CAPÍTULO II

2.1 El Plano

Es uno de los conceptos primarios de la geometría. El plano es el elemento geométrico *bidimensional* y puede ser determinado por tres puntos no alineados (Fig. 2.1-a), por una recta y un punto exterior a ella (Fig. 2.1-b), por dos rectas paralelas (Fig. 2.1-c) o por dos rectas que se cortan (Fig. 2.1-d). Podemos decir que lo más parecido a él es una hoja de papel, pero el plano no tiene grosor y es infinito para todos lados.

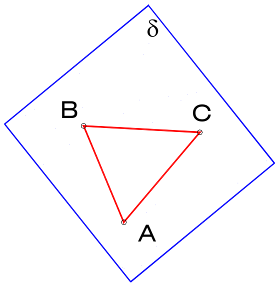

Fig. 2.1-a

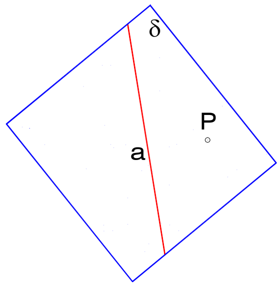

Fig. 2.1-b

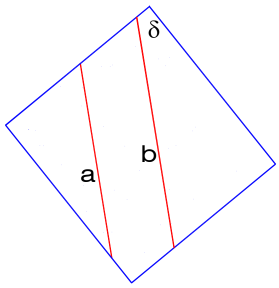

Fig. 2.1-c

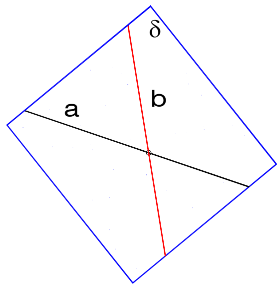

Fig. 2.1-d

Dos rectas paralelas se proyectan en cualquier sistema cilíndrico como rectas paralelas. En el Sistema Diédrico, si una recta "a" es paralela a otra recta "b", las proyecciones de "a" serán paralelas a las proyecciones homónimas de "b".

Si un par de rectas son secantes en el espacio (tienen un punto en común), el punto de corte de las proyecciones verticales de ambas rectas se encuentra alineado mediante una perpendicular a LT con el punto de corte de las proyecciones horizontales.

Si un plano está determinado por una recta "m" y un punto P exterior a ella, es posible transformar esa situación en una de las otras tres formas de definición de plano:

1. Escogiendo dos puntos A y B sobre la recta "m", se tiene un plano dado por tres puntos no alineados (A, B y P).
2. Construyendo por P una recta "n" paralela a "m", se tiene un plano dado por rectas paralelas ("m" y "n").
3. Escogiendo un punto Q sobre la recta "m" y construyendo la recta PQ, se tiene un plano dado por dos rectas secantes ("m" y PQ) en el punto Q.

2.1.1 Trazas del plano

Sea un plano δ definido por las rectas paralelas "m" y "n"; los puntos pertenecientes al plano δ que se encuentran sobre los planos de proyección definen un par de rectas denominadas *Trazas del plano δ*, siendo la traza vertical una recta frontal de vuelo cero, en tanto que la traza horizontal es una recta horizontal de cota igual a cero. Es evidente que los puntos de traza de las rectas "m" y "n" pertenecen a las rectas de traza del plano δ que ellas definen, lo cual es extensible a todas las infinitas rectas que pueden estar contenidas en el mencionado plano (Fig. 2.1).

En consecuencia, para determinar las trazas de un determinado plano bastará con hallar los puntos de traza de un par de rectas pertenecientes a él y unir mediante línea recta los puntos de traza vertical entre sí, lo que define la traza vertical del plano; análogamente, la recta que definen los puntos de traza horizontal constituye la traza horizontal del plano. Ambas rectas de traza son siempre concurrentes en la Línea de Tierra en un punto que suele denominarse Punto Muerto u origen de Trazas del Plano, y que es impropio si el plano en cuestión es paralelo a la Línea de Tierra. Se denominará como δ^v a la traza vertical del plano δ y como δ^h a la traza horizontal de dicho plano. Es importante resaltar el hecho de que la proyección horizontal de la traza vertical se encuentra sobre LT, y que también sobre LT se halla la proyección vertical de la traza horizontal.

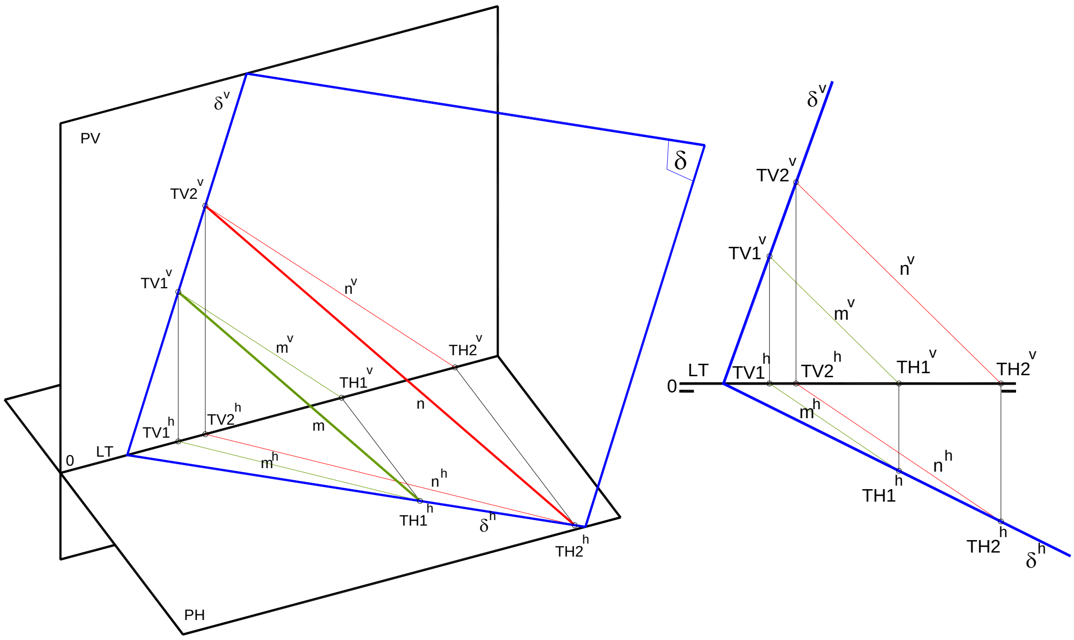

Fig. 2.1: Trazas del Plano

La representación del plano a través de sus trazas es la forma más elegante y la más empleada en Geometría Descriptiva, sin embargo, tales rectas no son indispensables para la resolución de los problemas que se plantean en esta asignatura. Se acostumbra dibujar únicamente segmentos de las trazas ubicados en las porciones positivas de los planos de proyección, recordando en todo momento que constituyen elementos de longitud infinita. Un plano queda determinado a través de sus trazas, a excepción de aquellos casos en los que el plano pase por la Línea de Tierra.

2.1.2 Posición del plano

El estudio de las proyecciones diédricas del plano se realiza atendiendo a las distintas posiciones que éste puede adoptar con respecto al sistema de referencia empleado, es decir, con respecto a los planos coordenados de proyección: Plano Vertical y Plano Horizontal.

Las variables objeto de estudio en las proyecciones diédricas son las concernientes a las características del plano: tamaño y forma de las distintas figuras planas que pueden construirse y ángulos que forma con los planos de proyección. La clasificación de las distintas posiciones del plano se realiza variando estos ángulos, comenzando por las *posiciones notables*, que son aquellas situaciones en las que el plano forma con alguno de los planos de proyección un ángulo igual a cero. En este trabajo se utilizan letras griegas minúsculas para nombrar los diferentes planos.

2.1.2.1 Plano en posición notable

Como ya se ha indicado, el plano adopta posiciones notables cuando es paralelo con relación a alguno de los planos de proyección. En tal caso, todas las rectas que el plano contiene y todas las figuras geométricas planas que sobre él pueden ser definidas se proyectan en ese plano de proyección en verdadero tamaño.

Se denomina α al ángulo que se forma entre el plano objeto de estudio y el plano horizontal de proyección, mientras que β es el formado con el plano vertical. Considerando su posición relativa en relación con el sistema de referencia empleado en la doble proyección ortogonal (planos de proyección), es posible realizar la siguiente clasificación:

- **Plano en posición Horizontal** (Fig. 2.2): El ángulo formado con el plano horizontal (α) es, obviamente, igual a cero. La intersección del plano δ con este plano (δ^h) es una recta impropia, o lo que es lo mismo, está en el infinito. Por otra parte, la traza vertical de δ es una recta paralela a LT de vuelo cero y de cota igual al valor de cota que tienen todos los puntos pertenecientes al plano.

  Resulta evidente que si el plano δ es paralelo a PH resulta ser perpendicular a PV, en consecuencia, la proyección vertical de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza vertical (δv). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano en posición horizontal.

  Por otra parte, todas las rectas pertenecientes a δ serán de cota constante (paralelas a PH): de punta, paralelas a LT y horizontales. Cualquier figura contenida en el plano δ presenta su verdadero tamaño en la proyección horizontal, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.2.

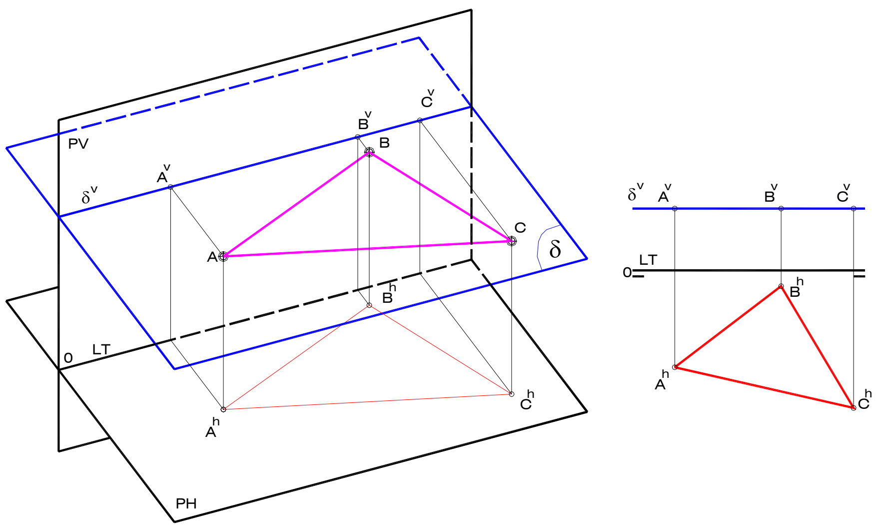

Fig. 2.2: Plano en posición Horizontal.

- **Plano en posición Frontal** (Fig. 2.3): El ángulo formado con el plano vertical (β) es igual a cero. La intersección del plano δ con este plano (δ^v) es una recta impropia, o lo que es lo mismo, está en el infinito. Por otra parte, la traza horizontal de δ es una recta paralela a LT de cota cero y de vuelo igual al valor de vuelo que tienen todos los puntos pertenecientes al plano.

  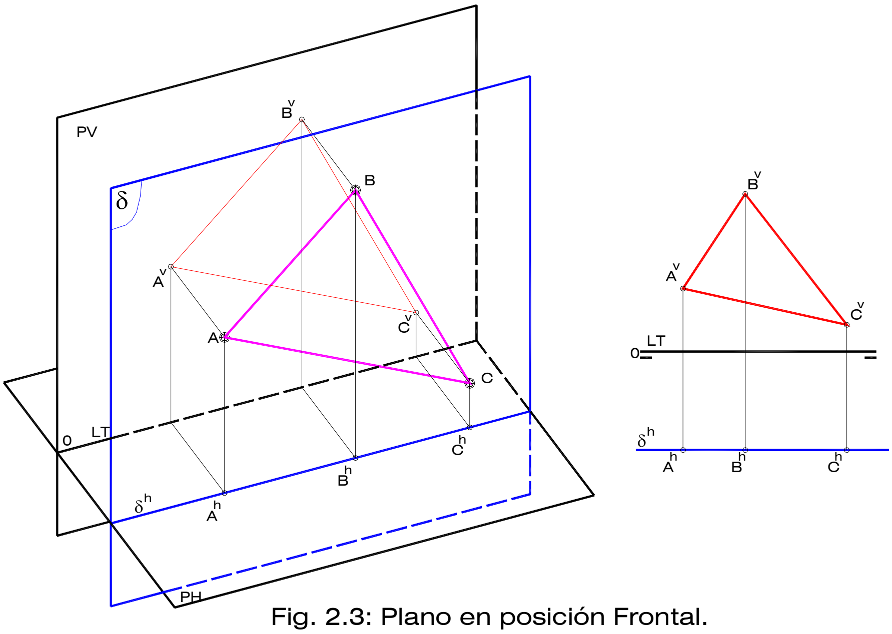

  Fig. 2.3: Plano en posición Frontal.

  Es obvio que si el plano δ es paralelo a PV resulta ser perpendicular a PH, en consecuencia, la proyección horizontal de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza horizontal (δ^h). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano en posición frontal.

  Es de hacer notar que todas las rectas pertenecientes a δ serán de vuelo constante (paralelas a PV): de pié, paralelas a LT y frontales. Cualquier figura contenida en el plano δ presenta su verdadero tamaño en la proyección vertical, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.3.

- **Plano en posición Lateral o de Perfil** (Fig. 2.4): El ángulo formado con el plano vertical (β) es igual a noventa grados lo mismo que el formado con el plano horizontal (α), en tanto que el formado con el plano lateral es igual a cero. Las trazas del plano δ son una recta de pié y una de punta de vuelo y cota igual a cero, respectivamente. Todos los puntos pertenecientes a un plano en esta posición tienen igual valor de coordenada X.

  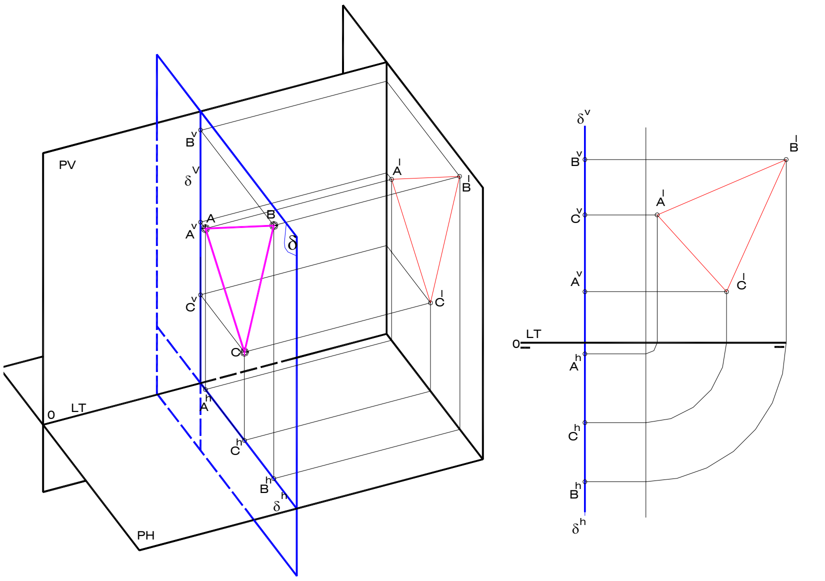

  Fig. 2.4: Plano en posición Lateral o de Perfil.

  Naturalmente que si el plano δ resulta ser perpendicular tanto a PH como a PV, la proyección horizontal de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza horizontal (δ^h), mientras que la proyección vertical se halla sobre su traza vertical (δ^v). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano en posición lateral o de perfil.

Como dato importante es preciso señalar que todas las rectas pertenecientes a δ serán de abcisa constante (paralelas a PL): de pié, de punta y de perfil. Cualquier figura contenida en el plano δ presenta su verdadero tamaño en la proyección lateral, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.4.

2.1.2.2 Plano Proyectante

Existen otras posiciones particulares que el plano puede adoptar en el sistema Diédrico, en las que no resulta paralelo a uno de los tres planos básicos de proyección pero sí perpendicular a alguno de ellos. En estos casos se dice que el plano es *Proyectante*:

- **Plano Proyectante Horizontal** (Fig. 2.5): El ángulo formado con el plano vertical (β) adopta un valor distinto de cero y de noventa grados, en tanto que el ángulo formado con PH es recto. Las trazas del plano δ serán entonces una recta de pié y una horizontal de vuelo y cota igual a cero, respectivamente. El ángulo β del plano tiene el mismo valor que el ángulo formado entre la traza horizontal y la Línea de Tierra.

  Es evidente que si el plano δ resulta ser perpendicular a PH, la proyección horizontal de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza horizontal (δ^h). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano proyectante horizontal.

  En vista de que el plano en esta posición es oblicuo con respecto a PV, las figuras que puede contener se proyectan deformadas en la proyección vertical, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.5, por lo que es necesaria la aplicación de métodos para la determinación del verdadero tamaño de tales figuras.

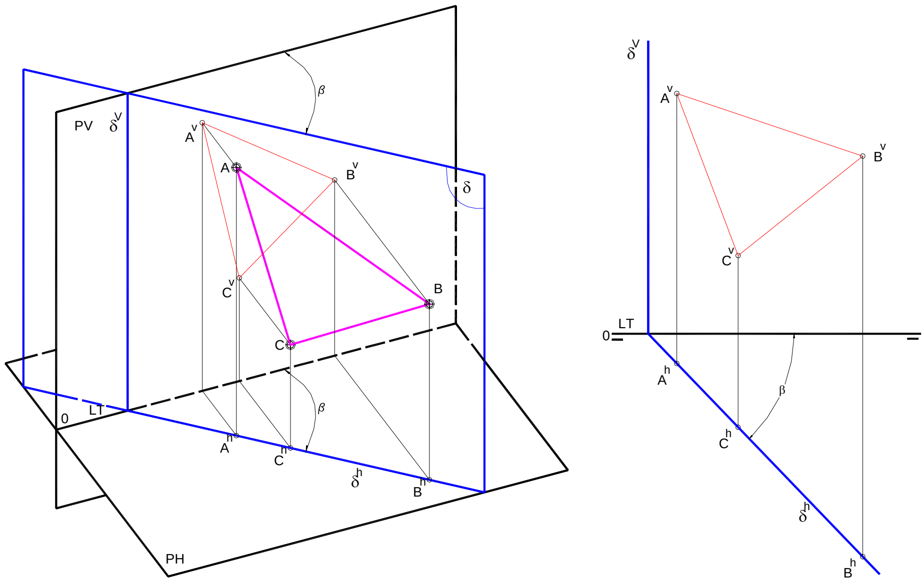

Fig. 2.5: Plano Proyectante Horizontal.

Cabe resaltar que un plano proyectante horizontal puede contener rectas de pié, horizontales y oblicuas, siempre que su proyección horizontal se ubique sobre la traza horizontal del plano.

- **Plano Proyectante Vertical** (Fig. 2.6): El ángulo formado con el plano horizontal (α) adopta un valor distinto de cero y de noventa grados, en tanto que el ángulo formado con PV es recto. Las trazas del plano δ serán entonces una recta frontal y una de punta de vuelo y cota igual a cero, respectivamente. El ángulo α del plano tiene el mismo valor que el ángulo formado entre la traza vertical y la Línea de Tierra. Es evidente que si el plano δ resulta ser perpendicular a PV, la proyección vertical de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza vertical (δ^v). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano proyectante vertical.

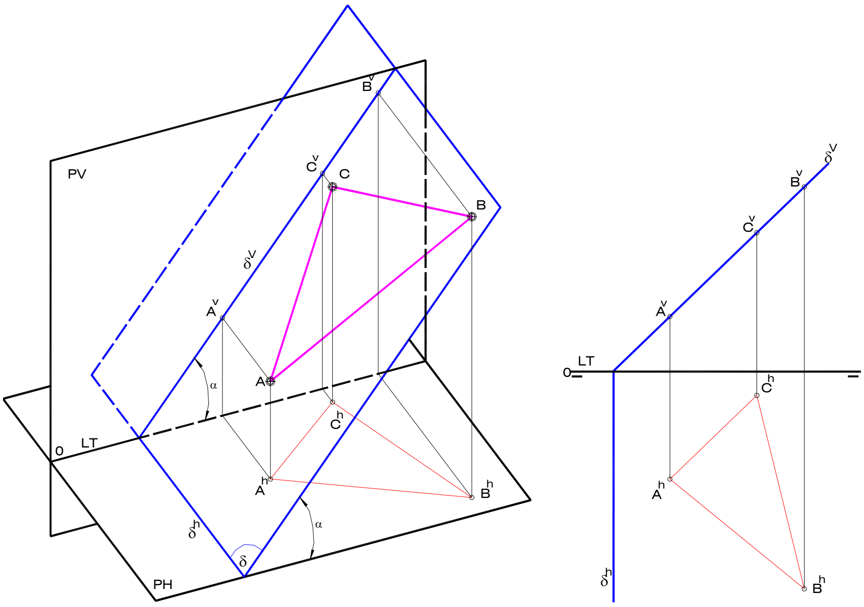

Fig. 2.6: Plano Proyectante Vertical.

En vista de que el plano en esta posición es oblicuo con respecto a PH, las figuras que puede contener se proyectan deformadas en la proyección horizontal, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.6, por lo que es necesaria la aplicación de métodos para la determinación del verdadero tamaño de tales figuras.

Es de hacer notar que un plano proyectante vertical puede contener rectas de punta, frontales y oblicuas, siempre que su proyección vertical se ubique sobre la traza vertical del plano.

2.1.2.3 Plano en posición oblicua con respecto a los planos de proyección

Si el plano está ubicado en el espacio de tal forma que no es paralelo o perpendicular a ninguno de los dos planos coordenados del sistema Diédrico (PH y PV), tanto el ángulo formado con el plano horizontal (α) como el formado con el vertical (β) adoptan un valor distinto de cero y de noventa grados. En dependencia de la relación existente entre el plano objeto de estudio y el plano lateral auxiliar, es posible realizar la diferenciación entre dos posiciones: *paralelo a la Línea de Tierra* y *Oblicuo o en posición accidental*.

- **Plano Paralelo a la Línea de Tierra** (Fig. 2.7): En este caso, tanto el ángulo formado con el plano horizontal (α) como el formado con el vertical (β) adoptan un valor distinto de cero y de noventa grados. Como el plano resulta ser perpendicular al plano lateral – y por lo tanto paralelo a LT - se cumple la siguiente relación:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Las trazas del plano δ serán entonces dos rectas paralelas a la Línea de Tierra, una de cota cero y la otra de vuelo cero. Los valores de los ángulos α y β son los mismos valores de los ángulos formados entre la traza lateral del plano δ y las intersecciones entre PH y PL y entre PV y PL, respectivamente.

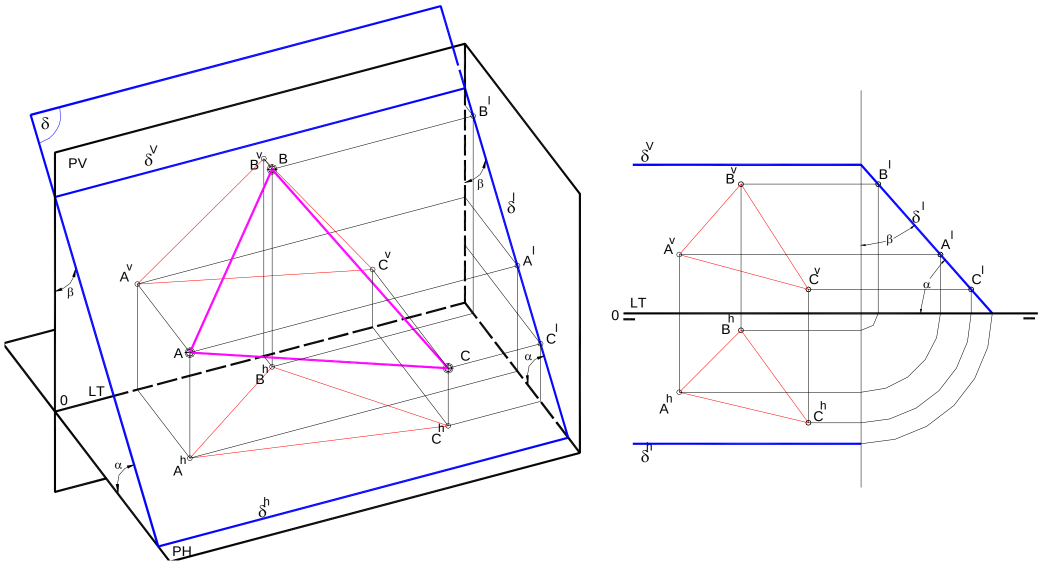

Fig. 2.7: Plano Paralelo a LT.

Es evidente que si el plano δ resulta ser perpendicular a PL, la proyección lateral de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza lateral (δ^{l}). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano proyectante lateral o paralelo a LT. En vista de que el plano en esta posición es oblicuo con respecto a PH y a PV, las figuras que puede contener se proyectan deformadas en ambas proyecciones diédricas, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.7, por lo que es necesaria la aplicación de métodos para la determinación del verdadero tamaño de tales figuras.

Es de hacer notar que un plano paralelo a LT puede contener rectas paralelas a LT, de perfil y oblicuas, encontrándose su proyección lateral sobre la traza lateral del plano en cuestión.

- **Plano Oblicuo o en posición accidental** (Fig. 2.8) En esta posición el plano resulta ser también oblicuo tanto a los dos planos de proyección principales del sistema diédrico (PH y PV) como al plano de proyección lateral, por lo que se cumple la siguiente relación:

$$\alpha + \beta > 90$$

Las trazas del plano δ serán entonces dos rectas concurrentes en la Línea de Tierra: una horizontal de cota cero y una frontal de vuelo cero. No es posible determinar los valores de los ángulos α y β directamente en alguna de las proyecciones básicas. De igual manera, las figuras que puede contener el plano se proyectan

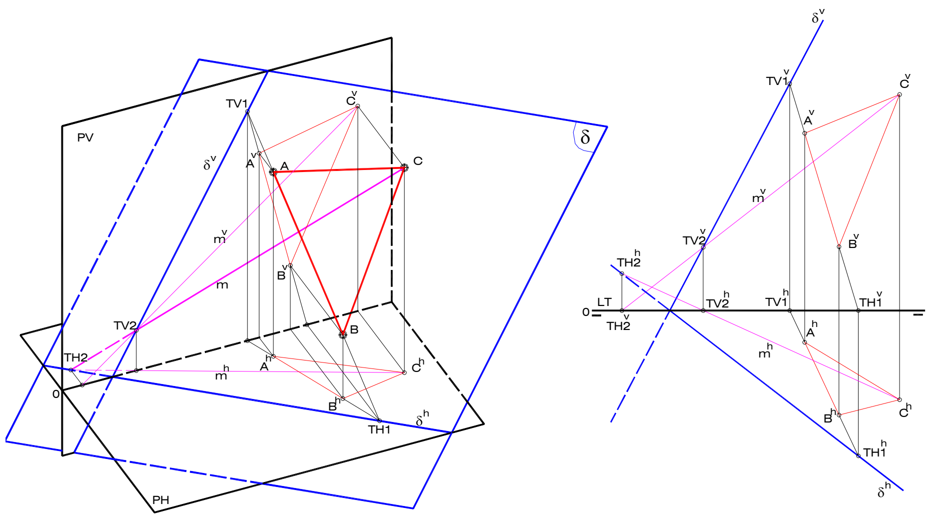

Fig. 2.8: Plano Oblicuo o Plano en Posición Accidental

deformadas en ambas proyecciones diédricas, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.8, por lo que es necesaria la aplicación de métodos para la determinación del verdadero tamaño de tales figuras.

Un plano en posición accidental contiene rectas frontales, horizontales, de perfil y oblicuas, siempre que cumplan la siguiente condición, válida en forma general para cualquier posición que adopte el plano en el Sistema Diédrico:

Para que una recta esté contenida en un plano, es necesario que pase por al menos dos puntos pertenecientes a dicho plano o que corte a por lo menos dos rectas de sus rectas.

Las dos rectas del plano a que hace referencia la condición pueden ser las trazas, por lo que también es válido decir que *si una recta pertenece a un plano, sus trazas deben estar sobre las trazas homónimas del plano* (Fig. 2.8).

Ahora bien, *la condición necesaria y suficiente para que un punto pertenezca a un determinado plano, es que se encuentre sobre una (cualquiera) de sus rectas.* En la Fig. 2.8 se muestra cómo el punto C se encuentra sobre una recta cualquiera "m" del plano δ, por lo que puede concluirse que C pertenece a este plano.

Rectas Características de un Plano Oblicuo: Son todas aquellas rectas frontales y horizontales que pertenecen a un determinado plano. Una recta horizontal "h" debe tener su proyección vertical paralela a LT y su punto de traza vertical TV sobre la traza vertical δ^v del plano al cual pertenece. De igual forma, su punto de traza horizontal TH se debe encontrar sobre la traza horizontal δ^h del mencionado plano, pero como se trata de un punto impropio (en el infinito), la recta debe ser paralela a δ^h, lo mismo que su proyección horizontal.

De manera análoga, una recta frontal "f" de un plano δ es una recta paralela al plano vertical de proyección y que pertenece a δ, por lo que su punto de traza horizontal se encuentra sobre la traza horizontal δ^h y su proyección vertical es paralela a la traza vertical δ^v (Fig. 2.9).

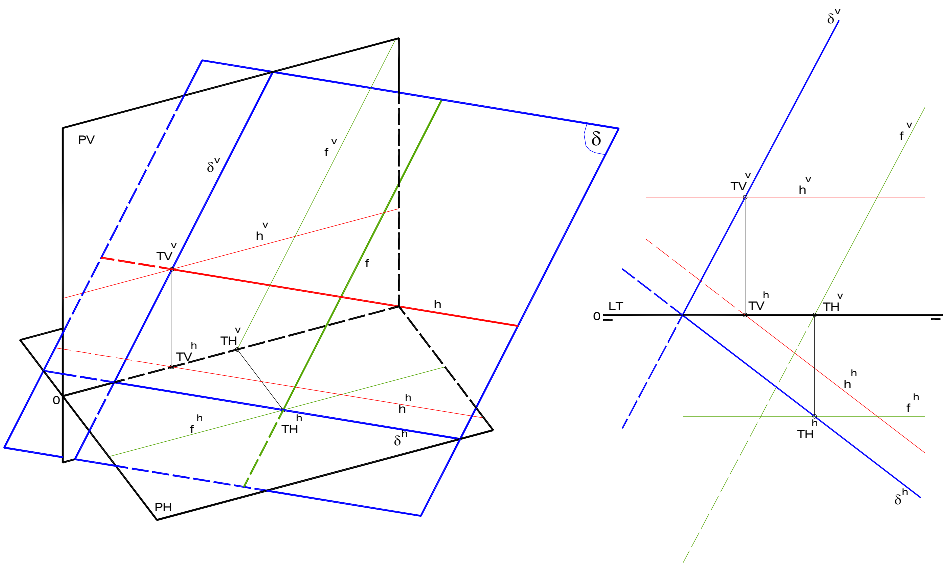

Fig. 2.9: Rectas Características de un Plano Oblicuo.

Rectas de Máxima Pendiente: Son aquellas rectas pertenecientes a un plano δ que forman, entre todas las infinitas rectas de dicho plano, el mayor ángulo con respecto al plano horizontal de proyección. En consecuencia, este ángulo α es el mismo ángulo que se forma entre el plano δ y PH. Así, si se desea conocer el ángulo α de un determinado plano, bastará con hallar el valor del ángulo α de cualquiera de sus rectas de máxima pendiente.

Por otra parte, se tiene que las rectas de máxima pendiente de un plano forman ángulo recto con las rectas horizontales (la traza horizontal entre ellas) pertenecientes a éste.

Para dibujar las proyecciones de una de las rectas de máxima pendiente "mp" de un plano δ, se comienza trazando su proyección horizontal mp^h, la cual es perpendicular a la traza horizontal (y a cualquier otra recta horizontal) δ^h, ya que corresponde a la traza horizontal de un plano proyectante horizontal que pasa por la recta "mp". Seguidamente, aplicando la condición de pertenencia de recta a plano, se determina la proyección vertical de "mp" (Fig. 2.10).

Por otra parte, si se conoce una de las rectas de máxima pendiente de un plano δ es posible determinar las trazas de éste, hallando en primer lugar los puntos de traza TH y TV de la recta. Luego se dibuja la traza horizontal δ^h, trazando por la proyección horizontal de TH una perpendicular a la proyección horizontal de la recta de máxima pendiente. Finalmente, la recta definida por el corte entre δ^h y la Línea de Tierra y la proyección vertical de TV será la traza vertical del plano δ.

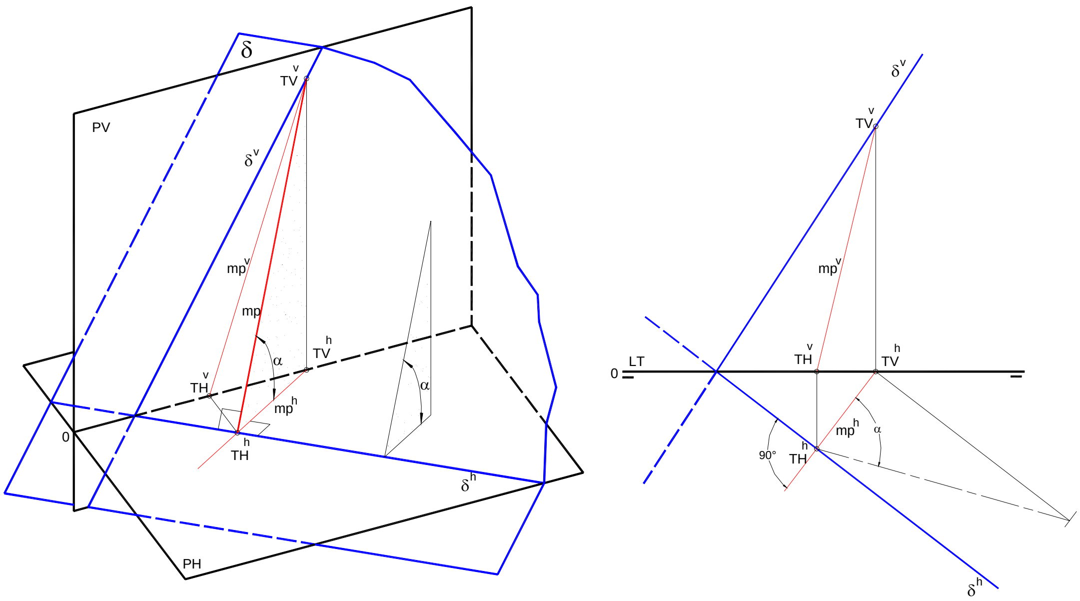

Fig. 2.10: Recta de Máxima Pendiente.

Rectas de Máxima Inclinación: Son aquellas rectas pertenecientes a un plano δ que forman, entre todas las infinitas rectas de dicho plano, el mayor ángulo con respecto al plano vertical de proyección. En consecuencia, este ángulo β es el mismo ángulo que se forma entre el plano δ y PV. Así, si se desea conocer el ángulo β de un determinado plano, bastará con hallar el valor del ángulo β de cualquiera de sus rectas de máxima inclinación.

Por otra parte, se tiene que las rectas de máxima inclinación de un plano forman ángulo recto con las rectas frontales (la traza vertical entre ellas) pertenecientes a éste.

La construcción de una de las rectas de máxima inclinación de un plano determinado δ se realiza en forma análoga al caso anterior, siendo su proyección vertical perpendicular a la traza vertical (y a todas las demás frontales) del plano.

De igual manera, si se conoce una de las rectas de máxima inclinación de un plano δ es posible determinar las trazas de éste, sabiendo que pasan por los puntos de traza de la recta y que δ^v es perpendicular a la su proyección vertical.
Los conceptos de recta de máxima pendiente y de máxima inclinación son independientes de la posición del plano al cual pertenecen, por lo que es fácil identificar qué características tienen en cada caso:

- Plano Horizontal: Cualquiera de sus rectas es de máxima pendiente, ya que todas son horizontales; sus rectas de máxima inclinación son de punta.
- Plano Frontal: Cualquiera de sus rectas es de máxima inclinación, ya que todas son frontales; sus rectas de máxima pendiente son de pié.
- Plano Lateral o de Perfil: Sus rectas de máxima pendiente son de pié, en tanto que las de máxima inclinación son de punta.
- Plano Proyectante Horizontal: Sus rectas de máxima pendiente son de pié y las de máxima inclinación son horizontales.
- Plano Proyectante Vertical: Sus rectas de máxima pendiente son frontales; las de máxima inclinación son de punta.
- Plano Proyectante Lateral o Paralelo a LT: En este caso las rectas de máxima pendiente coinciden con las de máxima inclinación y son de perfil.

2.1.3 Métodos utilizados en la determinación del Verdadero Tamaño de Planos.

Está claro que en la mayor parte de los casos los planos no reflejan en las proyecciones diédricas su Verdadero Tamaño. Por tal motivo, es absolutamente necesaria la aplicación de métodos que permitan la resolución de los siguientes tipos de problema:

- Dada una figura geométrica contenida en un plano determinar su verdadera forma y tamaño.
- Construir las proyecciones de una figura geométrica plana si se conocen sus características y el plano al cual pertenece.

Los métodos comúnmente empleados para lograr el objetivo planteado son los siguientes:

1. Abatimiento
2. Introducción de nuevos planos de proyección
3. Giro

1. **Abatimiento:** Consiste en la rotación de un plano δ en torno a un eje paralelo a uno de los planos de proyección (eje de abatimiento) hasta lograr que adopte una posición favorable, es decir, una en la que su Verdadero Tamaño se proyecte sobre alguno de los planos de proyección. Resulta evidente que el mencionado eje de rotación debe ser una de las rectas características de δ: frontal, si se quiere que el plano objetivo llegue a ser paralelo a PV; horizontal, si lo que se busca es hacer que sea paralelo a PH.

   Cuando se abate un plano se abaten todos sus puntos, pero en la práctica solamente se representan aquellos que son de importancia para la resolución de un problema determinado; por este motivo se habla del abatimiento de algún punto sobre el plano objetivo. Es una práctica común utilizar como eje de abatimiento alguna de las trazas del plano objetivo, logrando así que éste coincida con uno de los planos de proyección. En cualquier caso, si se quiere abatir un punto perteneciente al plano objetivo δ es indispensable precisar los siguientes elementos:

   a) Eje de abatimiento
   b) Radio y Centro de abatimiento
   c) Sentido del abatimiento

Sea un plano oblicuo δ (Fig. 2.11). Supóngase que se desea determinar las proyecciones de un triángulo equilátero ABC de centro en el punto O y vértice en el punto A, contenido en un plano oblicuo δ. En primer lugar se debe escoger una recta característica del plano como eje de abatimiento, por ejemplo, la traza horizontal. Evidentemente, será necesario abatir los puntos A y O, pues son los elementos que permiten la construcción del triángulo ABC en verdadero tamaño.

Las rectas sobre las cuales se encuentran los radios de abatimiento correspondientes ("a" y "b") son rectas perpendiculares al eje de abatimiento – de máxima pendiente en el ejemplo – dado que la rotación se verifica en un plano perpendicular tanto a PH como a δ. Los puntos de corte K y K1 entre las rectas "a" y "b" y la traza horizontal del plano (eje de abatimiento) constituyen los centros de abatimiento de los puntos A y O, respectivamente; las distancias KA y K1O vienen a ser las magnitudes de ambos radios de abatimiento.

Ahora bien, el ángulo de rotación es igual al ángulo que forma el plano δ con PH o a su complemento. Se prefiere usar este último valor con la finalidad de evitar que la proyección de las figuras (horizontal en el ejemplo) se confunda con su verdadero tamaño, manteniendo cierta claridad en el trazado.

Las posiciones abatidas de los puntos A y O se encontrarán en las intersecciones de los planos de rotación correspondientes con el plano horizontal. Dichas intersecciones coinciden con las proyecciones horizontales de las rectas de máxima pendiente "a" y "b". Bastará entonces con consignar sobre las direcciones a^h y b^h , a partir de K^h y $K1^h$, los verdaderos tamaños de los segmentos KA y K1O (radios de abatimiento), previamente determinados aplicando triángulo de abatimiento. De esta forma se obtienen los puntos abatidos A^R y O^R.

Nótese cómo la diferencia de cota entre los puntos A y O y sus correspondientes centros de abatimiento son iguales a las cotas de A Y O, debido a que aquellos se encuentran en el plano horizontal (tienen cota igual a cero).

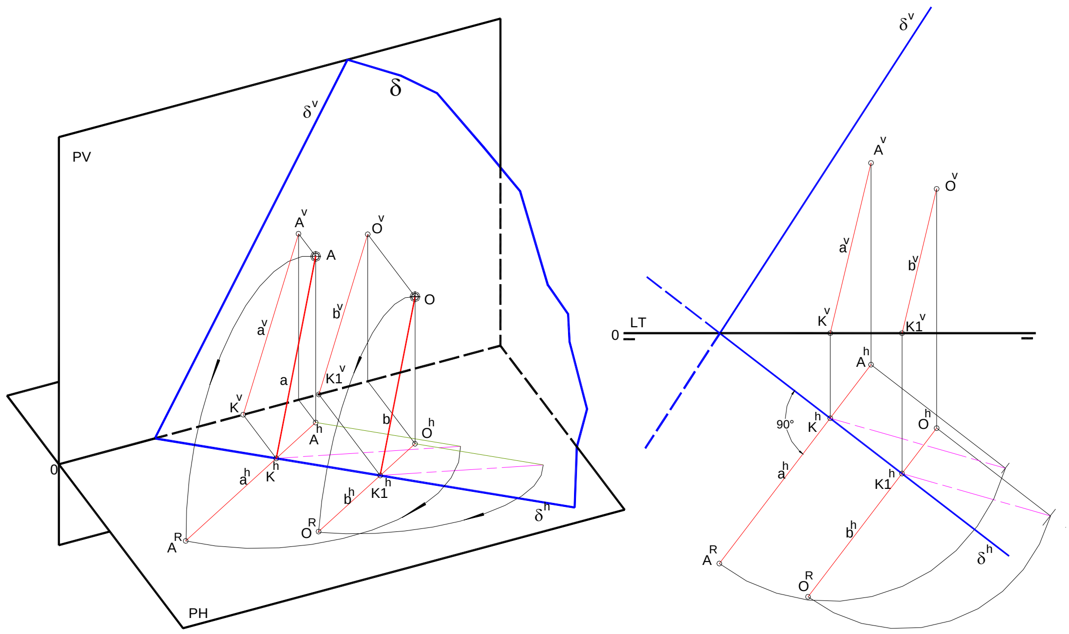

Fig. 2.11: Abatimiento de plano Oblicuo.

Una vez que los puntos A y O se encuentran abatidos – en realidad se abate el plano δ - es posible dibujar el triángulo equilátero $A^R B^R C^R$. Es conveniente usar línea de trazos cortos y largos para enfatizar el carácter de representación auxiliar en verdadero tamaño que tiene dicho triángulo.
El siguiente paso es la determinación de las proyecciones diédricas de los vértices obtenidos (B y C), para lo cual se deben invertir (Fig. 2.12) los pasos del proceso de abatimiento explicado anteriormente, comenzando por trazar por los puntos B^R y C^R líneas rectas perpendiculares al eje de abatimiento δ^h, encontrando así los puntos $K2^h$ y $K3^h$, centros de abatimiento de los puntos B y C. Seguidamente, se dibujan por estos puntos líneas rectas paralelas a los verdaderos tamaños de los radios de abatimiento correspondientes a A y O, consignándose sobre ellas, a partir de $K2^h$ y $K3^h$, las distancias $K2^h B^R$ y $K3^h C^R$ (radios de abatimiento de los puntos B y C). Luego, por los puntos 1 y 2 obtenidos en la operación anterior se trazan paralelas al eje de abatimiento, las que, al cortar las perpendiculares a dicho eje, generan las proyecciones horizontales de los puntos B y C.

Finalmente, las proyecciones verticales de B y C pueden hallarse aplicando la condición de pertenencia de punto a plano. También es posible hacerlo si se consignan sobre las referencias de los puntos B y C y a partir de la línea de tierra las distancias $B^h 1$ y $C^h 1$, respectivamente. Esto se debe a que tales distancias son las diferencias de cota entre los puntos B y C y sus correspondientes centros de abatimiento (K2 y K3), los cuales se encuentran sobre el plano horizontal de proyección.

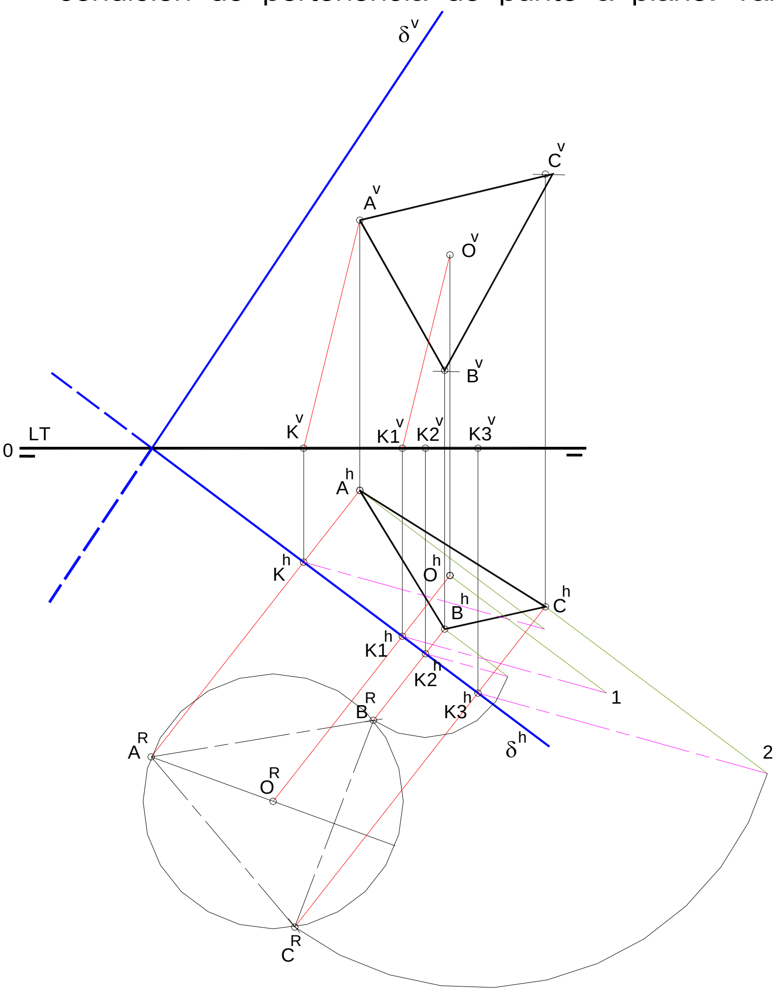

FIG. 2.12: Abatimiento de Plano Oblicuo. Continuación.

Cuando se trata de planos en otras posiciones la aplicación del abatimiento es análoga, bastará con recordar qué características tienen los posibles ejes de abatimiento en cada caso. En ocasiones, el procedimiento debe realizarse en torno a rectas frontales de vuelo distinto de cero o de rectas horizontales de cota diferente de cero. En esos casos se debe ser cuidadoso en la determinación del verdadero tamaño de los radios de abatimiento.

Existen muchos artificios que permiten facilitar el procedimiento. Una forma muy práctica de abatir un plano oblicuo consiste en utilizar las trazas abatidas (Fig. 2.13) y referir los puntos a rectas características, que, como es sabido, son paralelas a las trazas. Por ejemplo, sea en el mismo ejercicio anterior, la traza horizontal del plano δ el eje de rotación y considérese el abatimiento de un punto P cualquiera sobre la traza vertical; para ello se debe trazar una perpendicular a δ^h por la proyección horizontal de P y un arco de centro en el origen de trazas X y radio igual al segmento comprendido entre éste y el punto P^v; el corte entre la recta perpendicular a δ^h trazada por P^h y el mencionado arco resulta en P^R. Como el origen de trazas se halla sobre el eje de abatimiento su posición no varía, por lo que la recta definida por ese punto y P abatido constituye la traza vertical abatida del plano δ.

A continuación se trazan por los puntos A y O rectas horizontales y se determinan sus puntos de traza vertical Q y R. Para abatir estos puntos bastará con trazar arcos de centro en el origen de trazas X y radios XQ^v y XR^v, los cuales cortarán a la traza vertical abatida en Q^R y R^R. Los puntos A y O abatidos se hallan en el corte entre las perpendiculares al eje de abatimiento trazadas por A^h y O^h y las rectas horizontales abatidas correspondientes, las cuales deben ser paralelas a la traza horizontal del plano.

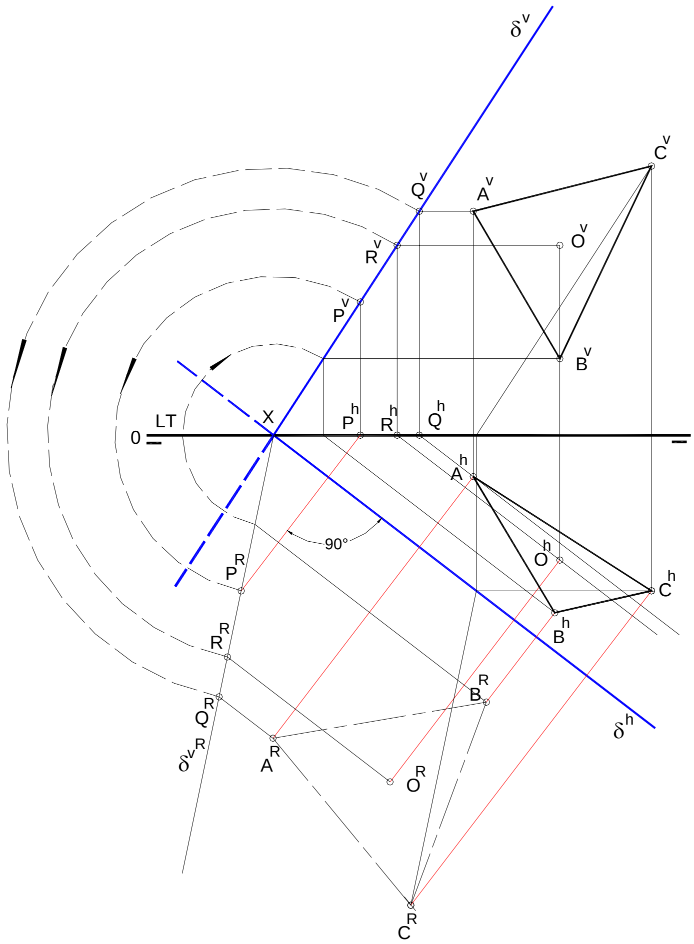

Fig. 2.13: Abatimiento de plano Oblicuo mediante trazas y rectas características.

Una vez construida la figura geométrica pedida, se han determinado las proyecciones diédricas de los puntos resultantes B y C refiriéndolos a una horizontal y a una frontal, respectivamente.

2. **Introducción de nuevos planos de proyección (Cambio de Plano):** Consiste en el cambio de posición de los observadores virtuales y de la orientación de los rayos proyectantes con la finalidad de lograr que un determinado plano objetivo δ adopte una posición notable. Este movimiento genera nuevos sistemas de referencia que deberán ser perpendiculares a los nuevos rayos proyectantes, y a su vez deberán cumplir con las características de la Proyección Diédrica o de Monge.

   No es posible cambiar la posición de ambos observadores de manera simultánea, sino que el procedimiento debe ser escalonado. De lo contrario, sería imposible establecer la relación entre el sistema de proyección original y el nuevo sistema en el que el plano objetivo aparece en una posición notable.

   El caso más sencillo es aquél en el que el plano objetivo δ es proyectante, bien horizontal o bien vertical, ya que en vista de que es perpendicular a uno de los planos de proyección originales, se requiere del cambio de posición de uno sólo de los observadores y de la consecuente introducción de un único nuevo plano de proyección.

   Si se trata de un plano proyectante horizontal (Fig. 2.14), es necesario considerar un plano vertical PV2 perpendicular a PH, paralelo a δ y a cualquier distancia de éste, con lo cual se genera un nuevo sistema de proyección conformado por PH y PV2, cuya línea de tierra LT2 será paralela a la traza horizontal del plano δ. En vista de que el nuevo sistema y el original comparten el plano horizontal de proyección, la distancia entre las proyecciones verticales (A^v, B^v, C^v, etc.) de los puntos del plano δ y LT (cotas) son las mismas que existen entre las nuevas proyecciones verticales de esos puntos (A^2, B^2, C^2, etc.) y LT2.

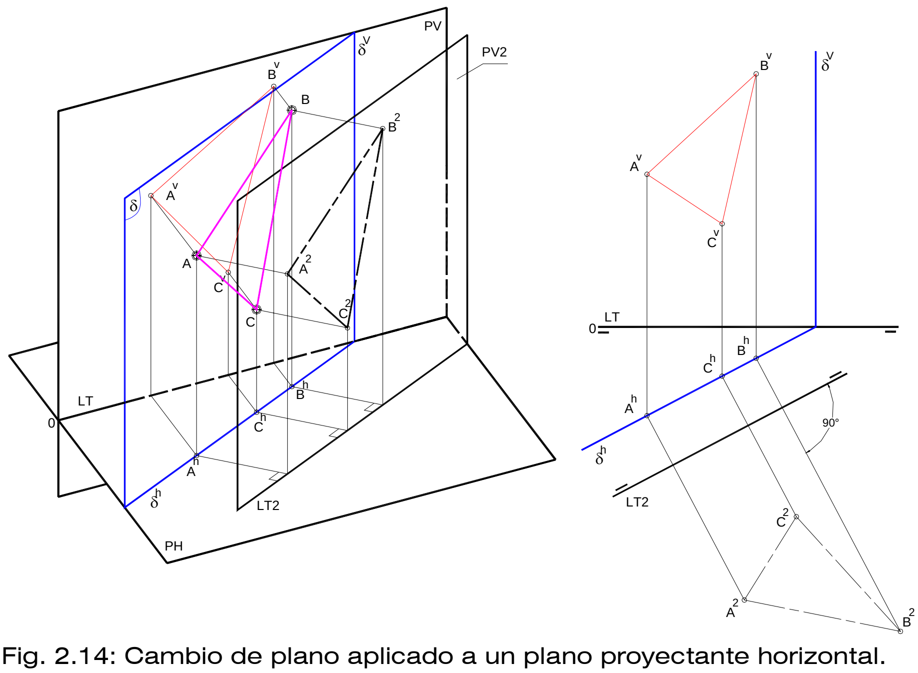

Fig. 2.14: Cambio de plano aplicado a un plano proyectante horizontal.

   Si se trata de un plano proyectante vertical, el nuevo plano de proyección PH2 deberá ser paralelo a δ y perpendicular a PV; la nueva línea de tierra LT2 será paralela a la traza vertical del plano objetivo y el valor del vuelo de cada uno de los puntos del plano es invariable de un sistema a otro, en consecuencia, la distancia entre las proyecciones horizontales (A^h, B^h, C^h, etc.) y LT es igual a la distancia entre las nuevas proyecciones horizontales (A^2, B^2, C^2, etc.) y la línea de tierra del segundo sistema de proyección LT2.

En el caso de planos que no son perpendiculares a alguno de los planos de proyección (en posición accidental y paralelos a la Línea de Tierra), el proceso para la obtención de una nueva proyección en verdadero tamaño debe realizarse en dos etapas:

1. Introducir un nuevo plano auxiliar de proyección perpendicular al plano objetivo y a uno de los de proyección, con el fin de generar un sistema LT2 en el que éste resulte proyectante.
2. Introducir un segundo plano auxiliar de proyección paralelo al plano objetivo y perpendicular al primer plano auxiliar, con lo que se logra generar un sistema LT3 en el cual el plano objetivo tienen una posición notable (horizontal o frontal).

El primero de los planos auxiliares de proyección debe ser perpendicular a las rectas características del plano δ; si se construye perpendicular a las horizontales, δ será un plano proyectante vertical en el nuevo sistema LT2, en tanto que si dicho plano auxiliar es perpendicular a las frontales, se obtiene que δ es proyectante horizontal en el mencionado sistema.

En la Fig. 2.15 se muestra el procedimiento empleado para determinar el verdadero tamaño de un triángulo ABC contenido en un plano δ mediante la introducción de nuevos planos de proyección. El primer paso consiste en construir una línea de tierra LT2 perpendicular a una de las trazas del plano δ - la horizontal en el ejemplo - y a cualquier distancia de ésta. Luego se trazan perpendiculares a LT2 por las proyecciones de A, B y C comunes a ambos sistemas, es decir, las horizontales, sobre las cuales se consignan, a partir de LT2, las cotas de cada punto. Esta operación da lugar a A^2, B^2 y C^2, proyecciones de los puntos A, B y C sobre el primer plano auxiliar. Es de hacer notar que dichas proyecciones se encuentran alineadas sobre una recta (δ^2) que pasa por el punto de corte entre la traza horizontal del plano δ y LT2, ya que, como se ha indicado, este plano es proyectante vertical en el sistema LT2.

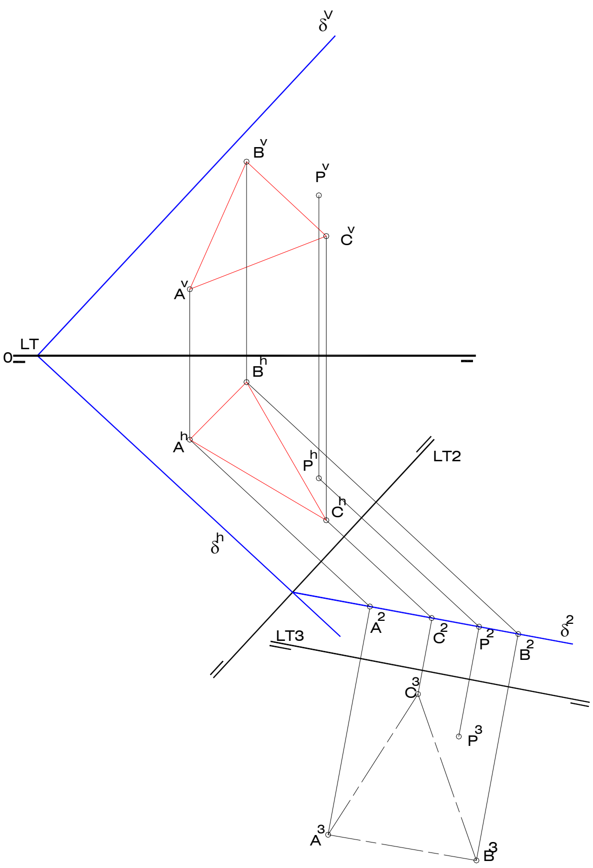

Fig. 2.15: Cambio de plano aplicado. a un plano oblicuo.

Si se construye una tercera línea de tierra LT3 paralela a δ^2, se genera un tercer sistema de proyección en el cual el plano δ es horizontal. Las proyecciones de A, B y C sobre el segundo plano auxiliar se obtienen trazando por A^2, B^2 y C^2 perpendiculares a LT3 y midiendo sobre ellas y a partir de LT3 las distancias entre A^h, B^h y C^h y LT2, que corresponden a los valores de vuelo de cada uno de los puntos en el sistema LT2.

La obtención de la proyección horizontal de un determinado punto P del plano objetivo cuya proyección sobre el segundo plano auxiliar (P^3) se conoce, se logra siguiendo el procedimiento anterior a la inversa: Se traza por P^3 una perpendicular a LT3 la cual corta a δ^2 en un punto que es la proyección de P sobre el segundo plano auxiliar P^2. Luego, se construye una perpendicular a LT2 que pase por P^2 y se copia sobre ella, a partir de LT2, la distancia que hay entre P^3 y LT3; el resultado es la proyección horizontal de P.

Para obtener la proyección vertical del punto P bastará con aplicar la condición de pertenencia de punto a plano. También es posible encontrarla si se traza por P^h una referencia perpendicular a LT y se consigna sobre ella la distancia entre P^2 y LT2 (cota del punto P en el sistema LT2).

Cuando se trata de planos paralelos a LT el procedimiento es similar; recuérdese que la segunda línea de tierra (LT2) deberá ser perpendicular a una de las trazas del plano objetivo.

3. **Giro:** Consiste en la rotación de los puntos de un plano δ en torno a un eje perpendicular a uno de los planos de proyección (de pié o de punta) con la finalidad de obtener una posición conveniente de dicho plano en relación al sistema de referencia, es decir, paralelo a PV o a PH según sea el caso.

   Si el plano δ considerado es perpendicular a uno de los planos de proyección, una de sus trazas puede ser empleada como eje de giro: aquella que forme 90° con la línea de tierra; la Fig. 2.16 muestra el giro de un plano proyectante horizontal en torno a su traza vertical. El radio de giro que corresponde al punto A del plano δ no es más que la distancia entre dicho punto y el eje de rotación, medida sobre una perpendicular a éste eje. El mencionado radio resulta ser horizontal, por lo que su verdadero tamaño se proyecta sobre PH. Como puede observarse, el procedimiento mostrado es el mismo que plantea el abatimiento del plano δ sobre el plano vertical de proyección.

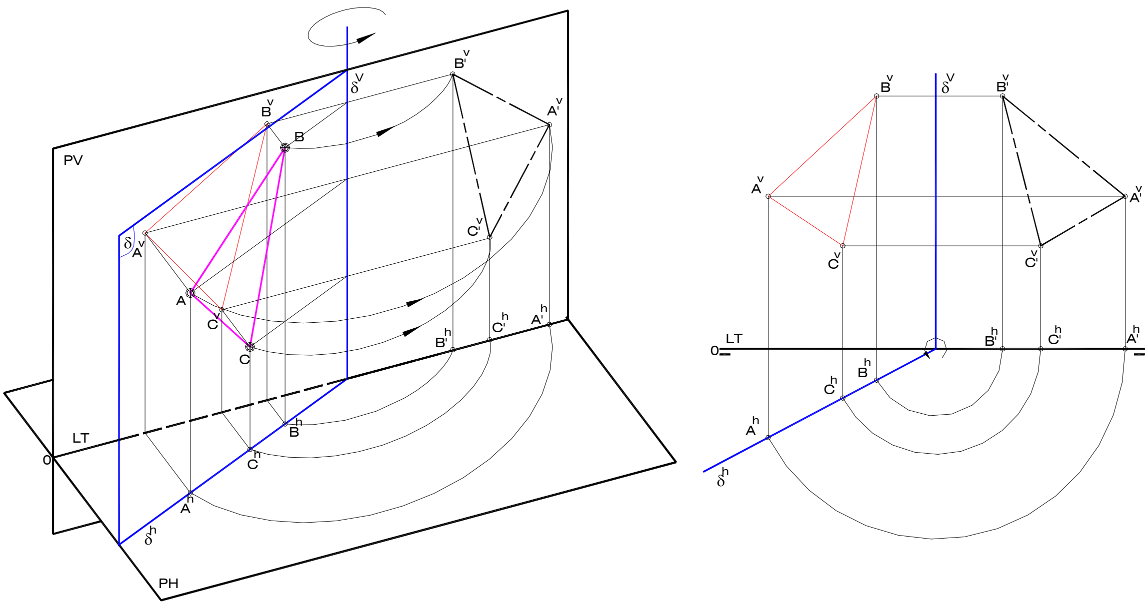

Fig. 2.16: Giro aplicado a un plano proyectante.

El resultado del procedimiento es la proyección vertical del triángulo A'B'C' situado en el propio plano vertical, el cual representa el verdadero tamaño del triángulo ABC contenido en el plano δ.

El giro del plano δ de la Fig. 2.16 puede realizarse en torno a cualquier recta de pié, perteneciente o no a dicho plano. Análogamente, el giro de un plano proyectante vertical se efectúa en torno a un eje de punta.

Cuando se desea obtener el verdadero de una figura plana contenida en un plano oblicuo con respecto a PV y PH (paralelo a LT o accidental) aplicando giro, es necesario realizar el proceso en dos etapas: la primera consiste en llevar el plano original a una posición perpendicular a uno de los planos de proyección (proyectante horizontal o proyectante vertical), en tanto que en la segunda el plano objetivo pasa de ésta última posición a una notable.

Resulta conveniente establecer como primer eje de giro una recta que pase por uno de los puntos importantes del problema, como por ejemplo un vértice de un polígono cuyo verdadero tamaño se desea obtener.

En la Fig. 2.17-a el eje de giro es de pié y pasa por el vértice A del triángulo ABC, en consecuencia, el punto A no cambia de posición. Por otra parte, en vista de que se quiere obtener un plano proyectante vertical, es necesario girar el punto de traza horizontal TH de la recta de máxima pendiente del plano δ que pasa por A, ya que de esa forma se obtiene la traza horizontal del plano δ luego del giro, sabiendo que la recta se máxima pendiente es frontal en la nueva posición. El ángulo ϕ señalado en la figura es la medida de amplitud del giro.

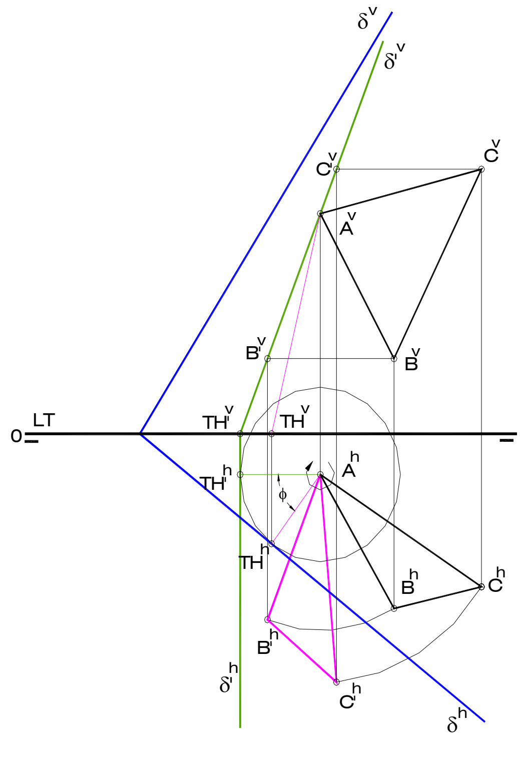

Fig. 2.17-a

Así pues, se construye una circunferencia de centro en A^h y radio igual a la proyección horizontal del segmento ATH, para luego trazar por aquél punto una paralela a LT que corta a la circunferencia en TH'^h (hay dos soluciones, puesto que el giro se puede realizar en sentido horario o en sentido antihorario). Lógicamente la proyección vertical de TH' se encuentra sobre la línea de tierra.

La traza horizontal δ'^h del plano luego de este primer giro es perpendicular a LT y pasa por TH'^h, en tanto que la traza vertical δ'^v queda determinada por la proyección vertical de TH' y la proyección vertical de A.

Para encontrar la proyección vertical del punto B', correspondiente a la nueva posición asumida por B luego del giro, bastará con trazar por B^v una paralela a LT y hallar el punto de corte entre esta recta y la traza vertical δ'^v del plano δ'. Luego, para determinar la proyección horizontal de B' se dibuja una referencia perpendicular a LT por B'^v y un arco de centro en A^h – proyección horizontal del eje de giro – y radio igual a la proyección horizontal del segmento AB; el corte de ambos elementos trazados resulta ser la proyección B'^{h} buscada.

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior se obtienen las proyecciones de C', con lo cual se completan las proyecciones diédricas del triángulo A'B'C', figura que es idéntica al triángulo ABC pero girada un ángulo ϕ en torno al eje de pié que pasa por A, tal que el plano que la contiene es proyectante vertical.

Finalmente, para obtener el verdadero tamaño del polígono ABC (Fig. 2.17-b) se debe aplicar un segundo giro, esta vez con la intención de hacer que el plano δ adopte una posición horizontal, o lo que resulta más sencillo, que se sitúe sobre dicho plano horizontal. Para ello se ha tomado como eje de rotación a la traza horizontal del plano δ' y se ha seguido un procedimiento análogo al que corresponde a la Fig. 2.16.

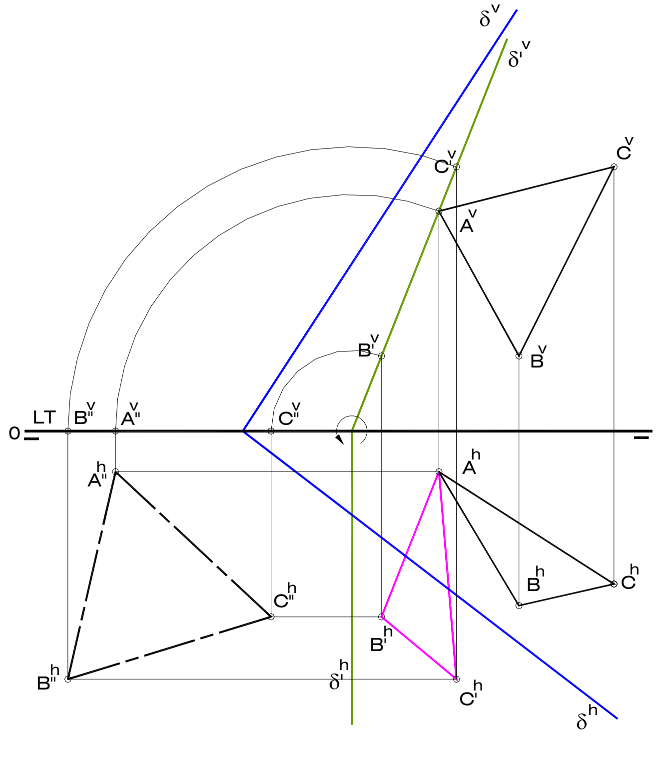

Fig. 2.17-b