CAPÍTULO III

3.1 Paralelismo
3.1.1 Paralelismo entre rectas

Si dos rectas “a” y “b” son paralelas en el espacio, sus proyecciones homónimas en el Sistema Diédrico – y en general en cualquier sistema de proyección cilíndrico – son también paralelas. De manera que si se desea construir por un punto P del espacio una recta “a” paralela a otra recta “b”, es suficiente dibujar por la proyección vertical de P una recta b^v paralela a la proyección vertical de la recta “a”, y por la proyección horizontal de dicho punto una recta b^h paralela a la proyección horizontal de la recta “a” (Fig. 1)

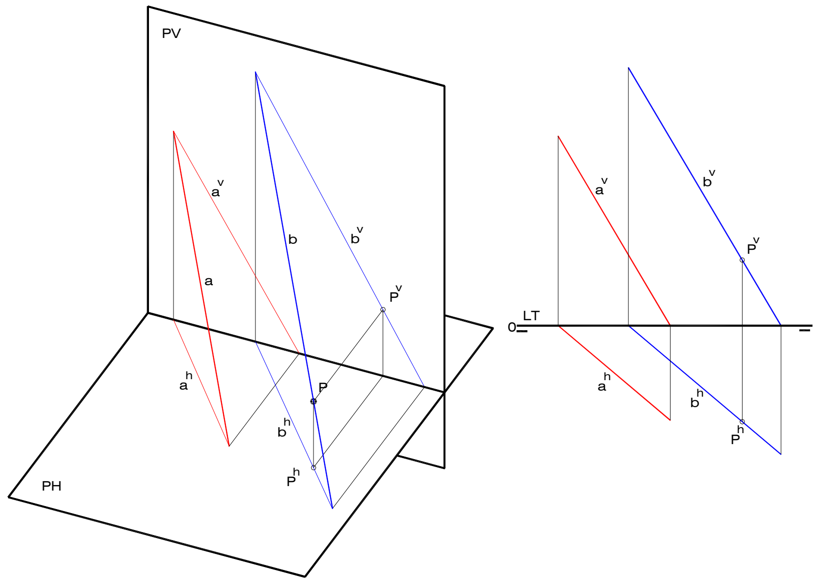


Fig. 3.1: Paralelismo entre rectas.

Lo anterior se aplica a cualquier posición que adopte la recta “a”, sólo que en aquellos casos en los que dicha recta es de perfil, se debe generar una nueva proyección de las rectas “a” y “b”, como por ejemplo la proyección sobre el plano lateral, con el fin de comprobar que son efectivamente paralelas.

En la Fig. 3.2 se ha construido una recta “b” que pasa por el punto P del espacio y que es paralela al segmento de perfil AB. Para ello se han determinado las proyecciones laterales del punto P y del segmento AB; a continuación se traza por P^l una paralela b^l a A^lB^l que constituye la proyección lateral de la recta pedida, la cual es, evidentemente, de perfil. Como es necesario definir al menos dos puntos sobre ella para que sus proyecciones diédricas queden completamente definidas, se escoge un punto cualquiera Q^l sobre la proyección lateral de “b”. De esta forma, las proyecciones de P y Q determinan las proyecciones diédricas de la recta “b”.

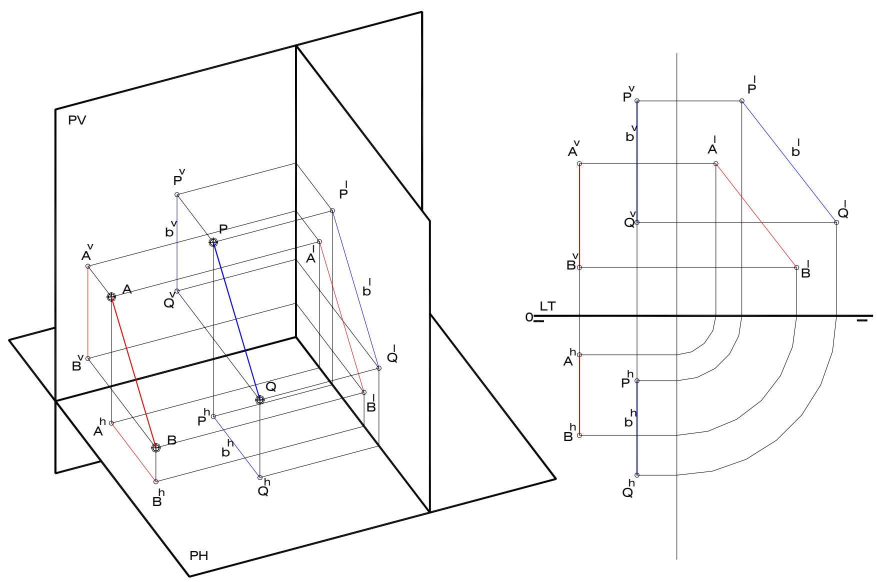


Fig. 3.2 Paralelismo entre Rectas de Perfil.

3.1.2 Paralelismo entre recta y plano

La condición necesaria y suficiente para que una recta "a" sea paralela a un determinado plano δ, es que esa recta "a" sea paralela a una de las infinitas rectas contenidas en dicho plano δ.

De lo anterior se deduce que por un punto cualquiera del espacio P se pueden construir infinitas rectas paralelas a un plano. Por lo tanto, si se quiere construir una de esas rectas es necesario definir alguna otra de sus propiedades o conocer una de sus proyecciones. En la Fig. 3.3 se presenta un ejemplo en el que se ha determinado la proyección vertical de una recta "a" que pasa por un punto P, partiendo de su proyección horizontal y sabiendo que es paralela al plano ABC. Para ello se traza la proyección horizontal de un recta "r", paralela a la proyección horizontal de "a". Seguidamente se determina la proyección vertical de "r" aplicando la condición de pertenencia de recta a plano, es decir, hallando los puntos de corte (1 y 2) entre r^h y las proyecciones horizontales de dos rectas del plano ABC y ubicándolos luego en la proyección vertical de estas rectas. Recuérdese que para que se cumpla la condición de paralelismo entre recta y plano "r" debe pertenecer a ABC.

Finalmente, se construye por P^v una paralela a r^v que viene a ser la proyección vertical de la recta "a".

Si la recta "a" es una recta paralela al plano horizontal de proyección, será entonces paralela a las rectas horizontales del plano δ. De igual forma, si "a" es paralela al plano vertical, entonces es paralela a las frontales de dicho plano.

Como se ha indicado, por un punto del espacio existen infinitas rectas paralelas a un plano. Todas esas infinitas rectas determinan un segundo plano paralelo al primero, lo que permite establecer la condición de paralelismo entre planos.

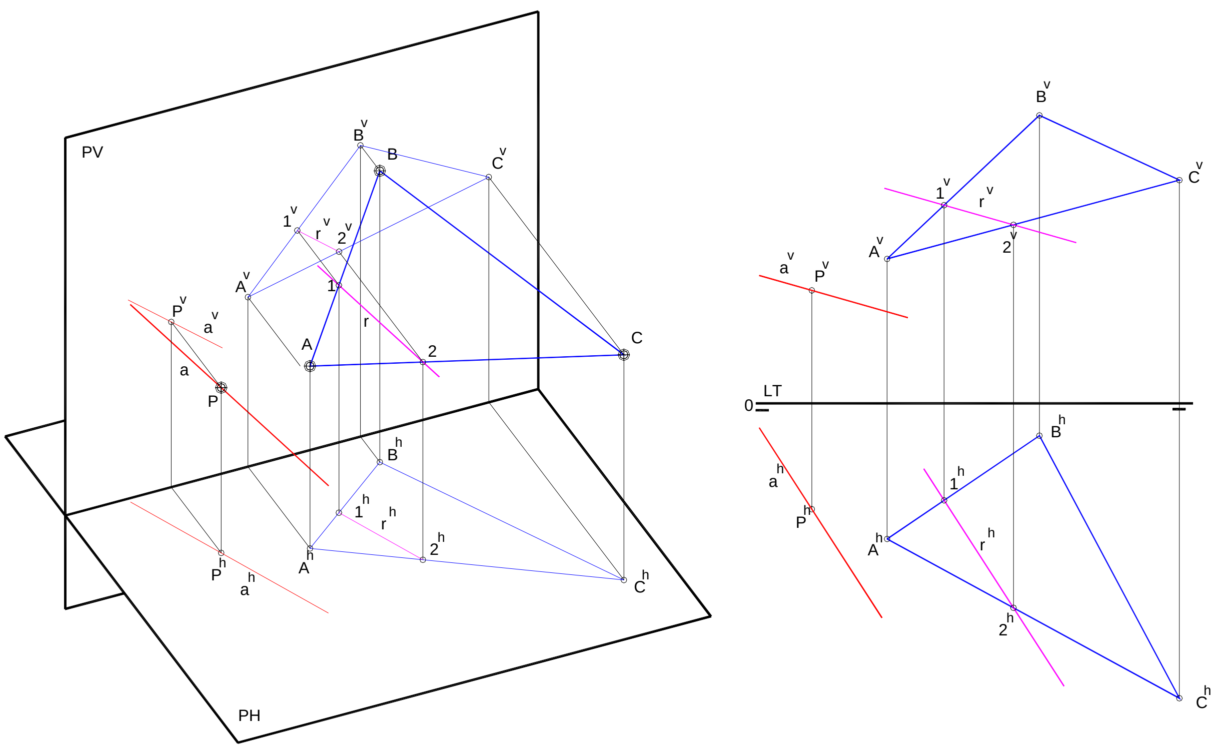


Fig. 3.3: Recta paralela a Plano.

3.1.3 Paralelismo entre planos

Por un punto P exterior a un plano γ se puede construir un único plano δ paralelo a él. La condición necesaria y suficiente para que dos planos δ y γ sean paralelos, es que dos rectas “a” y “b” pertenecientes al primero y no paralelas entre sí, sean paralelas a dos rectas “r” y “s” pertenecientes al segundo. En la Fig. 3.4-a, el plano definido por las rectas “a” y “b” es paralelo al plano ABC, ya que esas rectas son paralelas a los segmentos AB y BC, respectivamente.

Si el plano γ está dado por sus trazas, el procedimiento se reduce a construir por el punto P una recta frontal “f” y una recta horizontal “h” que sean paralelas a las trazas de γ. El plano δ definido por dichas rectas será paralelo a γ (Fig. 3.4-b).

Dos planos paralelos siempre tienen sus trazas homónimas paralelas, con la excepción de aquellos casos los que se trate de planos Paralelos a la Línea de Tierra. Si así fuere, la condición de paralelismo debe ser verificada en una proyección lateral auxiliar (Fig. 3.4-c).

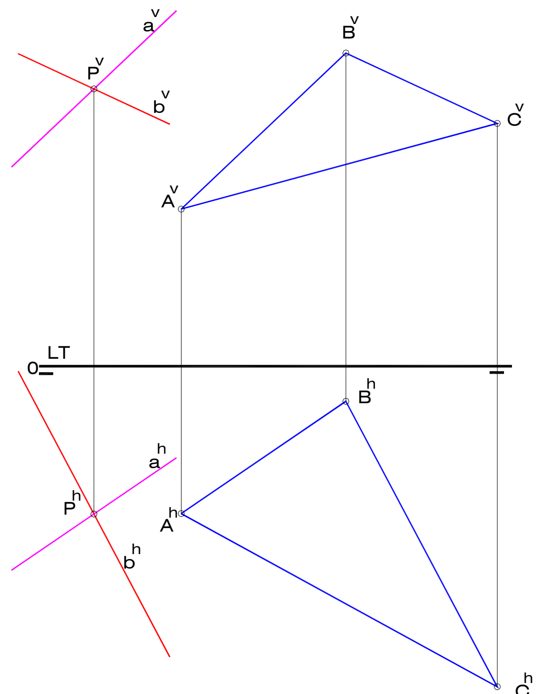


Fig. 3.4-a

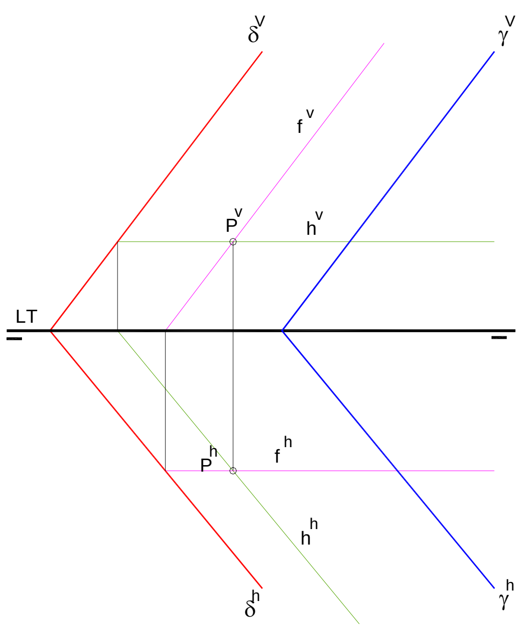


Fig. 3.4-b

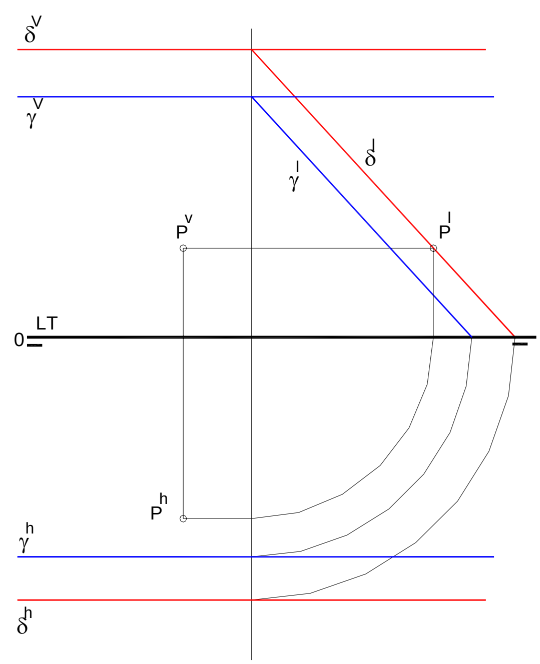
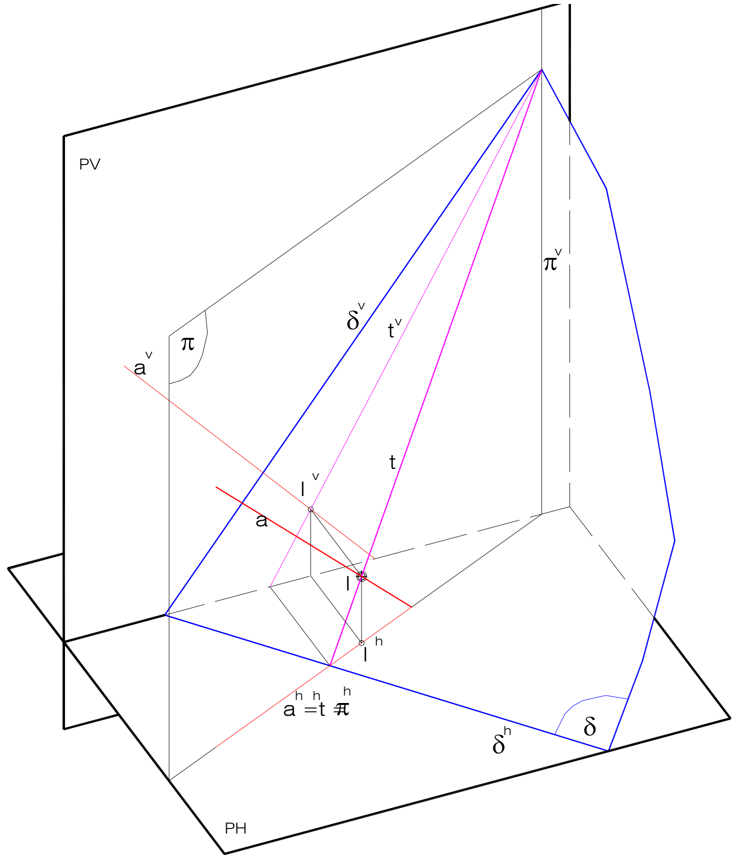


Fig. 3.4-c

Fig. 3.4: Paralelismo entre Planos.

3.2 Intersección
3.2.1 Intersección entre recta y plano

La intersección entre una recta “a” y un plano δ es un punto I, elemento que debe pertenecer tanto a la recta como al plano. Si estos son paralelos entre sí, se dice que el punto de intersección es impropio.



Fg. 3.5: Intersección entre Recta y Plano. Método de Plano Proyectante.

El método general para determinar esa intersección consiste en construir un plano π que contenga a la recta “a” y luego se determina la recta de intersección “t” entre los planos δ y π; el punto común a las rectas “a” y “t” constituye el punto de intersección buscado. Este procedimiento presenta una notable simplificación si se toma como plano auxiliar π a uno de los dos *planos proyectantes* que pasan por la recta “a” (Fig. 3.5). Sin embargo, en vista de que su aplicación involucra el conocimiento del método de intersección de planos y, al mismo tiempo, este último consiste en la determinación de puntos de intersección entre recta y plano, se expone a continuación un enfoque distinto del problema[2].

Sea un plano cualquiera definido por tres puntos A, B y C y una recta “a” no paralela a él. Considérese una recta “t” contenida en el plano ABC y con una de sus proyecciones confundida con la proyección homónima de “a”. El corte entre la proyecciones no confundidas de esas rectas es la proyección correspondiente del punto de intersección entre “a” y el plano ABC.

El procedimiento seguido para determinar dicho punto en el ejemplo que ilustra la Fig. 3.6, comienza asumiéndose la proyección horizontal de “t” confundida con la proyección horizontal de la recta “a”. A continuación, se ubican los cortes 1^h y 2^h entre aquella y las proyecciones horizontales de las rectas AC y BC del plano ABC y se alinean hasta encontrarlos en las proyecciones verticales de estas rectas (condición de pertenencia de recta a plano). La recta definida por 1^v y 2^v es la proyección vertical de la recta “t”; el corte entre ésta y la proyección vertical de “a” es la proyección vertical del punto de intersección I entre la recta “a” y el plano ABC. Finalmente se halla la proyección horizontal de este punto trazando una referencia perpendicular a la línea de tierra que corta a la proyección horizontal de “a” (igual a la proyección horizontal de “t”).

[2] Harry Osers llama a este enfoque el método de la *recta tapada* (Estudio de Geometría Descriptiva Editorial Torino. Caracas, 1991).

Nótese que el plano determinado por la recta “a” y la recta “t” es un plano proyectante horizontal y que la recta “t” es común a este plano y al plano ABC, por lo que, en esencia, se trata del método del *plano proyectante.*

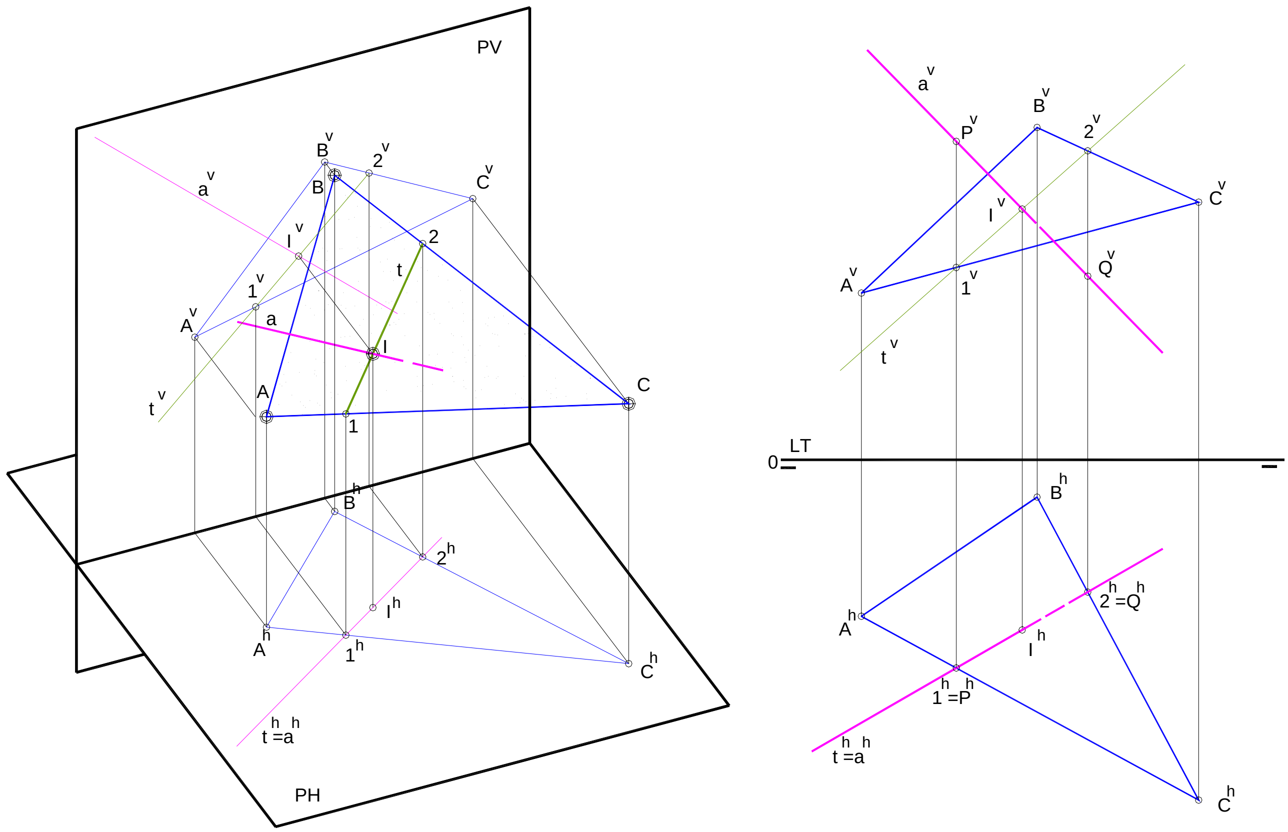


Fig. 3.6: Intersección entre Recta y Plano.

Si se considera al segmento de plano ABC como una superficie opaca, un segmento de la recta “a” será invisible en proyección horizontal, en tanto que otro segmento lo será en la vertical. El cambio en la visibilidad de la recta se verifica, evidentemente en su punto de penetración en el plano ABC.

En la Fig. 3.6 los puntos de corte entre las proyecciones horizontales de “a” y de los segmentos AC y BC, representan las proyecciones horizontales de los puntos 1 y P y los puntos 2 y Q, respectivamente. Siendo que 1 y 2 son puntos pertenecientes al plano ABC, que los puntos P y Q están sobre la recta “a” y que los segmentos 1P y 2Q son de pié, es fácil observar cuáles de ellos son visibles y cuáles no visibles en la proyección horizontal si se comparan sus cotas. Así, el punto P tiene **mayor** cota que 1, por lo que la recta “a” (elemento sobre el cual se encuentra P) es visible en la proyección horizontal del lado izquierdo del punto de intersección (lado en el que se halla P). Por otra parte, Q tiene **menor** cota que el punto 2, de manera que la proyección horizontal de “a” es no visible a la derecha del punto I, ya que de ese lado se encuentra el punto Q.

Mediante un razonamiento análogo, es posible determinar la visibilidad de la recta “a” en la proyección vertical, comparando sus valores de vuelo con relación al segmento de plano ABC.

Si se desea determinar el punto de intersección entre una recta “a” y un plano δ que sea perpendicular a alguno de los planos de proyección principales (PV o PH), se tiene que todos los puntos del plano se proyectarán sobre su traza en el plano de proyección con el que forma 90°, incluyendo el punto de intersección buscado. Así, si se trata de un plano proyectante horizontal (Fig. 3.7), la proyección horizontal del punto I es el corte entre la proyección horizontal de la recta “a” y la traza horizontal del plano. La proyección vertical de I se encuentra en el corte entre la proyección vertical de “a” y una línea de referencia perpendicular a LT trazada por a^h.

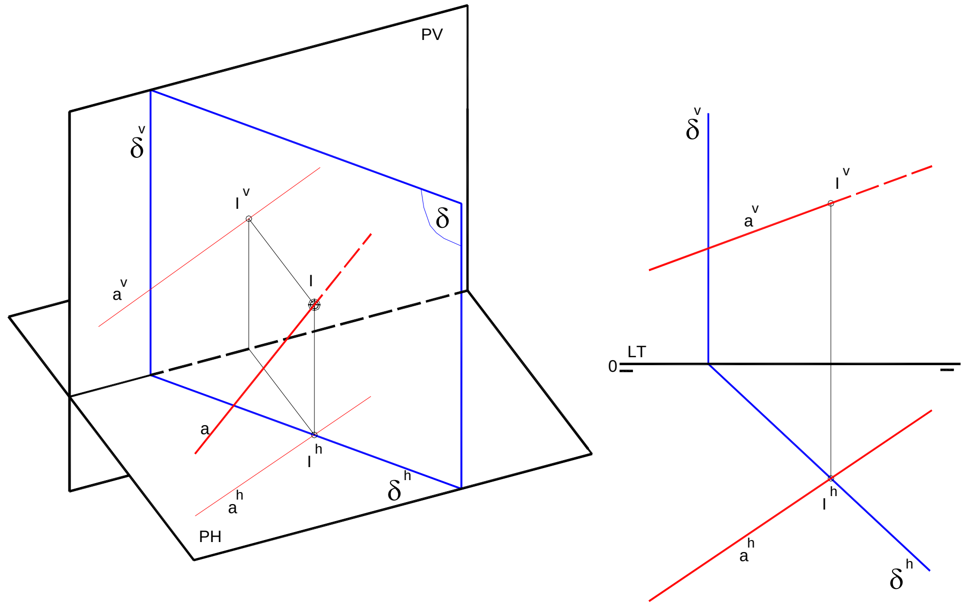


Fig. 3.7: Intersección entre recta y plano Proyectante.

Otro caso particular se presenta si la recta “a”, definida por los puntos A y B, tiene una posición de perfil, ya que las proyecciones de la correspondiente recta “t”, definida por 1 y 2, se confunden con las proyecciones de “a” por ser también de perfil. En tal situación, es preciso generar una nueva proyección – lateral preferiblemente – en la que el punto común a las rectas “a” y “t” pueda ser determinado sin problemas (Fig. 3.8).

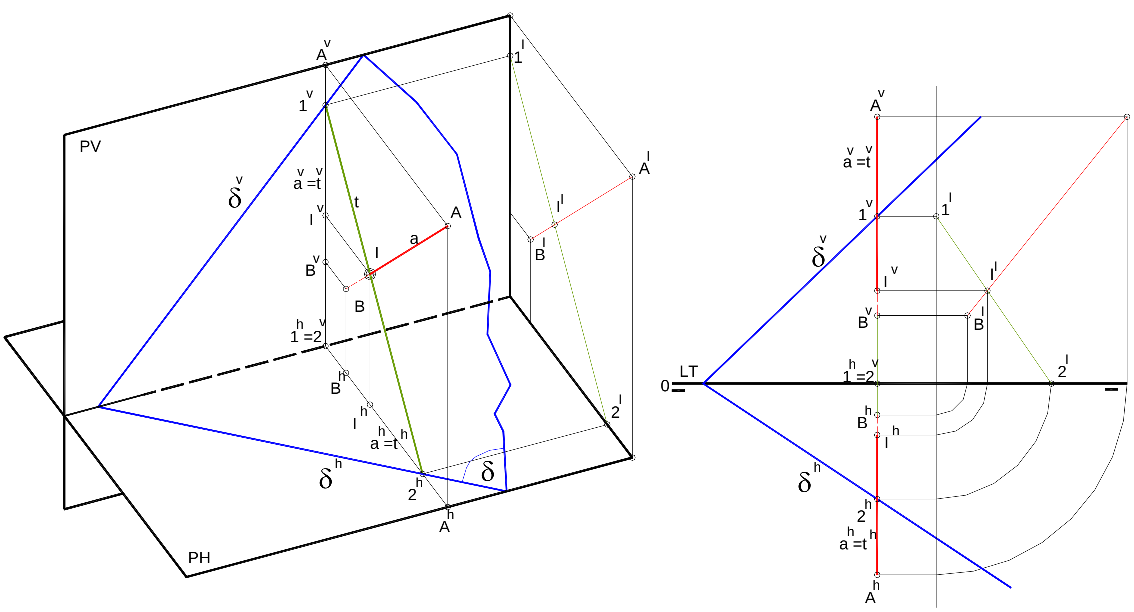


Fig. 3.8: Intersección entre recta de perfil y plano cualquiera.

Finalmente, es necesario señalar que si la recta "a" es perpendicular a uno de los planos de proyección principales resulta conveniente construir un plano auxiliar perpendicular a PH (preferiblemente frontal), si "a" es de pié, o un plano auxiliar perpendicular a PV (preferiblemente horizontal), si "a" es de punta. (Fig. 3.9).

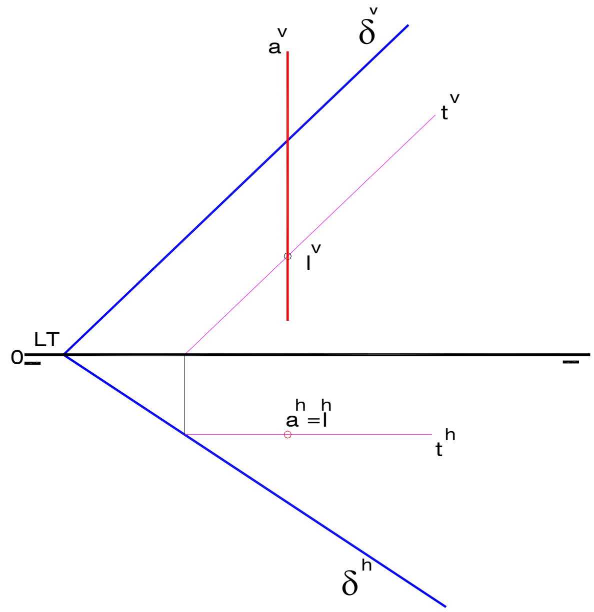


Fig. 3.9: Intersección entre recta de pié y plano cualquiera.

3.2.2 Intersección entre planos

La recta "i" común a dos planos δ y γ puede ser determinada por dos puntos X y Y, quienes son los puntos de intersección entre dos rectas "a" y "b" pertenecientes a δ y el plano γ (Fig. 3.10-a). También se obtiene la misma recta de intersección si "a" y "b" pertenecen a γ, en cuyo caso los puntos X y Y serían los puntos comunes a las rectas "a" y "b" y al plano δ, respectivamente (Fig. 3.10-b). De igual manera, es posible definir la intersección entre los planos si la recta "a" pertenece a δ, siendo X el punto de intersección entre ella y el plano γ, y la recta "b" está contenida en γ, con lo que Y sería el punto común a esta recta y al plano δ (Fig. 3.10-c).

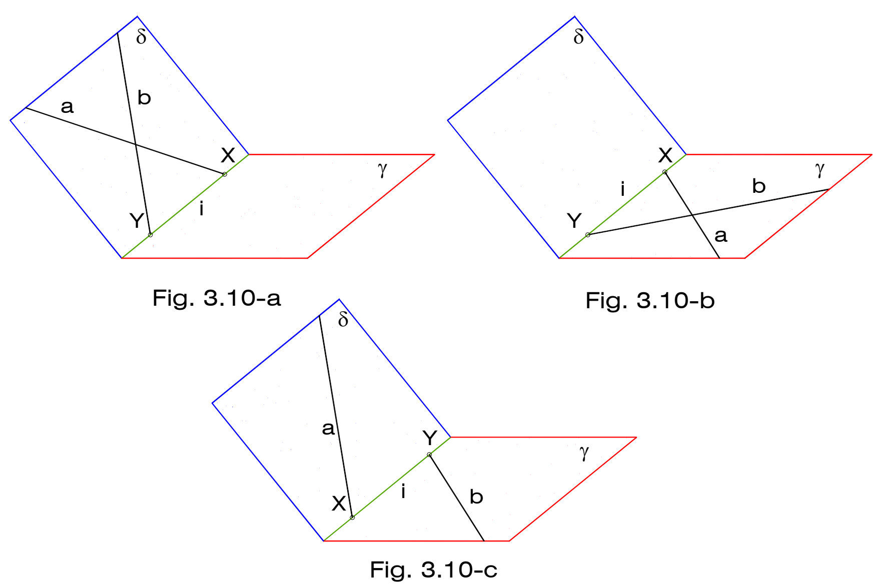


Fig. 3.10: Intersección entre planos aplicando sucesiva entre recta y plano intersección.

En la Fig. 3.11 se ha determinado la recta de intersección entre los segmentos de planos ABC y PQR. Para ello se ha comenzado determinando el punto de intersección X entre la recta definida por el segmento QR y el plano ABC, siendo X el punto común a QR y a la recta 12, la cual pertenece al plano ABC y está confundida con QR en proyección horizontal. Seguidamente y siguiendo un procedimiento análogo, se ha encontrado el punto de intersección Y entre la recta definida por el segmento RQ y el plano ABC. La recta de intersección entre los planos ABC y PQR queda determinada por los puntos X y Y.

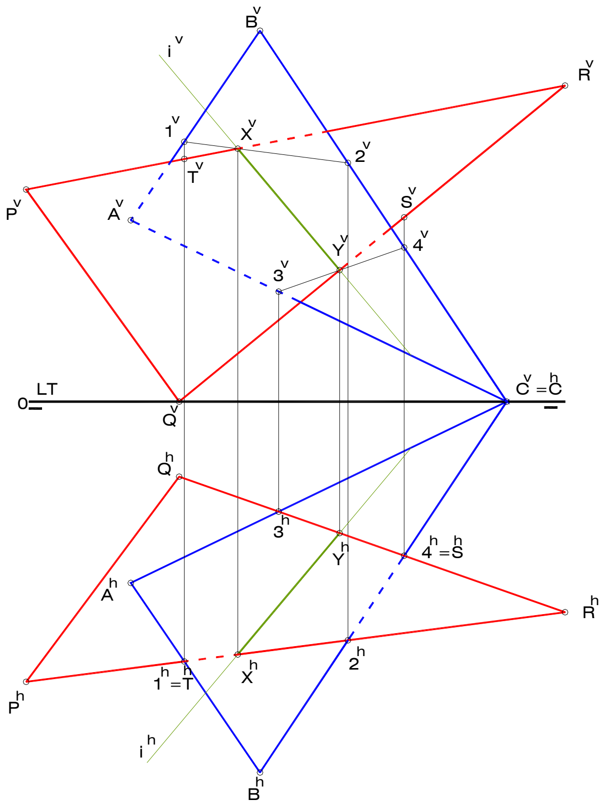


Fig. 3.11: Intersección entre segmentos de planos.

Si se consideran los triángulos ABC y PQR como superficies opacas es necesario realizar un análisis de visibilidad, lo que se traduce en una representación que facilita la lectura de la realidad tridimensional proyectada en el Sistema Diédrico. Dicho análisis consiste en la comparación de los valores de cota y vuelo de puntos convenientemente escogidos en ambos triángulos.

El corte entre las proyecciones horizontales de los segmentos QR y BC es la proyección horizontal de los puntos 4 y S; el primero sobre el segmento BC y el segundo sobre el segmento QR. Al hallar mediante una referencia perpendicular a LT las proyecciones verticales de dichos puntos, se observa que la cota de S es mayor que la cota de 4, lo cual significa que el triángulo PQR, al que pertenece el punto S, está *por encima* del triángulo ABC en el lado izquierdo de la recta de intersección "i", lado del que se ubican los puntos S y 4 seleccionados para realizar el análisis. En consecuencia, la porción de la proyección horizontal del segmento BC comprendida entre los puntos 2 y S debe de ser dibujada con línea de trazos.

Ahora bien, del lado derecho de la recta "i" es el triángulo ABC quien está *por encima* del PQR, ya el punto 1, contenido en el segmento AB, tiene mayor cota que el punto T, perteneciente al segmento PQ. Así, la proyección horizontal del segmento TX debe de ser dibujado empleando línea de trazos.

Realizando un análisis similar para los valores de vuelo, es posible determinar las partes visibles e invisibles del contorno de ambos triángulos en la proyección vertical.

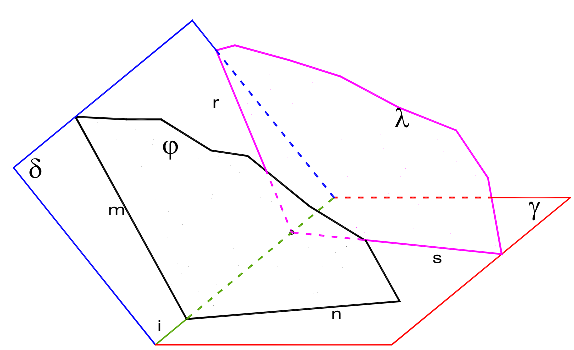


Fig. 3.12: Intersección entre planos aplicando el Teorema General de intersección entre planos.

Otra forma de determinar la recta común a dos planos δ y γ, consiste en determinar las rectas "m" y "n" de intersección entre éstos y un plano auxiliar φ, y las rectas "r" y "s" de intersección entre los planos δ y γ y un segundo plano auxiliar λ. A este método se le conoce como *teorema general de intersección entre planos* (Fig. 3.12). El punto común X a las rectas "m" y "n" define junto con el punto común Y a las rectas "r" y "s", la recta de intersección de los planos δ y γ. Si se considera que los planos auxiliares φ y λ son los planos horizontal y vertical de proyección, respectivamente, las rectas "m" y "n" serán las trazas horizontales de δ y γ, en tanto que las rectas "r" y "s" serán las trazas verticales de estos planos. En consecuencia, *si se conocen las trazas de dos planos, su recta de intersección está determinada por los puntos de corte entre sus trazas homónimas.*

En la Fig. 3.13 se muestra un ejemplo en el cual se ha determinado la recta de intersección entre los planos δ y γ a través de los puntos de corte X y Y de las trazas horizontales y verticales, respectivamente. Si un par de trazas homónimas resultasen paralelas, la recta común a ambos planos será entonces una recta frontal o una recta horizontal, según sea el caso.

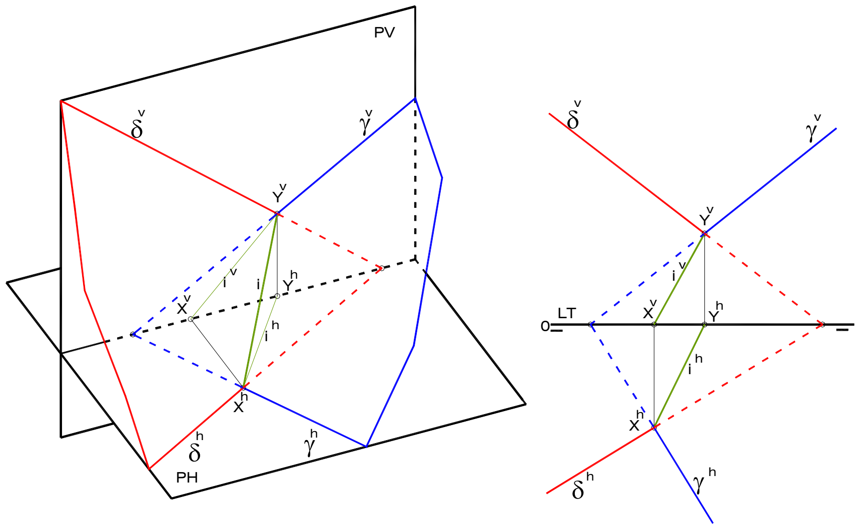


Fig. 3.13: Intersección entre planos dados por sus trazas.

Finalmente, si dos planos cuya recta de intersección se desea hallar son paralelos a la Línea de Tierra, es evidente que dicha recta resulta ser también una recta paralela a LT, siendo necesario generar una proyección lateral en la que es posible determinar el punto común a las trazas laterales de ambos planos, punto éste que representa también la proyección lateral de la recta de intersección buscada (Fig. 3.14).

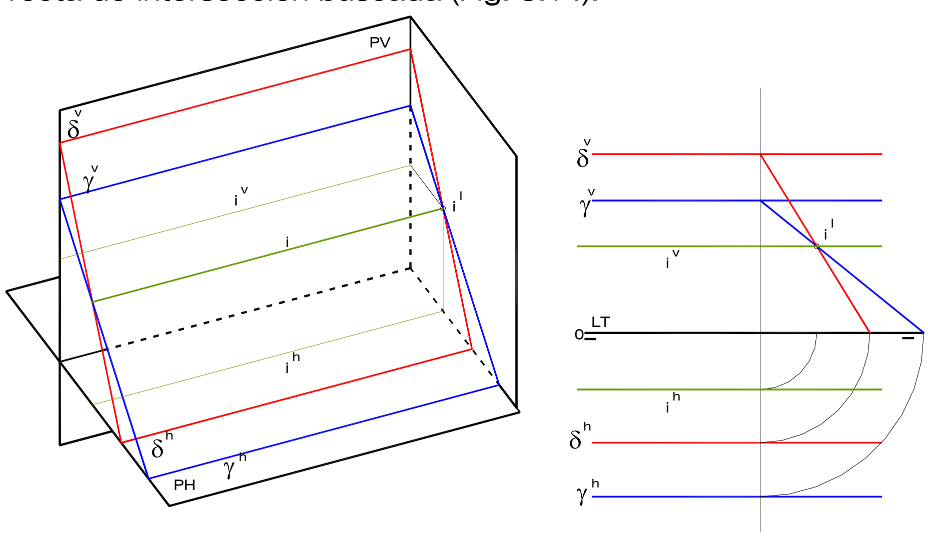


Fig. 3.14: Intersección entre planos paralelos a LT.

3.2.3 Teoremas sobre paralelismo e intersección

1. Si por una recta paralela a un plano se hace pasar un segundo plano que corte al inicial, la intersección de estos dos planos es una recta paralela a la primitiva.
2. Si dos planos paralelos son cortados por un tercero, las intersecciones son dos rectas paralelas.
3. Si dos rectas son paralelas, todo plano que corte a una de ellas corta también a la otra.
4. Si dos planos son paralelos:
    - Toda recta que corta al primero corta también al segundo.
    - Todo plano que corta al primero corta también al segundo.
5. La intersección de dos planos paralelos a una misma recta es otra recta también paralela a ella.
6. Si dos planos paralelos cortan a dos rectas también paralelas, los segmentos intersecados de las rectas son iguales.
7. Si dos rectas cualesquiera son cortadas por un haz de planos paralelos, los segmentos definidos entre los planos son proporcionales.

3.3 Perpendicularidad
3.3.1 Perpendicularidad entre recta y plano

Si una recta “p” es perpendicular a un plano δ entonces formará ángulo recto con todas las rectas contenidas en el plano δ. De allí se desprende la condición de perpendicularidad entre recta y plano: *para que una recta “p” sea perpendicular a un plano δ, es necesario y suficiente que sea perpendicular a por lo menos dos rectas “a” y “b”, no paralelas entre sí y contenidas en el plano δ.*

El problema generado por esa condición es que dos rectas que formen entre sí un ángulo recto, no siempre se proyectan en un sistema cilíndrico ortogonal sobre un plano como rectas perpendiculares. Ello solamente ocurre, de acuerdo con el *teorema de las tres perpendiculares*[3], si una de las dos rectas es paralela al mencionado plano de proyección, como “a” en la Fig. 3.15.

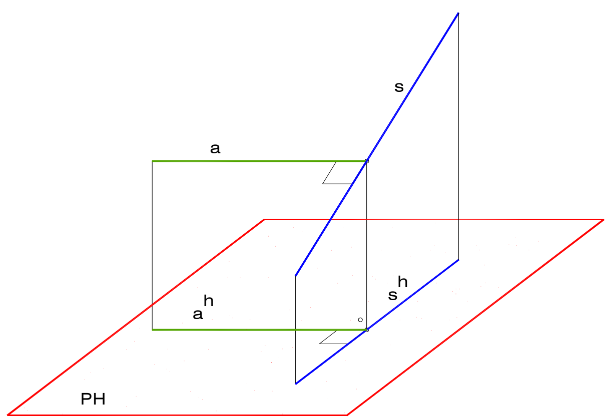


Fig. 3.15: Teorema de las tres perpendiculares

Por tal motivo, si se quiere construir una recta “p” que pase por un punto M del espacio y que sea perpendicular a un plano δ, es necesario, en aras del cumplimiento de la condición de perpendicularidad, escoger un par de rectas contenidas en δ que sean paralelas a los planos de proyección del Sistema Diédrico y que no lo sean entre sí. Estas rectas no pueden

[3] IZQUIERDO A., Fernando. Geometría Descriptiva. Editorial Dossat. Madrid, 1985.

ser otras que una recta frontal “f” y una recta horizontal “h”, es decir, rectas características o notables del plano δ (Fig. 3.16).

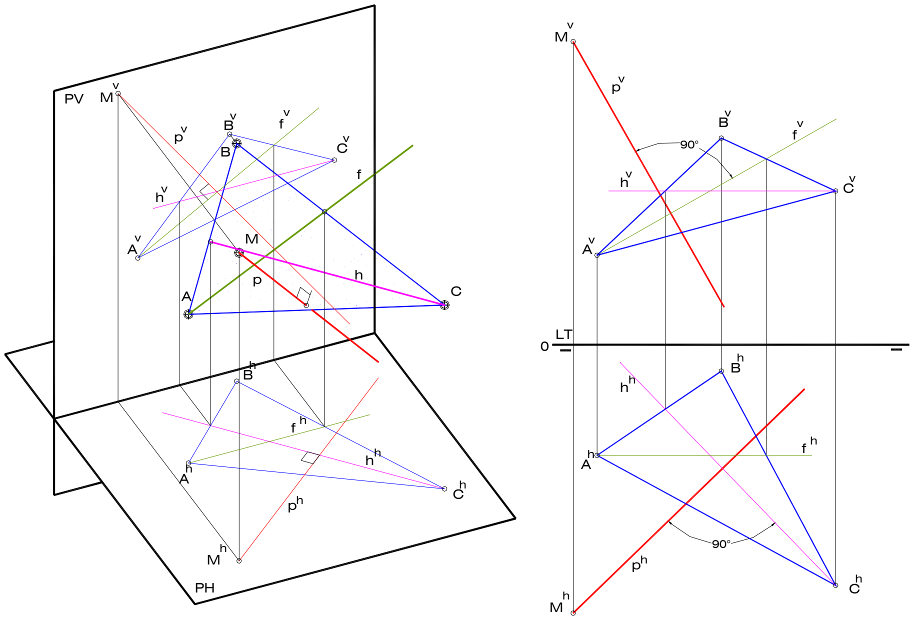


Fig. 3.16: Recta perpendicular a plano cualquiera.

La proyección vertical de la recta “p” resulta ser perpendicular a la proyección vertical de “f”, ya que ésta es paralela a PV; del mismo modo, la proyección horizontal de la recta “p” debe formar un ángulo de 90° con la proyección horizontal de “h”, dado que esta recta es paralela a PH. De lo anterior se infiere que si una recta “p” es perpendicular a un plano δ, se proyecta sobre el plano horizontal como una recta perpendicular a la traza horizontal de δ, en tanto que su proyección sobre el plano vertical forma noventa con la traza vertical de dicho plano. Esta afirmación es válida para cualquier posición que adopte el plano δ, lo que se ilustra en las Fig. 3.17-a, 3.17-b, 3.17-c, 3.17-d, 3.17-e y 3.17-f.

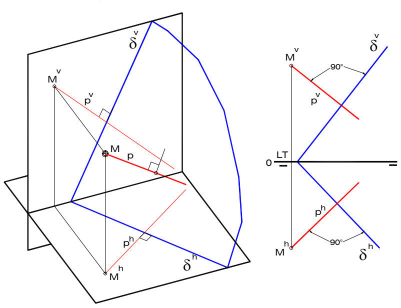


Fig. 3.17-a

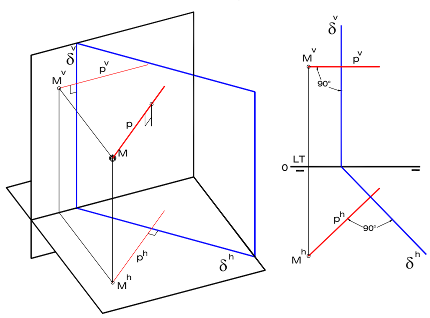


Fig. 3.17-b

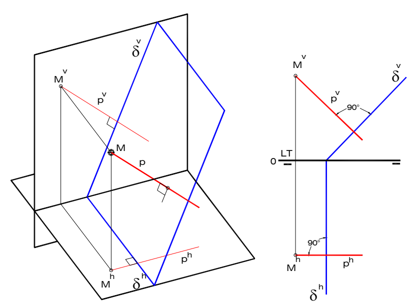


Fig. 3.17-c

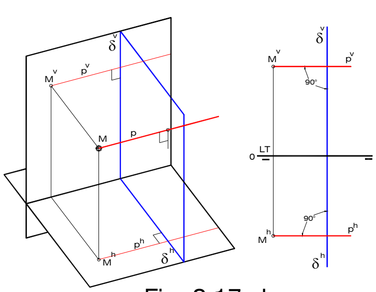


Fig. 3.17-d

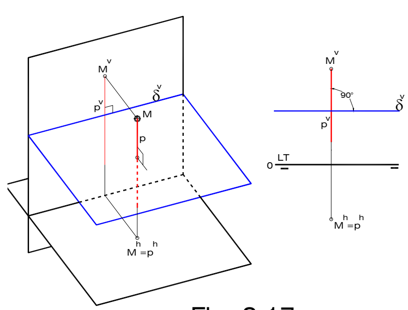


Fig. 3.17-e

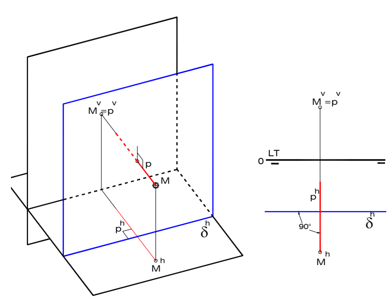


Fig. 3.17-f

Sin embargo, es de resaltar que si el plano δ está en posición paralela a LT (Fig. 3.17-g) la recta "p", que resulta ser de perfil, no queda determinada aplicando este razonamiento, ya que existen infinitas rectas que pasan por M y tienen sus proyecciones perpendiculares a las trazas del plano. Por este motivo, es necesario generar una proyección lateral, en la que la recta "p" se muestra en forma inequívoca perpendicular a la traza lateral de δ. Luego, si se escoge un punto cualquiera N^l sobre la proyección lateral de "p" y se hallan las proyecciones diédricas correspondientes N^h y N^v , se obtienen las proyecciones diédricas de dicha recta "p", determinada por el segmento MN.

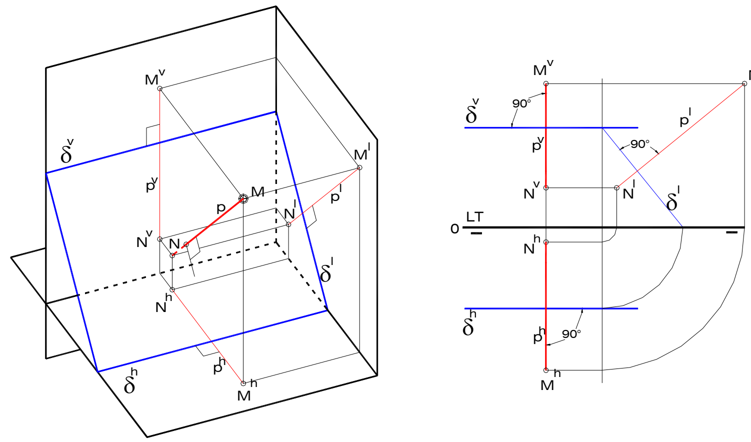


Fig. 3.17-g

La construcción de un plano π que sea perpendicular a una determinada recta "m" y que pase por un punto P del espacio, se reduce al cumplimiento de la condición de perpendicularidad entre recta y plano, es decir, a la construcción de dos rectas no paralelas entre sí y perpendiculares a la recta "m" que se corten en el punto dado P. Como se ha visto, la perpendicularidad entre rectas es una condición que tiene propiedad proyectiva si una de las rectas involucradas se encuentra en varadero tamaño, por esta razón, las rectas a las que hace referencia la condición deben ser dos rectas en posición notable: una paralela a PV y la otra paralela a PH (Fig. 3.18).

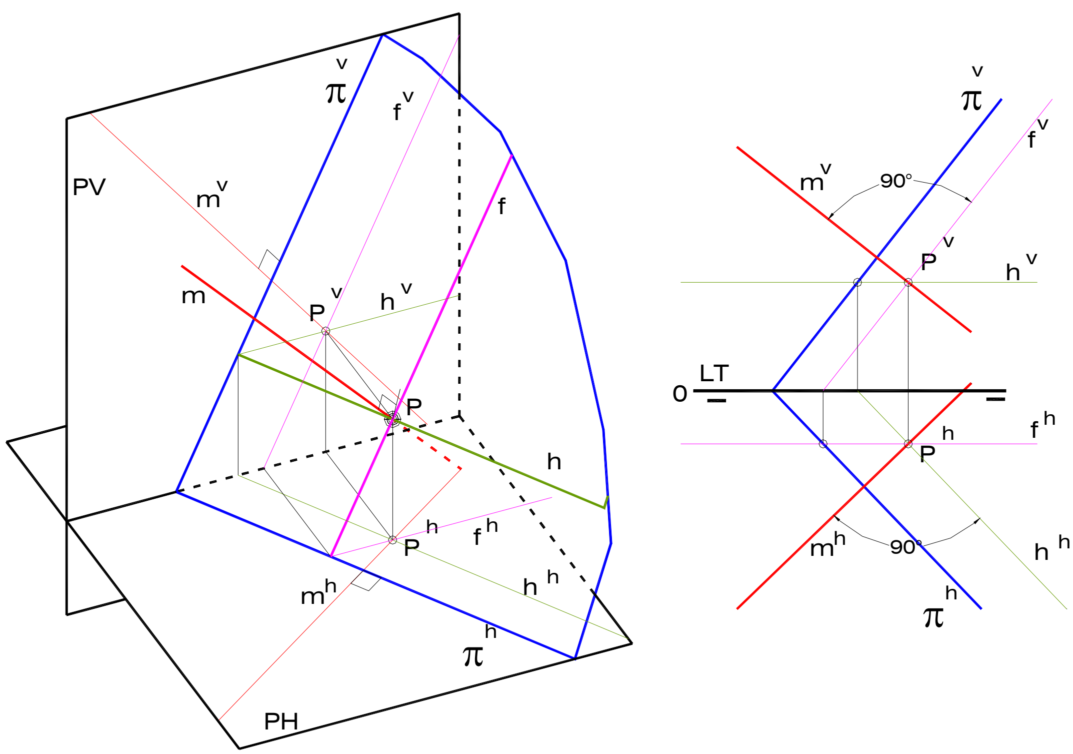


Fig. 3.18: Construcción de un plano perpendicular a una recta.

3.3.2 Perpendicularidad entre planos

Por un punto A del espacio pasan infinitos planos (π_1, π_2, π_3,... π_n) perpendiculares a un plano δ, los cuales tienen como elemento común una recta "p" que contiene al punto A y que es perpendicular al plano δ (Fig. 3.19-a).

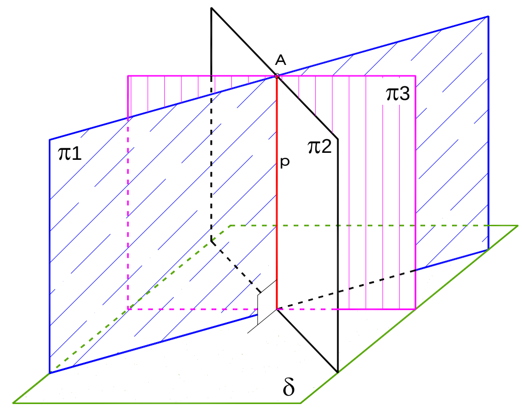


Fig. 3.19-a: Planos perpendiculares.

Esta realidad conlleva al enunciado de la condición de perpendicularidad entre planos: *Si dos planos π y δ son perpendiculares, entonces uno de ellos debe contener al menos una recta "p" perpendicular al otro.*

Si se desea construir un plano π que sea perpendicular a otro plano δ, se debe contar con una recta "m" que pertenezca al plano π para así obtener una única solución. Dicho plano π estará entonces determinado por la recta dada "m" y una recta "p" perpendicular al plano δ, recta ésta que hace cumplir la condición de perpendicularidad entre los planos.

Es necesario que ambas rectas se corten en un punto, por lo que el trazado de las proyecciones de "p" debe realizarse por las proyecciones homónimas de un punto X cualquiera perteneciente a la recta "m" (Fig. 3.19-b).

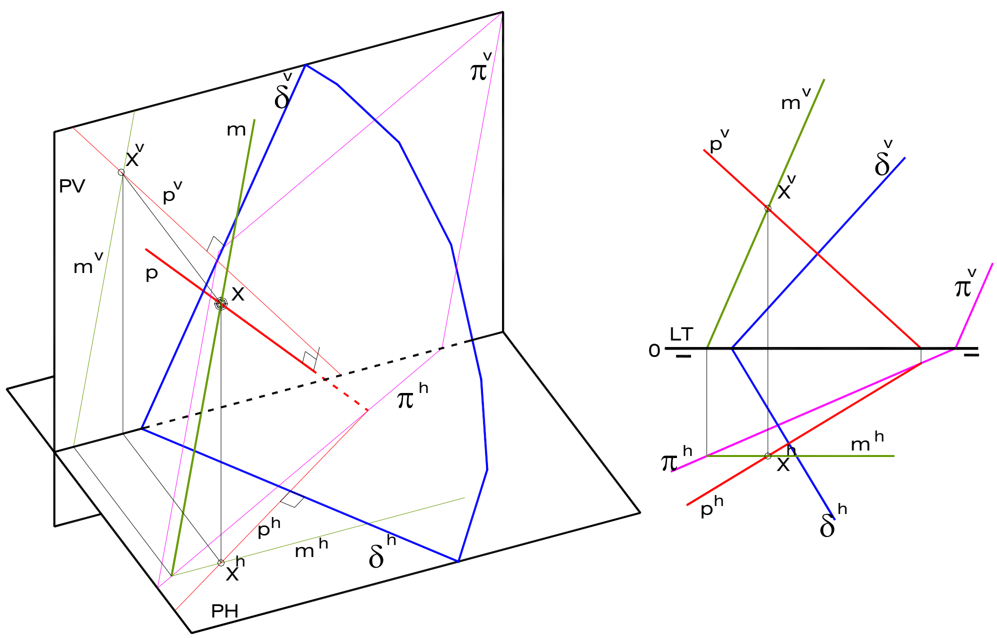


Fig. 3.19-b: Construcción de un plano que sea perpendicular a otro.

3.3.3 Perpendicularidad entre rectas

De acuerdo con el teorema de las tres perpendiculares, al cual ya se ha hecho referencia, si dos rectas son perpendiculares se proyectan sobre un plano formando ángulo recto solamente si una de las dos es paralela al plano en cuestión. Atendiendo a tal afirmación, es posible resolver cualquier problema de perpendicularidad entre rectas si se generan proyecciones sobre un plano paralelo a una de las dos rectas.

Sea una recta “m” definida por el segmento AB en posición de perfil (Fig. 3.20). Supóngase que es preciso construir una rectas “p” que pase por un punto K del espacio, sea perpendicular a “m” y tenga un punto en común con ésta (secante). En vista de que la recta “m” no es paralela a los planos de proyección principales (PH y PV) y de que la posición de la recta “p” con respecto al sistema de referencia es desconocida, es preciso generar una proyección lateral, en la que las rectas aparecen formando un ángulo recto por ser “m” de perfil. Así que se traza por K^l una perpendicular a m^l que la corta en el punto I^l, proyección lateral del punto común a las rectas. Luego, se hallan las proyecciones de I sobre las proyecciones homónimas de “m”, quedando determinada la recta “p” por las proyecciones del segmento KI.

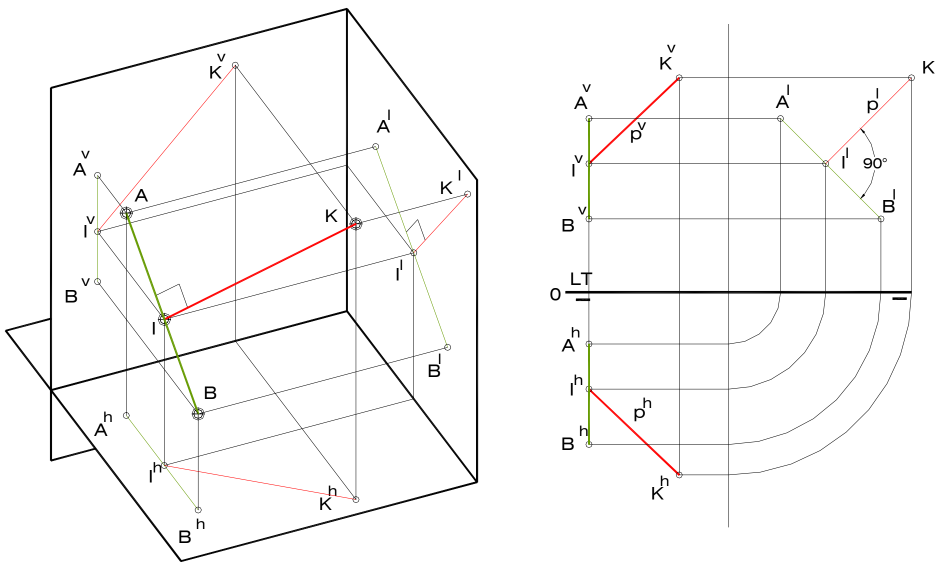


Fig. 3.20: Recta perpendicular a una recta de perfil.

Si la recta “m” tiene una posición accidental, la solución pasa por generar una proyección auxiliar sobre un nuevo plano de proyección paralelo a la recta “m”. En la Fig. 3.21-a se ha creado un sistema LT2 compuesto por PV y el mencionado plano auxiliar, sistema en el que la recta “m” es horizontal, por lo que es posible trazar la recta p^2 por K^2 formando noventa grados con m^2.

El corte resultante (I^2) es la proyección auxiliar del punto común a las rectas “m” y “p”; la proyección vertical de ese punto se obtiene trazando una referencia perpendicular a LT2 que corta a la proyección vertical de “m”, del mismo modo, la proyección horizontal de I se obtiene dibujando una perpendicular a LT1 sobre la proyección horizontal de “m”.

Por otra parte, es posible determinar la recta “p” si se tiene en cuenta que todas las rectas que pasan por el punto K y son perpendiculares a la recta “m”, incluyendo la recta “p” que la corta, determinan un

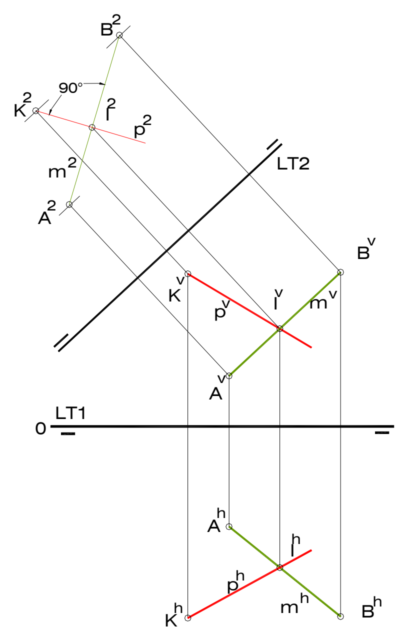


Fig. 21-a

plano π, que es, naturalmente, perpendicular a la reta "m". De manera que el procedimiento seguido para determinar dicha recta "p" utilizando este *Lugar Geométrico*[4] es el siguiente (Fig. 3.22-b).

1. Construir un plano π perpendicular a la recta "m" y que contenga el punto K; esto se hace mediante una frontal y una horizontal perpendiculares a "m".
2. Determinar el punto I de intersección entre la recta "m" ye el plano π.
3. La recta "p" queda determinada por el segmento KI.

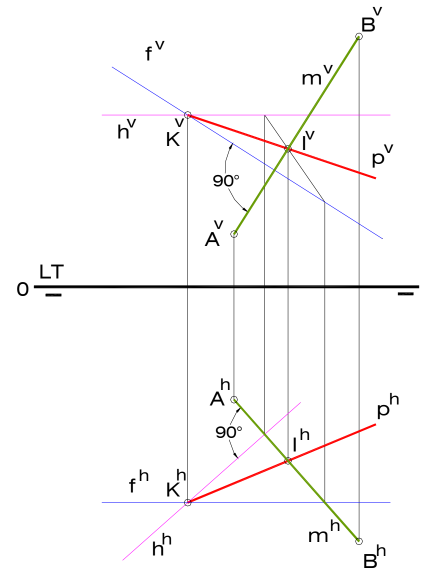


Fig. 21-b

3.3.4 Teoremas sobre perpendicularidad

1. Si dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular a una de ellas lo es también a la otra. De igual forma, si dos planos son paralelos, toda recta perpendicular a uno de ellos lo es también al otro.
2. Si una recta es perpendicular a un plano, toda perpendicular a esta recta es paralela al plano o está contenida en él.
3. Si dos planos π y δ son perpendiculares a un tercer plano γ, su intersección también lo es.
4. Teorema de las tres perpendiculares: si por el pie O de la perpendicular a un plano se traza de nuevo la perpendicular "r" a una recta cualquiera "s" del plano. La recta "r'" que une al corte de "s" y "r'" con un punto cualquiera A de la recta primitiva, es también perpendicular a la recta elegida del plano.
5. Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que contenga a dicha recta, o sea paralelo a ella, es perpendicular al plano inicial.
6. Por una recta oblicua a un plano, sólo se puede trazar conteniéndola, un plano perpendicular al dado.
7. Si dado un punto exterior a un plano se trazan la perpendicular al mismo y diversas oblicuas, se obtienen las siguientes consecuencias:
   - Dos oblicuas cuyos pies distan lo mismo del pie de la perpendicular son iguales.
   - La perpendicular es la más corta.
   - De dos oblicuas que se alejen distinto, es mayor la que tenga mayor distancia del pie de la perpendicular.

3.4 Problemas Métricos

En geometría son comunes los ejercicios que implican como solución el valor de una de las siguientes magnitudes: longitud, amplitud de ángulo, área y volumen, los cuales se conocen como problemas métricos. Además, esas magnitudes son elementos clave en el conjunto de variables que conforman un problema típico de ingeniería.

A continuación se presentan algunos de los problemas métricos más significativos de la geometría del espacio, relacionados con la determinación de distancias y ángulos entre elementos geométricos básicos, con los correspondientes métodos a seguir para encontrar su solución, los cuales se fundamentan en las relaciones geométricas estudiadas (paralelismo, intersección y perpendicularidad).

[4] Ver punto 3.5 en este mismo capítulo.

Las figuras que acompañan al texto en esta sección son representaciones genéricas de la realidad espacial, sin incluir, salvo excepciones, el dibujo en el sistema de doble proyección ortogonal, dado que los procedimientos expuestos son básicamente los mismos que ya se han explicado en puntos anteriores.

3.4.1 Distancias

Cuando se habla de la distancia entre dos elementos geométricos siempre se hace referencia a la *menor distancia* que hay entre ellos. Por tal motivo, su determinación debe realizarse sobre un segmento de línea recta.

El problema más simple es el que consiste en la determinación de la menor distancia que hay entre dos puntos A y B del espacio; este valor de distancia no es más que la longitud del segmento de recta cuyos extremos son los puntos A y B. Es evidente que si el mencionado segmento se encuentra en posición oblicua con relación a ambos planos de proyección, es preciso aplicar alguno de los métodos estudiados para la determinación de verdaderos tamaños de segmentos: Abatimiento, Introducción de Nuevos Planos de Proyección (Cambio de Plano) y Giro.

A continuación se presentan los procedimientos que llevan a la solución de los problemas básicos de cálculo de distancias.

1. **Distancia entre un punto A y un plano** δ (Fig. 3.22)

   La menor distancia que hay entre un punto A y un plano δ se halla sobre una perpendicular a este plano trazada por el punto A. El procedimiento es el siguiente:
   - Construir una recta “p” que pase por el punto A y sea perpendicular al plano δ.
   - Determinar el punto de intersección I entre la recta “p” y el plano δ.
   - Hallar el verdadero tamaño del segmento AI, el cual constituye la menor distancia buscada.

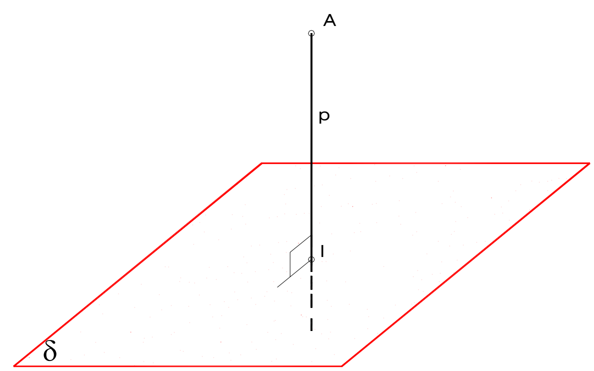


Fig. 3.22: Distancia entre un punto y un plano.

2. **Distancia entre dos planos paralelos** δ **y** π (Fig. 3.23)

   La menor distancia entre dos planos paralelos se encuentra sobre una perpendicular a ambos planos. Los pasos a seguir para determinar tal distancia son los siguientes:
   - Construir una recta “p” perpendicular a ambos planos que pase por cualquier punto del espacio.
   - Determinar los puntos de intersección I_1 e I_2 entre la recta “p” y los planos δ y π, respectivamente.
   - Hallar el verdadero tamaño del segmento I_1I_2 , el cual es igual a la menor distancia buscada.

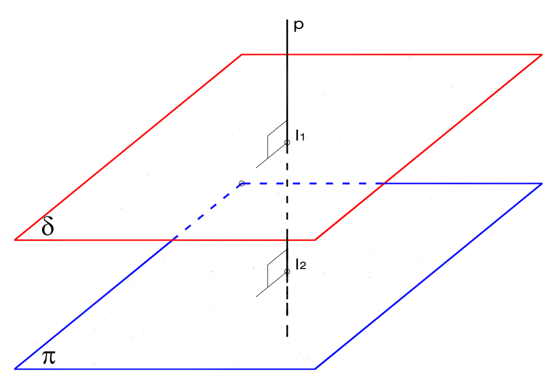


Fig. 3.23: Distancia entre planos paralelos.

3. **Distancia entre una recta "m" y un plano δ paralelo a ella** (Fig. 3.24)

La menor distancia entre una recta y un plano paralelo a ella se halla sobre una perpendicular común a ambos elementos. Para determinarla, se siguen los siguientes pasos:

- Seleccionar un punto cualquiera X sobre la recta "m"
- Trazar por el punto X una recta "p" perpendicular al plano δ, que lo será también con respecto a la recta "m" por ser ésta paralela al plano.
- Determinar el punto de intersección I entre la recta "p" y el plano δ.
- Hallar el verdadero tamaño del segmento XI, que será igual a la distancia pedida.

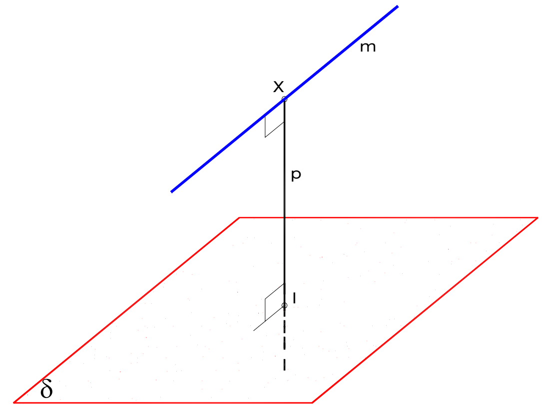


Fig. 3.24: Distancia entre una recta y un plano paralelo a ella.

4. **Distancia entre un punto A y una recta "m"** (Fig. 3.25)

La menor distancia entre un punto y una recta se halla sobre una perpendicular a ésta trazada por el punto. Ambas rectas deben de ser secantes.

- Construir por el punto A una recta "p" perpendicular a la recta "m" que la corte en el punto I. Esto se hace trazando un plano auxiliar ε que contenga al punto A y sea perpendicular a la recta "m", para luego determinarse el punto de intersección I entre ésta y el plano ε.
- Hallar el verdadero tamaño del segmento AI, que será igual a la distancia buscada.

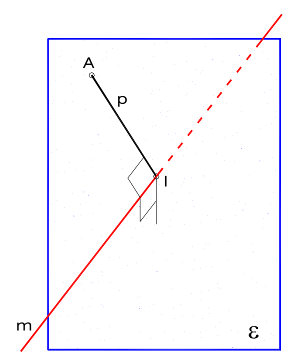


Fig. 3.25: Distancia entre un punto y una recta.

Otra forma de resolver este problema consiste en determinar el verdadero tamaño del plano formado por el punto A y la recta "m", aplicando Abatimiento, Giro o Cambio de Plano, y trazar la recta "p" en la nueva proyección formando 90° con "m", obteniéndose así el punto de corte I. Además, en esa nueva proyección el segmento XI se encuentra en verdadero tamaño, lo que representa la respuesta a la interrogante inicial.

5. **Distancia entre dos rectas paralelas "m" y "n"** (Fig. 3.26)

La menor distancia entre dos rectas paralelas se encuentra sobre una perpendicular común a ambas, contenida en el plano que ellas definen. A continuación se expone el procedimiento a seguir:

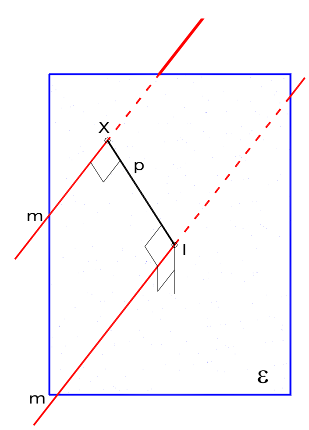


Fig. 3.26: Distancia entre dos rectas paralelas.

- Seleccionar un punto cualquiera X sobre la recta “m”
- Trazar por el punto X una recta “p” perpendicular a la recta “n” que la corte en el punto I.
- Hallar el verdadero tamaño del segmento XI, que será igual a la menor distancia entre las rectas paralelas “m” y “n”.

Del mismo modo que en el caso anterior, este problema puede ser resuelto mediante la determinación del verdadero tamaño del plano formado por las rectas “m” y “n”.

6. **Distancia entre dos rectas que se cruzan “m” y “n”** (Fig. 3.27)

La menor distancia entre dos rectas que se cruzan “m” y “n” (no secantes) se halla sobre la recta perpendicular común a ambas. Por otra parte, esa distancia es igual a la que hay entre una de las rectas y un plano paralelo a ella que contiene a la otra. El siguiente procedimiento se basa en esta última afirmación:

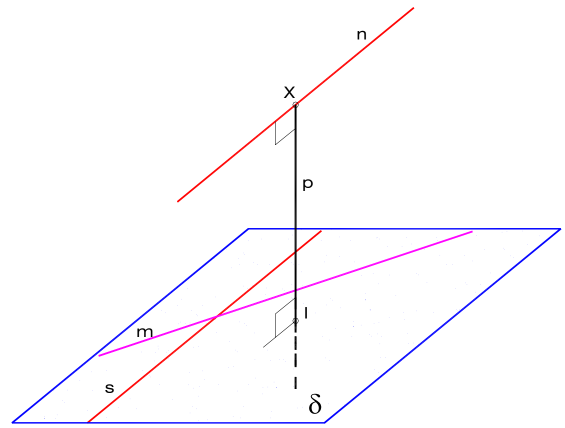


Fig. 3.27: Distancia entre dos rectas que se cruzan.

- Construir un plano δ que contenga a una de las rectas, “m” por ejemplo, y sea paralelo a la otra, es decir, a “n”. Esto se hace trazando una recta “s” paralela a “n” por un punto cualquiera perteneciente a la recta ”m”.
- Seleccionar un punto cualquiera X sobre la recta “n”.
- Trazar por el punto X una recta “p” perpendicular al plano δ.
- Determinar el punto de intersección I entre la recta “p” y el plano δ.
- Hallar el verdadero tamaño del segmento XI, que será igual a la distancia pedida.

3.4.2 Ángulos

La determinación del ángulo entre diferentes elementos geométricos (rectas y planos) constituye una aplicación de las relaciones geométricas estudiadas, así como de la determinación del verdadero tamaño de planos.

Los ángulos formados entre una recta y los planos de proyección que componen el Sistema Diédrico, se han determinado al estudiar los métodos empleados en la determinación del verdadero tamaño de segmentos de recta oblicuos.

Del mismo modo, los ángulos que un plano cualquiera forma con los de proyección se encuentran estudiando las rectas de máxima pendiente y de máxima inclinación de dicho plano, tema ya tratado en esta obra.

Siempre es posible dar dos respuestas a un determinado problema: el ángulo ϕ y su complemento (180°-ϕ); cualquiera de esas dos respuestas se considera correcta.

A continuación se presentan los procedimientos que conducen a la solución de los problemas básicos de determinación de ángulos entre rectas, entre recta y plano y entre planos.

1. **Ángulo entre dos rectas secantes “m” y “n”** (Fig. 3.28-a)

El ángulo ϕ que se forma entre dos rectas secantes “m” y “n” no se proyecta en verdadera magnitud si el plano δ que determinan ambas rectas no es paralelo a uno de los planos de proyección. En tal situación, es indispensable emplear alguno de los métodos estudiados (Abatimiento, Introducción de Nuevos Planos de Proyección o Cambio de Plano y Giro) para obtener el valor de dicho ángulo.

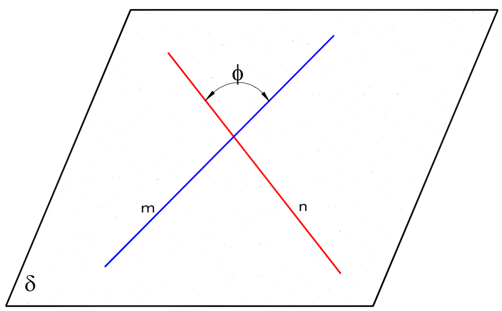


Fig. 3.28-a: Ángulo entre rectas secantes.

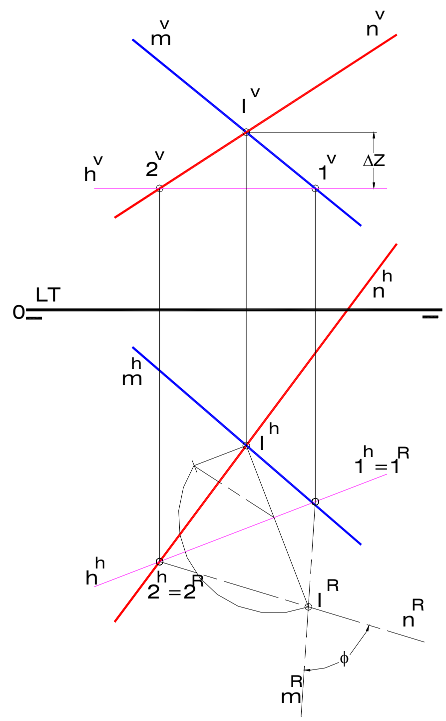


Fig. 3.28-b: Ángulo entre rectas secantes. Aplicación en el Sistema Diédrico.

En la Fig. 28-b se muestra un ejemplo en el que se ha determinado la verdadera magnitud del ángulo ϕ, formado entre dos rectas oblicuas “m” y “n”, mediante el abatimiento del plano mn en torno a una recta horizontal “h”.

Es evidente que se debe determinar la proyección abatida del punto I, ya que es común a las rectas “m” y “n”. Por otra parte, los puntos 1 y 2 son los cortes entre las rectas “m” y “n” y el eje de abatimiento “h”, respectivamente, por lo que sus proyecciones abatidas coinciden con sus proyecciones horizontales. Finalmente, el ángulo formado entre m^R y n^R es el ángulo pedido en verdadera magnitud.

2. **Ángulo entre dos rectas que se cruzan “m” y “n”** (Fig. 3.29)

El ángulo ϕ que se forma entre dos rectas cruzadas (no secantes) “m” y “n” es igual al que se forma entre dos rectas secantes paralelas a ellas. Por ello, para determinar dicho ángulo, es suficiente escoger un punto cualquiera X sobre una de las rectas, “m” por ejemplo, y construir una recta “s” paralela a la otra que pase por ese punto. Luego, el ángulo ϕ formado por las rectas “m” y “s” es igual al ángulo buscado y, para determinarlo, se procede de la misma forma que en el caso anterior.

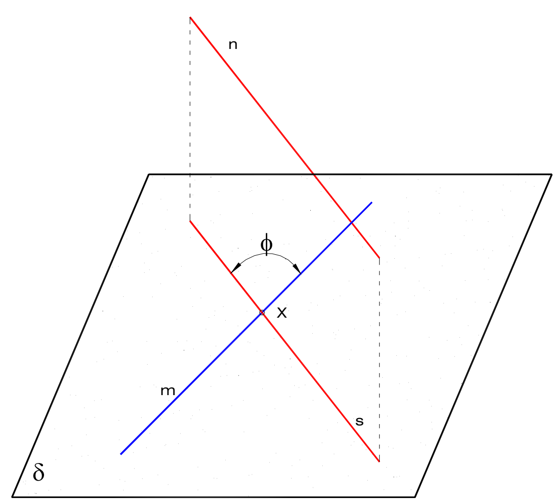


Fig. 3.29: Ángulo entre dos rectas que se cruzan.

3. **Ángulo entre una recta "m" y un plano** δ (Fig. 3.30)

El ángulo ϕ que se forma entre una recta "m" y un plano δ es el formado entre la recta "m" y una recta "i", siendo ésta el resultado de la intersección entre un plano π y el plano δ. El mencionado plano π contiene a la recta "m" y es perpendicular al plano δ.

El procedimiento a seguir para resolver este problema es el siguiente:

- Seleccionar un punto cualquiera X sobre la recta "m".
- Construir una recta "p" que pase por X y sea perpendicular al plano δ. El plano π queda determinado por las rectas "m" y "p".
- Determinar los puntos de intersección I_1 e I_2 entre las rectas "m" y "p" y el plano δ, respectivamente. Tales puntos definen la recta de intersección "i" entre los planos δ y π.
- Hallar el ángulo ϕ formado entre las rectas "m" e "i", que es el ángulo que se forma entre la recta "m" y el plano δ. Para ello se procede como en el punto 1 de esta sección.

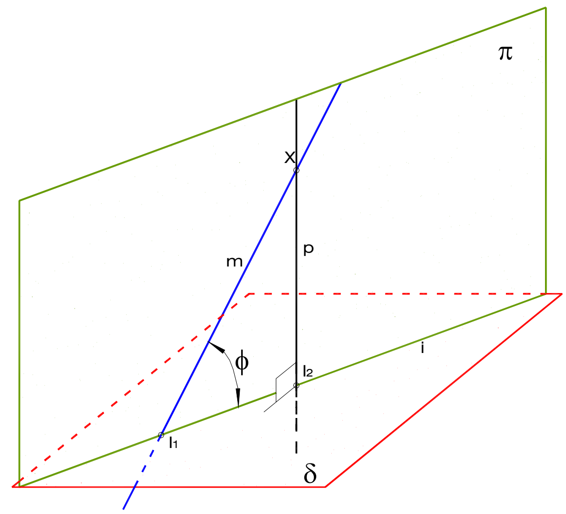


Fig. 3.30: Ángulo entre una recta y un plano.

4. **Ángulo entre dos planos** δ **y** γ (Fig. 3.31)

El ángulo ϕ que se forma entre dos planos δ y γ es el formado entre las rectas de intersección entre los planos δ y γ con un tercer plano π. Éste último es un plano perpendicular a aquellos, o lo es lo mismo, perpendicular a la recta de intersección entre ellos.

Por otra parte, el ángulo formado entre una recta "p" perpendicular al plano δ y una recta "q" perpendicular al plano γ, es igual al ángulo ϕ.

Atendiendo a estas afirmaciones, es posible proceder de dos formas diferentes para llegar a la solución de este problema.

El primero de los procedimientos es el siguiente (Fig. 3.31-a):

- Determinar la recta de intersección "i" entre los planos δ y γ.
- Construir un plano π perpendicular a la recta "i" que pase por cualquier punto del espacio.
- Determinar la recta de intersección "i_1" entre los planos π y δ.
- Determinar la recta de intersección "i_2" entre los planos π y γ.

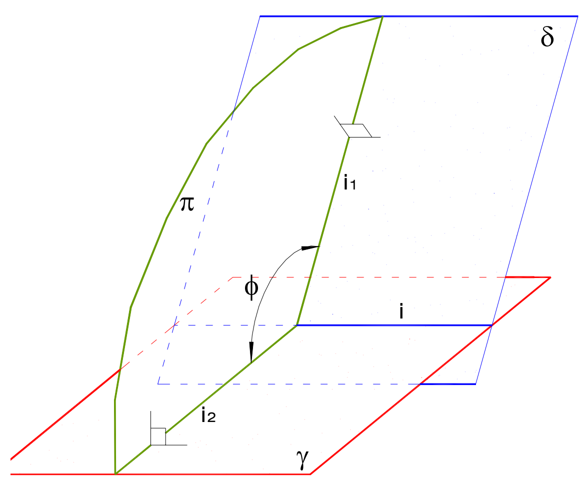


Fig. 3.31-a: Ángulo entre dos planos. Primer procedimiento.

- Hallar el ángulo formado entre las rectas "i_1" e "i_2", que es el ángulo formado entre los planos δ y γ.

El segundo procedimiento es el siguiente (Fig. 3.31-b):

- Escoger un punto cualquiera del espacio X.
- Construir por el punto X una recta "p" perpendicular al plano δ y una recta "q" perpendicular al plano γ. Nótese que las rectas así construidas determinan un plano π perpendicular a los planos δ y γ.
- Determinar el ángulo formado entre las rectas "p" y "q", el cual es igual al ángulo formado entre los planos δ y γ.

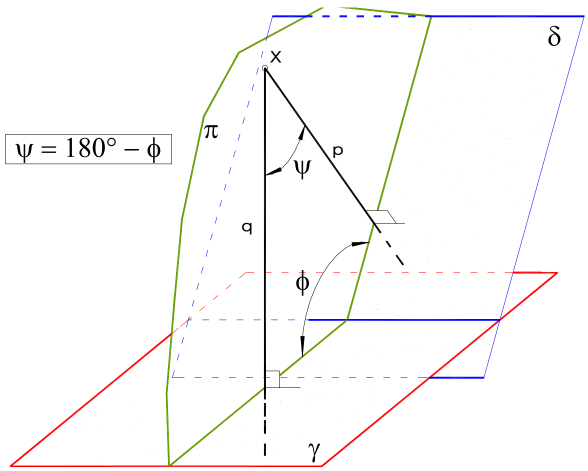


Fig. 3.31-b: Ángulo entre dos planos. Segundo procedimiento.

3.5 Lugares Geométricos
3.5.1 Concepto

Un *lugar geométrico* es un elemento o figura geométrica cuyos puntos cumplen con una determinada condición o ley.

Existen infinidad de lugares geométricos, tanto si se trabaja en el plano como en el espacio. Por ejemplo, una circunferencia puede ser definida como el *lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto de ese plano denominado centro.* La condición o ley que cumplen todos los puntos pertenecientes a esa circunferencia es precisamente su equidistancia del centro.

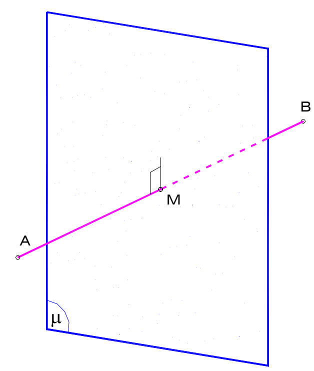


Fig. 3.32: Plano mediador del segmento AB.

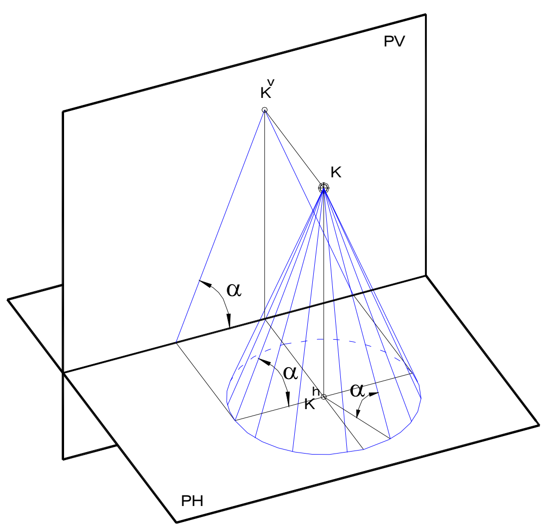


Fig. 3.33: Rectas que pasan por K y forman un mismo ángulo α con PH.

De igual forma se puede establecer ejemplos sencillos de lugares geométricos en tres dimensiones:

- El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos puntos A y B es un plano μ perpendicular al segmento AB y que pasa por su punto medio M. Este plano se conoce como *plano mediador* del segmento AB[5] (Fig. 3.32).
- El lugar geométrico de las rectas del espacio que pasan por un punto K y forman un ángulo α con el plano horizontal de proyección, es una superficie cónica de revolución de vértice K cuyas generatrices forman un

[5] RONDÓN R., Alicia y TÉLLEZ, Mary. Sistemas de Representación. Universidad de Los Andes.

ángulo α con dicho plano horizontal (Fig. 3.33).

- El lugar geométrico de las rectas del espacio que pasan por un punto K y cortan a una recta “m”, es el plano determinado por el punto K y esa recta “m” (Fig. 3.34).
- El lugar geométrico de las rectas del espacio que cortan a una recta “a” y son paralelas a otra recta “m”, es un plano δ que contiene a la recta “a” y es paralelo a la recta “m” (Fig. 3.35).
- El lugar geométrico de las rectas del espacio que pasan por un punto K y son perpendiculares a otra recta “m”, es un plano π perpendicular a la recta “m” que pasa por el punto K (Fig. 3.36).

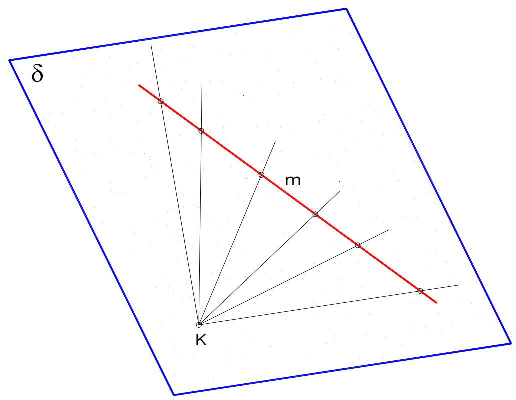


Fig. 3.34: Rectas que pasan por K y cortan a la recta "m".

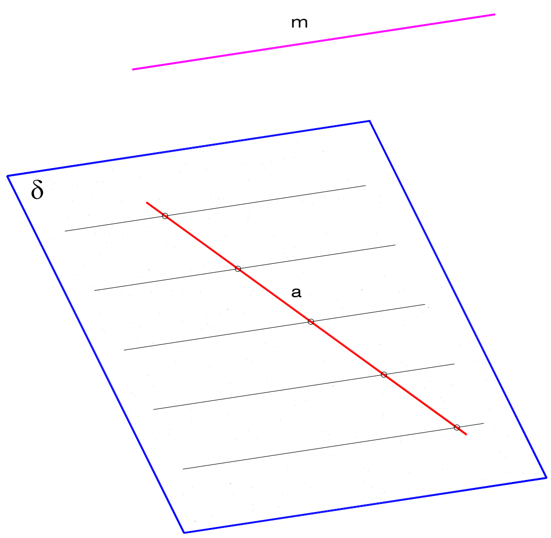


Fig. 3.35: Rectas que cortan a una recta "a" y son paralelas a la recta "m".

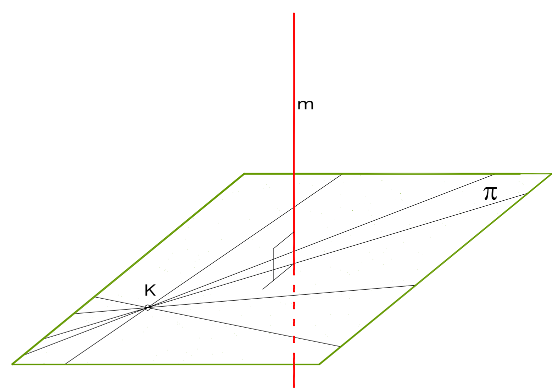


Fig. 3.36: Rectas que pasan por K y son perpendiculares a la recta "m".

El conocimiento y aplicación de los lugares geométricos es una condición *sine qua non* para la resolución de problemas geométricos complejos en tres dimensiones: construcción de poliedros, construcción de superficies regladas desarrollables y alabeadas, construcción de superficies de doble curvatura, intersección de superficies, etc.

3.5.2 Aplicaciones

1. Construir una recta “s” que corte a las rectas “a” y “b” (no coplanares) y sea paralela a la recta “m” (Fig. 3.37)

   La recta “s” es la intersección entre dos planos δ, paralelo a la recta “m” y contiene a la recta “a”, y γ, paralelo a la recta “m” y contiene a la recta “b”. Como es natural, dicha recta “s” debe pasar por el punto de intersección entre la recta “a” y el plano γ y por el punto de intersección entre la recta “b” y el plano δ, lo que da lugar al siguiente procedimiento:

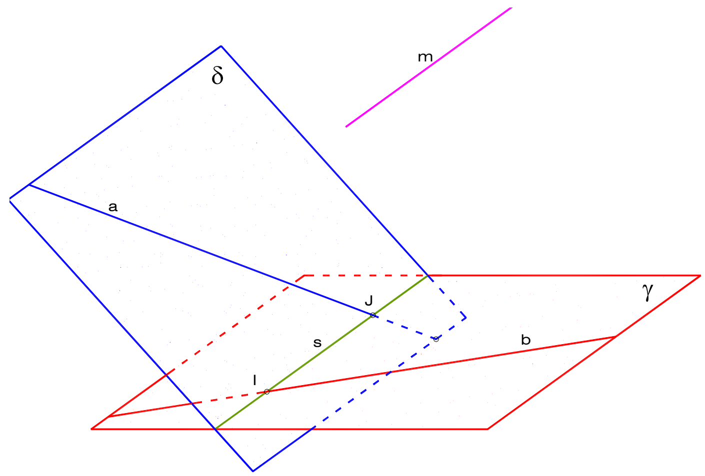
   

   Fig. 3.37: Recta que corta a dos rectas "a" y "b" y es paralela a otra recta "m".

   Se construye en primer lugar un plano δ que contenga a la recta “a” y sea paralelo a la recta “m”. Luego se determina el punto de intersección I entre la recta “b” y el plano δ. Finalmente, se traza una recta paralela a “m” que pase por el punto I, la cual es la recta “s” buscada.

2. Construir una recta “s” que pase por un punto K y corte a las rectas “a” y “b”, no coplanares (Fig. 3.38)

   La recta “s” es la intersección entre un plano δ, definido por el punto K y la recta “a”, y el plano γ, definido por el punto K y la recta “b”. Además, dicha recta debe pasar por el punto de intersección entre la recta “a” y el plano γ y por el punto de intersección entre la recta “b” y el plano δ, lo que da lugar al siguiente procedimiento:

   Se determina el punto de intersección I entre la recta “a” y el plano γ determinado por el punto K y la recta “b”. Luego se construye la recta definida por el punto K y el punto I, que será la recta “s” buscada.

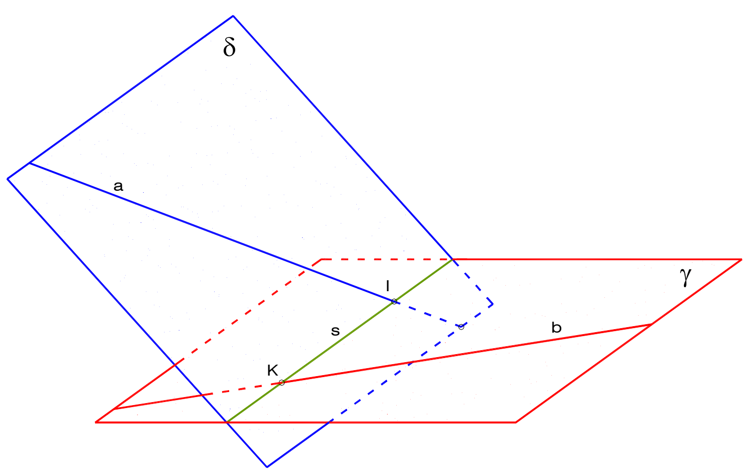


Fig. 3.38: Recta que pasa por el punto K y corta a las rectas "a" y "b".

3. Construir una recta contenida en un plano δ que forme un ángulo α con el plano horizontal de proyección (Fig. 3.39).

   Como se ha indicado, el lugar geométrico de las rectas que pasan por un punto K del espacio y forman un determinado ángulo con el plano horizontal de proyección, son las generatrices de un cono recto de revolución cuyo vértice es el punto K.

   Para encontrar la solución a este problema es necesario, en primer lugar, escoger un punto cualquiera K perteneciente al plano δ, para luego construir un cono recto con la base apoyada sobre PH y cuyo eje es una recta de pié KO; la proyección vertical estará conformada por dos rectas que pasan por K^v y forman α grados con la línea de tierra. Tales rectas definen un triángulo isósceles $K^v1^v2^v$, siendo el tamaño 1^vO^v el radio del cono.

   A continuación, con centro en O^h y abertura igual al radio, se traza un arco que cortará en dos puntos 3 y 4 a la traza horizontal del plano δ. Estos puntos, cuya cota es igual a cero, definen junto a K, dos rectas "a" y "b" que cumplen con la condición exigida en el enunciado del problema.

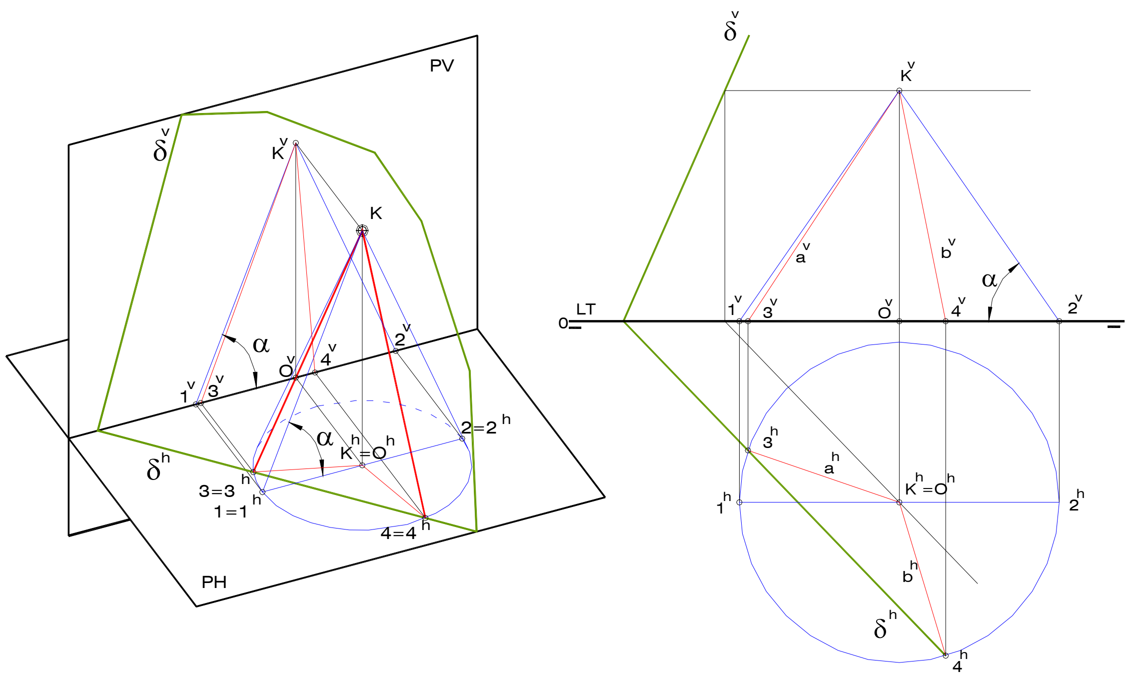


Fig. 3.39: Rectas contenidas en un plano y forman un ángulo α con PH.

   De lo anterior se infiere que el problema puede tener dos, una o ninguna solución, dependiendo de la relación entre el ángulo que el plano δ forma con el plano horizontal y el ángulo α dado. Así, si el ángulo del plano es menor que α, el problema no tiene solución, si son iguales, existe una única solución, pues el arco será tangente a la traza horizontal de δ, y por último, si el ángulo de este plano es mayor que el ángulo dado, existen dos posibles soluciones, como lo muestra la Fig. 3.39.

   De manera análoga, es posible encontrar la dirección de las rectas contenidas en el plano δ que forman un determinado ángulo β con el plano vertical de proyección.

4. Construir un plano δ que contenga a una recta “m” y forme α grados con el plano horizontal de proyección (Fig. 3.40).

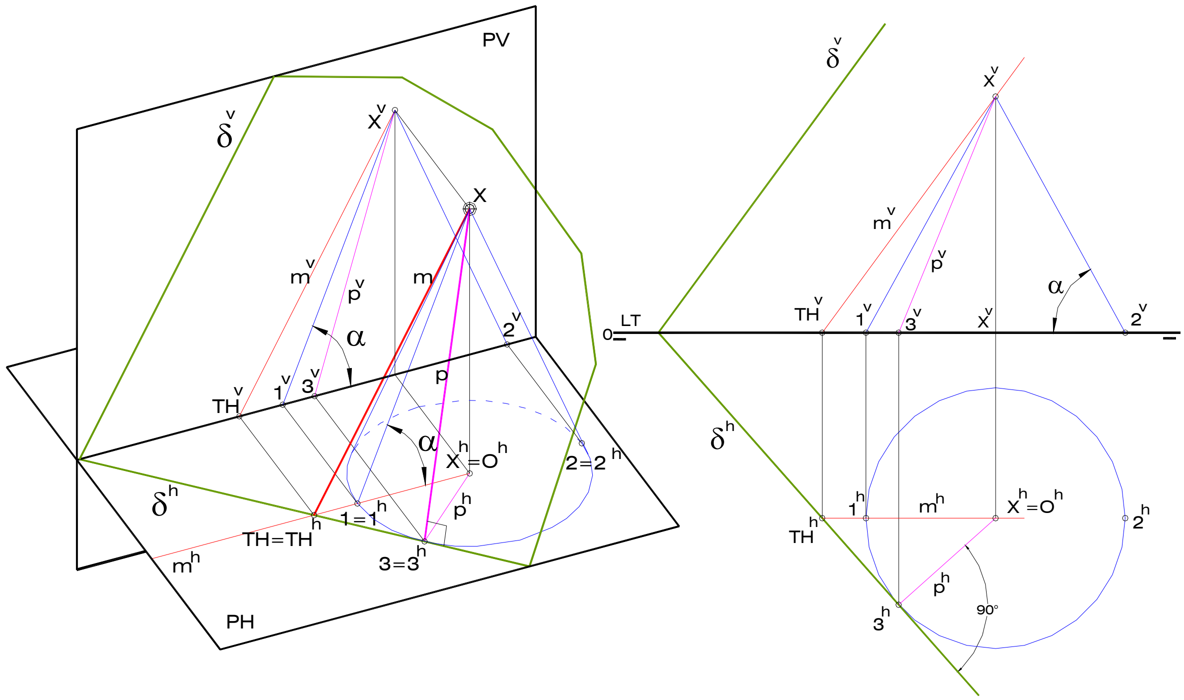


Fig. 3.40: Plano que contiene a una recta "m" y forma un ángulo α con PH.

Para resolver este problema es necesario construir un cono de revolución con la base apoyada sobre PH y el vértice en un punto cualquiera X de la recta “m”. Al igual que en el ejemplo anterior, la proyección vertical del cono es un triángulo isósceles cuyos ángulos iguales son iguales al ángulo α dado, y en el que la base es igual al diámetro. El ángulo formado entre el plano pedido δ y el plano horizontal, es igual al que forman con éste ultimo las rectas de máxima pendiente de δ. Las posibles soluciones para esas rectas de máxima pendiente son las generatrices del cono construido que pertenecen al mismo tiempo al plano δ.

Por otra parte, la traza horizontal del plano δ debe pasar por el punto de traza horizontal TH de la recta “m” y ser tangente a la base del cono, puesto que la mencionada traza del plano debe ser perpendicular a sus rectas de máxima pendiente.

De esa forma, se obtienen dos soluciones para la traza horizontal del plano δ si el punto de traza horizontal TH de la recta “m” es interior a la circunferencia de base del cono; una solución si pertenece a ella, y, por último, ninguna solución si ese punto TH es interior a dicha circunferencia. En el ejemplo mostrado en la Fig. 3.40 se ha representado una sola de las dos soluciones resultantes, correspondiente a la recta de máxima pendiente “p” definida por los puntos X y 3.

Finalmente, la traza vertical del plano δ queda definida por el punto de corte entre la traza horizontal y la línea de tierra y el punto de traza vertical TV de la recta “m”, el cual es un punto impropio en el ejemplo por ser “m” una recta frontal, lo que implica que la traza vertical del plano es paralela a la proyección vertical de esta recta.

Análogamente, es posible obtener el plano δ si se ofrece como dato una recta perteneciente a él y el ángulo β que forma con el plano vertical de proyección.

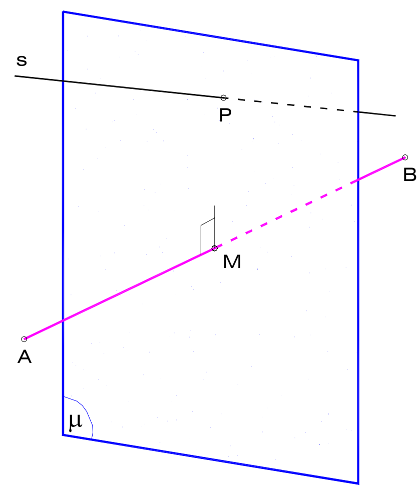


Fig. 3.41: Punto equidistante de dos puntos A y B y contenido en una recta "r".

5. Hallar un punto P equidistante de los puntos A Y B y contenido en una recta "s" (Fig. 3.41)

   El lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de los puntos A y B es el plano mediador μ del segmento AB. Por otra parte, como el punto P debe pertenecer a la recta "s", se encontrará en la intersección entre esta recta y el plano μ.

6. Hallar la recta perpendicular común "p" a dos rectas "a" y "b" que se cruzan (Fig. 3.42)

   Sean dos rectas "a" y "b" no coplanares (cruzadas sin punto común); existe una única recta "p" que es perpendicular a ambas rectas "a" y "b" y que las corta en los puntos Q y R, respectivamente.

   Para encontrar la recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan existen varios métodos; tres de ellos se exponen en este trabajo: dos basados en relaciones geométricas y un tercero en el que se aplica la introducción de dos nuevos planos de proyección de forma conveniente.

   El primer procedimiento (Fig. 3.42-a) consta de los siguientes pasos:

   - Construir un plano δ que sea paralelo a una de las rectas, "a" por ejemplo, y contenga a la otra. Para ello se traza una recta "c" paralela a "a" por un punto X cualquiera de la recta "b". Cualquier recta perpendicular al plano así obtenido es perpendicular tanto a la recta "a" como a la recta "b".
   - Escoger un punto cualquiera Y sobre la recta "a" y construir por ese punto una recta "m", perpendicular al plano δ.
   - Determinar el punto de intersección I entre la recta "m" y el plano δ.
   - Trazar por el punto I una recta "d" que sea paralela a la recta "a"; dicha recta "d" corta a la recta "b" en el punto R.
   - Construir la recta "p" buscada, la cual pasa por el punto R, es paralela a la recta "m" y corta a la recta "a" en el punto Q.

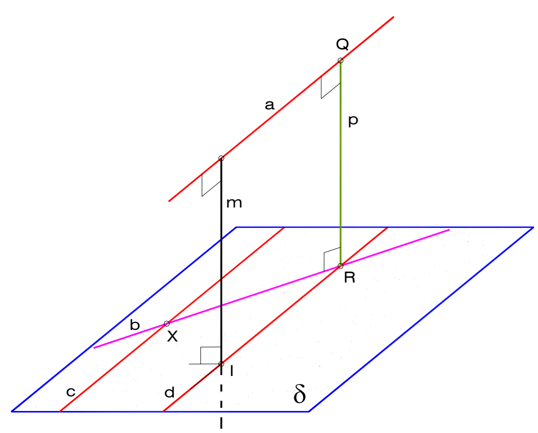


Fig. 3.42-a: Perpendicular Común. Primer Método.

El segundo método (Fig. 3.42-b) consiste en lo siguiente:

- Escoger un punto X cualquiera sobre una de las rectas, “a” por ejemplo, y construir un plano π perpendicular a ella que pase por ese punto.
- Escoger un punto cualquiera Y sobre la otra recta, es decir “b”, y construir un plano ρ que sea perpendicular a ella y contenga al punto Y.
- Determinar la recta de intersección “i” entre los planos π y ρ. Esta recta posee la dirección de la recta perpendicular común a “a” y “b”, ya que cualquier recta contenida en el plano π es perpendicular a la recta “a”, en tanto que todas las rectas del plano ρ son perpendiculares a la recta “b”
- Construir un plano δ que contenga a la recta “a” (o a la recta “b”) y sea paralelo a la recta “i”. En el plano así determinado se encuentra la recta perpendicular común.
- Hallar el punto de intersección (R en la figura) entre la recta “b” y el plano δ.
- Trazar por ese punto de intersección una recta “p” paralela a la recta “i”, la cual constituye la recta perpendicular común buscada, que cortará a la recta “a” en el punto Q.

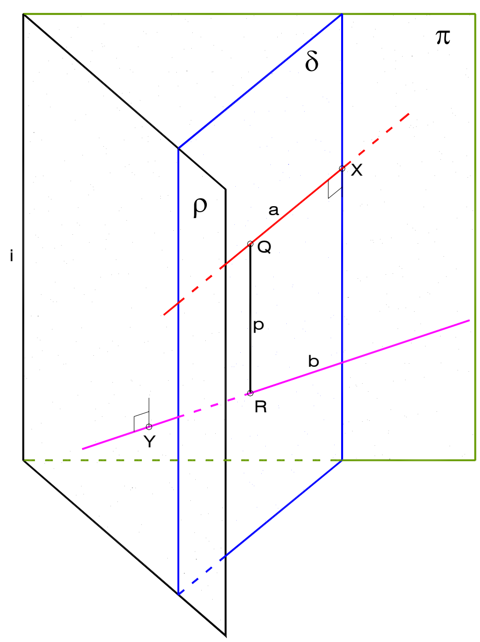


Fig. 3.42-b: Perpendicular Común.
Segundo Método.

También es posible determinar la recta perpendicular común a las rectas “a” y “b” mediante la generación de nuevos sistemas de proyección, de acuerdo con el siguiente procedimiento (Fig. 42-c):

- Generar un sistema de proyección LT2 compuesto por una de los planos de proyección del sistema LT1 y un nuevo plano paralelo a una de las dos rectas. En el ejemplo mostrado se ha introducido un nuevo plano horizontal, siendo la línea de tierra LT2 paralela a la proyección vertical de la recta “a”, con lo que se obtiene a la recta “a” en posición horizontal en sistema LT2.
- Generar un tercer sistema LT3, compuesto por el nuevo plano horizontal introducido en el paso anterior y un nuevo plano vertical; éste último debe ser perpendicular a la recta “a”. En este tercer sistema la recta “a” está en posición de punta.

- Trazar por a^3 una perpendicular a b^3, que constituye la proyección de la perpendicular común "p" sobre el segundo plano auxiliar. El corte R^3 entre p^3 y b^3 es la segunda proyección auxiliar del punto común a las rectas "b" y "p".
- Construir por R^3 una referencia perpendicular a LT3, que cortará a b^2 en R^2.
- Trazar por R^2 una perpendicular p^2 a la primera proyección auxiliar de la recta "a"; el corte entre ambas líneas es Q^2, primera proyección auxiliar del punto común a las rectas "a" y "p".
- Alinear mediante perpendiculares a LT2 para obtener las proyecciones Q^v y R^v sobre a^v y b^v, respectivamente.
- Alinear mediante perpendiculares a LT1 para obtener las proyecciones Q^h y R^h sobre a^h y b^h, respectivamente.

Es necesario señalar que, si bien la distancia entre los puntos Q y R es la menor distancia entre las rectas "a" y "b", en ninguna de las cuatro proyecciones aparece el segmento QR en verdadero tamaño, ya que para hallar estos puntos de corte se han generado nuevos sistemas cuyos planos de proyección no son paralelos a dicho segmento.

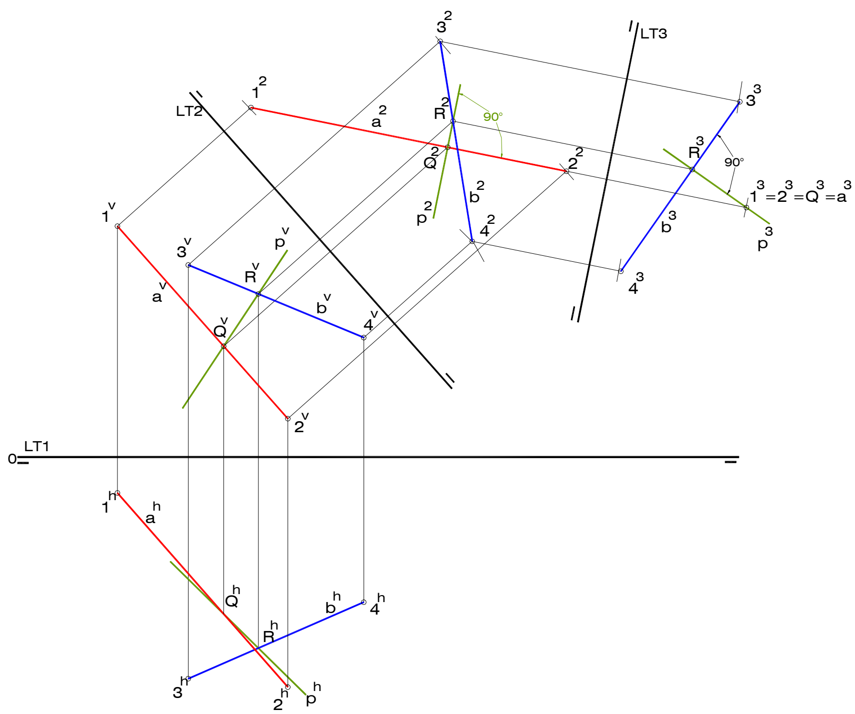


Fig. 3.42-c: Perpendicular Común.
Tercer Método.