

# CAPÍTULO IV

<b>4.1 CONCEPTO Y CLASIFICACIÓN DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS .....</b>	<b>73</b>
<b>4.2 PROYECCIÓN CILÍNDRICA ORTOGONAL DE UN POLIEDRO .....</b>	<b>74</b>
4.2.1 DETERMINACIÓN DE ARISTAS VISIBLES Y OCULTAS EN UNA PROYECCIÓN .....	74
<b>4.3 PRISMAS .....</b>	<b>75</b>
4.3.1 SECCIONES NOTABLES DE PRISMAS RECTOS DE BASE REGULAR .....	76
4.3.2 PROYECCIÓN CILÍNDRICA ORTOGONAL DE UN PRISMA RECTO DE BASE REGULAR .....	77
<b>4.4 PIRÁMIDES .....</b>	<b>80</b>
4.4.1 SECCIONES NOTABLES DE PIRÁMIDES RECTAS DE BASE REGULAR .....	81
4.4.2 PROYECCIÓN CILÍNDRICA ORTOGONAL DE UNA PIRÁMIDE RECTA DE BASE REGULAR .....	82
<b>4.5 POLIEDROS REGULARES .....</b>	<b>84</b>
4.5.1 PROPIEDADES DE LOS POLIEDROS REGULARES .....	86
4.5.2 EL TETRAEDRO .....	88
4.5.2.1 Proyección cilíndrica ortogonal del tetraedro .....	90
4.5.3 EL HEXAEDRO .....	92
4.5.3.1 Proyección cilíndrica ortogonal del hexaedro .....	93
4.5.4 EL OCTAEDRO .....	96
4.5.4.1 Proyección cilíndrica ortogonal del octaedro .....	98
4.5.5 EL DODECAEDRO .....	100
4.5.5.1 Proyección cilíndrica ortogonal del dodecaedro .....	102
4.5.6 EL ICOSAEDRO .....	107
4.5.6.1 Proyección cilíndrica ortogonal del icosaedro .....	108

## 4.1 Concepto y clasificación de sólidos geométricos

Un sólido geométrico es una región del espacio limitada por ciertas superficies que pueden ser planas o curvas. Dependiendo de las características que presentan esas superficies, es posible realizar una clasificación como la que se muestra en la Tabla #1.

TABLA # 1: Clasificación de los Sólidos Geométricos de acuerdo a la superficie que los define.

POLIEDROS	IRREGULARES	PRISMAS	RECTOS	DE BASE REGULAR
				DE BASE IRREGULAR
		OBЛИCUOS	DE BASE REGULAR	DE BASE IRREGULAR
			DE BASE IRREGULAR	DE BASE REGULAR
		PIRÁMIDES	RECTAS	DE BASE REGULAR
				DE BASE IRREGULAR
			OBЛИCUAS	DE BASE REGULAR
				DE BASE IRREGULAR
			COMBINACIONES Y PARTES DE OTROS POLIEDROS	
		REGULARES O PLATÓNICOS	Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro.	
CUERPOS REDONDOS	REGLADOS O DE SIMPLE CURVATURA	DESARROLLABLES	CONOS	
			CILINDROS	
	ALABEADOS	Conoide, Cilindroide, Hiperboloides de una hoja, etc.		
	DE DOBLE CURVATURA	DE REVOLUCIÓN	Esfera, Toro, Elipsoide de Revolución, etc.	
SÓLIDOS COMPUESTOS	NO DE REVOLUCIÓN RESULTADO DE LA COMBINACIÓN DE SÓLIDOS DE DISTINTA NATURALEZA.			

La determinación de los distintos elementos que componen un sólido geométrico y el trazado de su proyección constituyen la síntesis de todos los temas estudiados previamente en este libro. Es entonces obligatorio el buen dominio de los conocimientos teóricos y de los procedimientos instrumentales preliminares, para lograr el correcto empleo de las herramientas con las que se cuenta para obtener buenos resultados en la resolución de los problemas que han de ser abordados.

Los *Poliedros* son cuerpos cuya superficie limitante está compuesta exclusivamente por planos (*superficie poliédrica*), los cuales conforman un número determinado de *caras*. A su vez, los segmentos de recta generados por la intersección de caras adyacentes constituyen las *aristas* del poliedro. Estas aristas convergen en un número no inferior a 3 en puntos denominados *vértices* del poliedro.

## 4.2 Proyección cilíndrica ortogonal de un Poliedro

La proyección de cualquier poliedro sobre un plano siempre es un polígono, cuyos vértices son el resultado de la intersección entre los rayos proyectantes tangentes al sólido que pasan por sus vértices y el plano de proyección considerado. Dicho polígono constituye, a su vez, la proyección de la *Línea de Contorno Aparente* del poliedro en el plano de proyección; esta línea poligonal cerrada puede no ser plana sino alabeada, es visible en la proyección y es la frontera entre las caras visibles y las no visibles del sólido.

Cualquier vértice de un poliedro se proyecta dentro de la proyección de la línea de contorno aparente correspondiente. Por otra parte, esta línea no es la misma en la proyección horizontal y en la vertical, por lo que la visibilidad debe ser analizada separadamente.

En la Fig. 4.1 se muestra la proyección de un cubo ABCDEFGH sobre el plano horizontal. La proyección del poliedro es el polígono  $A^hB^hC^hG^hH^hE^h$ , proyección horizontal de la poligonal alabeada ABCGHE, que es la línea de contorno aparente en la proyección horizontal considerada.

### 4.2.1 Determinación de aristas visibles y ocultas en una proyección

Como puede observarse en la misma figura 4.1, las caras EFGH, ABFE y BCGF se encuentran por encima de la línea de contorno aparente, por lo que las aristas comunes a esas caras se representan con línea continua en la proyección. Por el contrario, las caras restantes se hallan por debajo de la mencionada línea, lo que justifica el trazado de las proyecciones de las aristas AD, CD y DH con línea de trazos, pues son aristas invisibles en la proyección.

En forma general, es posible enunciar un criterio que permite la determinación de las aristas visibles y ocultas en las proyecciones diédricas, criterio éste que es válido para cualquier tipo de poliedro y que a continuación se expone:

*Las aristas convergentes en el vértice de menor cota del poliedro serán invisibles en la proyección horizontal, a menos que formen parte de la línea de contorno aparente del sólido en dicha proyección.*

*De manera análoga, las aristas convergentes en el vértice de menor vuelo del poliedro son no visibles en la proyección vertical, a excepción de aquellas que, cumpliendo con lo anterior, forman parte de la línea de contorno aparente del sólido en la mencionada proyección.*

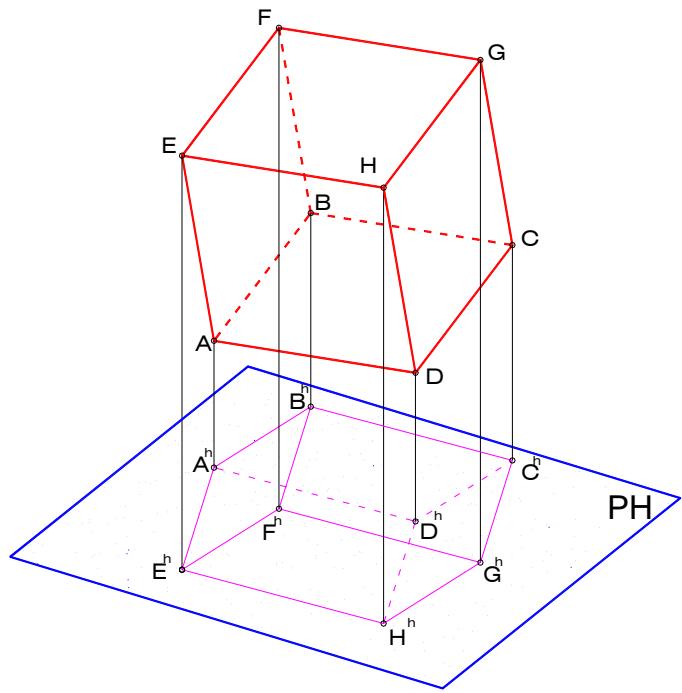


Fig. 4.1-a: Proyección Cilíndrica Ortogonal de un Poliedro.

### 4.3 Prismas

Los poliedros irregulares presentan caras y aristas de diferentes tamaños. Pueden ser clasificados en *prismas* y *pirámides*, en función de la superficie poliédrica que los limita.

El *Prisma*, es un poliedro limitado por una *superficie prismática*, la cual se compone de planos cuyas intersecciones entre sí son paralelas. Cada una de esas intersecciones es la recta común a dos planos como máximo.

La superficie prismática es aquella engendrada por una recta denominada *generatriz*, la cual, apoyándose en un polígono de  $n$  lados (*directriz*), se mueve de tal manera que se mantiene paralela a otra recta llamada *eje de la superficie* (Fig. 4.2-a).

A fin de limitar el espacio dentro de la superficie prismática, ésta es cortada por dos planos paralelos  $\delta$  y  $\delta_1$ , dando lugar a dos polígonos iguales llamados *bases* - ABCDE y  $A_1B_1C_1D_1E_1$  en la Fig. 4.2-b - los cuales pueden ser regulares o no. Las demás caras del prisma son denominadas *caras laterales*, que son las caras de la superficie prismática, cuyo número es igual al número de vértices que tienen los polígonos que conforman las bases y constituyen, en cualquier caso, paralelogramos.

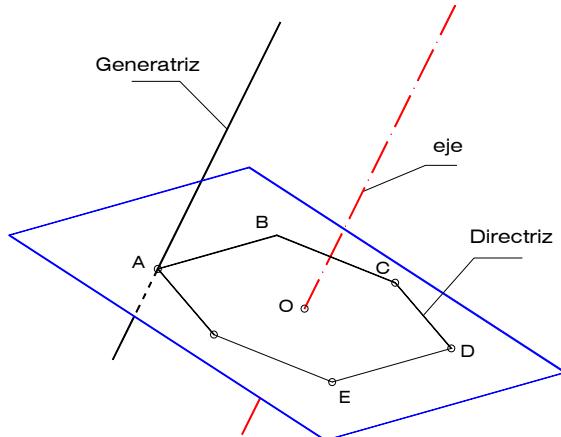


Fig. 4.2-a: Generación de la superficie prismática.

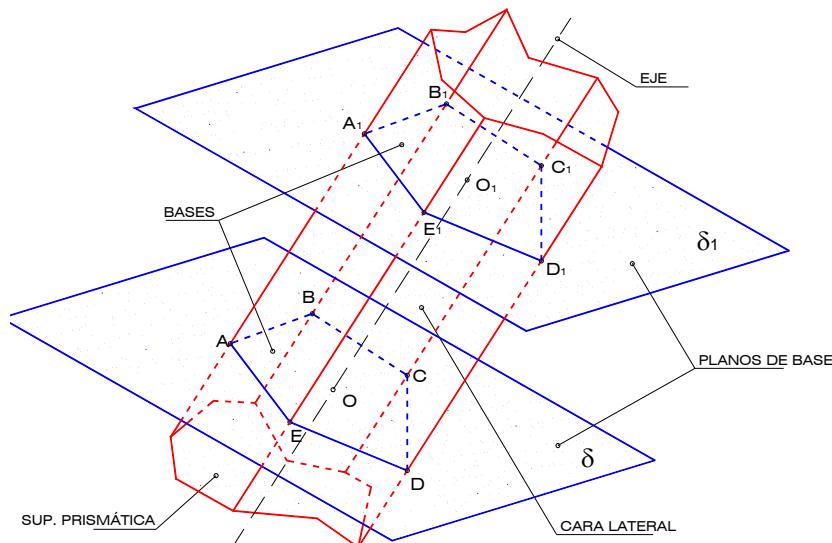


Fig. 4.2-b: Prisma

Asimismo, las aristas resultantes de la intersección entre las caras laterales del sólido reciben el nombre de *aristas laterales*, siendo *aristas básicas* las resultantes de la intersección entre la superficie prismática y los planos que contienen a las bases, es decir, los lados de los polígonos base.

La recta que pasa por los centros  $O$  y  $O_1$  de cada una de las dos bases del prisma se denomina *eje del sólido*, y es paralela a sus aristas laterales. Si este eje - y por consiguiente las aristas laterales - es perpendicular a los planos de base, el prisma será *recto*; si es oblicuo a dichos planos, el sólido se denomina *oblicuo*. La menor distancia entre los planos de base se conoce como *Altura del prisma* ( $H$ ), y resulta ser igual al segmento  $O O_1$  si se trata de prismas rectos.

Los siguientes tópicos referentes a prismas se enfocan exclusivamente en aquellos cuya base es un polígono regular y en los que el eje es perpendicular a los planos base, es decir, prismas rectos de base regular.

#### 4.3.1 Secciones Notables de Prismas Rectos de Base Regular

Las secciones más importantes desde el punto de vista geométrico en cualquier prisma recto de base regular son las *Secciones Sencillas* y las *Secciones Principales* (Fig. 4.4).

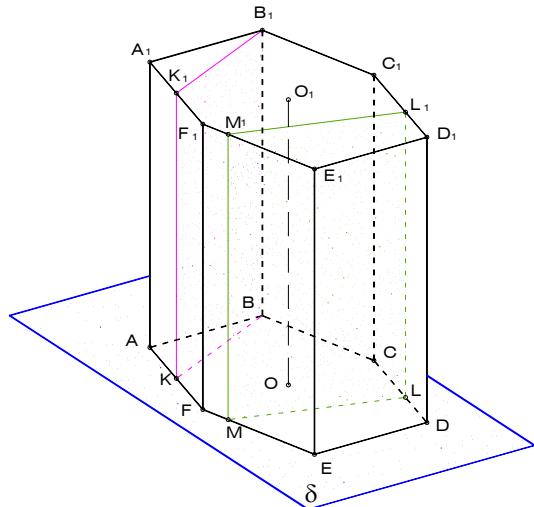


Fig. 4.3

Las Secciones Sencillas de un prisma son el resultado de la intersección entre planos paralelos al eje del sólido y el propio sólido. Su forma es de paralelogramos con dos lados opuestos de longitud igual a la del segmento del eje  $OO_1$ . Las secciones sencillas serán rectangulares si el sólido es recto (Fig. 4.3).

Las Secciones Principales de un prisma contienen las dimensiones más relevantes del poliedro: la altura y la diagonal de base o altura de base, dependiendo del número de vértices que ésta tenga. Resultan al seccionar este poliedro mediante planos que poseen las siguientes características:

1. Contienen al eje del sólido.
2. Contienen a uno de los vértices básicos.

De lo anterior se infiere que las secciones

principales son paralelogramos - rectángulos si el prisma es recto - con dos lados opuestos de longitud igual a la del segmento  $OO_1$ , en tanto que los otros dos lados tienen una longitud igual a la diagonal de base, para el caso de prismas con un número de vértices básicos par (Fig. 4.4-a), o a la altura de base, si se trata de prismas con un número de vértices básicos impar (Fig. 4.4-b).

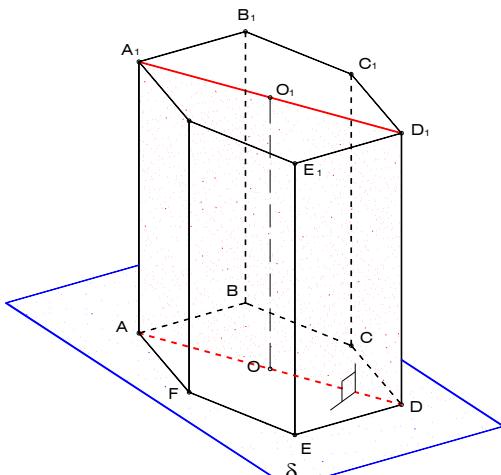


Fig. 4.4-a

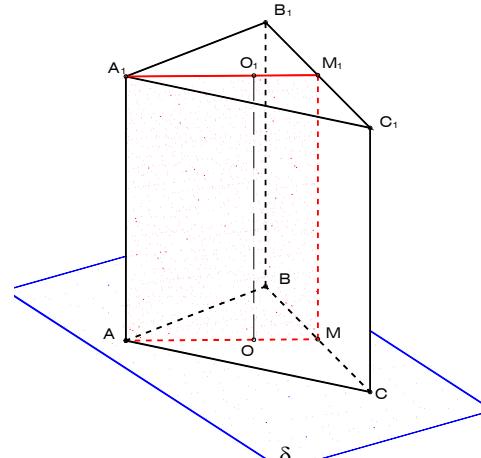


Fig. 4.4-b

El número de secciones sencillas en un prisma es indeterminado; por el contrario, el número de secciones principales es igual al número de vértices básicos que posee el poliedro. Es evidente que, si el prisma considerado es un prisma recto, cada uno de los planos de sección sencilla y de sección principal es perpendicular a los planos de base.

#### 4.3.2 Proyección cilíndrica ortogonal de un Prisma Recto de Base Regular.

Las características de la proyección de la línea de contorno aparente de un prisma recto de base regular sobre un determinado plano de proyección, dependen de la posición relativa entre este plano y el eje del poliedro. Así, si el eje es paralelo al plano de proyección, el prisma se proyecta como un rectángulo de altura igual a la altura del prisma (Fig. 4.5-a); si el eje es perpendicular al plano de proyección, el prisma se proyecta como un polígono igual a la base (Fig. 4.5-b); finalmente, si el eje es oblicuo al plano de proyección, el resultado es un polígono generalmente irregular con un número de lados mayor a cuatro<sup>6</sup> (Fig. 4.5-c).

Si en el primer caso el rectángulo corresponde a una sección principal, la posición del prisma en relación con el plano de proyección se considera una *posición notable*, ya que la sección principal es un polígono que contiene dos dimensiones fundamentales del prisma: la altura y una diagonal de cara o una altura de cara, dependiendo del número de vértices básicos que posee.

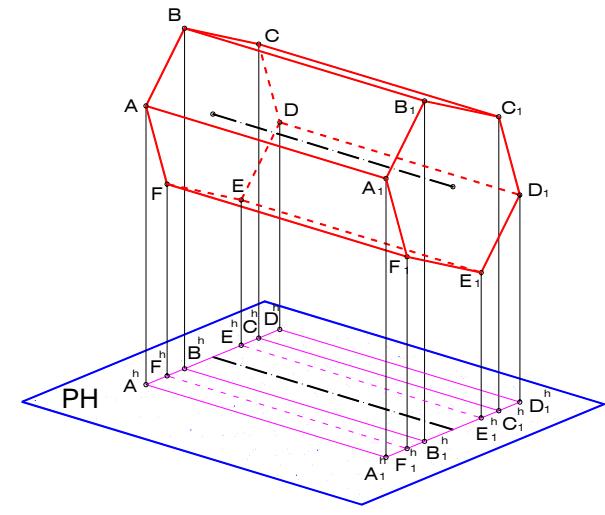


Fig. 4.5-a

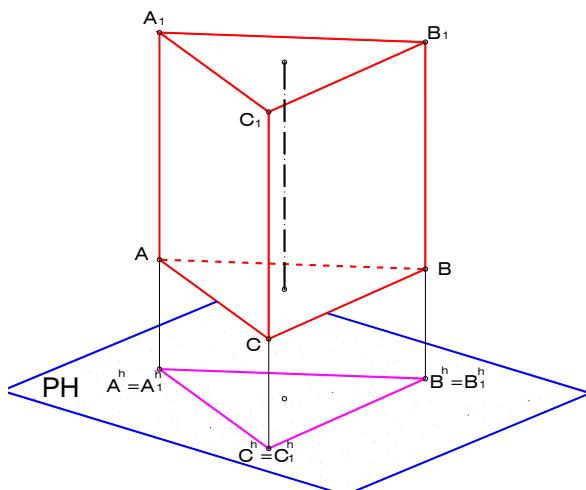


Fig. 4.5-b

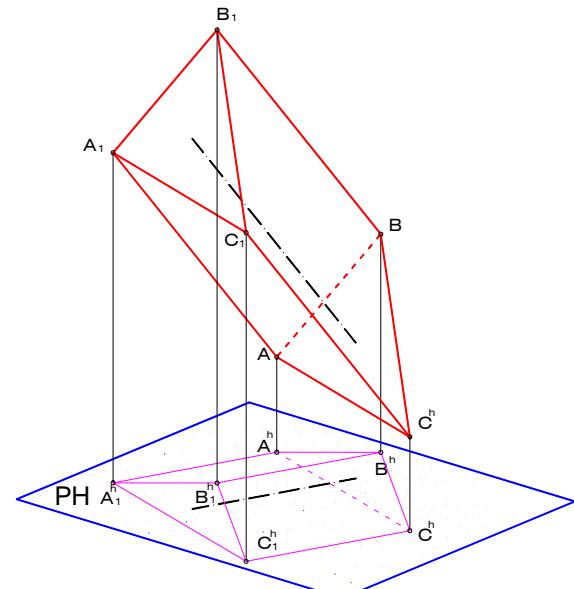


Fig. 4.5-c

Asimismo, el segundo caso constituye otra posición notable del prisma con respecto al plano de proyección, dado que la proyección correspondiente representa el verdadero tamaño de las bases del poliedro.

<sup>6</sup> Aquí se considera únicamente el plano horizontal de proyección, pero es obvio que estas características son válidas con referencia a PV.

Como regla general puede establecerse que *si se conoce la sección principal de un prisma, o una de las bases y la magnitud de la altura del poliedro, éste queda completamente determinado.*

Considérese el siguiente ejemplo (Fig. 4.6): se quiere construir las proyecciones diédricas de un prisma recto de base regular hexagonal ABCDEF, conocidos los vértices A y D<sub>1</sub>, y el punto P, éste último sobre el plano que contiene a la sección principal ADD<sub>1</sub>A<sub>1</sub>, y sabiendo que las aristas básicas tienen una longitud "a". Se tomará la solución de menor cota para el vértice D.

Los puntos conocidos en un principio permiten definir el plano de una de las secciones principales. Su construcción será la clave para la resolución de este problema.

El primer paso consiste en hallar una proyección en la que el plano  $\pi$ , definido por los puntos A, D<sub>1</sub> y P y que contiene a la sección principal ADD<sub>1</sub>A<sub>1</sub>, aparezca en verdadero tamaño. Esto se ha realizado aplicando un abatimiento en torno a la traza horizontal  $\pi^h$ . A continuación, se ha construido un hexágono auxiliar de lado igual a la longitud "a" de las aristas básicas del prisma, obteniéndose así la longitud "d" de la diagonal de base (Fig. 4.6-a). Luego se construye una semicircunferencia de diámetro igual a la longitud A<sup>R</sup>D<sub>1</sub><sup>R</sup>, sobre la cual se encuentra D<sup>R</sup> por ser el arco capaz de noventa grados. Existen dos soluciones para ese arco; se ha tomado la de menor cota.

Haciendo centro en A<sup>R</sup> y con radio igual a la diagonal de base "d", se traza un arco que corta al anterior en D<sup>R</sup>, luego, aplicando paralelismo entre rectas, se determina el punto A<sub>1</sub>R (Fig. 4.6-a).

Seguidamente, se hallan las proyecciones diédricas de los vértices D y A<sub>1</sub>, para luego construir el plano de base inferior  $\delta$ , el cual es perpendicular a las aristas laterales AA<sub>1</sub> y DD<sub>1</sub> y contiene a los puntos A y D. Mediante un

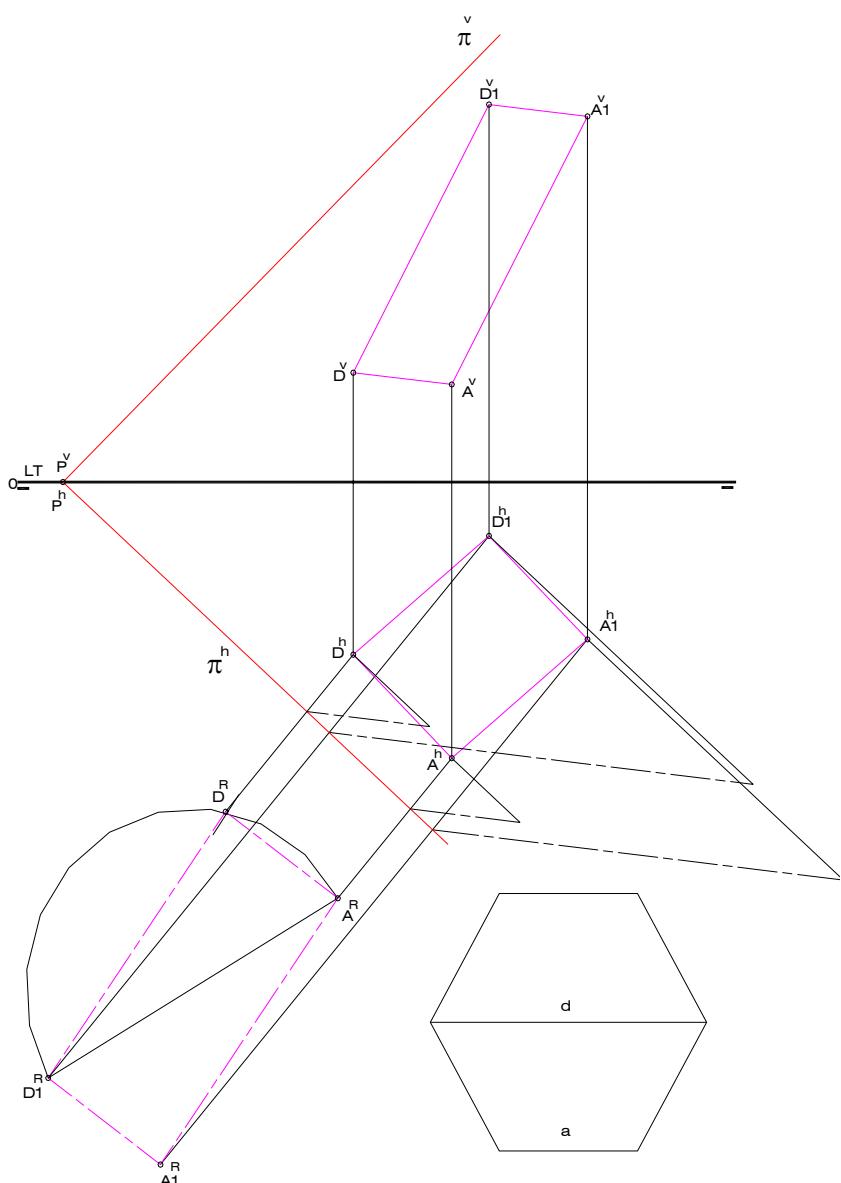


Fig. 4.6-a

abatimiento de los puntos A y D del plano  $\delta$  en torno a su traza horizontal, se ha logrado construir el verdadero tamaño de la base inferior  $A'B'C'D'E'F'$ , a partir del cual se obtienen las proyecciones diédricas de dicha base.

En vista de que se trata de un prisma recto de base hexagonal regular, existe paralelismo entre las aristas laterales y entre las aristas básicas opuestas, por lo que se ha aprovechado esa relación en la construcción de la cara superior  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  (Fig. 4.6-b).

Finalmente, es necesario analizar las partes visibles y las no visibles en cada una de las dos proyecciones diédricas. Siendo B el vértice de menor cota, es un punto invisible en la proyección horizontal, por tanto, la aristas convergentes en ese vértice son invisibles en dicha proyección, a menos que sean parte de la línea de contorno aparente.

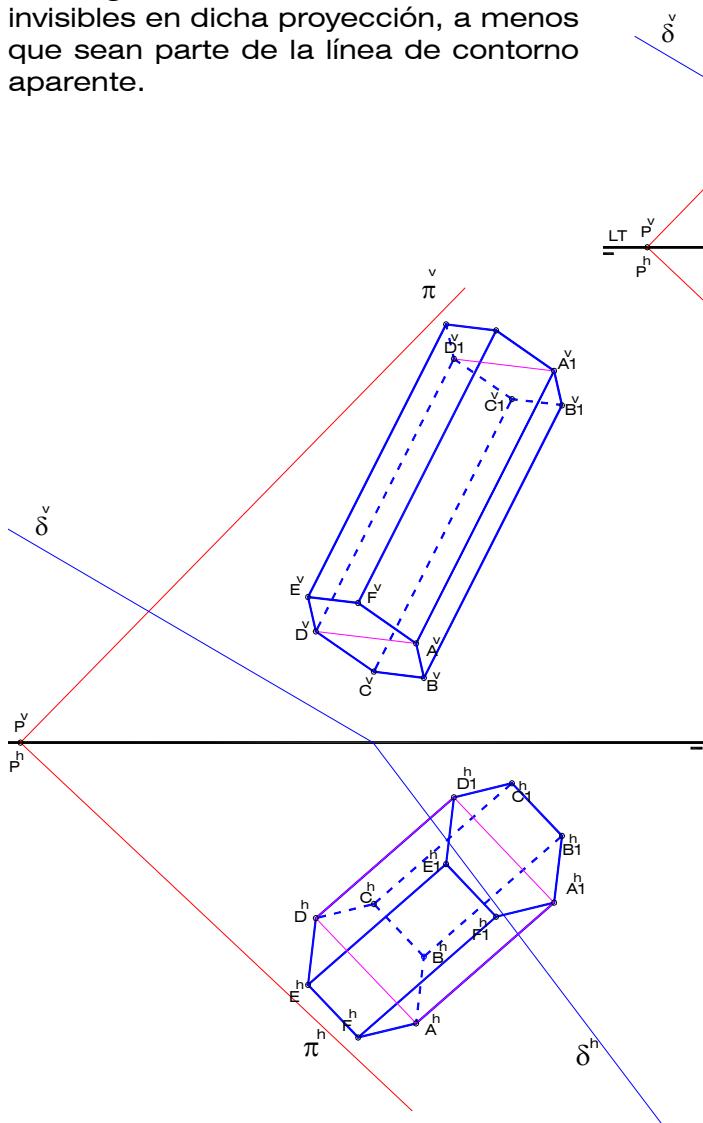


Fig. 4.6-c

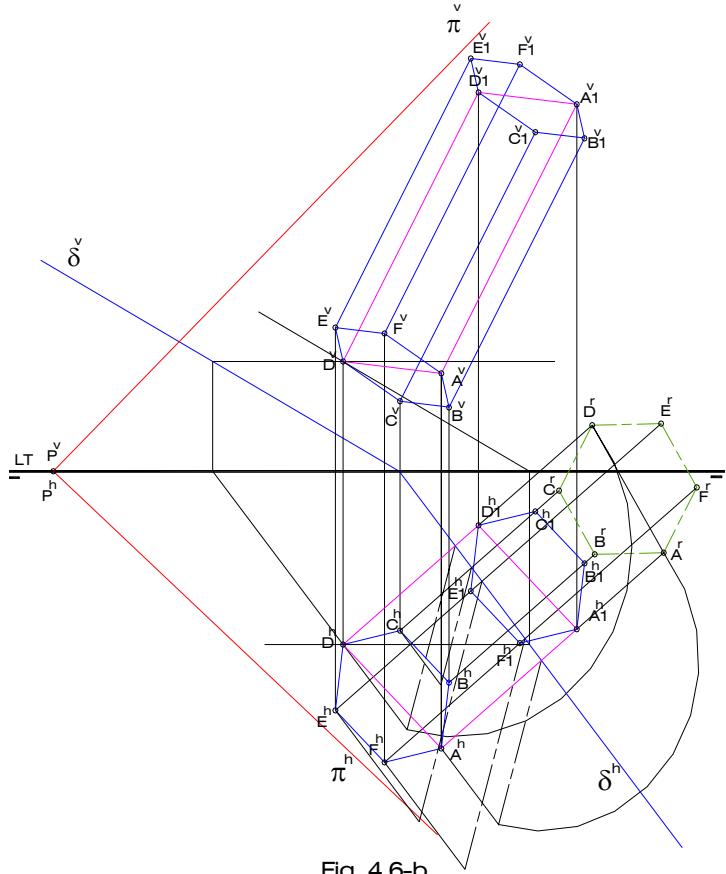


Fig. 4.6-b

De igual manera, se determinan las aristas no visibles en proyección vertical; siendo  $C_1$  el vértice de menor vuelo, las aristas convergentes en este vértice serán invisibles, a menos que formen parte de la línea de contorno aparente (Fig. 4.6-c).

Lo anterior no es más que la aplicación del criterio de visibilidad para las aristas de un poliedro en proyecciones diédricas, el cual ya ha sido expuesto en el apartado 4.2.1. En adelante se hará una simple referencia al mencionado criterio cada vez que se amerite determinar las aristas visibles y ocultas en los ejemplos de construcción de poliedros.

#### 4.4 Pirámides

Una *Pirámide* es un poliedro limitado por una *superficie piramidal*, la cual se compone de planos cuyas intersecciones tienen un punto común o *vértice* de la superficie piramidal.

La superficie piramidal es aquella engendrada por una recta denominada *generatriz*, la cual, manteniendo un punto fijo llamado *vértice*, recorre un polígono o *directriz*. La recta que pasa por el vértice y por el centro de este polígono es el *eje de la superficie*. (Fig. 4.2-a).

Con el objetivo de limitar el espacio dentro de la superficie piramidal, se considera solamente una de las porciones separadas por el vértice y es cortada además por un plano  $\delta$ , dando lugar a un polígono llamado *base* – ABCDE en la Fig. 4.7 – el cual puede ser regular o no. Las demás caras de la pirámide son denominadas *caras laterales*, que son las caras de la superficie piramidal cuyo número es igual al número de vértices que tienen el polígono de base y tienen forma, en cualquier caso, de triángulos.

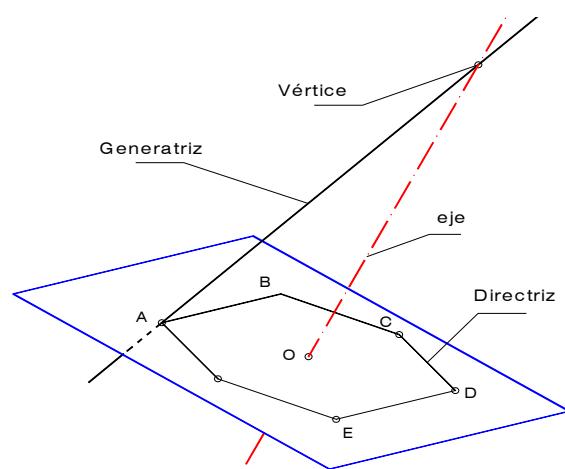


Fig. 4.7-a: Generación de la superficie piramidal.

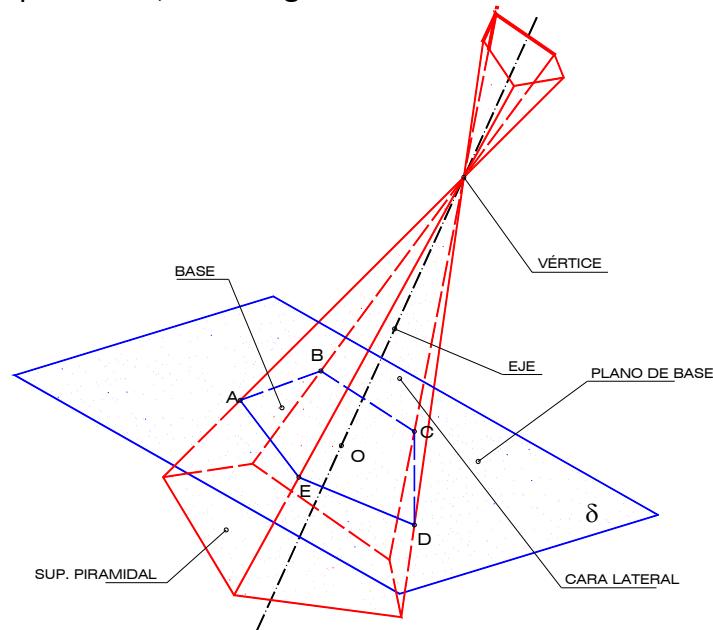


Fig. 4.7-b: Pirámide

Asimismo, las aristas resultantes de la intersección entre las caras laterales del sólido reciben el nombre de *aristas laterales*, siendo *aristas básicas* las resultantes de la intersección entre la superficie piramidal y el plano  $\delta$ , es decir, los lados del polígono base.

La recta que pasa por el centro O de la base y por el vértice V de la pirámide, recibe el nombre de *eje del sólido*. Si este es perpendicular al plano de base  $\delta$ , la pirámide será *recta*; si es oblicuo a dicho plano, el sólido se denomina *oblicuo*.

La menor distancia entre el vértice del sólido y el plano de base se conoce como *Altura de la pirámide (H)*, y resulta ser igual al segmento VO en el caso de pirámides rectas.

De igual manera que en el aparte correspondiente al prisma, los siguientes puntos se refieren exclusivamente a pirámides rectas de base regular.

#### 4.4.1 Secciones Notables de Pirámides Rectas de Base Regular

Las secciones más importantes desde el punto de vista geométrico en cualquier pirámide recta de base regular son las *Secciones Sencillas* (Fig. 4.8) y las *Secciones Principales* (Fig. 4.9).

Las Secciones Sencillas de una pirámide son el resultado de la intersección entre planos que contienen al vértice del sólido y el propio sólido. Su forma es triangular.

Si la sección es generada por un plano que contiene al eje de la pirámide y a uno de los vértices de base, recibe el nombre de *Sección Principal*. Su forma y dimensiones dependen del numero de vértices que posea el poliedro en su base. Así, si ese número es par (Fig. 4.9-a) la sección es un triángulo isósceles cuyos lados iguales son dos aristas laterales opuestas, en tanto que el lado desigual corresponde a una diagonal del polígono de base. De lo contrario, la sección principal es un triángulo escaleno (Fig. 4.9-b) cuyos lados son una arista lateral, una altura de cara lateral y una altura del polígono de base.

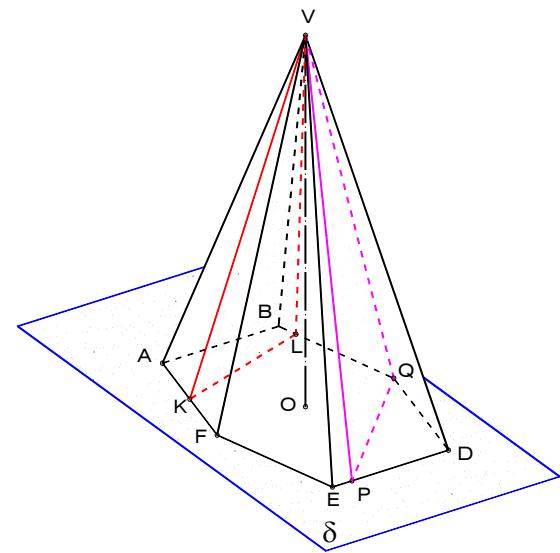


Fig. 4.8

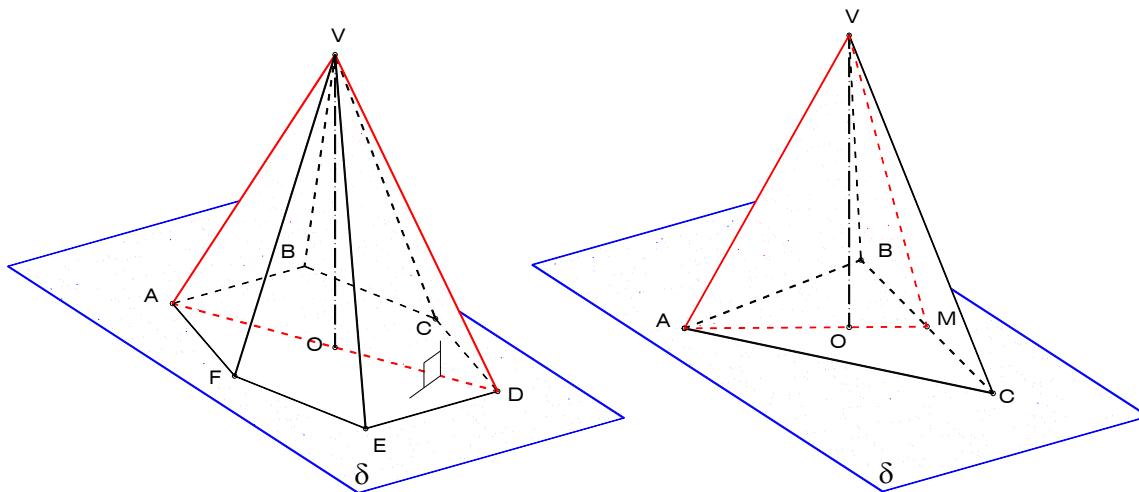


Fig. 4.9-a

Fig. 4.9-b

El número de secciones sencillas en una pirámide es infinito; en cambio, el número de secciones principales es igual al número de vértices básicos que posee el poliedro. Es obvio que, si la pirámide considerada es recta, cada uno de los planos de sección principal es perpendicular al plano de base.

#### 4.4.2 Proyección cilíndrica ortogonal de una Pirámide Recta de Base Regular.

El contorno de la proyección cilíndrica ortogonal de una pirámide recta de base regular es un polígono, cuyas características varían dependiendo de la relación existente entre el eje del poliedro y el plano de proyección (el horizontal, por ejemplo). De lo anterior se derivan tres posiciones bien diferenciadas, a saber: eje paralelo al plano de proyección, eje perpendicular al plano de proyección y eje oblicuo al plano de proyección.

En el primer caso, el contorno de la proyección de la pirámide sobre el plano considerado es un triángulo (Fig. 4.10-a) uno de cuyos lados corresponde a la proyección del polígono base del poliedro, ya que éste se apoya en un plano que es perpendicular (proyectante) en relación al plano de proyección. Si una de las secciones principales del poliedro es además paralela a este plano, la posición se considera notable y la línea de contorno aparente coincide con dicha sección principal.

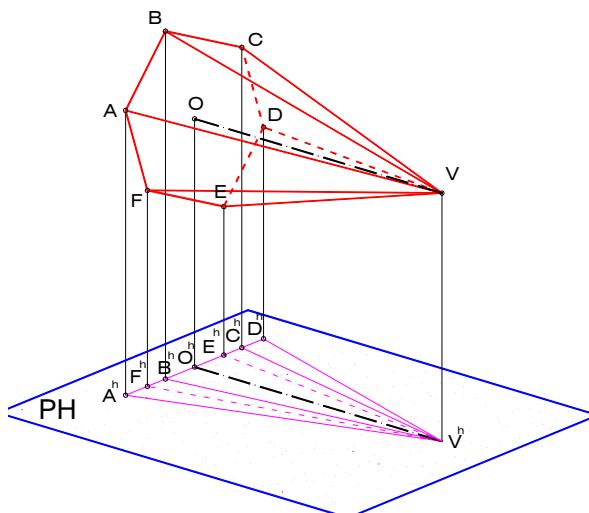


Fig. 4.10-a

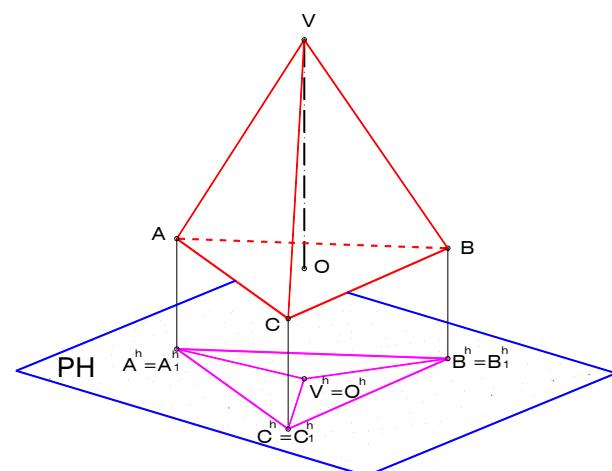


Fig. 4.10-b

En el segundo caso (Fig. 4.10-b) la línea de contorno aparente de la pirámide se reduce al polígono de base, el cual se proyecta con su verdadero tamaño; esta posición se considera notable.

Por último, si el eje del poliedro es oblicuo con respecto al plano de proyección considerado, el contorno de la proyección es un polígono generalmente irregular (Fig. 4.10-c).

Al igual que con el prisma, se puede decir que *si se conoce la sección principal de una pirámide, o una de las bases y la magnitud de la altura del poliedro, éste queda completamente determinado.*

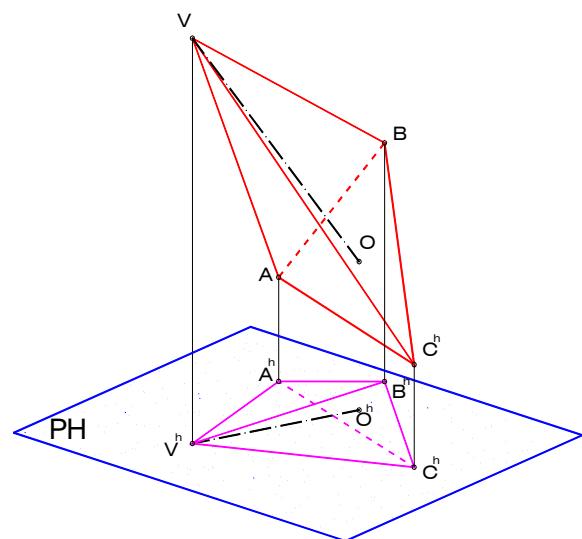


Fig. 4.10-c

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra el proceso de construcción de la doble proyección ortogonal de una pirámide recta de base

cuadrada ABCD, partiendo de los siguientes datos: V, vértice del poliedro, 1 y 2, dos puntos sobre las aristas opuestas VA y VC, y la longitud de las aristas laterales "l". Una de las formas de resolver este problema comienza por la determinación del verdadero tamaño de los segmentos V1 y V2 aplicando uno de los métodos estudiados, abatimiento en el ejemplo. Posteriormente, se consigna sobre los verdaderos tamaños así encontrados la longitud "l" de las aristas laterales, para luego determinar las proyecciones de los puntos A, sobre la recta definida por V1, y B, sobre la recta definida por V2. El punto medio del segmento AC – diagonal de base – es el centro O del polígono base de la pirámide (Fig. 4.11-a).

Una vez conocido el centro O de la base y el eje del poliedro, se procede a construir por dicho punto O (o por cualquiera de los vértices A y C) un plano  $\delta$  perpendicular a la dirección VO, el cual contiene al polígono base de la pirámide. (véase Perpendicularidad, Pág. 54). Luego, empleando alguno de los métodos para la obtención del verdadero tamaño de planos, se genera una proyección auxiliar en la que se construye el cuadrado ABCD; el método utilizado en el ejemplo es el abatimiento en torno a la traza horizontal del plano  $\delta$ , a través del cual se obtienen  $O^R$  y  $A^R$ , elementos que permiten la construcción del cuadrado  $A^R B^R C^R D^R$ .

En vista de que las proyecciones diédricas del punto C son conocidas, solamente hace falta hallar las proyecciones de los vértices B y D. Las del punto B se han hallado mediante la recta frontal del plano que pasa por ese punto, en tanto que las de D son fácilmente encontradas por paralelismo entre rectas, pues, como es sabido, los lados opuestos de un cuadrado son paralelos entre sí (Fig. 4.11-b).

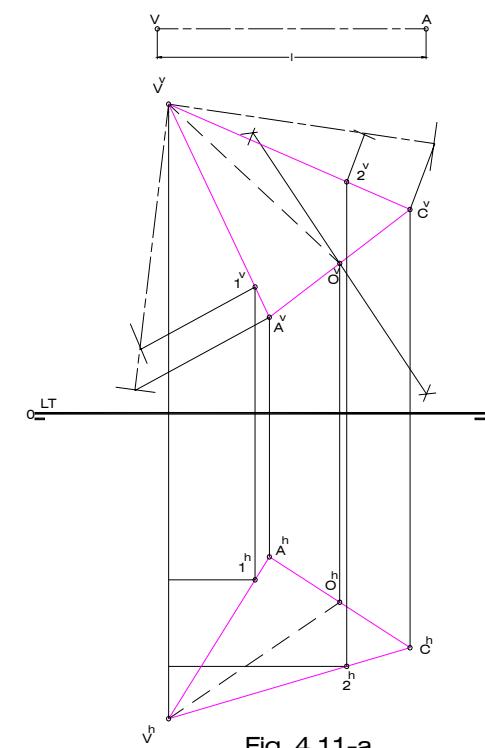


Fig. 4.11-a

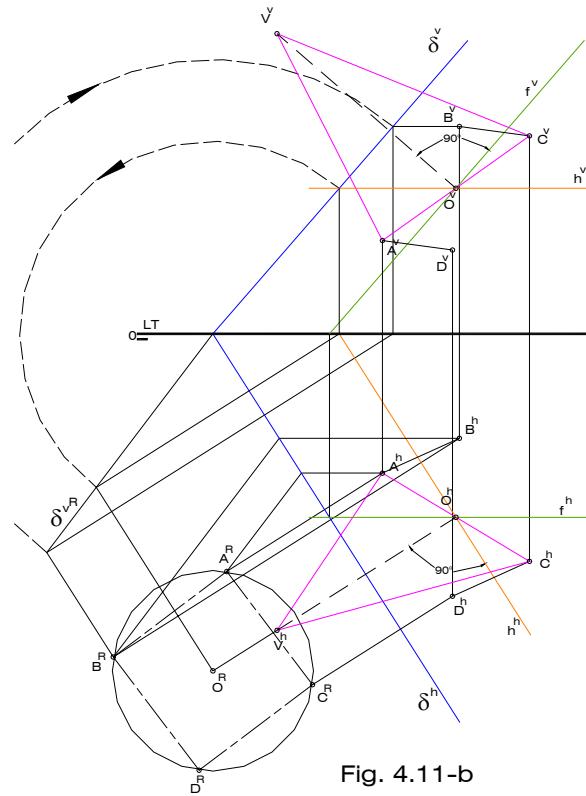


Fig. 4.11-b

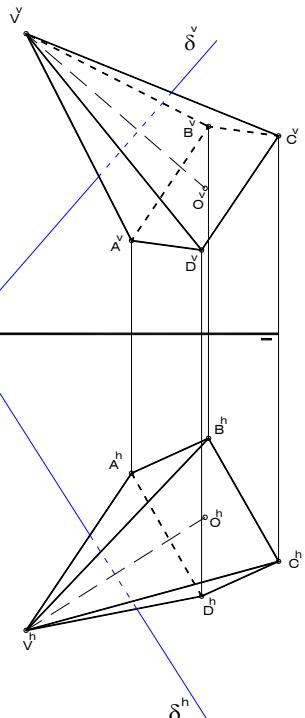


Fig. 4.11-c

Finalmente, se analiza la visibilidad de la doble proyección ortogonal de la pirámide (Fig. 4.11-c), aplicando el criterio expuesto en el punto 4.1.2, Pág. 76.

## 4.5 Poliedros regulares

Los poliedros regulares son, indudablemente, una de las formas más bellas de la geometría del espacio, no solamente por la simetría y uniformidad que presentan, sino también por las propiedades que ellos poseen.

El origen del estudio de los poliedros regulares corresponde a la escuela pitagórica, a la que los historiadores Eudemo de Rodas (315 a.C. aproximadamente) y Proclo (410-485) atribuyen el descubrimiento de los cinco poliedros regulares que existen. Los pitagóricos, quienes veían en los resultados matemáticos algo parecido a una verdad religiosa, pensaban que era muy importante la observación de que había solamente cinco poliedros regulares posibles. Muchos creen que fueron estos sabios quienes hicieron tal observación por vez primera y por eso llaman *sólidos pitagóricos* a los poliedros regulares. Sin embargo, los arqueólogos han encontrado imágenes de piedra de los sólidos de una antigüedad considerablemente mayor.

Los primeros estudios que se conocen sobre los cinco poliedros regulares se encuentran en los libros XIII y XIV de los Elementos de Euclides, en los cuales se exponen una gran cantidad de resultados acerca de estos cinco poliedros, así como una sencilla demostración de la imposibilidad de la existencia de otros. Euclides opina que Pitágoras únicamente conocía los poliedros regulares en los que convergen tres caras en cada vértice, es decir, el tetraedro, el hexaedro o cubo y el dodecaedro. Asimismo, Euclides sostiene que el descubrimiento de los otros dos se produjo en la Academia de Platón.

Se cree que fue Empédocles quien primero asoció el hexaedro, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro con la tierra, el fuego, el agua y el aire, respectivamente. Estas sustancias eran los cuatro *elementos* de los griegos antiguos. Luego Platón asoció el dodecaedro con el universo pensando que, en vista de era tan diferente de los demás debía ser la sustancia de la cual estaban hechos los planetas y las estrellas – por entonces se creía que los cuerpos celestes debían estar hechos de una sustancia distinta de la que estaban hechas las cosas en la tierra – de ahí que a los poliedros regulares se los conozca también como *sólidos platónicos*.

Platón concibió el dodecaedro como una representación del universo, buscando en su interior todas las relaciones de simetría previsibles en aquél. Basándose en esta idea, Johann Kepler construyó una cosmología según la cual las órbitas circulares de los planetas estaban en proporción con los radios de las esferas inscritas en sólidos platónicos dispuestos uno dentro de otro. No fue sino hasta que conoció las observaciones de Tycho Brahe que Kepler se dio cuenta de su error y que concluyó que los planetas se mueven describiendo trayectorias elípticas.

Un poliedro es regular cuando todas las caras que lo constituyen resultan ser polígonos regulares iguales, presentando ángulos poliédricos idénticos. Se dice que dos poliedros con el mismo número de caras son semejantes cuando la forma de sus caras poliédricas también lo es y sus ángulos poliedros resultan iguales. Este principio tiene gran importancia al relacionar los volúmenes y áreas de poliedros semejantes, de manera que las áreas están relacionadas con los cuadrados de las aristas y los volúmenes con los cubos de dichas aristas.

A continuación se presenta una descripción de cada uno de los poliedro regulares, así como también se enumeran sus principales características, pasando luego a la representación en proyección ortogonal, estudiando para cada uno de ellos las posiciones genéricas que pueden adoptar con relación a un determinado plano de proyección.

El Tetraedro está formado por cuatro triángulos equiláteros iguales, de forma que en cada vértice concurren tres de ellos; tiene cuatro vértices y seis aristas (Fig. 4.12-a).

El Octaedro está constituido por ocho caras triangulares equiláteras iguales, coincidiendo cuatro de ellas en cada vértice; posee doce aristas y seis vértices (Fig. 4.12-b).

El Icosaedro tiene veinte caras triangulares equiláteras y doce vértices, en cada uno de los cuales convergen cinco aristas (Fig. 4.12-c).

El Hexaedro está formado por seis caras cuadrangulares y doce vértices donde se produce la intersección de seis aristas (Fig. 4.12-d).

El Dodecaedro posee doce caras pentagonales y veinte vértices formados, cada uno de ellos, por la intersección de tres aristas (Fig. 4.12-e).

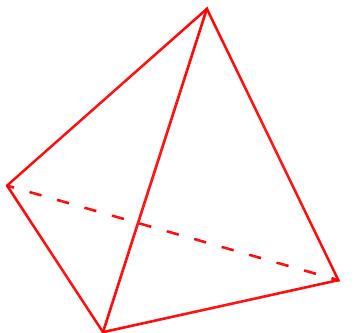


Fig. 4.12-a

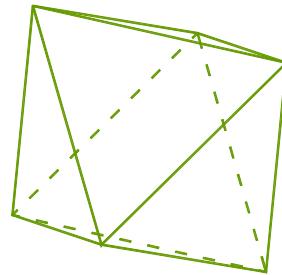


Fig. 4.12-b

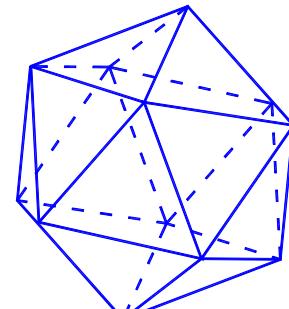


Fig. 4.12-c

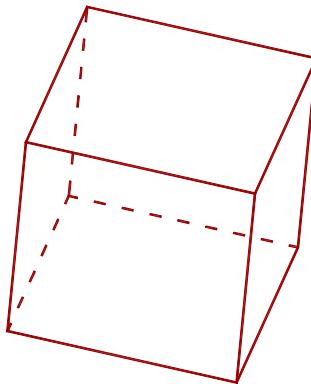


Fig. 4.12-d

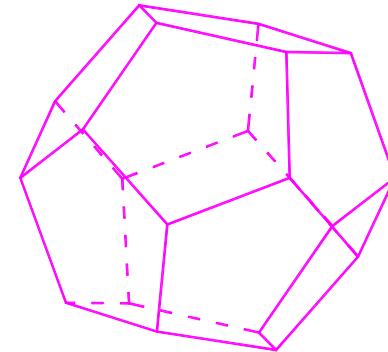


Fig. 4.12-e

Fig. 4.12: Los cinco poliedros regulares

Los poliedros regulares o platónicos son poliedros convexos, es decir, su superficie poliédrica no tiene más de dos puntos comunes a una recta que pertenezca al plano de alguna de sus caras, por lo que cumple con el Teorema de Euler, a saber:

$$C + V = A + 2$$

En esta expresión C es el número de caras, V es el número de vértices y A es el número de aristas de un poliedro.

Para determinar los posibles poliedros regulares es preciso establecer que la suma de los ángulos de las caras convergentes en un vértice de un poliedro convexo siempre debe ser menor que  $360^\circ$ , además, en cada vértice deben converger al menos tres caras. Si se

despliegan todas esas caras sobre un mismo plano que contenga al vértice considerado será posible medir dicha suma (Fig. 4.13) y al mismo tiempo establecer los poliedros regulares posibles.

Como los ángulos internos de un triángulo equilátero son iguales a  $60^\circ$  es posible agrupar en torno al vértice A tres, cuatro o cinco triángulos equiláteros iguales. De esta forma se obtienen el tetraedro, el octaedro y el icosaedro. No pueden agruparse seis triángulos, pues la suma de los ángulos es igual a  $360^\circ$  y por lo tanto no se genera un poliedro.

De igual manera pueden agruparse tres cuadrados en torno al punto A, generándose el hexaedro o cubo, en tanto que tres pentágonos dan lugar al dodecaedro. Resulta evidente que no es posible generar un poliedro regular con caras hexagonales o con polígonos regulares de más de cinco lados.

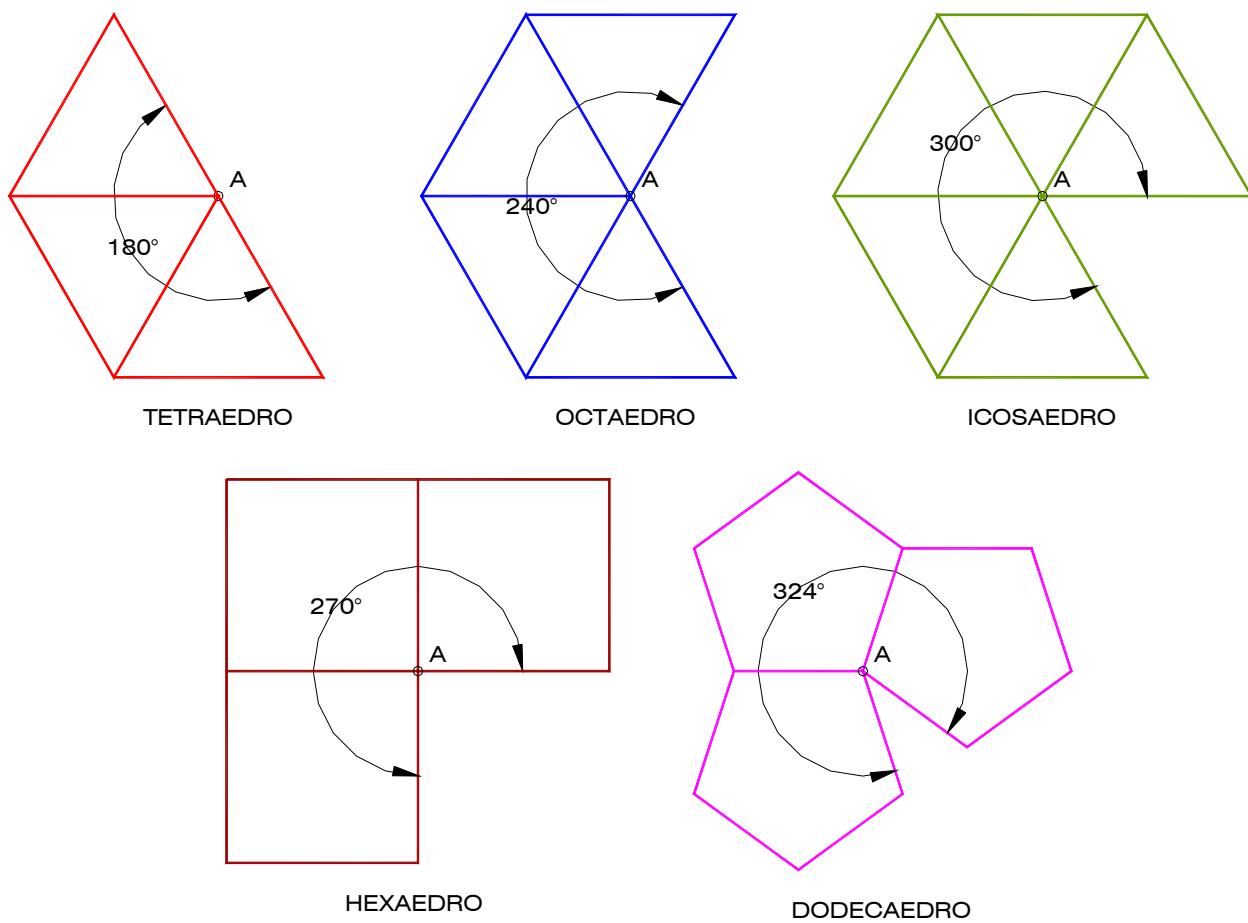


Fig. 4.13

#### 4.5.1 Propiedades de los poliedros regulares

Cada uno de los cinco poliedros regulares existentes presenta en forma simultánea las siguientes propiedades:

- Existe un único punto interior a un poliedro regular tal que su distancia con respecto a todos y cada uno de los vértices es la misma. A este punto se lo denomina *centro del poliedro O*. Se llama radio “ $r_c$ ” de un poliedro regular a la distancia que hay entre el centro y uno cualquiera de los vértices. Dicho radio es el radio de una esfera sobre

cuya superficie se encuentran todos los vértices; tal esfera recibe el nombre de *esfera circunscrita* al poliedro (Fig. 4.14-a).

- La proyección ortogonal del centro O de un poliedro regular sobre una de sus caras es siempre el centro de ésta. Por otra parte, el centro del poliedro se halla a igual distancia de todas las caras. Se llama *apotema* " $r_i$ " del poliedro a la menor distancia del centro a una cualquiera de las caras. La esfera que tienen por centro al centro del poliedro regular y radio igual al apotema se denomina *esfera inscrita* en el poliedro. Esta esfera es tangente a cada una de las caras, siendo los puntos de tangencia los centros ( $O_1, O_2, \dots, O_n$ ) de cada una de ellas, por lo tanto, las rectas definidas por el centro del poliedro y los centros de cada cara son perpendiculares a la cara respectiva (Fig. 4.14-b).
- La distancia del centro O de un poliedro regular al punto medio de cualquiera de las aristas ( $M_1, M_2, \dots, M_n$ ) es el radio " $r_t$ " de la *esfera tangente a las aristas*, siendo los puntos de tangencia los referidos puntos medios (Fig. 4.14-c).

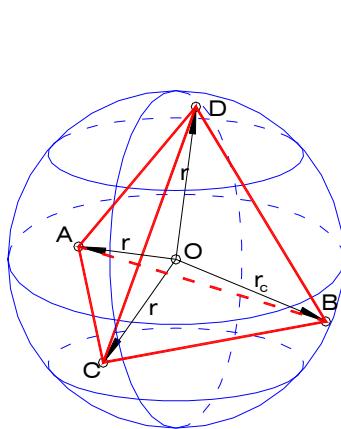


Fig. 4.14-a

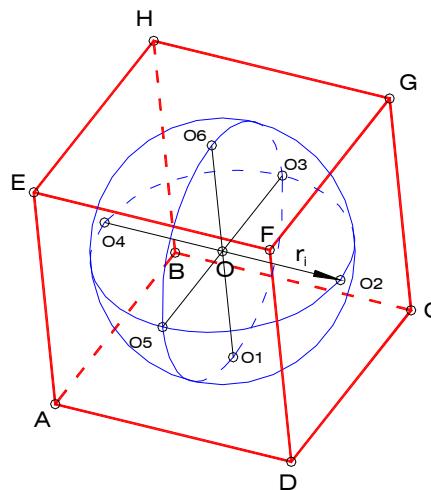


Fig. 4.14-b

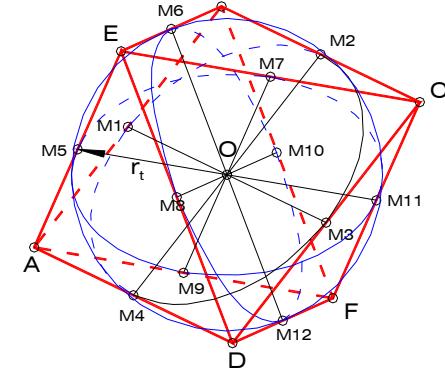


Fig. 4.14-c

- Al unir todos los vértices contiguos a un vértice dado de un poliedro regular, se forma una figura plana que constituye un polígono regular. Además, el radio correspondiente a dicho vértice es perpendicular al plano definido por el polígono y contiene al centro del mismo.
- En cada poliedro regular se identifican unas Secciones Principales, las cuales, una vez dibujadas, proporcionan todos los datos necesarios del poliedro de que se trate. Son producidas por un plano que pasa por dos aristas opuestas (hexaedro, dodecaedro e icosaedro), por una arista y el punto medio de la opuesta (tetraedro), o por una diagonal y perpendicular a dos aristas pasando por su punto medio (octaedro). De cada sección en particular se tratará en el estudio de cada uno de los poliedros regulares.
- Al unir los centros de las caras de un poliedro regular mediante líneas rectas se obtiene otro poliedro regular llamado *poliedro conjugado*. Éste tiene el mismo número de aristas que el poliedro original, en tanto que los números de caras y vértices están intercambiados. Por las condiciones de simetría que tienen los poliedros regulares se deduce con facilidad que el poliedro conjugado de un poliedro regular es otro poliedro regular.

Si se considera el poliedro conjugado del conjugado se obtiene un poliedro con el mismo número de caras, vértices y aristas que el inicial, es decir, del mismo tipo.

De esta manera, al tener el hexaedro seis caras, ocho vértices y doce aristas, su conjugado es un poliedro regular con ocho caras, seis vértices y doce aristas, es decir, un octaedro. Por lo señalado anteriormente se tiene que el conjugado de un octaedro es, a su vez un hexaedro (Fig. 4.15-a).

De forma similar, sin más que intercambiar el número de caras y el número de vértices, se tiene que el conjugado de un icosaedro es un dodecaedro y viceversa (Fig. 4.15-b).

El caso más curioso lo presenta el tetraedro, ya que su conjugado ha de tener el mismo número de caras que vértices tiene el tetraedro, es decir, cuatro. Así, el conjugado de un tetraedro es de nuevo un tetraedro (Fig. 4.15-c).

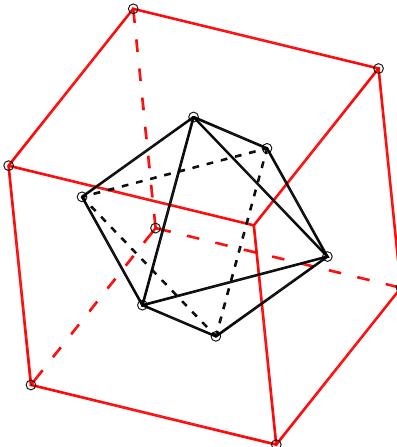


Fig. 4.15-a

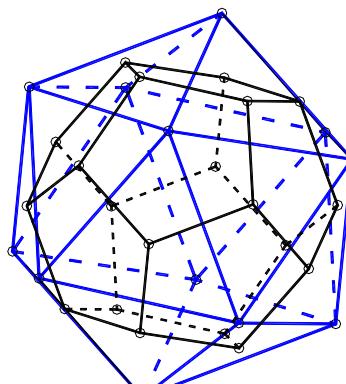


Fig. 4.15-b

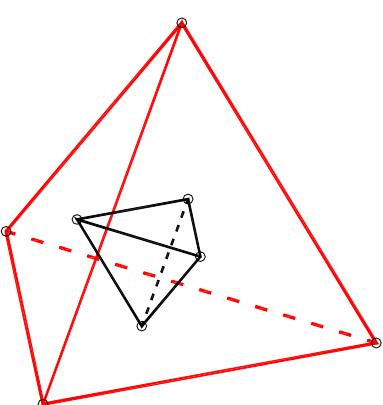


Fig. 4.15-c

## 4.5.2 El Tetraedro

El tetraedro es el poliedro regular formado por cuatro caras triangulares equiláteras, seis aristas y cuatro vértices. Dos aristas opuestas del poliedro forman entre sí noventa grados

La Sección Principal (Fig. 4.16-a) es la producida por cualquiera de los seis planos que pasan por una arista - BD en la figura - y por el punto medio de la arista opuesta. Dicho plano resulta ser perpendicular a la arista - AC en la figura - por cuyo punto medio pasa. Su forma es de triángulo isósceles, siendo el lado desigual una arista "a", en tanto que los lados iguales corresponden a dos alturas de cara "hc".

El segmento de recta definido por D y por el centro O1 de la cara ABC representa la *altura del tetraedro* "h". De forma análoga, existe una altura por cada vértice del poliedro, de manera que hay cuatro en total. En una sección principal se presentan dos alturas del tetraedro - DO1 y BO2 en la figura - las cuales son

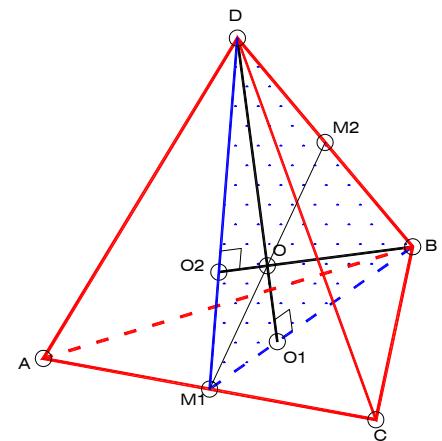


Fig. 4.16-a

perpendiculares a las alturas de cara y pasan por los extremos de la arista; el corte de dichas alturas del tetraedro no es más que el ortocentro de la sección principal.

El mencionado ortocentro no es más que el centro del tetraedro; la menor distancia de este punto a cualquiera de las alturas de cara  $BM_1$  y  $DM_1$  es el radio “ $r_i$ ” de la esfera inscrita en el sólido y corresponde a la tercera parte de la altura del poliedro. La menor distancia del centro a la arista  $BD$  constituye el radio “ $r_t$ ” de la esfera tangente a las aristas. Finalmente, la distancia de  $O$  a cualquiera de los puntos  $B$  y  $D$  es el radio “ $r_c$ ” de la esfera circunscrita y es igual a las dos terceras partes de la altura del sólido (Fig. 4.16-b). Resulta, pues, evidente que la suma de los radios de las esferas inscrita y circunscrita es igual a la altura del tetraedro. La distancia entre los puntos  $M_1$  y  $M_2$ , que es la menor distancia entre dos aristas opuestas, es el diámetro de la esfera tangente a las aristas ( $2r_t$ ). Por otra parte, el ángulo  $\psi$  formado entre ambas alturas de cara en la sección principal es el ángulo entre caras adyacentes del tetraedro.

La sección principal permite la determinación de cualquiera de las dimensiones del tetraedro a partir de una de ellas. De ahí la importancia de su conocimiento y correcta construcción, pues es la llave que abre la solución de los problemas.

Si se secciona a un tetraedro mediante un plano paralelo a dos aristas opuestas –  $AB$  y  $CD$  en la Fig. 4.17-a – y que pase por el punto medio de otra arista –  $M_1$  en la figura – se genera una cuadrado cuyos vértice son los puntos medios de las cuatro aristas del poliedro con respecto a las cuales no es paralelo el plano considerado. Esta *sección cuadrada* del tetraedro divide al sólido en dos partes exactamente iguales y su centro es el centro del poliedro.

Por otra parte, la sección producida por un plano perpendicular a una de las alturas del tetraedro –  $DO_1$  en la figura – y que pase por el punto medio ( $K$ ) de esta altura, resulta ser un triángulo equilátero, cuyos vértices son los puntos medios de tres de las aristas del sólido (Fig. 4.17-b).

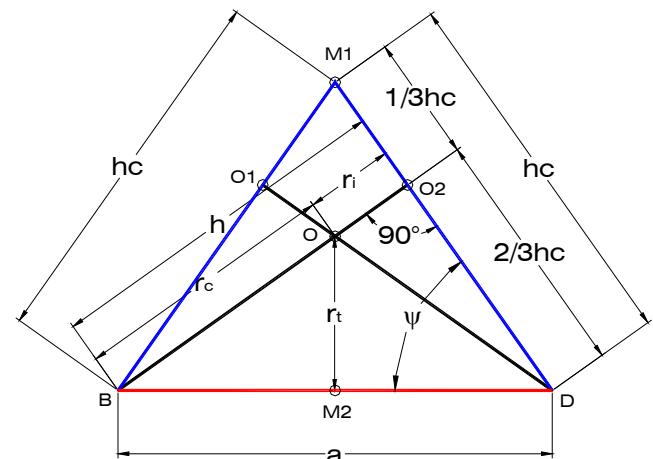


Fig. 4.16-b

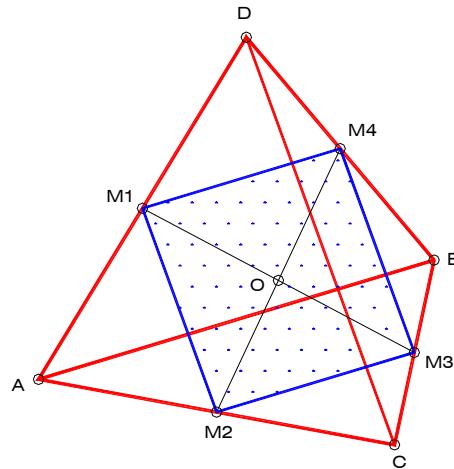


Fig. 4.17-a

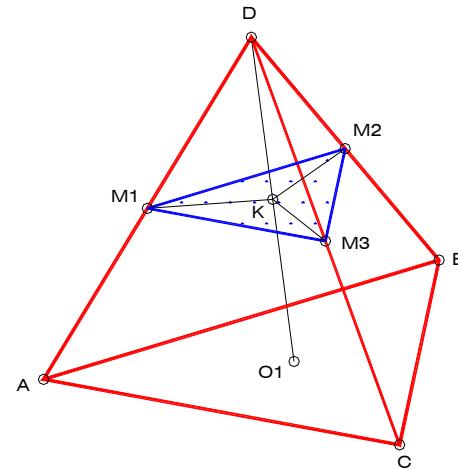


Fig. 4.17-b

#### 4.5.2.1 Proyección cilíndrica ortogonal del tetraedro

El dibujo de las proyecciones de un poliedro regular depende de la correcta identificación de su forma y características, así como del pleno conocimiento de la forma y características de su sección principal.

Existen tres posiciones notables del tetraedro con respecto a un plano de proyección e infinidad de posiciones llamadas accidentales en las que no se verifica ninguna particularidad.

##### 1) Con una cara paralela al plano de proyección (Fig. 4.18-a)

Sea el plano horizontal el plano de proyección considerado. Si una de las caras del tetraedro ABCD – la ABC en la figura – es paralela a PH, la línea de contorno aparente correspondiente resulta ser el polígono ABC, por lo que la proyección del sólido es un triángulo equilátero  $A^hB^hC^h$ . El centro de este polígono es la proyección de los puntos O<sub>1</sub>, centro de la cara ABC, y D, dado que la recta que los define es perpendicular a PH.

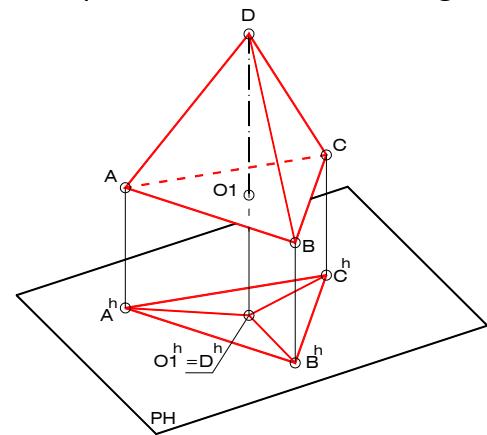


Fig. 4.18-a

##### 2) Con una arista perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.18-b)

Si una de las aristas del tetraedro, CD por ejemplo, es perpendicular al plano de proyección, la sección principal compuesta por el punto medio M<sub>2</sub> de CD y la arista AB, opuesta a CD, será paralela a dicho plano. En consecuencia, el contorno de la proyección del sólido corresponde a un triángulo isósceles, proyección a su vez de la sección principal ABM<sub>2</sub>. La arista AB resulta paralela al plano de proyección, por lo que es vista en verdadero tamaño, y a una distancia de CD igual a la longitud de M<sub>1</sub>M<sub>2</sub>, segmento éste que es también paralelo al plano de proyección.

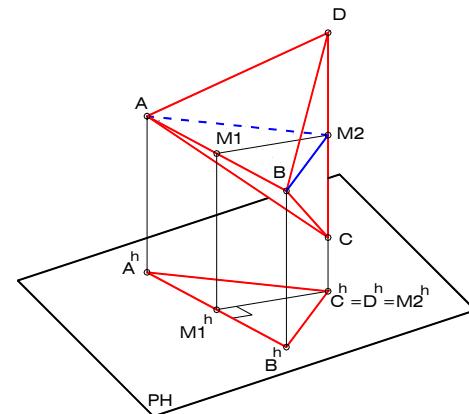


Fig. 4.18-b

##### 3) Con dos aristas opuestas paralelas al plano de proyección (Fig. 4.18-c)

Si dos aristas opuestas del tetraedro, como AD y BC, por ejemplo, son paralelas al plano de proyección considerado, sus puntos medios M<sub>1</sub> y M<sub>2</sub> se encontrarán sobre una recta perpendicular a dicho plano. Además, las aristas AD y BC se proyectarán en verdadero tamaño y formando ángulo recto. El contorno de la proyección del sólido es un cuadrado  $A^hB^hD^hC^h$  inscrito en una circunferencia de centro en la proyección de los puntos M<sub>1</sub> y M<sub>2</sub> y radio igual a la mitad de la longitud de las aristas. Los lados de este cuadrado tienen la misma longitud que el segmento M<sub>1</sub>M<sub>2</sub>, es decir, el diámetro de la esfera tangente a las aristas del tetraedro.

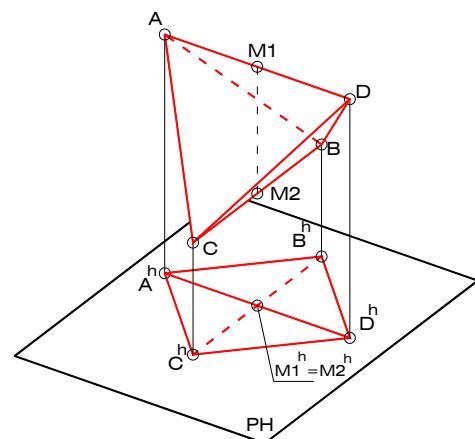


Fig. 4.18-c

**4) Posición accidental con respecto al plano de proyección (Fig. 4.18-d)**

El contorno de la proyección del tetraedro sobre un determinado plano cuando no se cumple alguna de las condiciones anteriores, corresponde a un cuadrilátero irregular. La construcción de dicha proyección exige el uso de algunos de los métodos estudiados para la determinación del verdadero tamaño de figuras planas, con la finalidad de dibujar una de las caras y/o una de las secciones principales y así hallar las dimensiones lineales del tetraedro.

Para ilustrar el proceso de construcción de la doble proyección ortogonal de un tetraedro ABCD, ubicado en posición accidental en relación a los dos planos de proyección del sistema, considérese el siguiente ejemplo: sea

M el punto medio de la arista BC del poliedro y sea "s" una recta sobre la cual se encuentra la arista AD. Estos elementos determinan un plano  $\delta$  en el cual está contenida la sección principal ADM; aplicando uno de los métodos conocidos es posible dibujar dicha sección en verdadero tamaño.

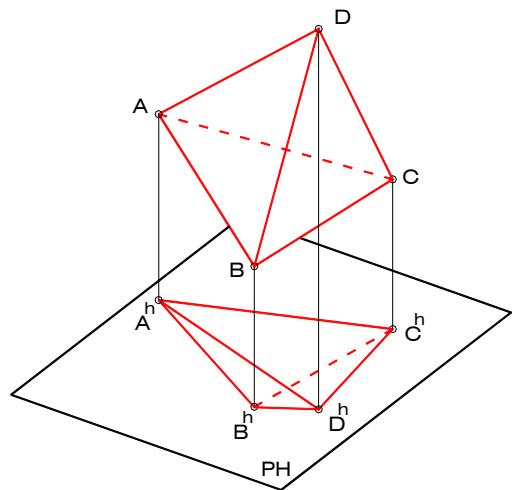


Fig. 4.18-d

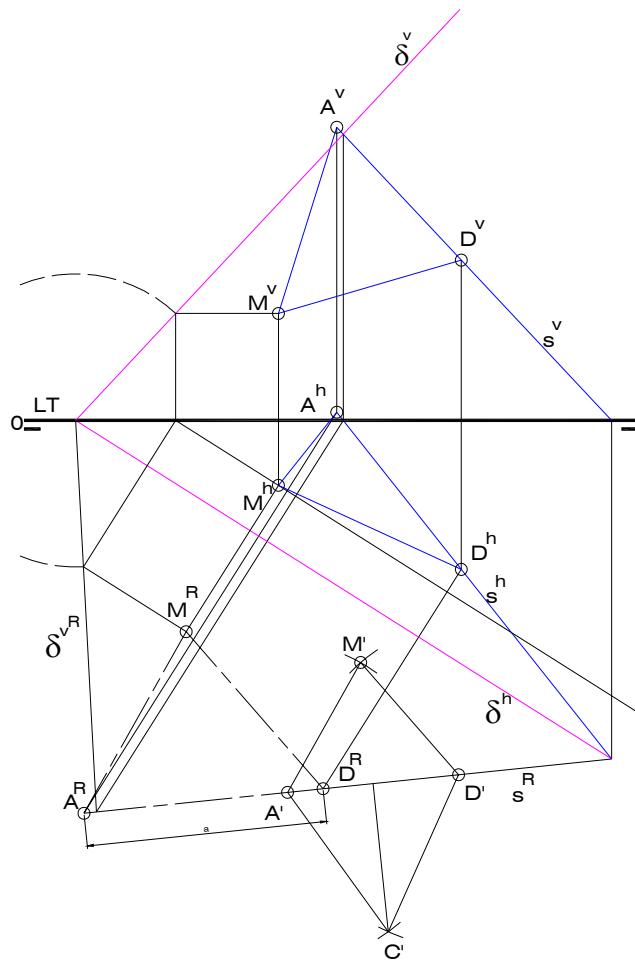


Fig. 4.19-a

Abatiendo el plano  $\delta$  sobre PH se obtienen  $s^R$  y  $M^R$ , elementos que permiten el trazado de la sección principal aprovechando la semejanza existente entre la sección principal de tetraedro ABCD y la sección principal de cualquier otro. Para ello se selecciona un segmento cualquiera  $A'D'$  sobre  $s^R$  y se construye un triángulo equilátero  $A'D'C'$ , cara de un tetraedro de tamaño arbitrario. Luego, se dibuja un triángulo isósceles de lado desigual  $A'D'$  y cuyos lados iguales tienen por longitud la altura del triángulo equilátero  $A'D'C'$ ; de esta forma se obtiene la sección principal del un tetraedro de arista  $A'D'$  (Fig. 4.19-a).

Trazando por  $M^R$  líneas paralelas a los segmentos  $M'D'$  y  $M'A'$  de la sección principal auxiliar, se obtienen, en los cortes con  $s^R$ , los puntos  $D^R$  y  $A^R$ , respectivamente, con lo cual se completa la sección principal del tetraedro sobre el plano  $\delta$  abatido. Seguidamente, se hallan las proyecciones diédricas de los puntos A y D, ambos sobre las proyecciones homónimas de la recta "s" (Fig. 4.19-a).

La arista BC, cuyo punto medio es el punto M, está sobre una recta "r" perpendicular al plano de sección

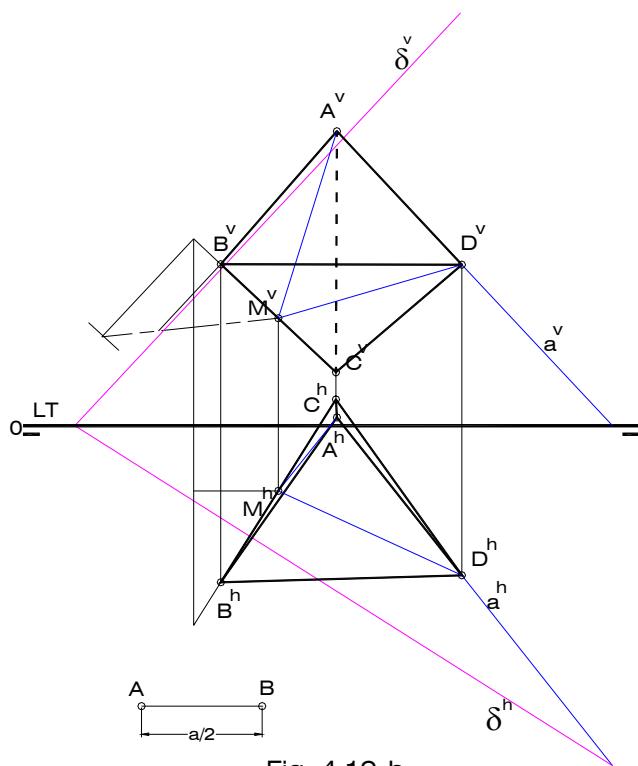


Fig. 4.19-b

principal  $\delta$ . Es necesario determinar el verdadero tamaño de un segmento de la recta "r" comprendido entre M y otro cualquiera de sus puntos, con el fin de consignar sobre él la mitad de la longitud de la arista del tetraedro, dando lugar a las proyecciones del punto B. En vista de que M es el punto medio de BC y de que el punto medio de un segmento tiene propiedad proyectiva en los sistemas cilíndricos, la determinación de las proyecciones del vértice C no tiene mayor dificultad (Fig. 4.19-b).

Finalmente, se debe analizar la visibilidad de las aristas del sólido en ambas proyecciones, aplicando el criterio estudiado en el apartado 4.1.2, Pág. 76. De esa forma se obtiene que la arista AC no es visible en proyección vertical, mientras todas las aristas son visibles en proyección horizontal.

#### 4.5.3 El Hexaedro

El hexaedro, mejor conocido como cubo, es el poliedro regular formado por seis caras cuadradas, ocho vértices y doce aristas. El ángulo entre caras adyacentes es de  $90^\circ$ , al igual que el ángulo formado entre aristas convergentes en un vértice.

La Sección Principal – seis en total – es la producida por un plano que pasa por dos aristas opuestas (AB y GH en la Fig. 4.20-a). La forma de dicha sección es de rectángulo, cuyos lados menores corresponden a dos aristas de longitud "a", en tanto que los lados mayores son dos diagonales de cara de longitud "dc". Las dos diagonales de este rectángulo son dos de las *diagonales principales* del poliedro de longitud "d", longitud ésta igual al diámetro  $2r_c$  de la esfera circunscrita al sólido, sobre cuya superficie se encuentran los ocho vértices; el corte de las diagonales principales viene a ser el centro O del hexaedro.

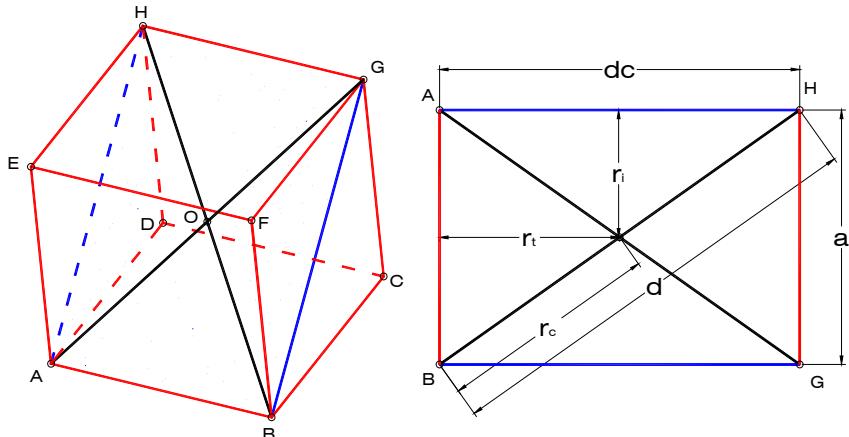


Fig. 4.20-a

Fig. 4.20-b

La menor distancia que hay entre el centro del polígono y una de las aristas es el radio  $r_t$  de la esfera tangente a dichas aristas, en tanto que la menor distancia entre O y una de las diagonales de cara corresponde al radio  $r_i$  de la esfera inscrita en el hexaedro, la cual es tangente a todas y cada una de las caras del sólido en sus centros (Fig. 4.20-b).

Si se secciona a un hexaedro mediante un plano perpendicular a una de las diagonales principales y que pase por el centro O, se obtiene un hexágono regular, cuyos vértices son puntos medios de aristas (Fig. 4.21-a). Esta *sección hexagonal* divide al sólido en dos mitades congruentes y exactamente iguales, siendo el centro de la sección el centro O del poliedro. Los lados del hexágono tienen una longitud igual a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son mitades de aristas. Ahora bien, un plano que pase por uno de los vértices del hexaedro y sea perpendicular a cualquiera de las diagonales principales, con excepción de aquella que contiene al referido punto, corta al sólido produciendo una *sección triangular equilátera* (Fig. 4.21-b) cuyo centro es el punto de intersección – K en la figura – entre la diagonal principal en cuestión y el plano secante, siendo sus vértices tres de los vértices del poliedro – E, D y B en la figura – y sus lados tres diagonales de cara. El centro de la sección se encuentra a una distancia igual a  $1/3d$  de uno de los vértices extremos (A) de la diagonal principal y, como es obvio a  $2/3d$  del otro (G).

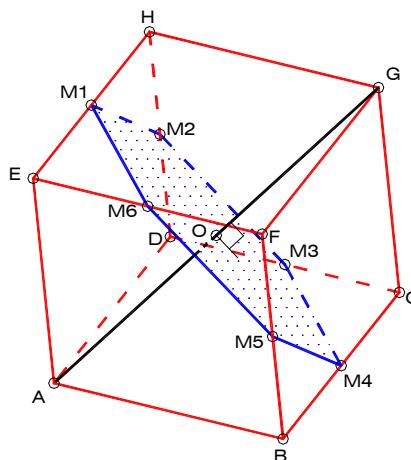


Fig. 4.21-a

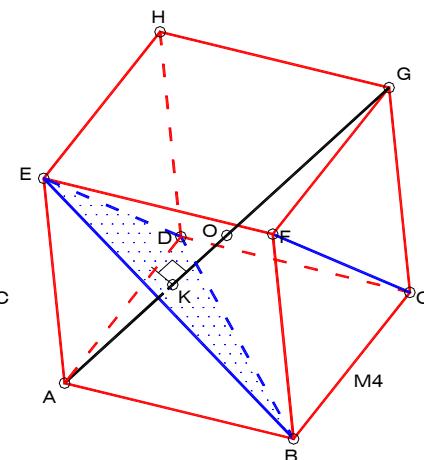


Fig. 4.21-b

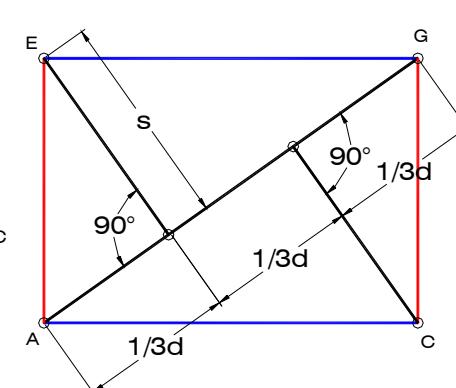


Fig. 4.21-c

De lo anterior se deduce lo siguiente: si en la sección principal se trazan perpendiculares a la diagonal principal por los vértices del rectángulo (Fig. 4.21-c), se obtienen puntos (K y L) que dividen a dicha diagonal en tres partes iguales. La distancia "s" corresponde a la menor distancia entre un vértice y la diagonal principal del hexaedro.

#### 4.5.3.1 Proyección cilíndrica ortogonal del hexaedro

##### 1) Con una cara paralela al plano de proyección (Fig. 4.22-a)

Si una de las caras del hexaedro ABCDEFGH – la ABCD en la figura – es paralela al plano de proyección, la línea de contorno aparente correspondiente resulta ser la cara ABCD, por lo tanto, la proyección del poliedro es el cuadrado  $A^hB^hC^hD^h$ .

El centro de este polígono es la proyección del centro del hexaedro y sus lados son de longitud igual a las aristas. Los cuatro vértices restantes del sólido, es decir, E, F, G y H, se confunden en la proyección con A, B, C y D, respectivamente, debido a que las aristas AE, BF, CG y DH son perpendiculares al plano de proyección.

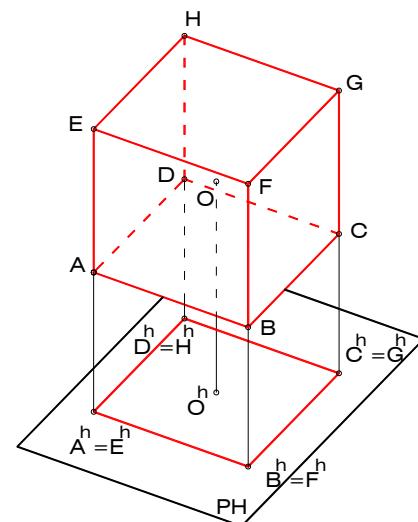


Fig. 4.22-a

**2) Con una sección principal perpendicular al plano de proyección y una arista de la sección paralela a dicho plano** (Fig. 4.22-b)

Considérese a la sección principal AEGC en un plano perpendicular a PH, y a la arista AE – y por lo tanto también CG – de dicha sección paralela a PH.

El contorno de la proyección horizontal del hexaedro es un rectángulo que corresponde a una sección principal, aquella que es perpendicular a la primera y por lo tanto paralela a PH (BDHF en la figura). Los vértices A y C del poliedro se confunden en la proyección, al igual que E y G.

**3) Con una diagonal principal perpendicular al plano de proyección** (Fig. 4.22-c)

Si el hexaedro se encuentra en una posición tal que una de sus diagonales principales, la AG, por ejemplo, es perpendicular al plano de proyección considerado, las secciones triangulares BDE y CHF se proyectan en verdadero tamaño, por ser ellas perpendiculares a la diagonal principal AG.

El contorno de la proyección del sólido es el hexágono regular  $B^hF^hE^hH^hD^hC^h$ , cuyo centro es la proyección de los vértices A y G y de radio y lados de longitud “s”, menor distancia entre los vértices del sólido y la diagonal AG.

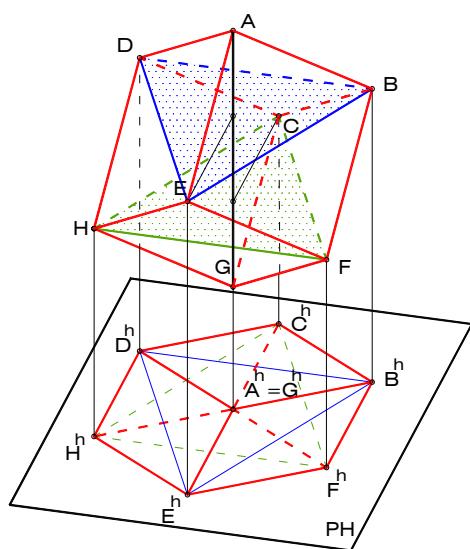


Fig. 4.22-c

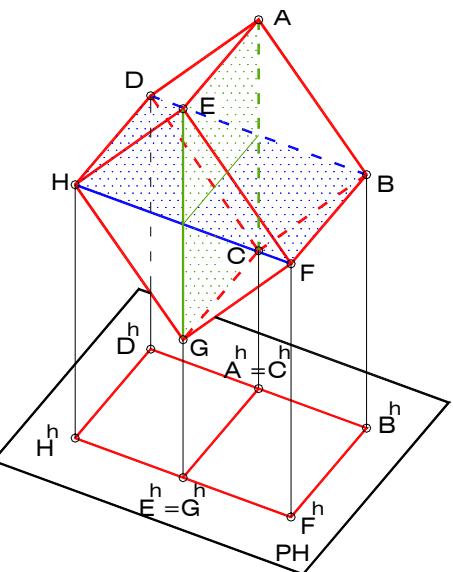


Fig. 4.22-b

Los vértices A y G son el más alto y el más bajo, respectivamente, en la figura; los otros seis vértices se encuentran en dos grupos (secciones triangulares BDE y CHF) sobre planos situados a una distancia igual a la tercera parte de la longitud de la diagonal principal, medida a partir de A y G.

**4) Posición accidental con respecto al plano de proyección** (Fig. 4.22-d)

Existen infinitas posiciones que puede adoptar el hexaedro con relación a un plano de proyección tales que no se cumple ninguna de las condiciones señaladas en los puntos anteriores. En esos casos, el contorno de la proyección del sólido sobre dicho plano resulta ser un hexágono irregular, haciéndose indispensable la aplicación de alguno de los métodos en la construcción de caras o secciones principales para así encontrar las proyecciones de todos y cada uno de los vértices del poliedro.

Considérese el siguiente ejemplo, el cual ilustra el proceso de construcción de la doble proyección ortogonal de un hexaedro en posición accidental con respecto a PV y PH, siendo el punto O el centro del

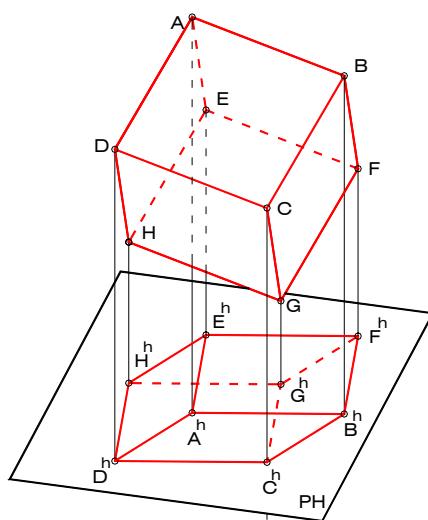


Fig. 4.22-d

sólido y A uno de sus vértices y sabiendo que el plano  $\delta$  que contiene a la sección principal ACGE forma  $90^\circ$  con el plano horizontal.

En primer lugar, es necesario construir la sección principal ACGE sobre el plano  $\delta$  (proyectante horizontal que contiene a los puntos O y A). Para ello se ha generado una nueva proyección sobre un plano paralelo a  $\delta$  en la cual se dibujado la sección  $A^2C^2G^2E^2$  en verdadero tamaño (Fig. 4.23-a).

Para dibujar esta sección principal es necesario recurrir al trazado auxiliar de la sección principal (Fig. 4.23-b) de un hexaedro arbitrario, partiendo de un cuadrado de lado "a" y diagonal "dc", elementos con los cuales se construye el rectángulo  $A'C'G'E'$ . A continuación se determina el punto de corte de las diagonales de dicho rectángulo, punto que viene a ser el centro O del hexaedro, y se construye una circunferencia de centro en O y radio igual al segmento OA del problema. Finalmente, prolongando las diagonales del rectángulo  $A'C'G'E'$  se obtienen, en los cortes con la circunferencia los vértices A, C, G y E de la sección principal correspondiente al hexaedro que se desea construir.

La sección principal así construida debe ser copiada convenientemente en la proyección auxiliar, para lo cual se apela al trazado de uno cualquiera de los triángulos que conforman al rectángulo ACGE (AOE en la figura).

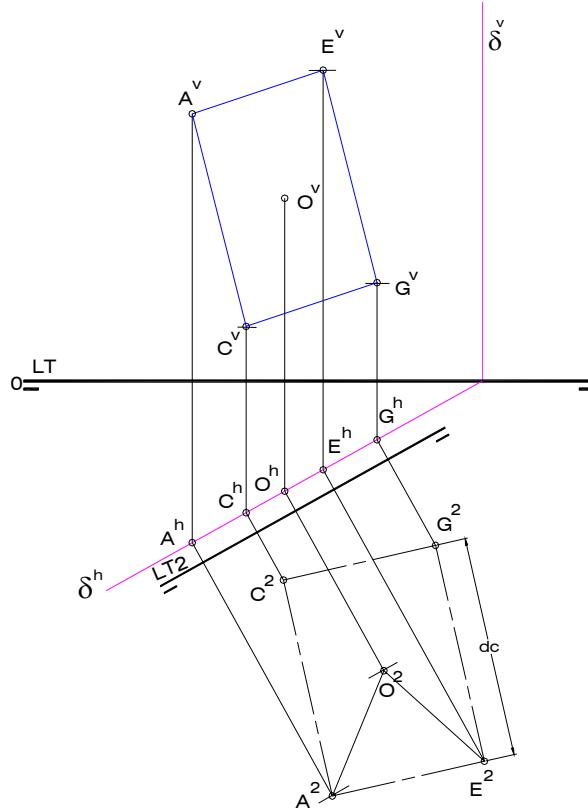


Fig. 4.23-a

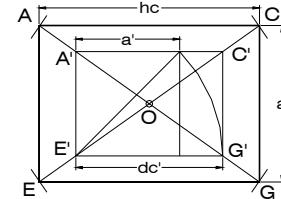


Fig. 4.23-b

Una vez hallada la doble proyección ortogonal de los vértices C, G y D del sólido, se determinan los puntos medios de las diagonales de cara AC y EG, los cuales corresponden a los centros O<sub>1</sub> y O<sub>2</sub> de las caras ABCD y EFGH, respectivamente.

Analizando las características del hexaedro y las relaciones geométricas existentes entre sus elementos, es muy fácil darse cuenta de que las rectas que contienen a las diagonales de cara DB y HF son perpendiculares al plano  $\delta$  que contiene a la sección principal ACGE. Por lo tanto, trazando dichas rectas por los puntos O<sub>1</sub> y O<sub>2</sub>, puntos medios de DB y HF, respectivamente, y consignando sobre ellas una longitud igual a la mitad de la diagonal de cara a cada lado de tales puntos, se obtienen las proyecciones de D, B, G y H, con lo cual se completan los vértices del sólido (Fig. 4.23-c).

Por último, se debe analizar la correspondiente visibilidad, aplicando el criterio ya establecido (Pág. 76).

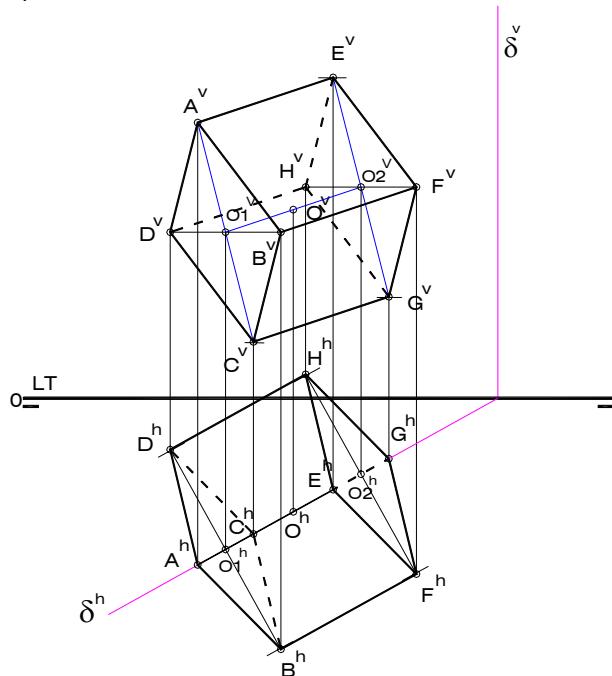


Fig. 4.23-c

#### 4.5.4 El Octaedro

El octaedro es el poliedro regular constituido por ocho caras triangulares equiláteras, seis vértices y doce aristas. Puede ser interpretado como la unión de dos pirámides idénticas e invertidas con respecto a sus bases cuadradas, siendo las aristas básicas iguales en tamaño a las laterales.

Cada una de las seis Secciones Principales son producidas por planos que pasan por una diagonal - EF en la figura - y son perpendiculares a dos aristas opuestas - AB y CD en la figura - en sus puntos medios (Fig. 4.24-a). La forma de la sección principal es de rombo, cuyos lados corresponden a cuatro alturas de cara "hc", siendo su diagonal menor un segmento de longitud igual a la de las aristas "a", en tanto que su diagonal mayor es una diagonal "d" del poliedro. El punto de corte de ambas diagonales del rombo viene a ser el centro O del sólido; los extremos de la diagonal mayor son dos vértices opuestos E y F y los extremos de la diagonal menor son los puntos medios de dos aristas opuestas M<sub>1</sub> y M<sub>2</sub>.

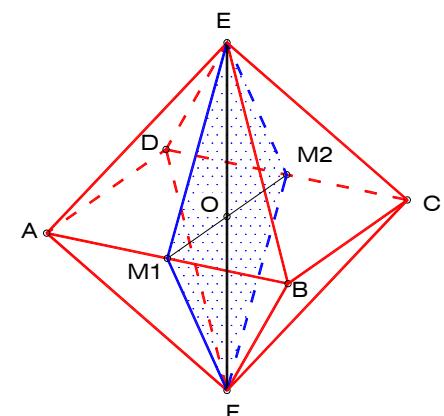


Fig. 4.24-a

El ángulo  $\psi$  formado entre dos alturas de cara en la sección principal es el mismo ángulo entre caras adyacentes del poliedro.

La distancia que hay entre O y uno de los vértices es el radio  $r_c$  de la esfera circunscrita al octaedro, en tanto que la menor distancia entre O y una de las alturas de cara corresponde al radio  $r_i$  de la esfera inscrita en el sólido. Por otra parte, la distancia entre O y cualquiera de los puntos medios (M1 o M2) de las aristas es el radio  $r_t$  de la esfera tangente a las aristas (Fig. 4.24-b).

Un plano perpendicular a una diagonal y que pase por el centro del octaedro genera una *sección cuadrada o sección diagonal*, la cual divide al poliedro en dos sólidos congruentes idénticos: dos pirámides de base cuadrada. El centro de la sección es el propio centro del sólido, en tanto que sus vértices son cuatro de los vértices del mismo – A, B, C y D en la figura – de manera que los lados de la sección son aristas del octaedro (Fig. 4.25-a).

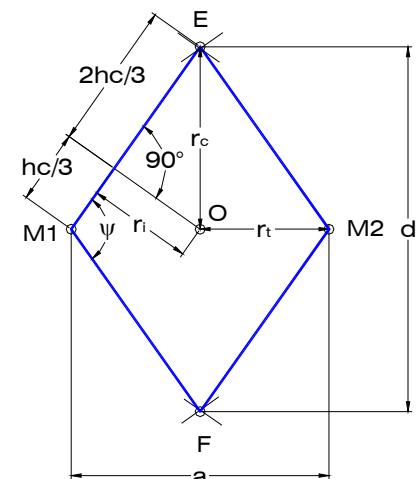


Fig. 4.24-b

De igual manera es posible obtener una sección cuadrada mediante el corte de un plano perpendicular a una diagonal – AE en la figura – y que pase por el punto medio K del segmento comprendido entre el centro del sólido y uno de los extremos de dicha diagonal. Los vértices de la sección cuadrada resultante son los puntos medios de cuatro aristas convergentes en un vértice del octaedro (Fig. 4.25-b) y su centro es el mencionado punto K.

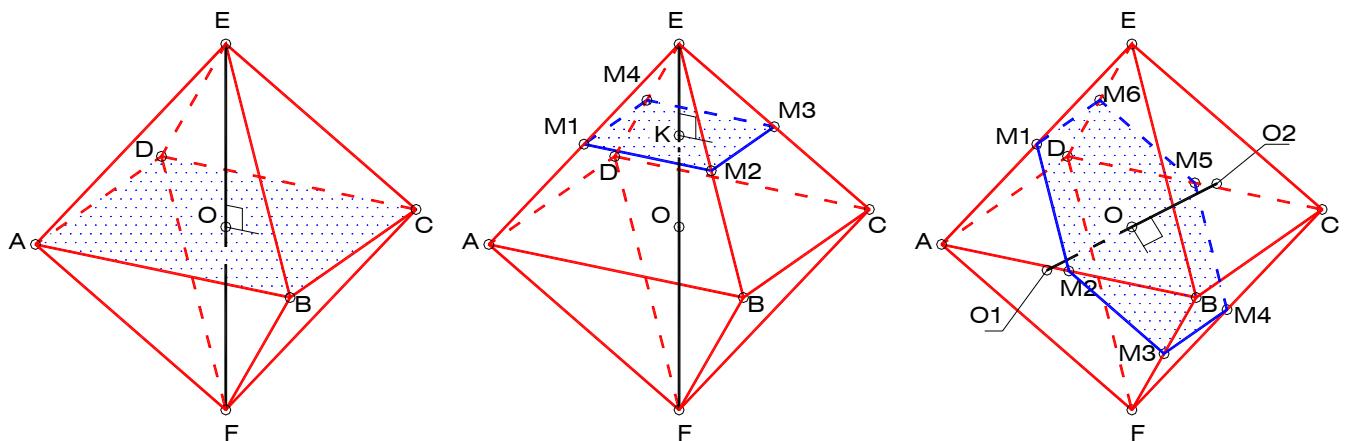


Fig. 4.25-a

Fig. 4.25-b

Fig. 4.25-c

Por otra parte, el corte producido por un plano que pase por el centro O del sólido y sea paralelo a una de las caras – BCE en la figura – produce una *sección hexagonal regular*, cuyos vértices corresponden a puntos medios de aristas y de centro igual al del octaedro. El plano de esta sección resulta ser perpendicular a la recta que pasa por los centros (O1 y O2) de dos caras opuestas (Fig. 4.25-c).

#### 4.5.4.1 Proyección cilíndrica ortogonal del octaedro

##### 1) Con una cara paralela al plano de proyección (Fig. 4.26-a)

Si una de las caras de un octaedro ABCDEF – la ECD en la figura – es paralela al plano de proyección, también lo será la cara opuesta, por lo que la proyección de ambas caras sobre el plano considerado corresponde a dos triángulos equiláteros de igual centro e invertidos, cuyos lados tienen una longitud “a”. El contorno de la proyección del poliedro será, entonces, un hexágono regular.

La diferencia de altura entre los triángulos ECD y AFB de la figura es igual a la menor distancia entre las dos caras opuestas, lo que es igual al diámetro de la esfera inscrita en el sólido  $2r_i$ .

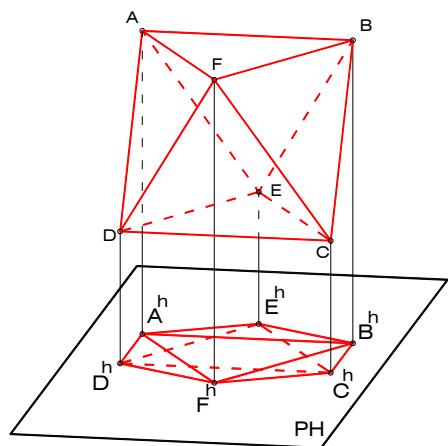


Fig. 4.26-a

##### 2) Con una arista perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.26-b)

Si una de las aristas del octaedro – AD en la figura – es perpendicular al plano de proyección considerado, el contorno de la proyección del sólido corresponde a una sección principal, aquella que es perpendicular a dicha arista. Por otra parte, un par de aristas opuestas – AB y CD – son paralelas al plano de proyección y se proyectan sobre una misma línea, ya que el plano de la sección diagonal correspondiente es perpendicular al de proyección.

Los vértices del sólido se encuentran en tres niveles de altura; la diferencia de altura entre los más altos – A y B – y los más bajos – C y D – es igual a la longitud de las aristas, en tanto que los vértices restantes – E y F – se encuentran a una distancia igual a la mitad de dicha longitud por debajo de los más altos.

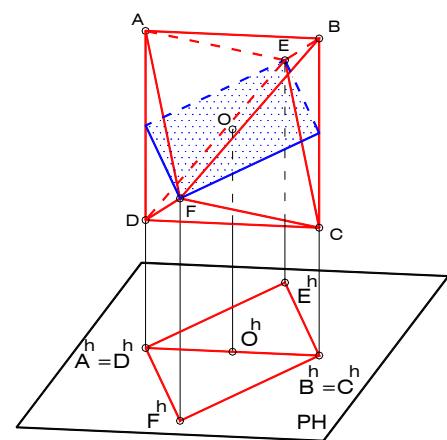


Fig. 4.26-b

##### 3) Con una diagonal perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.26-c)

Es evidente que si una de las diagonales del octaedro – EF en la figura – es perpendicular al plano de proyección de referencia (PH), el contorno de la proyección del sólido es un cuadrado correspondiente a una sección diagonal – ABCD – cuyos lados tienen igual longitud que las aristas del poliedro, mientras que en su centro coinciden las proyecciones de los extremos – E y F – de la diagonal perpendicular a PH.

La diferencia de altura entre los vértices A, B, C y D que conforman el contorno de la proyección y cada uno de los extremos de la diagonal EF, es igual a la mitad de la longitud de ésta, es decir, el radio de  $r_c$  de la esfera circunscrita al sólido.

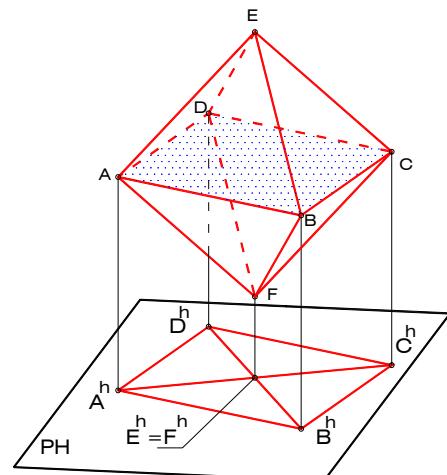


Fig. 4.26-c

**4) Posición accidental con respecto al plano de proyección** (Fig. 4.26-d)

Existen infinidad de posiciones del octaedro con respecto a un determinado plano de proyección en las cuales nos se verifica alguna de las condiciones anteriores. En tales circunstancias, el contorno de la proyección correspondiente del poliedro es siempre un cuadrilátero irregular de lados opuestos paralelos (paralelogramo).

El siguiente es un ejemplo de aplicación al sistema diédrico: sea el punto A un vértice de un octaedro y sea "r" una recta sobre la cual se encuentra la diagonal del sólido EF; se pide construir la doble proyección ortogonal y determinar la correspondiente visibilidad.

La sección diagonal ABCD se encuentra contenida en un

plano  $\pi$  perpendicular a la recta "r". Dicho plano debe ser construido dibujando las proyecciones de una frontal y una horizontal perpendiculares a "r", dada la condición de recta oblicua que ésta tiene. El punto de intersección entre la recta "r" y el plano  $\pi$  es el centro de la sección diagonal ABCD y, por lo tanto, el centro del octaedro.

Fig. 4.26-d

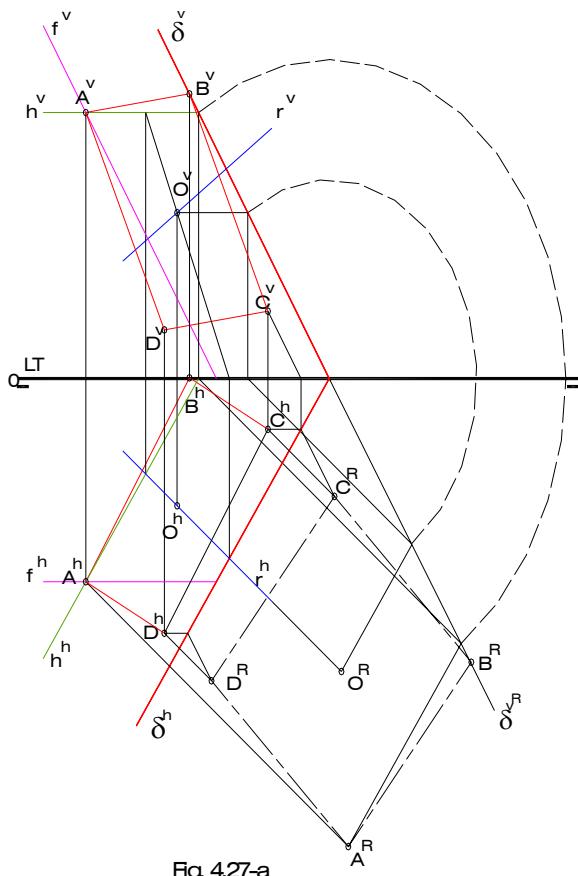


Fig. 4.27-a

b). Este trazado debe ser realizado aparte, ya que no forma parte de las proyecciones o de los métodos auxiliares que, como el abatimiento, se emplean en la ejecución del ejercicio.

Una vez determinado el verdadero tamaño de un segmento OX de la recta "r", lo cual

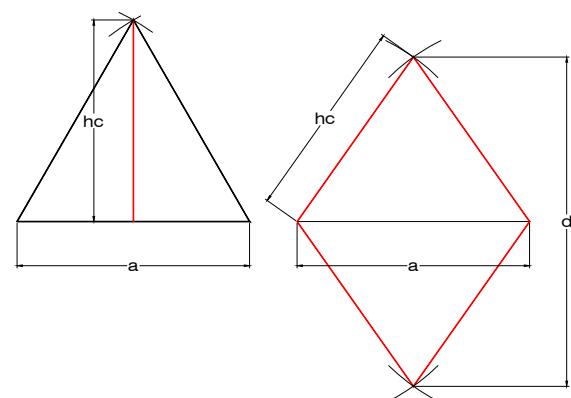
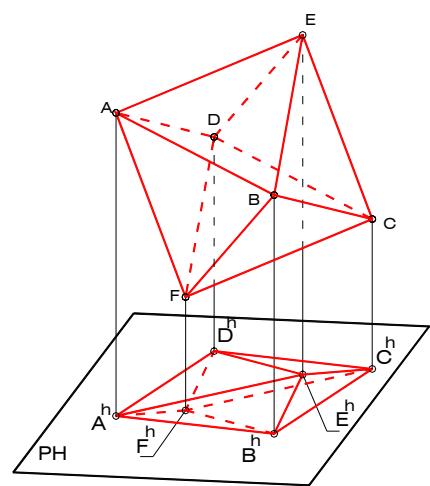


Fig. 4.27-b

se ha realizado aplicando abatimiento, se procede a consignar la mitad de la longitud "d" sobre dicho verdadero tamaño, dando lugar al vértice E de la diagonal del poliedro contenida en la recta "r".

Seguidamente, se hallan las proyecciones del otro extremo de la diagonal (F) copiando del otro lado de O y sobre "r" la distancia OE. Esta operación se puede realizar en las proyecciones diédricas, sin tener que utilizar el verdadero tamaño, dada la propiedad proyectiva que tiene el punto medio (O) de un segmento en cualquiera de los sistemas cilíndricos.

Finalmente, se unen mediante líneas rectas las proyecciones de los diferentes vértices del poliedro (Fig. 4.27-c), aplicando un razonamiento lógico, para luego analizar la visibilidad de las aristas del sólido, mediante la comparación de la cota y el vuelo de sus vértices y (ver Pág. 76).

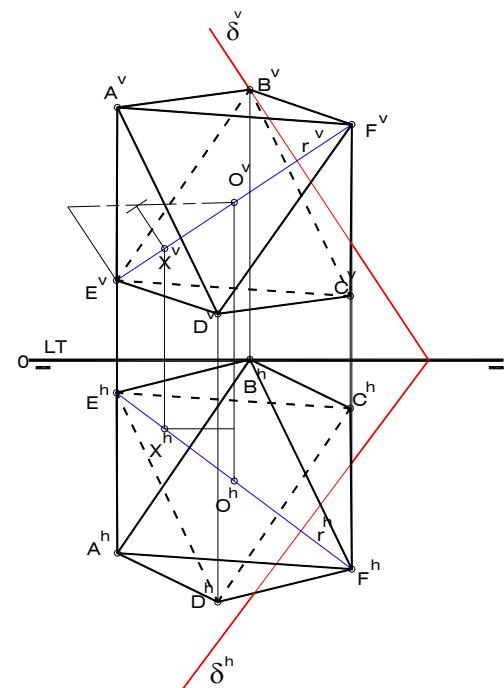


Fig. 4.27-c

#### 4.5.5 El Dodecaedro

Este poliedro regular está conformado por doce caras pentagonales regulares, veinte vértices y treinta aristas. Existe paralelismo entre las caras opuestas del sólido, al igual que entre los pares de aristas opuestas.

La sección principal del dodecaedro - quince en total - es generada por un plano que contiene a dos aristas opuestas y tiene forma de hexágono irregular, el cual posee dos lados opuestos iguales de longitud "a" - arista del poliedro - y otros cuatro lados iguales cuya longitud es la de la altura de cara del sólido (Fig. 4.28-a), siendo las dos diagonales mayores de la sección, dos de las diagonales del dodecaedro. Por otra parte, cada plano de sección principal es perpendicular a una de las diagonales del poliedro, como es el caso de IQ en la figura.

La distancia "w" entre las dos aristas de la sección principal es igual a la diagonal de un pentágono cuyo lado es igual a la diagonal "d" de una cara (Fig. 4.28-b). Dicha distancia es también el diámetro  $2r_t$  de la esfera tangente a las aristas del dodecaedro. La menor distancia del centro O de sección - que es el mismo centro del sólido - a cualquiera de las cuatro alturas de cara es el radio  $r_i$  de la esfera inscrita en el poliedro, en tanto que la distancia del punto O a

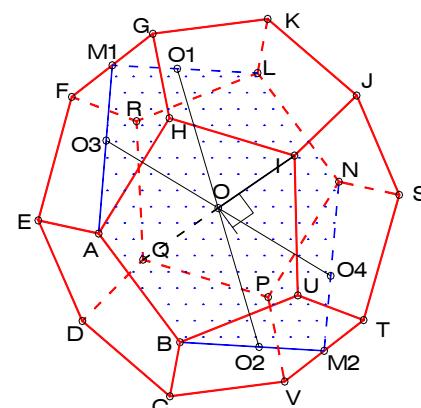


Fig. 4.28-a

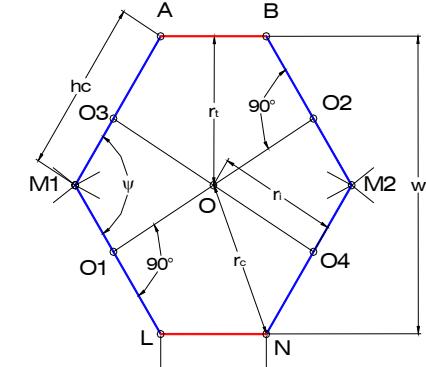


Fig. 4.28-b

cualquier vértice es el radio  $r_c$  de la esfera circunscrita al sólido. El doble de esta distancia es igual a la longitud de las diagonales del poliedro (AN y BL en la figura).

Una línea perpendicular a dos alturas de cara trazada por el centro O, corta a dichas alturas en sus respectivos centros de cara.

El ángulo  $\psi$  formado entre dos alturas de cara en la sección principal es el ángulo entre las caras adyacentes del dodecaedro.

En la Fig. 28-c se ilustra el método de construcción de la sección principal de un dodecaedro, partiendo de la longitud de una arista del sólido.

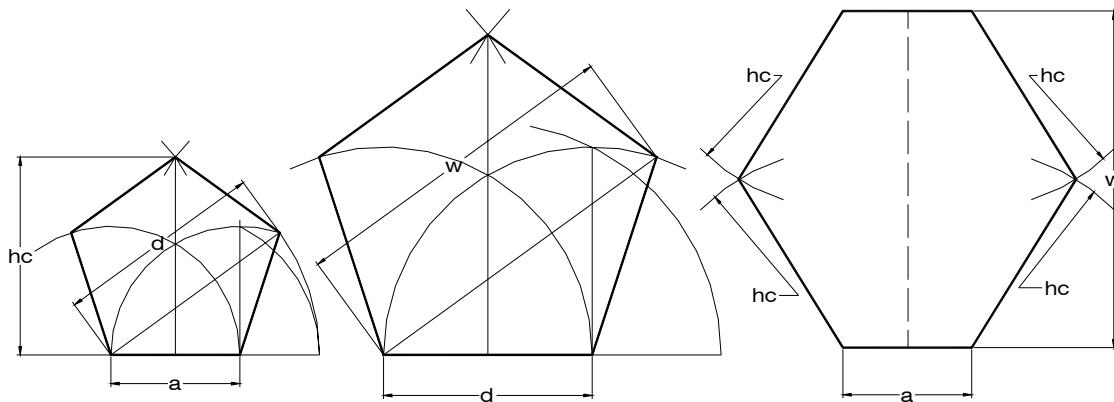


Fig. 4.28-c

Sea un plano perpendicular a una de las diagonales del dodecaedro – RP en la Fig. 4.29-a – que pasa por uno de los vértices; la sección generada de esta manera es un triángulo equilátero de lados iguales a las diagonales de tres caras convergentes en uno de los extremos (R) de la diagonal en cuestión. Las veinte *secciones triangulares* posibles conforman un icosaedro.

Si se construye un plano perpendicular a una de las diagonales del dodecaedro y que pase por el centro del sólido, se produce una *sección hexagonal regular*, cuyos vértices corresponden a puntos medios de aristas, tal y como se muestra en la Fig. 4.29-b.

Un plano que pase por el centro del dodecaedro y que sea perpendicular a la recta definida por los centros de dos caras opuestas, corta al sólido según un decágono regular de vértices en diez de los puntos medios de las aristas del poliedro (Fig. 4.29-c).

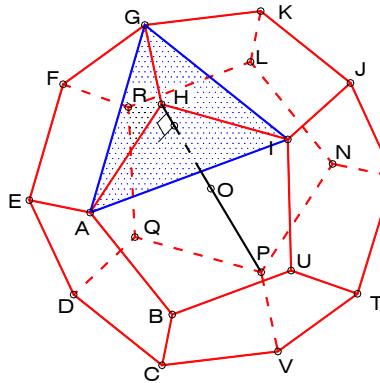


Fig. 4.29-a

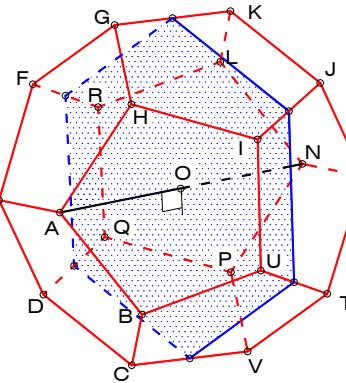


Fig. 4.29-b

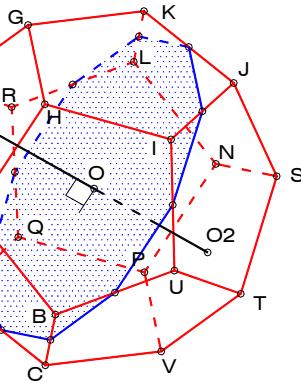


Fig. 4.29-c

#### 4.5.5.1 Proyección cilíndrica ortogonal del dodecaedro

##### 1) Con una cara paralela al plano de proyección (Fig. 4.30-a)

Si una de las caras del dodecaedro -NSTVP en la figura - es paralela al plano de proyección, también lo será la cara opuesta - AEFGH en la figura - y, en consecuencia, la proyección de ambas caras sobre el plano considerado corresponde a dos pentágonos regulares concéntricos e invertidos, cuyos lados tienen una longitud "a". El radio "r" de la circunferencia que circunscribe a estos polígonos es igual al radio de la circunferencia que circunscribe a una de las caras del dodecaedro.

El contorno de la proyección del sólido es un decágono regular inscrito en una circunferencia de radio "s" igual a la menor distancia que separa a uno de los vértices (B o L) de una de las secciones principales perpendiculares a PH de la línea definida, en esa misma sección, por dos centros de caras opuestas (O1 y O2). Los vértices del decágono se encuentran en la prolongación de los radios correspondientes a los vértices de la proyección de las caras paralelas a PH.

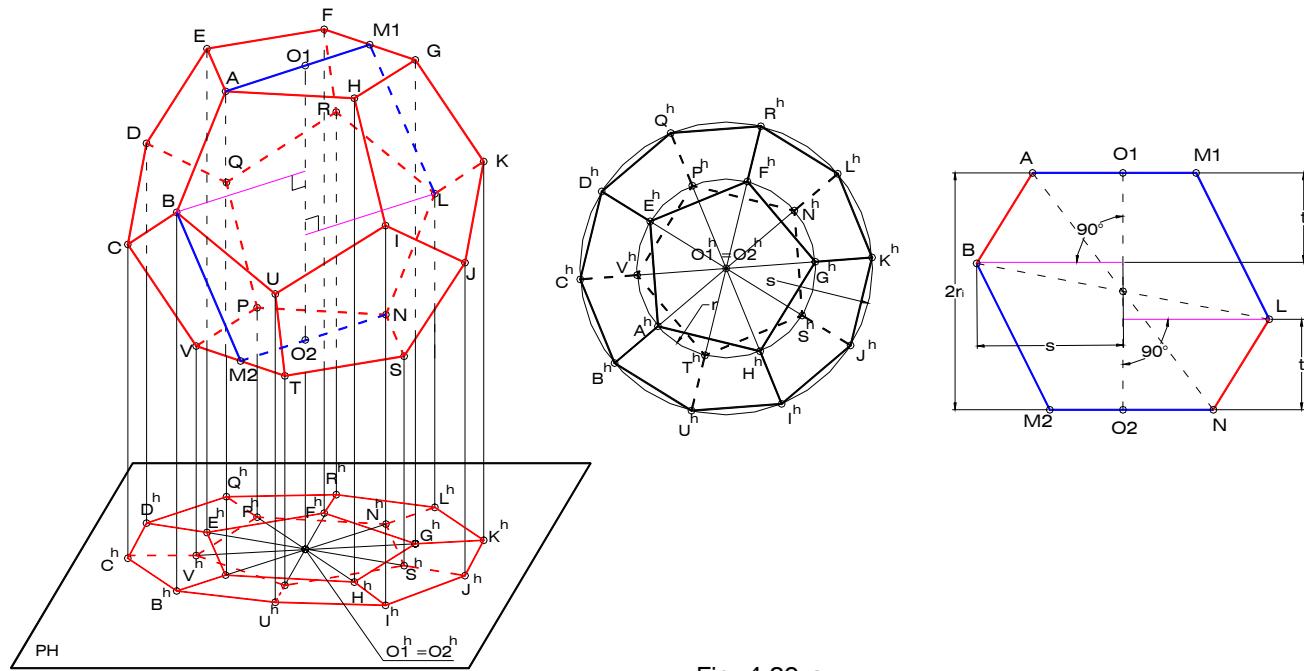


Fig. 4.30-a

En la parte derecha de la Fig. 4.30-a se ha representado una de las secciones principales perpendiculares a PH; analizando el polígono resulta evidente que la diferencia de altura entre las caras paralelas a PH es igual a la longitud del segmento O1O2, correspondiente al diámetro  $2r_i$  de la esfera inscrita en el sólido. Por otra parte, los demás vértices del dodecaedro se encuentran en dos niveles de altura: los vértices C, Q, L, J y U se hallan a una distancia "t" por encima de la cara NSTVP, en tanto que los vértices B, D, R, K e I se ubican a la misma distancia "t" por debajo de la cara AEFGH.

**2) Con una arista perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.30-b)**

En la figura se muestra la perspectiva de un dodecaedro con una de sus aristas, y por lo tanto su opuesta, perpendicular al plano de proyección horizontal. La sección principal del sólido que contiene a estas aristas - FR y TU en la figura - resulta ser perpendicular a PH, en tanto que la sección principal del poliedro que pasa por sus puntos medios M1 y M2 y por las aristas CD y JK es paralela a ese plano; el contorno de la proyección del dodecaedro corresponde, en consecuencia, a la proyección de esta sección.

Existe otra sección principal perpendicular a PH, la cual pasa por las aristas AH y PN, siendo éstas últimas, además, paralelas a PH. La diferencia de altura existente entre este par de aristas es igual al diámetro  $2r_t$  de la esfera inscrita en el sólido. En la parte derecha de la Fig. 4.30-b se ha realizado el trazado de esta sección en verdadero tamaño.

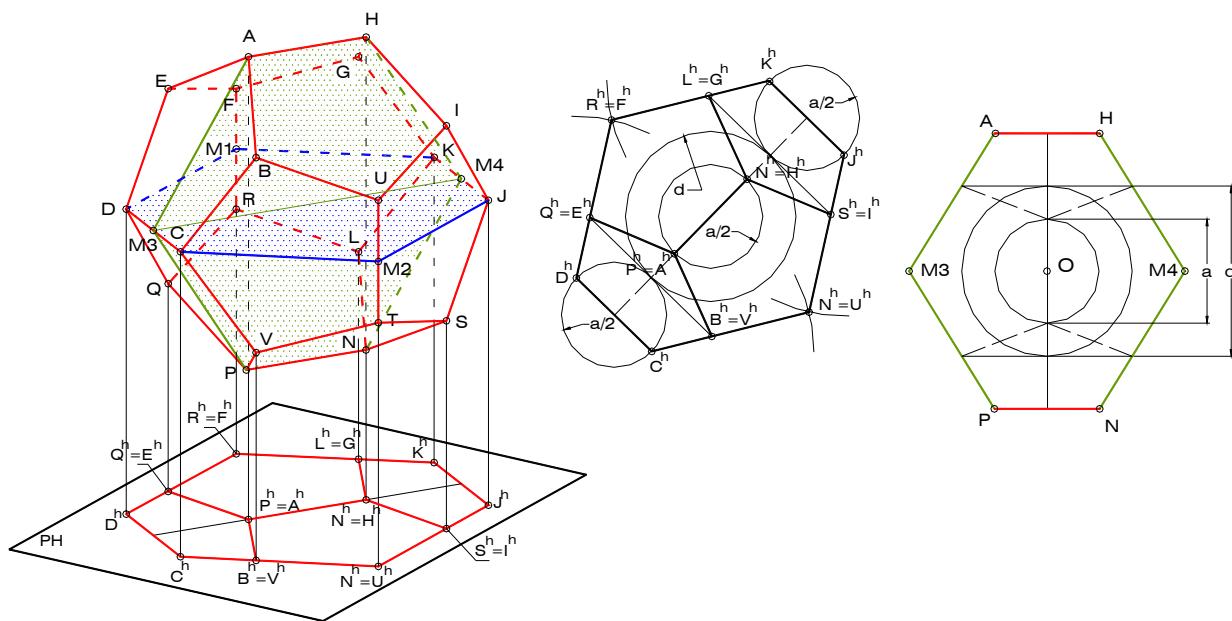


Fig. 4.30-b

Las aristas CD y JK se hallan en un plano intermedio paralelo a PH, el cual dista  $r_t$  de los vértices más altos (A y H) y de los más bajos (P y N). Por otro lado, los vértices B, E, G e I se encuentran en un plano paralelo a PH situado a una distancia igual a la mitad de la diagonal de cara “d” por encima del plano intermedio, en tanto que V, Q, L y S se sitúan a esa misma distancia por debajo de dicho plano. Finalmente, la diferencia de altura entre U y F por una parte y R y T por otra, y el plano intermedio, es igual a la mitad de la longitud de las aristas “a” del poliedro.

**3) Con una diagonal perpendicular al plano de proyección** (Fig. 4.30-c)

Sea la diagonal AN un segmento de recta perpendicular al plano horizontal de proyección. En esta posición, tres secciones principales del dodecaedro, aquellas que contienen a la diagonal en cuestión, resultan ser perpendiculares a PH. El contorno de la proyección horizontal del dodecaedro es un dodecágono irregular, el cual tiene dos grupos de lados iguales alternados. Es imprescindible construir una sección principal del sólido antes de determinar la proyección; en la parte derecha de la Fig. 4.30-c se ha representado una de las secciones principales que pasan por la diagonal AN.

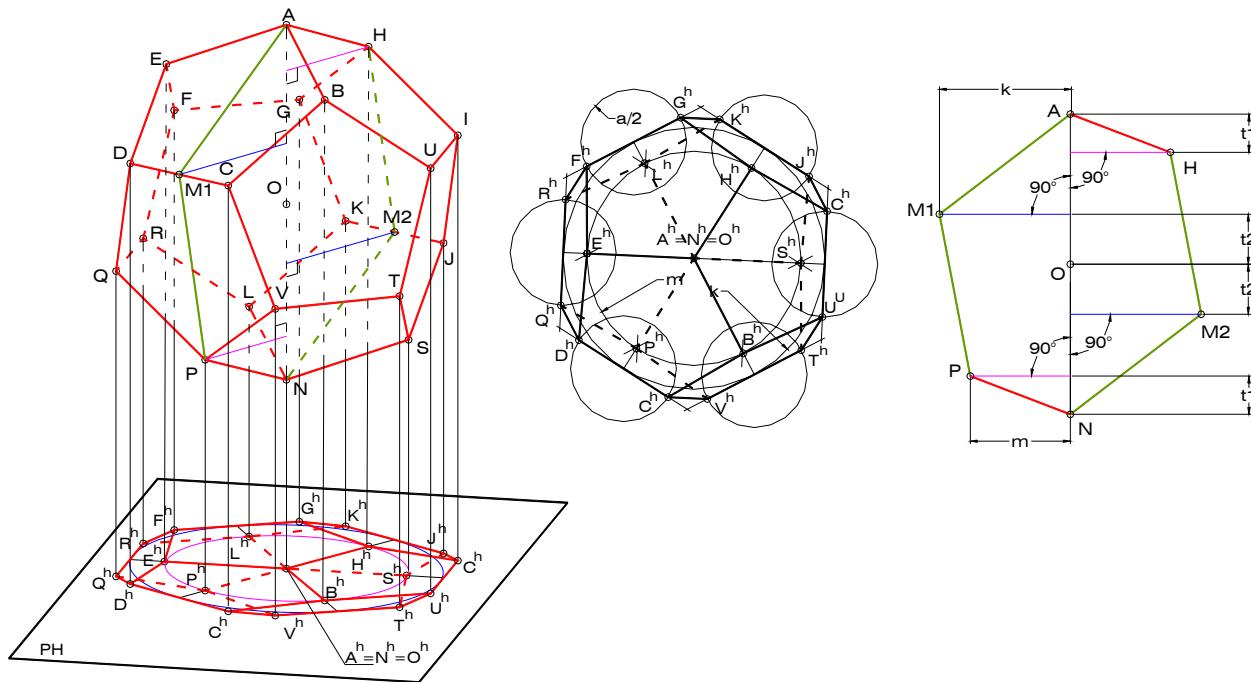


Fig. 4.30-c

El primer paso para dibujar la proyección del sólido consiste en dibujar una circunferencia de centro en la proyección de los puntos A y N y de radio "m" igual a la menor distancia entre el vértice P - o también H - y la diagonal AN. Sobre dicha circunferencia se encuentran las proyecciones de los vértices próximos al más alto (A), es decir, E, B y H, y de manera análoga, los tres próximos al más bajo (N), es decir, P, L y S; las proyecciones de los seis puntos señalados son los vértices de un hexágono regular.

Luego, se construye otra circunferencia concéntrica con respecto a la anterior y de radio "k", menor distancia entre el punto medio M1 de la arista CD - o también M2, punto medio de la arista JK - y la diagonal AN. Extendiendo las líneas que parten de la proyección de la diagonal AN y pasan por las proyecciones de los vértices E, B, H, P, L y S, se obtienen, en el corte con la segunda circunferencia, las proyecciones de los puntos medios de tres aristas superiores (CD, FG e IU) y tres inferiores (QR, JK y VT) que son, al mismo tiempo, los puntos de tangencia entre la segunda circunferencia y las proyecciones de dichas aristas.

Por último, se construyen circunferencias de centro en los puntos de tangencia arriba señalados y radio igual a la mitad de la longitud de las aristas del sólido, las cuales cortan a las tangentes en los puntos C<sup>h</sup>, D<sup>h</sup>, F<sup>h</sup>, G<sup>h</sup>, I<sup>h</sup>, U<sup>h</sup>, Q<sup>h</sup>, R<sup>h</sup>, J<sup>h</sup>, K<sup>h</sup>, V<sup>h</sup> y T<sup>h</sup>.

Resulta evidente que la diferencia de altura entre el punto más alto y el más bajo es igual a la longitud de la diagonal del sólido. Por otra parte, la diferencia de altura entre los tres vértices próximos al más alto y éste último es igual a "t1". Análogamente, esa misma

distancia es igual a la diferencia de altura entre el vértice más bajo y los tres próximos a él. Los vértices restantes se agrupan en dos conjuntos por encima y por debajo del centro O del dodecaedro, a una distancia "t<sub>2</sub>" de éste.

#### 4) Posición accidental con respecto al plano de proyección (Fig. 4.30-d)

En aquellas situaciones en las cuales no se cumple algunas de las condiciones anteriores referentes a la posición relativa del dodecaedro con respecto a determinado plano de proyección, se dice que el sólido se encuentra en una posición accidental o aleatoria, siendo el contorno de la proyección correspondiente un polígono irregular.

No existen, por lo tanto, peculiaridades en la proyección en lo que respecta a las formas y tamaños, ni en cuanto a las distancias entre los vértices y el plano de proyección.

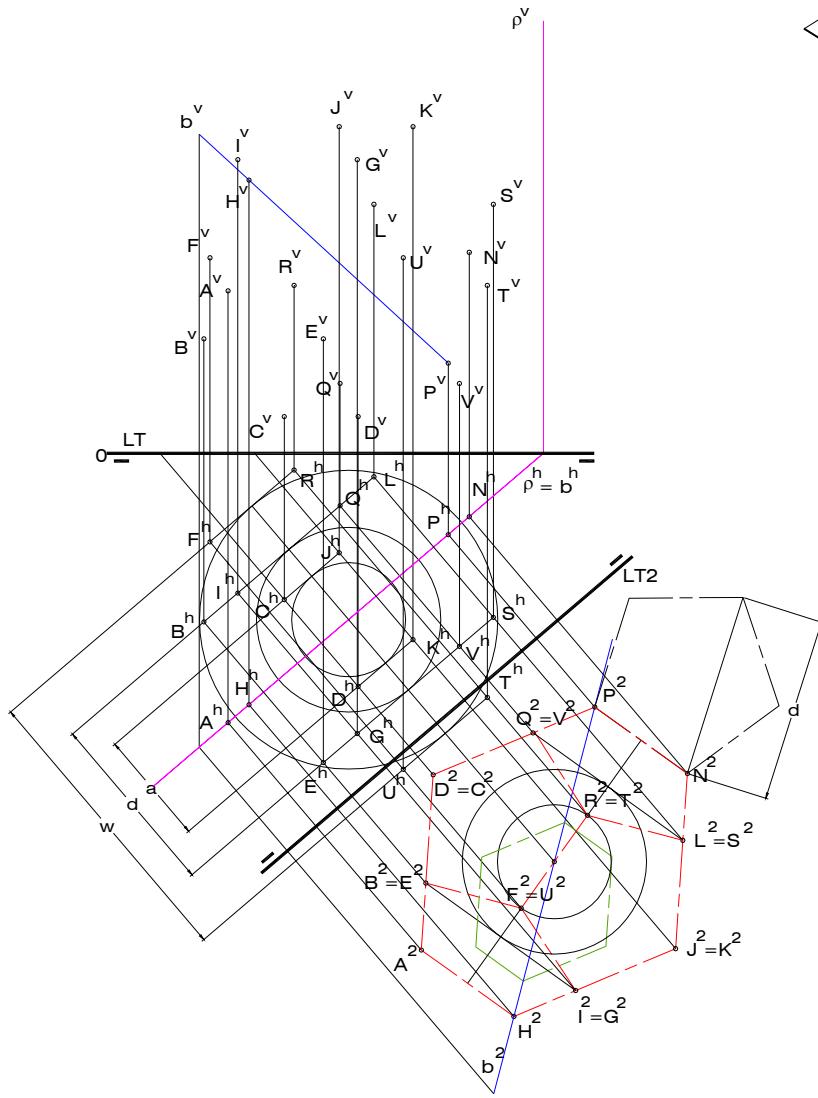


Fig. 4.31-a

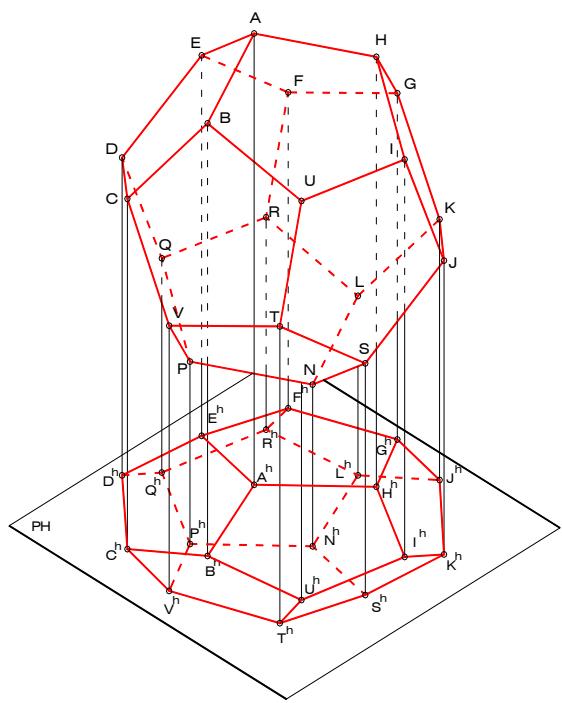


Fig. 4.30-d

El siguiente ejemplo ilustra el proceso de construcción de la doble proyección ortogonal de un dodecaedro en posición accidental con respecto a ambos planos de proyección del sistema. Los datos iniciales son el punto A, vértice del poliedro, y la recta "b" sobre la cual se encuentra la diagonal HP del sólido.

El plano  $\rho$  que determinan el punto A y la recta "b" es proyectante vertical, de manera que, mediante la introducción de un nuevo plano de proyección vertical, es posible generar un sistema de representación LT<sub>2</sub>, en el cual el dodecaedro adopta una posición notable, ya que dicho plano auxiliar se debe construir paralelo al plano  $\rho$  (Fig. 4.31-a).

Para determinar las dimensiones del poliedro es necesario construir una sección principal auxiliar correspondiente a un dodecaedro de longitud de arista "a" (Fig. 4.31-b). Posteriormente, se procede a copiar dicha sección haciendo coincidir una de sus diagonales principales con la proyección auxiliar  $b^2$  de la recta "b", para luego dibujar, aplicando semejanza de polígonos, la sección principal del sólido pedido contenida en el plano  $\rho$ .

De acuerdo con lo visto en el punto N° 2 de este tema, es posible precisar las proyecciones auxiliares de todos y cada uno de los vértices del dodecaedro, dado que sobre el plano auxiliar el poliedro se proyecta según una de sus secciones principales. Luego, para encontrar las proyecciones horizontales de dichos vértices bastará con recordar que N, H y P se encuentran sobre el plano  $\rho$ , en tanto que los restantes se agrupan en seis planos paralelos a  $\rho$  distribuidos de la siguiente forma: los más cercanos a  $\rho$  (C y J de un lado y D y K del otro) a una distancia  $a/2$  de éste plano; los siguientes (B, I, Q y L de un lado y E, G, V y S del otro) a una distancia  $d/2$  – mitad de la diagonal de cara – del mismo plano  $\rho$ ; los restantes (F y R de un lado y U y T del otro) distan  $w/2$  – radio de la esfera tangente a las aristas – del plano de sección principal  $\rho$ .

La determinación de las proyecciones verticales de los vértices del dodecaedro consiste en copiar las cotas de tales puntos en el sistema LT2 (distancias desde LT2 a las proyecciones auxiliares) al sistema original LT.

Por último, la unión lógica y ordenada de los vértices en ambas proyecciones de manera simultánea, formando pentágonos y recordando que en cada vértice convergen tres aristas, resulta en las proyecciones del poliedro propiamente dicho, sin olvidar el correspondiente análisis de visibilidad, el cual se realiza aplicando los criterios empleados en los ejemplos anteriores (Fig. 4.31-c).

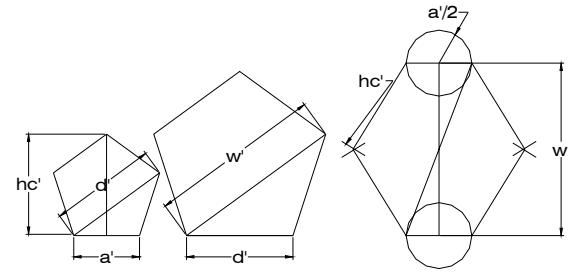


Fig. 4.31-b

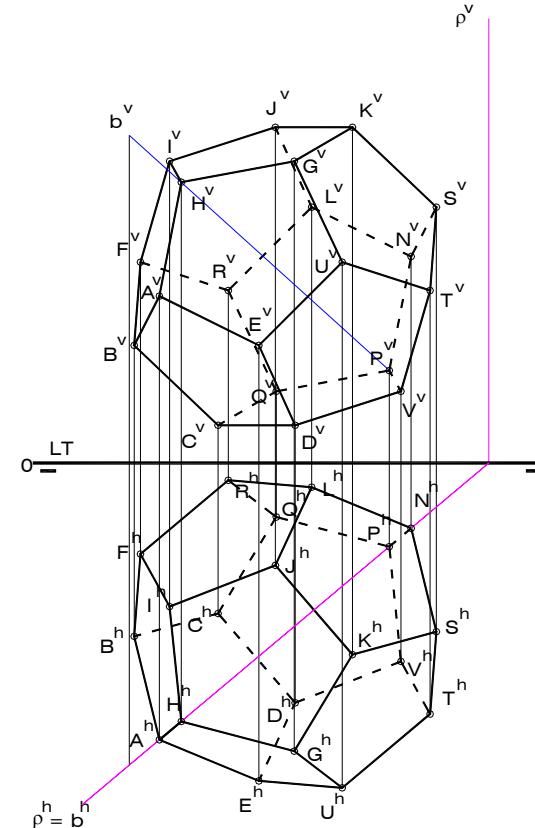


Fig. 4.31-c

#### 4.5.6 El Icosaedro

El icosaedro es el poliedro regular constituido por veinte caras triangulares equiláteras, treinta aristas – al igual que el dodecaedro – y doce vértices. Dos aristas opuestas del poliedro son paralelas entre sí, determinando un plano de sección principal; las caras opuestas del sólido son también paralelas.

Las secciones principales del icosaedro – las cuales existen en un número de quince: una por cada par de aristas opuestas – son hexágonos irregulares (Fig. 4.32-a y Fig. 4.32-b)), dos de cuyos lados corresponden a aristas opuestas (BC y KL) de longitud “a”, en tanto que los cuatro restantes son alturas de cara “hc”. La diagonal menor de cada uno de dichos hexágonos tiene por longitud la diagonal “w” de un pentágono de lado igual a la arista del sólido, longitud ésta que es también la que separa a las dos aristas opuestas de la sección. Por otra parte, las otras dos diagonales corresponden a dos diagonales principales del sólido (CL y BK) de longitud “d”, cuyos extremos son dos vértices diametralmente opuestos.

El centro de la sección principal – corte de las diagonales – es el centro O del icosaedro. La distancia entre este punto y uno de los vértices es el radio  $r_c$  de la esfera circunscrita al sólido; la distancia entre O y el punto medio de una de las aristas – igual a  $w/2$  – es el radio  $r_t$  de la esfera tangente a éstas; la menor distancia entre O y cualquiera de las alturas de cara corresponde al radio  $r_i$  de la esfera inscrita en el poliedro. El ángulo  $\psi$  formado entre las alturas de cara es igual al formado entre dos caras adyacentes del icosaedro.

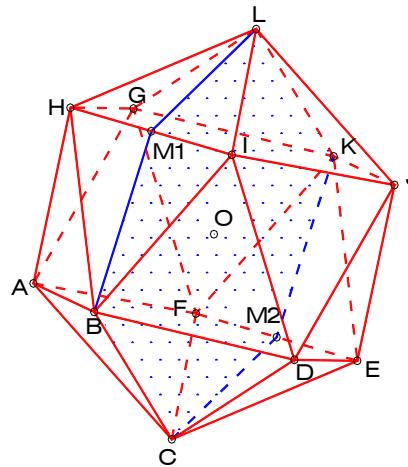


Fig. 4.32-a

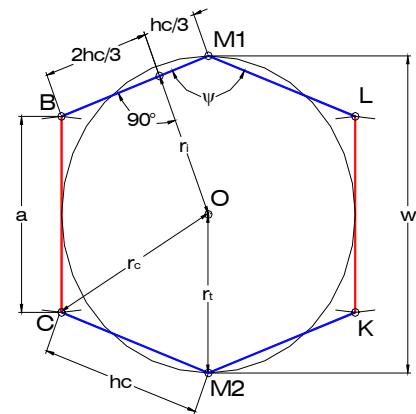


Fig. 4.32-b

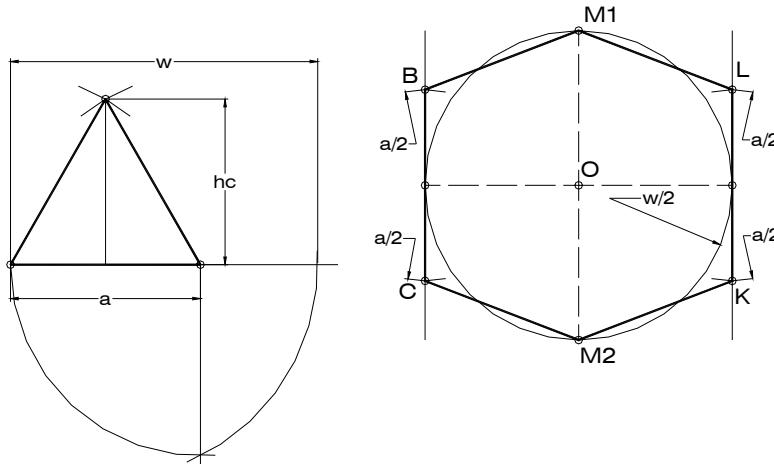


Fig. 4.32-c

los extremos de uno de sus diámetros, para luego consignar sobre dichas tangentes, a cada lado del respectivo punto de tangencia, la longitud  $a/2$ , obteniéndose así los vértices B, C, L y M. Finalmente, se unen los extremos M1 y M2 del diámetro paralelo a las tangentes con los extremos de las aristas, dando lugar a las cuatro alturas de cara de la sección principal.

La Fig. 4.32-c muestra el trazado de la sección principal de un icosaedro, partiendo de una de sus aristas “a”. En primer lugar, se construye un triángulo equilátero de lado “a” y se determina su altura “hc”. Luego, se halla la diagonal “w” de un pentágono de lado igual al del triángulo, aplicando parte del método de construcción de pentágono regular a partir de uno de sus lados. Posteriormente, se dibuja una circunferencia de radio  $w/2$  y se trazan dos tangentes a ella por

Considérese un plano perpendicular a una de las diagonales del icosaedro – EH en la Fig. 4.33-a – que pasa por uno de los vértices; la sección producida por dicho plano es un pentágono regular de lados iguales a las aristas de cinco caras convergentes en uno de los extremos (H) de la diagonal en cuestión.

Si se construye un plano perpendicular a una de las diagonales – EH en la Fig. 4.33-b – que pase por el centro del icosaedro, se genera una *sección decagonal regular*, cuyos vértices son puntos medios de aristas.

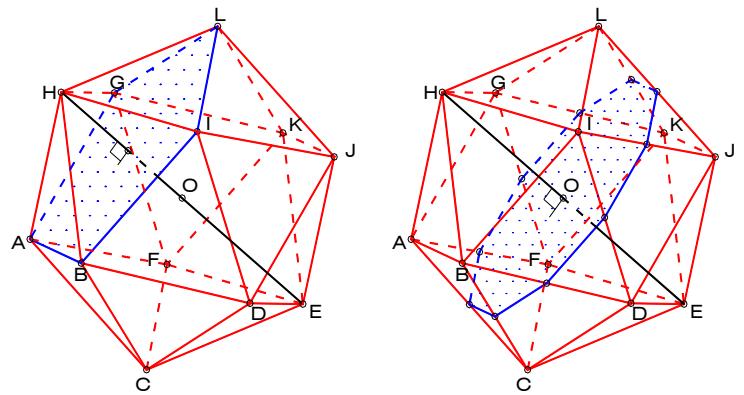


Fig. 4.33-a

Fig. 4.33-b

#### 4.5.6.1 Proyección cilíndrica ortogonal del icosaedro

##### 1) Con una cara paralela al plano de proyección (Fig. 4.34-a)

Si una de las caras del icosaedro – CEF en la figura – es paralela al plano de proyección, también lo será la cara opuesta – HIL en la figura – y, en consecuencia, la proyección de ambas caras sobre el plano considerado corresponde a dos triángulos equiláteros concéntricos e invertidos, inscritos en una circunferencia de radio igual a la que circunscribe a una de las caras del poliedro. La longitud de los lados de estos triángulos no es otra que la de las aristas del sólido “a”.

Los vértices restantes se proyectan sobre una circunferencia de igual centro que la anterior y de radio “s”, menor distancia que separa a uno de los vértices - B o K en la sección resaltada en la figura - de una de las secciones principales perpendiculares a PH de la línea definida, en esa misma sección, por dos centros de caras opuestas (O1 y O2). De esta manera el contorno de la proyección del icosaedro queda determinado, constituyendo un hexágono regular. Para conocer la altura de los vértices del poliedro basta con dibujar una de las secciones perpendiculares al plano de proyección, como la mostrada en la parte derecha de la Fig. 4.34-a.

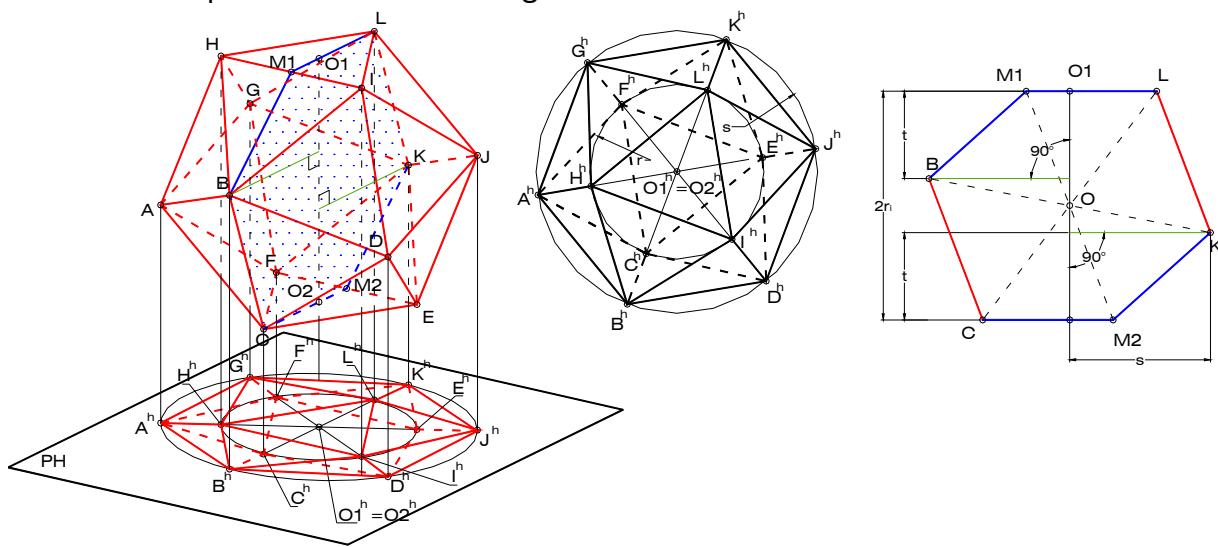


Fig. 4.34-a

La diferencia de altura entre las caras paralelas al plano considerado, es decir, la más alta y al más baja, es igual al diámetro  $2ri$  de la esfera inscrita en el sólido. Los demás vértices se sitúan en dos niveles de altura respecto de PH: los más cercanos a la cara

más alta (B, G y J) se encuentran a una distancia "t" por debajo de ésta, en tanto que los vértices más cercanos a la cara más baja (A, D y K) se hallan a una distancia "t" por encima de ella.

### 2) Con una arista perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.34-b)

Si una de las aristas del icosaedro, y por consiguiente su opuesta, resulta ser perpendicular a un determinado plano de proyección – el horizontal en el ejemplo – ocurre que la sección principal del sólido que contiene a estas aristas – BC y KL en la figura – es igualmente perpendicular a dicho plano. Por otra parte, la sección principal del poliedro que pasa por los puntos medios M1 y M2 de las aristas perpendiculares a PH y por las aristas AG y DJ es paralela a ese plano; el contorno de la proyección del icosaedro corresponde, en consecuencia, a la proyección de esta sección.

Los puntos A, B, C, E, G, J, K y L se proyectan en los vértices del contorno de la proyección del sólido, en tanto que E, F, H e I por ser extremos de aristas paralelas a PH se proyectan sobre una circunferencia de radio "a" y centro igual al del polígono que constituye el contorno de la proyección.

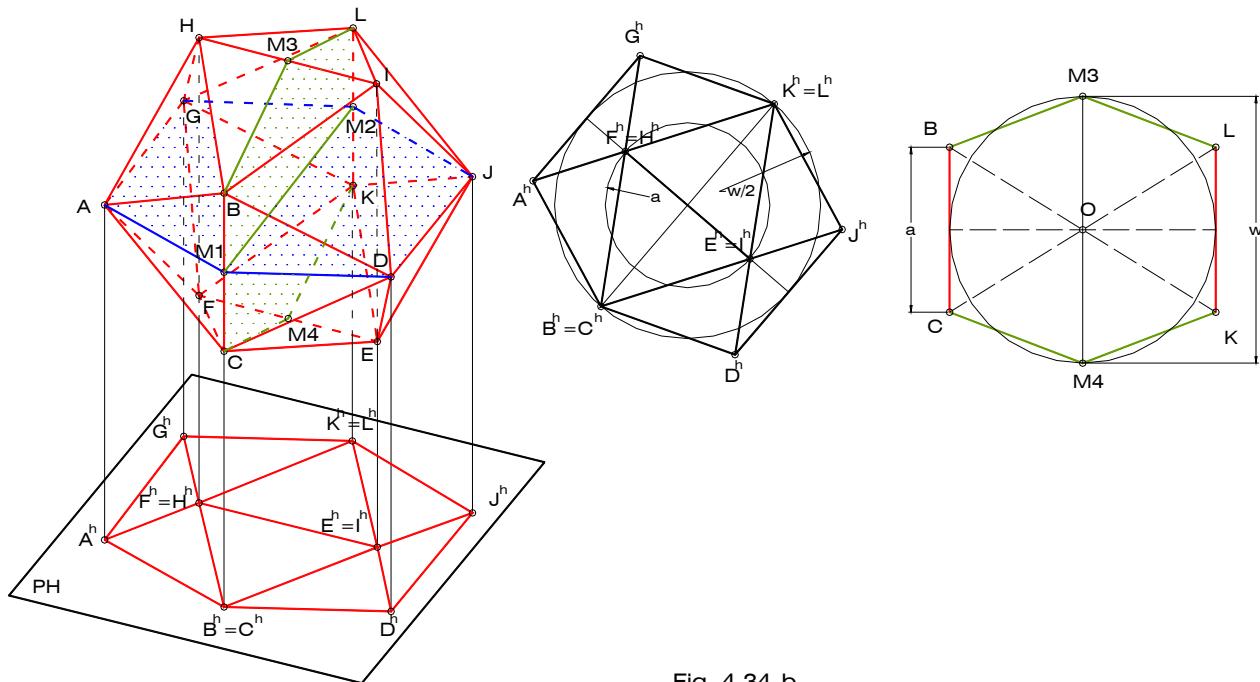


Fig. 4.34-b

La figura de la derecha muestra una sección principal del poliedro perpendicular al plano de proyección en verdadero tamaño, de cuyo análisis se desprende lo siguiente: la diferencia de altura existente entre las aristas paralelas a PH EF y HI es igual al diámetro  $2r_t$  de la esfera tangente a las aristas del sólido, o lo que es lo mismo, a la diagonal "w" de un pentágono de lado igual a la arista del icosaedro; los vértices B y L, más cercanos a los más altos, se hallan sobre un plano paralelo a PH a un distancia  $a/2$  por debajo de aquellos, mientras que los vértices C y K, se sitúan a igual distancia por encima de los más bajos. Por último, los vértices restantes A, D, G y J se ubican en un plano intermedio paralelo a PH que pasa por el centro del poliedro, es decir, a  $w/2$  por encima de los más bajos y  $w/2$  por debajo de los más altos.

### 3) Con una diagonal perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.34-c)

Si una de las diagonales del sólido – la CL en la figura – es perpendicular a un plano de proyección determinado (PH), tres secciones principales del icosaedro, aquellas que

contienen a la diagonal referida, resultan ser perpendiculares al plano de proyección en cuestión.

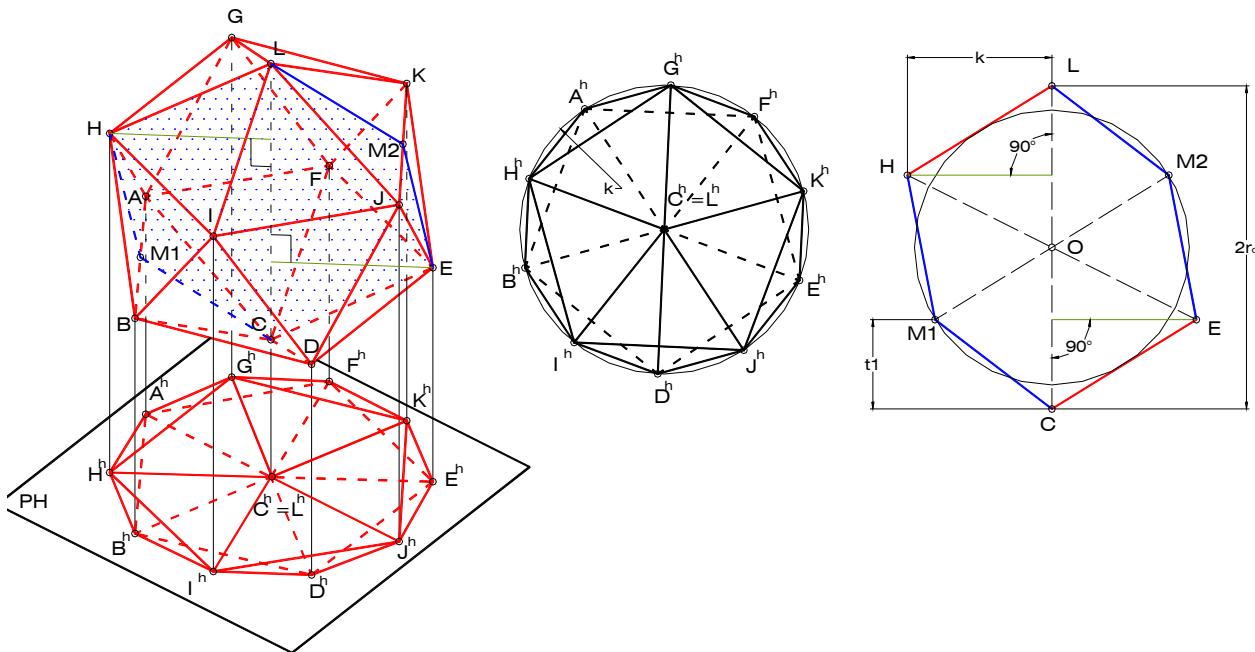


Fig. 4.34-c

El contorno de la proyección horizontal del poliedro es un decágono regular, inscrito en una circunferencia de radio “ $k$ ”, valor éste correspondiente a la menor distancia entre uno de los vértices del icosaedro y la diagonal CL.

Los vértices extremos de la diagonal perpendicular a PH se proyectan confundidos en el centro del decágono.

Es imprescindible construir una sección principal del sólido antes de determinar la proyección; en la parte derecha de la Fig. 4.30-c se ha representado una de las secciones principales que pasan por la diagonal AN.

En la sección principal dibujada en la parte derecha de la Fig. 4.31-c se aprecia la forma de obtener la magnitud “ $k$ ”, así como la distancia “ $t1$ ” correspondiente a la diferencia de altura entre el vértice más bajo (C) y los cinco vértices más cercanos a él (A, B, D y F). De igual manera, la diferencia de altura entre el vértice más alto ( L ) y los cinco más cercanos a él (G, H, I, J y K) es igual a “ $t1$ ”. Por otra parte, la diferencia de altura entre el vértice más alto y el más bajo es igual a la longitud de la diagonal que ellos definen, es decir, al diámetro  $2r_c$  de la esfera circunscrita al sólido.

**4) Posición accidental con respecto al plano de proyección (Fig. 4.34-d)**

Existen infinitas posturas en las cuales no se presenta ninguna de las relaciones notables existentes en los casos anteriores entre el sólido y un determinado plano de proyección. Se dice, entonces, que el icosaedro se encuentra en posición accidental o aleatoria en relación al mencionado plano.

El contorno de la proyección correspondiente es siempre un polígono irregular y no existen características especiales en cuanto a las distancias entre los vértices del poliedro y el plano de proyección de referencia.

Considérese el siguiente problema: Sea AB una de las aristas de un icosaedro ABCDEFGHIJKL. Se sabe que

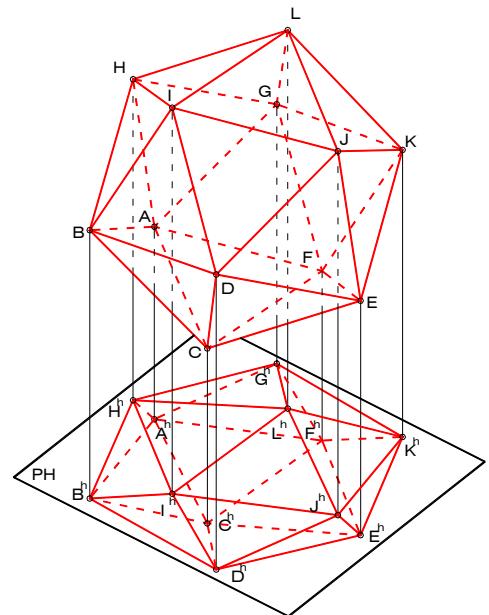


Fig. 4.34-d

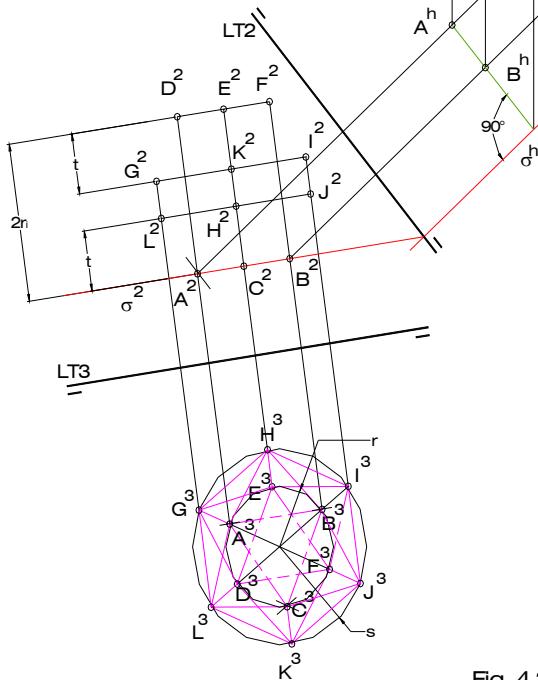
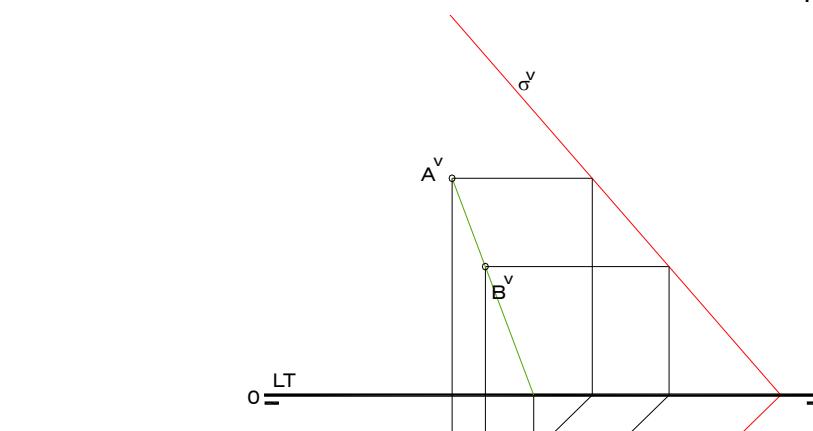


Fig. 4.35-a

la recta definida por el segmento AB es una de las rectas de máxima pendiente del plano  $\sigma$ , el cual contiene a la cara ABC del poliedro. Además, se debe tomar la solución de menor vuelo para el vértice C y la solución de menor cota para el resto del sólido.

El paso inicial consiste en la determinación de las trazas del plano  $\sigma$ , sabiendo que  $\sigma^h$  es perpendicular a la proyección horizontal de la recta AB, al igual que las proyecciones horizontales de dos rectas horizontales del plano que pasan por los puntos A y B, cuyos puntos de traza vertical determinan la recta de traza vertical  $\sigma^v$  (Fig. 4.35-a).

Dada la facilidad que ofrece la construcción de las proyecciones del poliedro cuando éste se encuentra en posición notable en relación a un plano de proyección, resulta conveniente generar un nuevo sistema de proyección en el que se verifique una situación como la señalada. Para ello se

construye una línea de tierra  $LT_2$  perpendicular a la proyección horizontal de las rectas horizontales del plano  $\sigma$  y se determinan las proyecciones auxiliares  $A^2$  y  $B^2$ , recordando que la cota de los puntos es igual en los sistemas  $LT$  y  $LT_2$ ; de esta forma se logra que el plano  $\sigma$  sea proyectante vertical en el sistema  $LT_2$ . Luego, es necesario trazar una tercera línea de tierra ( $LT_3$ ) en forma paralela a la traza  $\sigma^2$ , definida por las proyecciones auxiliares  $A^3$  y  $B^3$ , recordando que el vuelo de los puntos es igual en los sistemas  $LT_2$  y  $LT_3$ .

Para obtener las dimensiones necesarias para la construcción de las proyecciones auxiliares del sólido ( $2ri$ ,  $t$ ,  $r$ ) es preciso dibujar la sección principal del icosaedro en verdadera magnitud, lo cual se ha realizado aparte en la Fig. 4.35-b partiendo de la longitud “ $a$ ” de las aristas, longitud ésta que se ha tomado de la proyección  $A^2B^2$  del segmento  $AB$ .

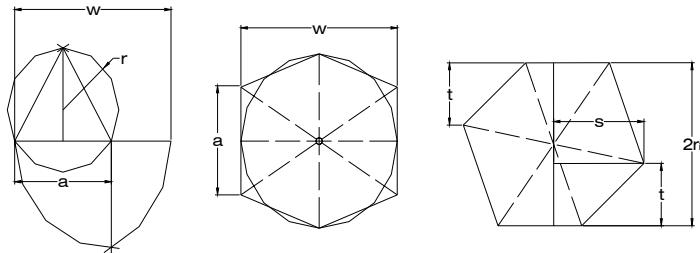


Fig. 4.35-b

En vista de que el plano  $\sigma$  es horizontal en el sistema  $LT_3$ , el icosaedro posición notable, con una cara paralela al plano de proyección horizontal del mencionado sistema, por lo que la construcción de sus proyecciones auxiliares se realiza de acuerdo con lo expuesto en el numeral dos de esta sección (Pág. 111).

Una vez halladas las proyecciones auxiliares de todos y cada uno de los vértices del icosaedro, se procede a encontrar la proyección horizontal sabiendo que la distancia entre las segundas proyecciones auxiliares y  $LT_3$ , es decir, el vuelo de los vértices en el sistema  $LT_3$ , es igual a la distancia entre las proyecciones horizontales y  $LT_2$  (Fig. 4.35-c).

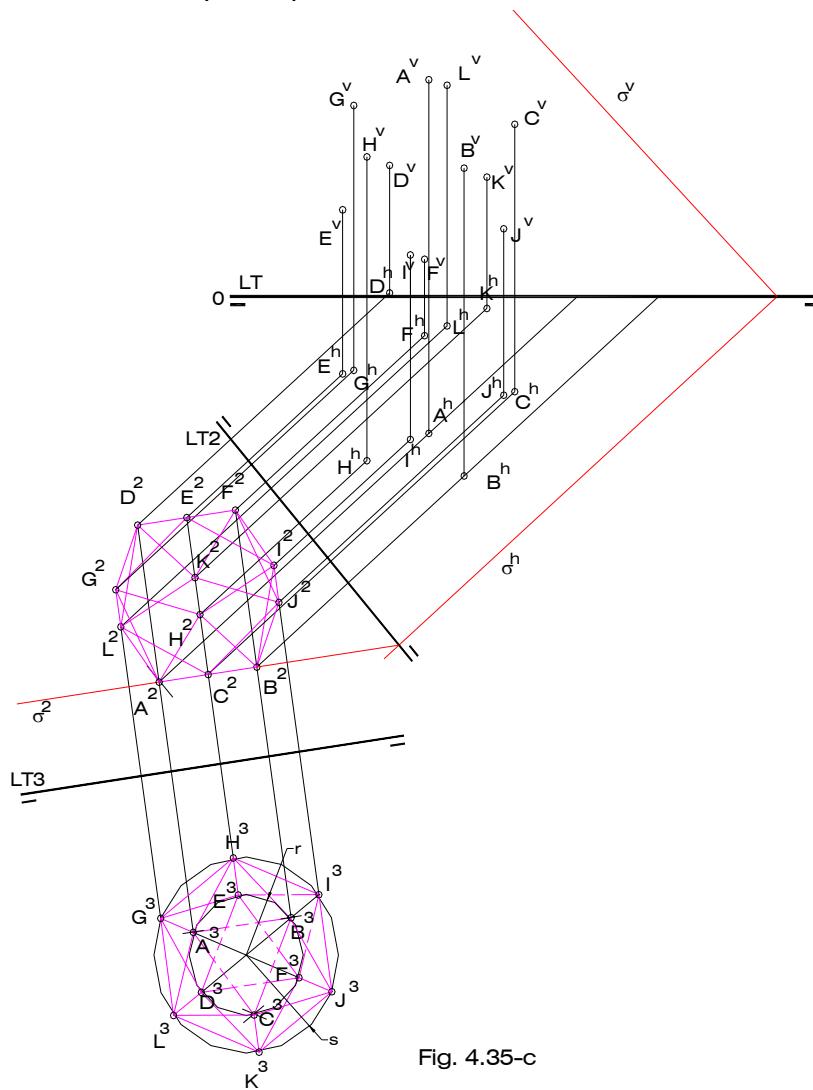


Fig. 4.35-c

La determinación de las proyecciones verticales de los vértices del sólido consiste en copiar las distancias entre  $LT_2$  y las primeras proyecciones auxiliares, es decir, la cota de los vértices en el sistema  $LT_2$ , a partir de la línea de tierra original y sobre las correspondientes referencias (Fig. 4.35-c).

Por último, se unen las proyecciones homónimas de los vértices de forma simultánea para evitar confusiones, formando triángulos y recordando que en un vértice deben converger cinco aristas. No debe pasarse por alto el correspondiente análisis de la visibilidad, para lo cual se aplica el conocido criterio de cota y vuelo de los elementos (Fig. 4.35-d).

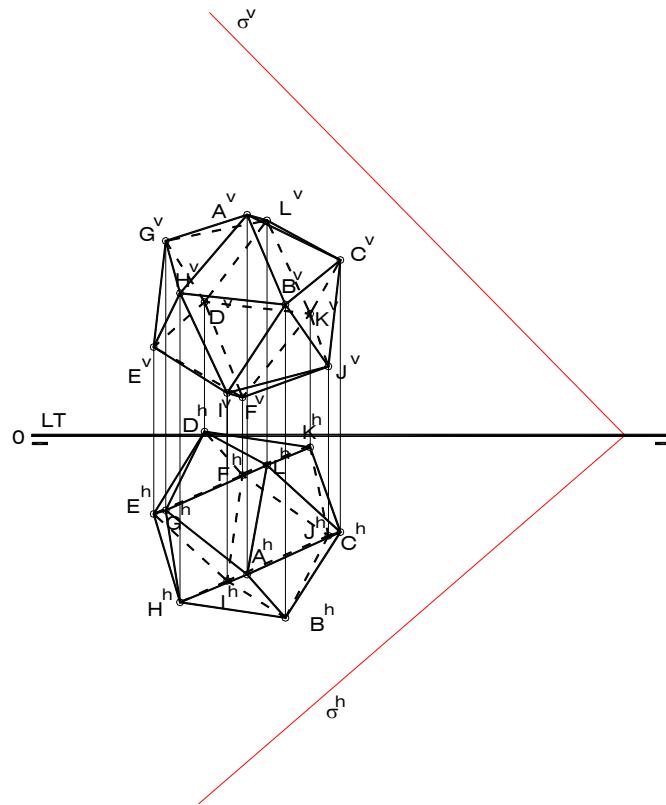


Fig. 4.35-d