecciones verticales de B y C; las proyecciones icnográficas de estos puntos se obtienen trazando las respectivas referencias perpendiculares a LT (Fig. 5.28-c).

Es de hacer notar que la cara ABC del sólido se encuentra en un plano frontal y que ninguna de las aristas en es invisible en la proyección vertical. Por otra parte, si bien es cierto que el vértice A es el de menor cota en el ejercicio, todas las aristas que convergen en él forman parte del contorno de la proyección, por lo tanto se dibujan con línea de construcción gruesa en la proyección horizontal. Además, en esa misma proyección la arista BD es visible, dado que B es el vértice de mayor cota del poliedro.

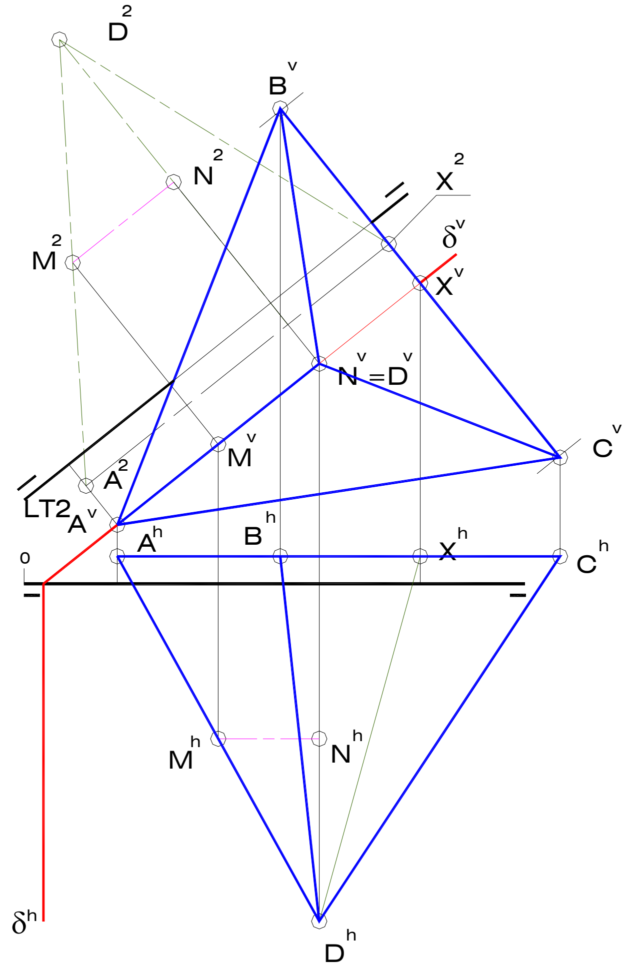

Fig. 5.28-c

7) Determine la doble proyección ortogonal de un hexaedro ABCDEFGH, sabiendo que el plano γ contiene a la cara ABCD. El vértice B del poliedro se encuentra sobre el plano horizontal de proyección y a la derecha de A

$$\gamma\begin{cases}1(35{,}20{,}00)\\2(45{,}00{,}30)\\3(10{,}00{,}00)\end{cases}\qquad E(15{,}25{,}30)$$

Solución (Fig. 5.29)

Trazando por E una recta perpendicular al plano γ se obtiene, en la intersección con el mismo, el vértice A del sólido. Luego, el verdadero tamaño de AE corresponde a la longitud de las aristas del poliedro (Fig. 5.29-a). No es necesario en este ejercicio construir la sección principal del sólido, ya que es posible construir una de sus caras, procediendo luego como si se tratara de un prisma recto de base cuadrada en el que las aristas básicas tienen igual longitud de que las aristas laterales.

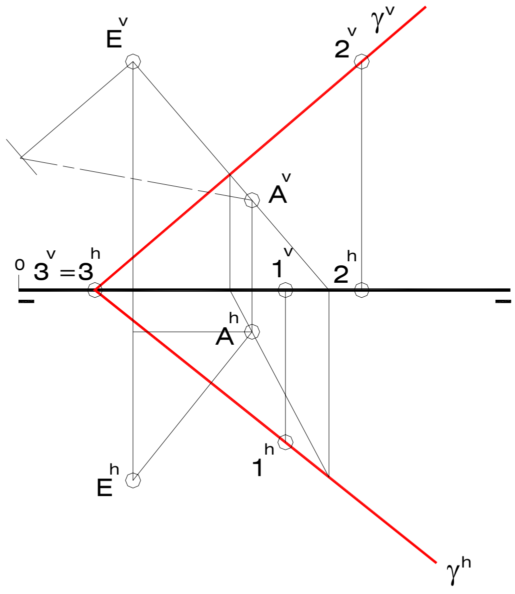

Fig. 5.29-a

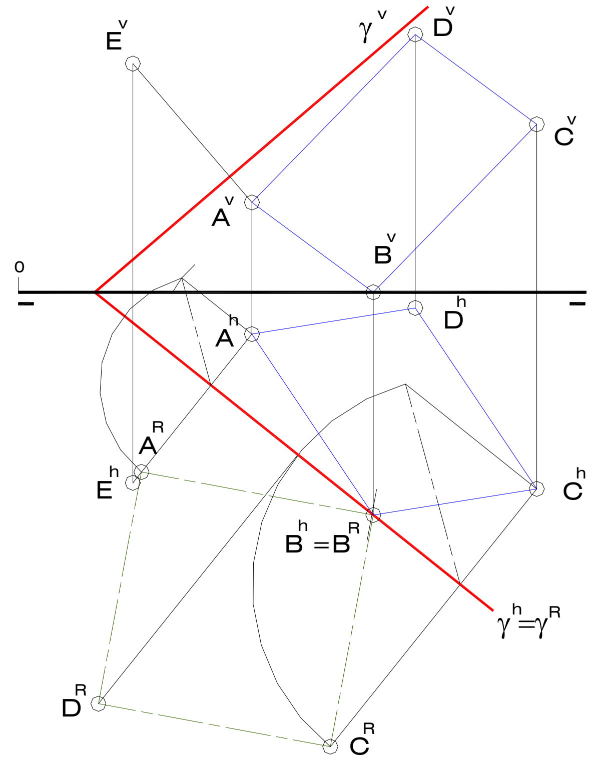

Fig. 5.29-b

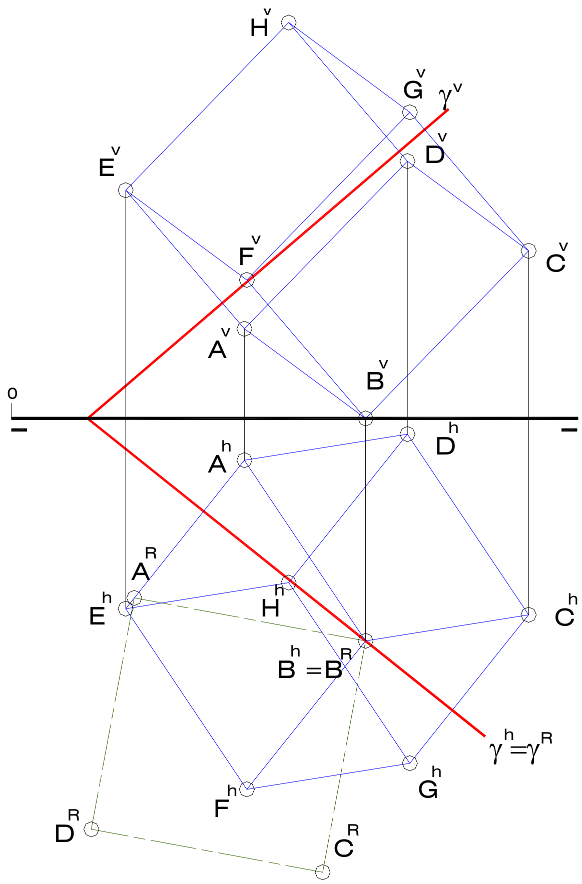

Fig. 5.29-c

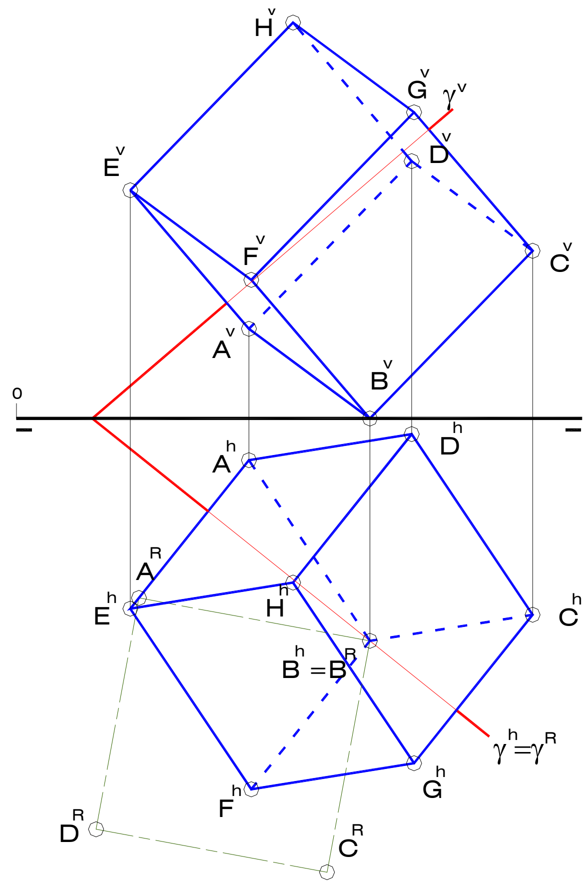

Fig. 5.29-d

Para construir el verdadero tamaño de la cara ABCD conviene abatir el plano γ sobre el plano horizontal de proyección, ya que sobre éste se encuentra el punto B. Trazando un arco de centro en A^R y de radio igual al verdadero tamaño de AE se obtiene, en el corte con la traza horizontal de γ, al punto B^R, el cual coincide con la proyección horizontal de B. Luego se dibujo el resto del cuadrado $A^RB^RC^RD^R$ y se procede a encontrar las proyecciones diédricas de B, C y D (Fig. 5.29-b). Los vértices F, G y H del hexaedro se obtienen mediante la aplicación de paralelismo entre rectas en cada una de las dos proyecciones (Fig. 5.29-c).

Por último, es preciso realizar el análisis de visibilidad correspondiente, del cual se desprende que las aristas AB, BC y BF son invisibles en proyección horizontal, puesto que convergen en B, vértice de menor cota. De manera análoga, las aristas AD, CD y DH son invisibles en proyección vertical, ya que convergen en D, vértice de menor vuelo del sólido.

8) Determine las proyecciones diédricas de un hexaedro ABCDEFGH conocidos los vértices E y C. Se sabe, además, que A se encuentra sobre PH (Solución de menor vuelo para A). Analice e indique la visibilidad del poliedro.

$E(30,60,10) \quad C(70,25,50)$

Solución (Fig. 5.30)

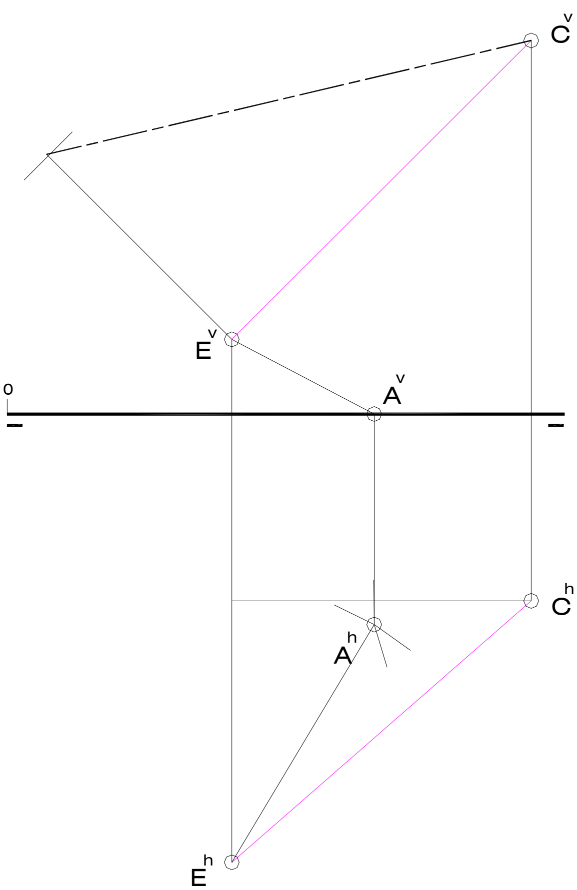

Fig. 5.30-a

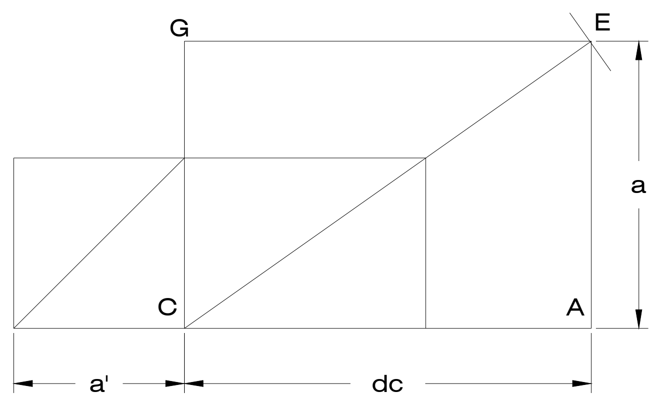

Fig. 5.30-b

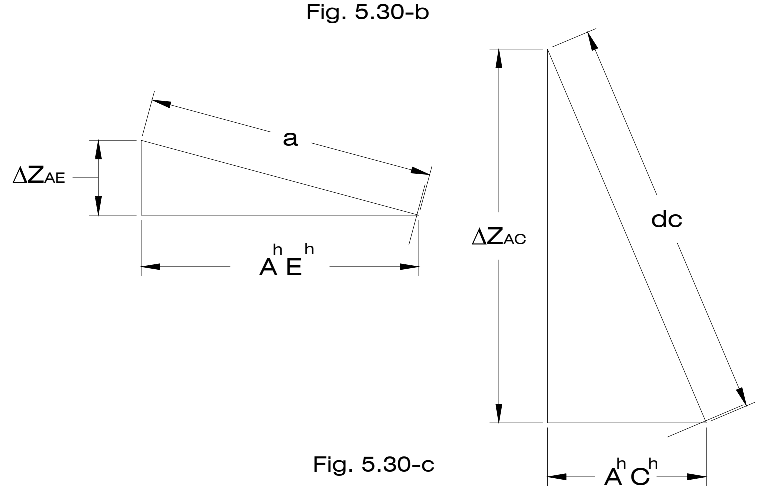

Fig. 5.30-c

Siendo CE una de las diagonales principales del cubo, su verdadero tamaño es primordial para trazar en un dibujo auxiliar (Fig. 5.30-b) la sección principal ACGE, partiendo de un cuadrado de lado arbitrario “a’”. De dicha sección principal se obtienen las longitudes AC (diagonal de cara “dc”) y AE (arista “a”), pero no pueden ser trasladadas de forma directa a alguna de las proyecciones diédricas. Sin embargo, en vista de que A tiene cota igual a cero, se conocen las diferencias de cota entre los segmentos AC y AE, lo que permite junto a los verdaderos tamaños de AC y AE – de la Fig. 5.30-b – la construcción de los triángulos de abatimiento que se muestran en la Fig. 5.30-c. De manera que, haciendo en centro en E^h y con radio A^hE^h y luego en C^h con radio A^hC^h, se trazan arcos que se cortan en la proyección horizontal del punto A (Fig. 5.30-a).

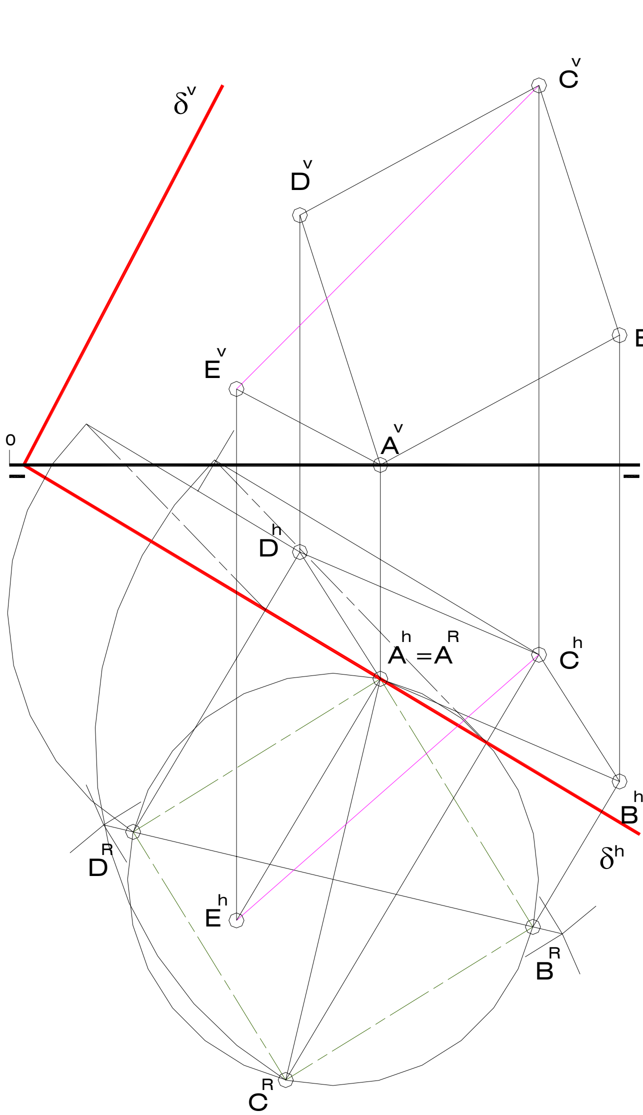

Fig. 5.30-d

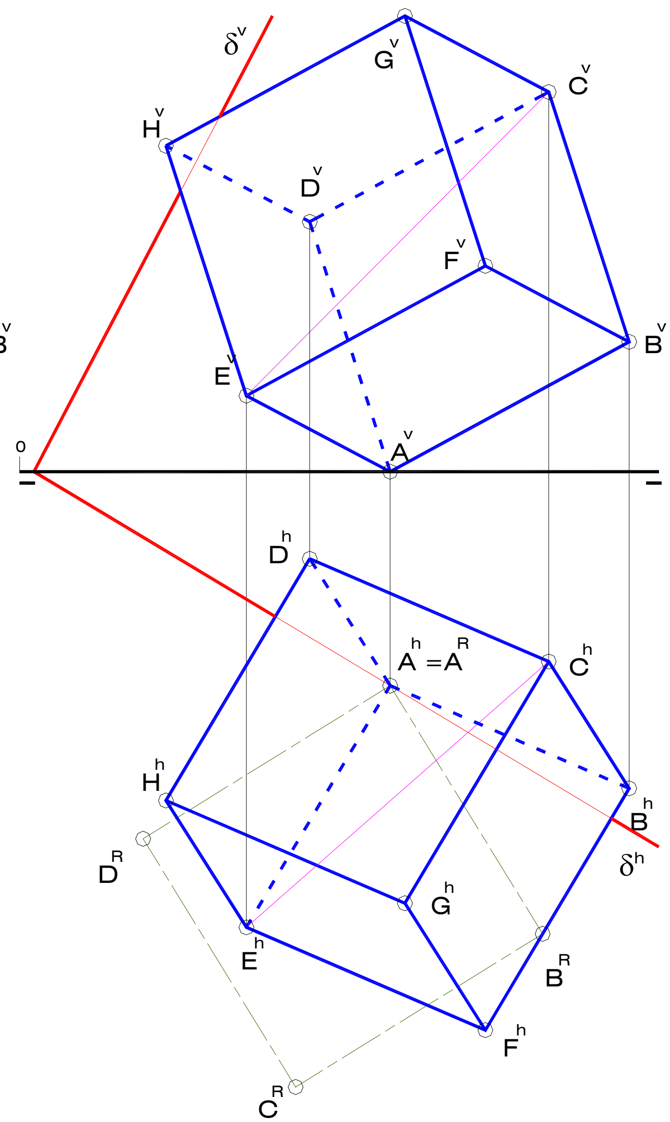

Fig. 5.30-e

Una vez conocido el punto A es posible construir el plano δ que contiene a la cara ABCD, ya que es perpendicular a la arista AE. Abatiendo este plano sobre uno de los de proyección, se procede a dibujar el verdadero tamaño de la cara ABCD, para luego hallar las proyecciones diédricas de los puntos B y C (Fig. 5.30-d). Seguidamente, se obtienen las proyecciones de los demás vértices del sólido aplicando paralelismo entre rectas.

Del acostumbrado análisis de visibilidad se desprende que las aristas convergentes en A son invisibles en la proyección horizontal o icnográfica, en tanto que las que convergen en D lo son en la proyección vertical u ortográfica, ya que A es el vértice de menor cota y D es el de menor vuelo de todo el conjunto de vértices que compone al poliedro (Fig. 5.30-e).