CAPÍTULO I

1.1 A MANERA DE INTRODUCCIÓN

Las principales consideraciones geométricas son muy antiguas y, al parecer se originaron en observaciones realizadas por el hombre, gracias a su habilidad para reconocer y comparar formas y tamaños.

Muchas circunstancias en la vida del hombre, aún en la edad primitiva, condujeron a numerosos descubrimientos geométricos: la noción de la distancia fue, sin duda alguna, uno de los primeros conceptos geométricos descubiertos; la estimación del tiempo necesario para hacer un viaje le condujo, originalmente, a observar que la recta constituye la trayectoria más corta de un punto a otro; incluso, por intuición, la mayoría de los animales se dan cuenta de esto. La necesidad de limitar terrenos llevaron a la noción de figuras geométricas simples, tales como rectángulos, cuadrados, triángulos, etc. Otros conceptos geométricos simples, como las nociones de verticalidad, de rectas paralelas, pueden haber sido sugeridas por la construcción de paredes y viviendas primitivas.

También muchas observaciones en la vida diaria pudieron haber conducido a los primeros hombres al concepto de curvas, superficies y sólidos. Los casos de circunferencia fueron numerosos: la periferia del sol, de la luna, las ondas que se forman al lanzar una piedra en un estanque, las sombras producidas por el sol o un candil debieron sugerir la noción de secciones cónicas. Los alfareros primitivos hicieron sólidos de revolución. El cuerpo del hombre, de los animales, de muchas hojas y flores de plantas sugieren la noción de simetría. La idea de volumen viene de manera casi inmediata, al considerar recipientes para contener líquidos, cereales y otros artículos de consumo diario.

De esta manera se fue creando, inconscientemente, una geometría utilizada en un principio por el hombre para solucionar problemas geométricos concretos, que bien pudieron presentársele de manera aislada, sin conexión aparente entre unos y otros, y, evidentemente, también la pudo utilizar en la fabricación de objetos ornamentales y artísticos.

Naturalmente, esas manifestaciones artísticas y esos problemas concretos contribuyeron al nacimiento y posterior desarrollo de la geometría, la cual comenzó a volverse una ciencia cuando la inteligencia humana fue capaz de extraer de relaciones geométricas concretas una relación geométrica abstracta y general, que contiene a las primeras como casos particulares.

La tradición atribuye los principios de la geometría como ciencia a las prácticas primitivas de la agrimensura en Egipto; la palabra *geometría* significa “medición de la tierra”. Pero no sólo los egipcios contribuyeron al desarrollo de la geometría: los babilonios también trabajaron en la geometría empírica y resolvieron problemas prácticos.

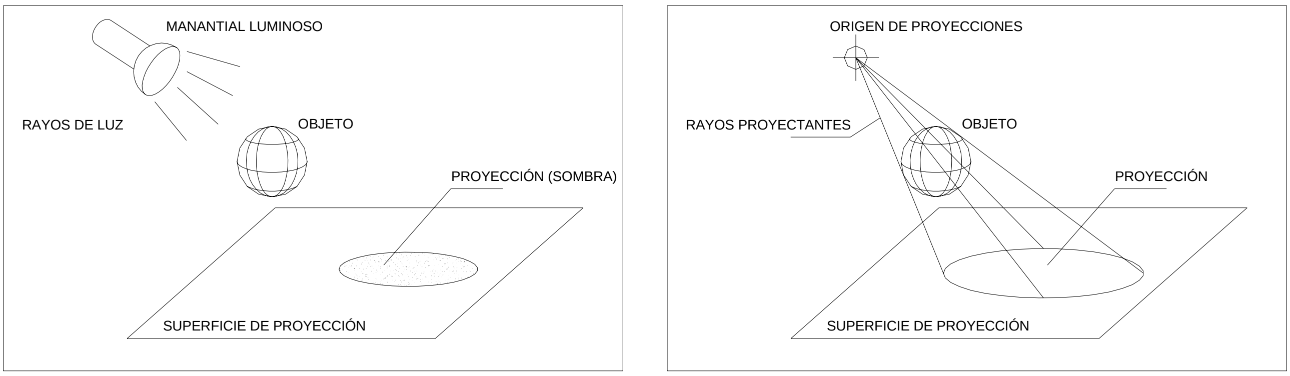
Unos cuantos siglos antes de Cristo, toda la sabiduría empírica acumulada por egipcios y babilonios pasa a poder de los griegos; pero éstos, a diferencia de aquéllos, pusieron gran empeño en concluir los hechos geométricos no sólo de manera empírica, sino, primordial y casi exclusivamente, con base en razonamientos deductivos.

En la búsqueda de la representación de elementos geométricos y de métodos que permitieran establecer las relaciones existentes entre ellos, el hombre se ha valido del dibujo, primero sobre toscas paredes de cavernas y luego sobre materiales manufacturados, constituyéndose esta herramienta en el lenguaje de la geometría y en medio de estudio y comunicación que posibilitó la construcción de maravillas como las grandes pirámides, templos y edificios civiles y militares de grandes dimensiones y de un altísimo grado de perfeccionamiento técnico, en regiones como Egipto, Mesopotamia y el mundo griego. Al mismo tiempo, hizo posible la materialización de invenciones como el tornillo sin fin, la rueda dentada y otras maravillas de la ingeniería antigua.

Ahora bien, como se ha indicado, el dibujo constituye también una forma de comunicación, y, como cualquiera otra, debe ser clara y sin ambigüedades, sobre todo cuando el mensaje que se quiere transmitir es la abstracción de un objeto útil cuyas características deben de ser respetadas en el momento de su materialización. Surge entonces la pregunta: si los objetos son tridimensionales, ¿cómo representarlos sobre una superficie bidimensional manteniendo clara la información concerniente a sus propiedades geométricas? La respuesta que se ha dado a tal interrogante es el método de *proyecciones.*

La proyección de un elemento (*cuerpo proyectante)* se obtiene por la incidencia de un *haz proyectante* sobre él, que al intersecar a una superficie plana determinada genera una representación bidimensional. De las características de ese haz proyectante y de la posición relativa entre él, la superficie de proyección y el objeto, depende el tipo de representación que se obtiene.

Si estudiamos un caso real, el haz de rayos proyectantes puede asociarse a una fuente luminosa (lámpara, luz solar), en tanto que si abordamos el estudio de elementos geométricos abstractos, el mencionado haz viene a ser un conjunto de rectas que pasan por un punto, el cual se denomina *origen de proyecciones o Foco*. Por otra parte, la superficie de proyección, que en el caso real puede ser cualquiera, se toma como plana en Geometría Descriptiva, mientras que la sombra viene a ser análoga de la proyección del objeto(Fig. 1.1).



CASO REAL CASO ABSTRACTO

Fig. 1.1: Proyección de un objeto

1.2 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

El conjunto conformado por el origen de proyecciones, el haz de rayos proyectantes, la superficie de proyección, el cuerpo proyectante y la proyección misma, constituye un *Sistema de Proyección* que resulta ser finalmente un *Sistema de Representación Gráfica.* Como todo sistema, es un conjunto de elementos – abstractos en éste caso – que se conjugan de manera ordenada y armónica para lograr la consecución de un fin: la representación bidimensional de una realidad tridimensional que, aunque abstracta, es una aproximación de nuestro entorno cotidiano.

Existe una gama infinita de sistemas de proyección que puede clasificarse en dos grupos principales, a saber, Sistemas Cónicos y Sistemas Cilíndricos. La diferencia entre ambos radica en la posición que se la asigna al origen de proyecciones en cada caso.

Sistemas Cónicos: El origen de proyecciones se encuentra en un lugar finito del espacio, lo que trae como consecuencia la convergencia de los rayos proyectantes. Si éstos se asocian con rayos visuales y el origen de proyecciones se asocia con el ojo humano, puede inferirse que con los sistemas cónicos se obtienen representaciones que se aproximan a las imágenes que nuestro cerebro capta de los objetos físicos reales. En realidad estos sistemas generan gráficas análogas a las producidas por cámaras fotográficas, afectadas por deformaciones con respecto a los elementos reales, lo que dificulta la determinación de medidas exactas y la apreciación de las formas planas. Para una mejor comprensión puede hacerse la comparación con un sistema de iluminación artificial en donde la fuente luminosa es una lámpara.

Sistemas Cilíndricos: A diferencia de los cónicos, estos sistemas tienen la particularidad de ubicar el origen de proyecciones en el infinito, es decir, resulta ser un punto *impropio.* Como consecuencia de ello, los rayos proyectantes forman entre sí un ángulo CERO, es decir, son paralelos pues convergen en el infinito (Fig. 1.2). Es evidente que resulta difícil comparar este tipo de sistema de proyección con alguna forma de visión, sin embargo resulta útil establecer semejanza con un sistema de iluminación natural, en el que la fuente de luz es el sol, dado que este astro se encuentra tan alejado de la tierra y es tan grande con relación a nuestro planeta, que los rayos solares son, en la práctica, paralelos entre sí.

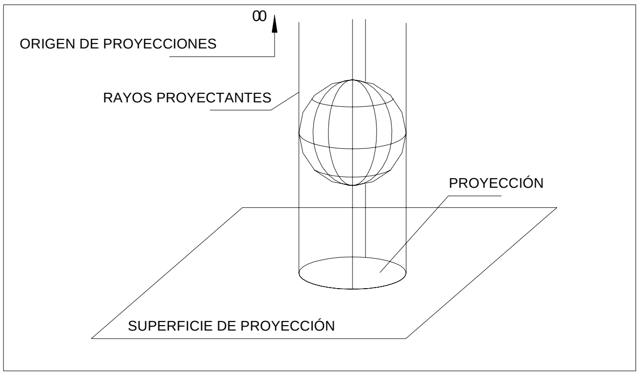
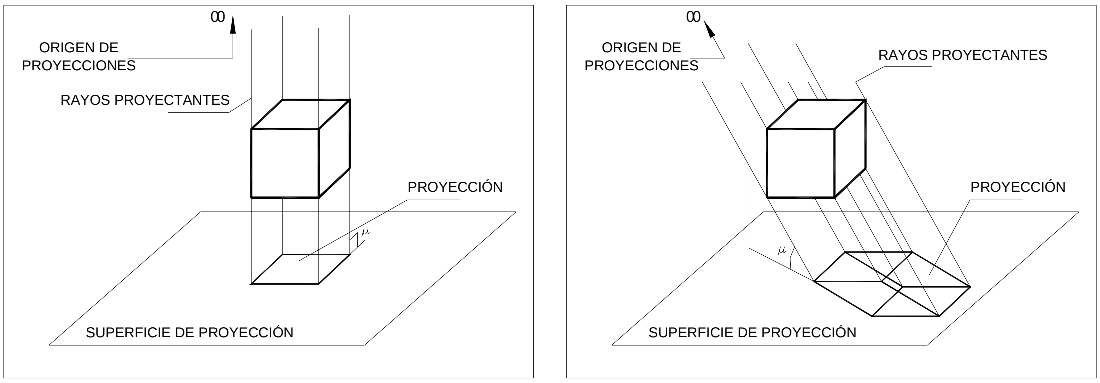


Fig. 1.2: Proyección Cilíndrica

Es evidente que si los rayos proyectantes son paralelos entre sí, cada uno de ellos forma un ángulo μ igual con respecto a la superficie de proyección, lo que implica la existencia de infinitos sistemas de proyección cilíndricos dependiendo del valor que tome μ. En general, se habla de *sistemas cilíndricos ortogonales* si $\mu = 90°$ y de *sistemas cilíndricos oblicuos si* $\mu \neq 90°$ (Fig. 1.3).



SISTEMA CILÍNDRICO ORTOGONAL SISTEMA CILÍNDRICO OBLICUO

Fig. 1.3: Sistemas de Proyección Cilíndricos.

La variante ortogonal de los sistemas cilíndricos es la empleada en la representación técnica, ya sea con uno o más planos de proyección. Constituye, además, el sistema de proyección que presenta menos dificultad a la hora de resolver problemas geométricos en el espacio.

1.3 SISTEMA DE DOBLE PROYECCIÓN ORTOGONAL

También conocido como *Sistema Diédrico* o *Sistema de Monge*, contempla dos planos de proyección perpendiculares entre sí que coinciden con los planos coordenados XY y XZ de un sistema de ejes cartesiano. En consecuencia, constituye la herramienta más adecuada para el estudio descriptivo de la geometría espacial.

El plano XY se considera Plano Horizontal (PH) de referencia y las proyecciones sobre él se denominan *proyecciones horizontales, icnográficas* o también *planta.* El plano XZ será entonces el Plano Vertical (PV) de referencia, y las proyecciones respectivas son llamadas *proyecciones verticales, ortográficas* o *alzado* (3).

La intersección de los dos planos de proyección se llama *eje de proyección* y más comúnmente *línea de tierra* (LT), porque se supone que el plano horizontal de proyección coincide con el del terreno. Dicha línea corresponde al eje coordenado X, de acuerdo con el Sistema Internacional, y divide a cada uno de los planos de proyección en dos regiones, que se denominan *superior* (+PV) e *inferior* (-PV) para el plano vertical, y *anterior* (+PH) y *posterior* (-PH) para el horizontal (Fig. 1.4).

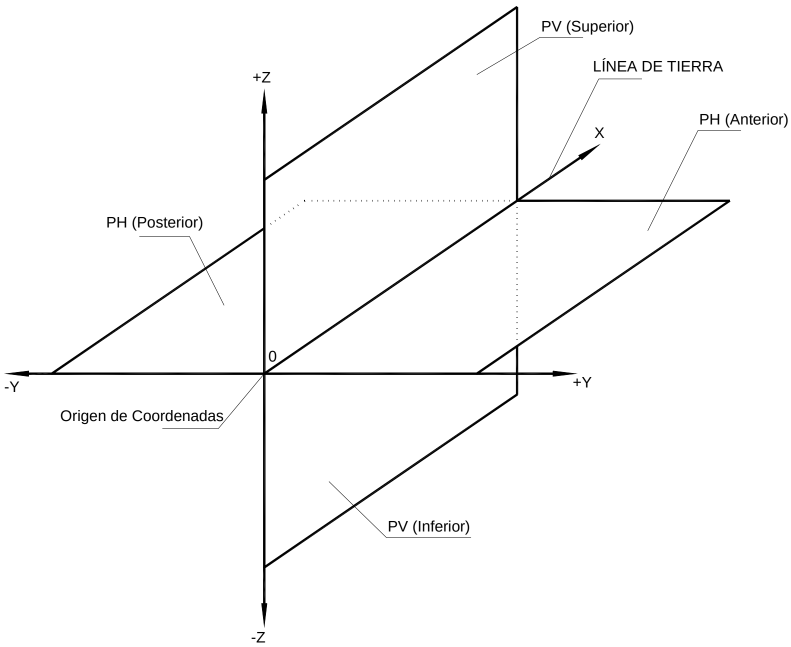


Fig. 1.4: El Sistema de Doble Proyección Ortogonal.

A su vez, los dos planos coordenados de proyección, debiéndoseles considerar como infinitos, dividen al espacio en cuatro regiones o *diedros:* Primero (anterior-superior), Segundo (superior-posterior), Tercero (posterior-inferior) y Cuarto (inferior-anterior). Las proyecciones horizontales se generan por la incidencia de rayos proyectantes paralelos al eje Z – y por ende perpendiculares a PH - cuyo origen se supone, por convención, en el primer diedro a distancia infinita de PV. Análogamente, las proyecciones verticales son producidas por rayos paralelos a Y, provenientes de un foco que se supone en el primer diedro a distancia infinita de PH.

Con el fin de facilitar el análisis, y en vista de que el plano coordenado YZ no se ha tomado como un plano de proyección principal, se omite la consideración de la parte negativa del eje X.

Como en la práctica es necesario dibujar sobre un plano único las proyecciones de una figura, se abate uno de los planos coordenados sobre el otro, haciéndolo girar alrededor de la línea de tierra de modo que se abran los diedros primero y tercero. Se abate uno u otro de los planos de proyección según la posición de la superficie de dibujo, de manera que si ésta es vertical, conviene suponer que el giro de 90° lo realiza PH, en tanto que si es horizontal, se supondrá que es PV quien gira (Fig. 1.5). El giro se realizará, de acuerdo con la norma internacional, haciendo coincidir la parte anterior de PH con la inferior de PV.

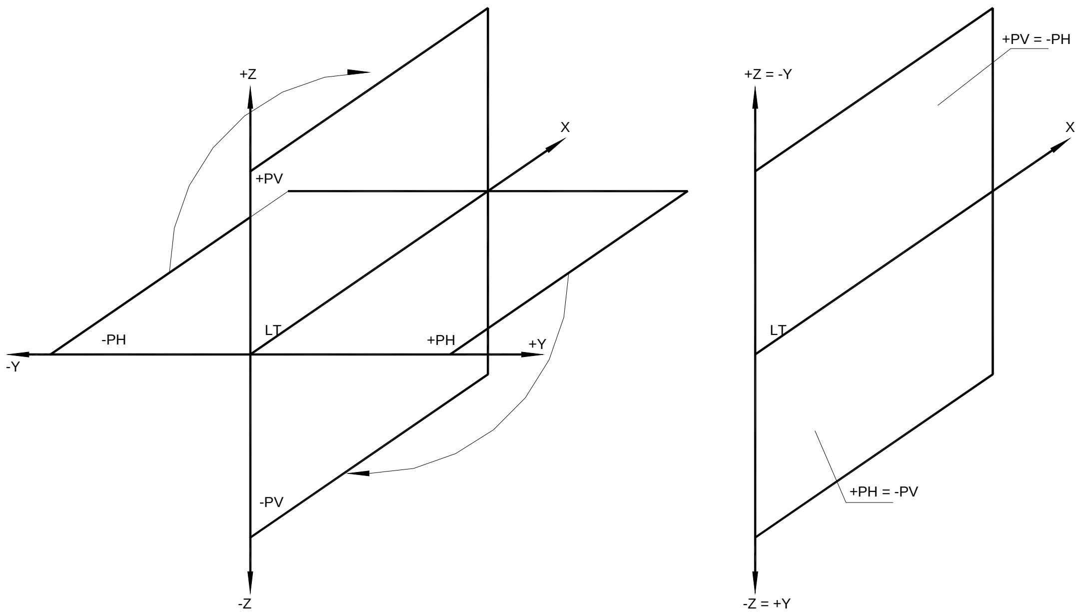


Fig. 1.5: Abatimiento de los planos de proyección.

1.4 EL PUNTO

El estudio de los sistemas de representación debe ser el de los distintos elementos geométricos, de las relaciones que se establecen entre ellos y sus aplicaciones prácticas. El elemento geométrico fundamental es el punto, el cual es *adimensional* y puede definirse a través de su posición en el espacio mediante coordenadas, referidas a un sistema que normalmente es rectangular (cartesiano).

El espacio geométrico euclídeo o vulgar está compuesto por una cantidad infinita de puntos; la suma de infinitos elementos adimensionales conforma un todo.

Las dos proyecciones de un punto P del espacio en el sistema Diédrico se obtienen construyendo rayos proyectantes que pasan por el punto y que sean perpendiculares a los planos de proyección. Los puntos comunes a los rayos y a estos planos constituyen las *proyecciones diédricas* de P. Tales proyecciones se denotan, en este trabajo mediante una letra mayúscula o un número (nombre del punto) con un superíndice que indica el plano de proyección en donde se encuentran. Este superíndice es un letra minúscula: *h,* si se trata de la proyección sobre el plano vertical y *v,* si se trata de la proyección sobre el plano horizontal.

El punto P y sus proyecciones diédricas determinan un plano, que puede llamarse el plano proyectante del punto P. Este plano es perpendicular a los dos planos de proyección y por lo tanto lo es también a su intersección LT. Las intersecciones P_oP^v y P_oP^h del plano proyectante con PV y PH, son perpendiculares a la línea de tierra y representan las coordenadas *z* y *y* del punto P; la distancia del origen de coordenadas a P_o constituye la coordenada *x*; la línea P_oP^h se mantiene perpendicular a la línea de tierra cuando PH gira noventa grados en torno a ella (Fig. 1.6).

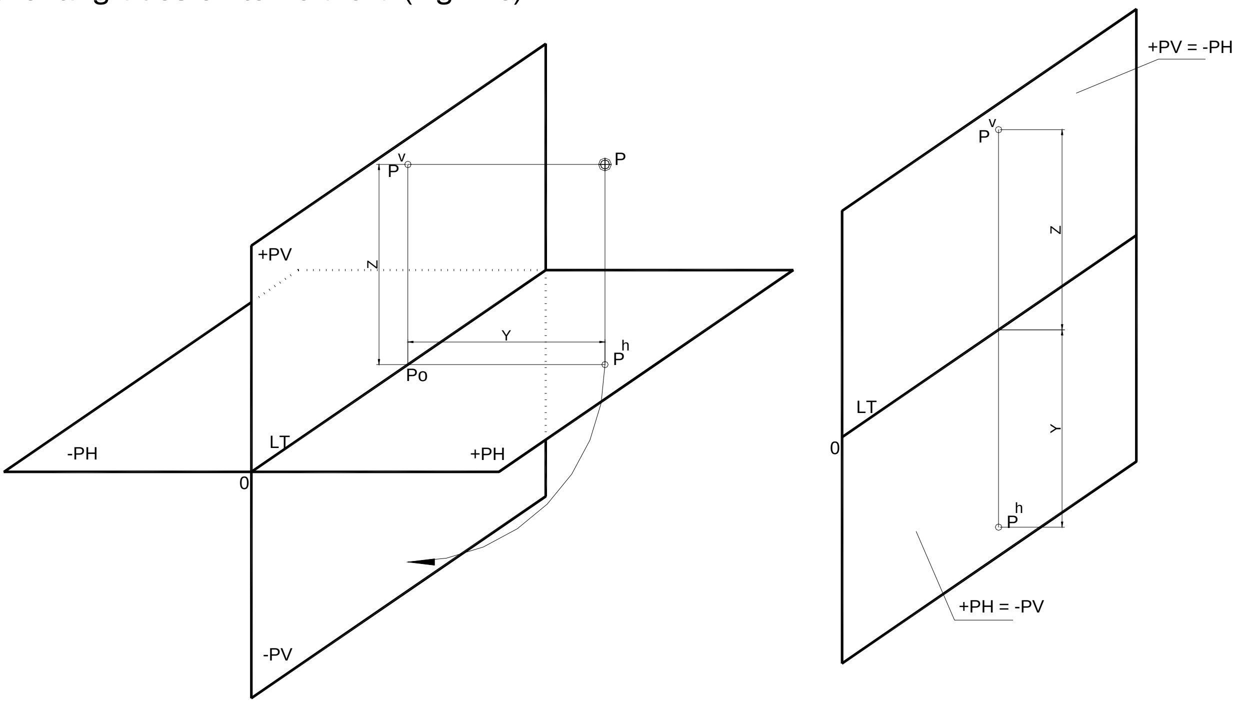


Fig. 1.6: Proyecciones diédricas de un punto.

La distancia del punto a PH tiene el valor de su coordenada *z* y se denomina comúnmente *cota*, ya que el plano horizontal se asocia con el del terreno. Del mismo modo la distancia del punto a PV corresponde al valor de su coordenada *y* y recibe el nombre de *vuelo o alejamiento.* Como luego del giro ambos planos de proyección coinciden, las dos proyecciones del punto P estarán en la dirección P_oP^v, de manera que: *la proyección horizontal y la vertical de un punto, después de efectuar el abatimiento de uno de los planos de proyección sobre el otro, se ubican siempre sobre una línea recta perpendicular a la línea de tierra.*
De manera recíproca, dos puntos P^v y P^h del dibujo situados en una línea recta perpendicular a la línea de tierra, se consideran como las proyecciones de un único punto del espacio P. Así, pues, cada punto del espacio está completamente definido mediante sus dos proyecciones diédricas, por ello, cualquier otra proyección que se realice será de carácter auxiliar.

Dependiendo de los valores que adopten las coordenadas rectangulares de un punto del espacio se obtienen siete posiciones características, a saber:

1. Punto A ubicado en la Primera Región: Sus coordenadas *y* y *z* son positivas; tiene su proyección horizontal por debajo de la línea de tierra y su proyección vertical por encima de ella.
2. Punto B ubicado en la Segunda Región: Su coordenada *y* es negativa y su coordenada *z* es positiva; tiene ambas proyecciones ubicadas por encima de la línea de tierra.

3. Punto C ubicado en la Tercera Región: Sus coordenadas *y* y *z* son negativas; tiene su proyección horizontal por encima de la línea de tierra y su proyección vertical por debajo de ella.
4. Punto D ubicado en la Cuarta Región: Su coordenada *y* es positiva y su coordenada *z* es negativa; tiene ambas proyecciones ubicadas por debajo de la línea de tierra.
5. Punto E ubicado en el plano horizontal de proyección: Su coordenada *z* es cero; si la coordenada *y* es positiva, el punto se encuentra en la parte anterior de PH, si es negativa, se encuentra en la parte posterior. La proyección vertical del punto se ubica sobre la línea de tierra.
6. Punto F ubicado en el plano vertical de proyección: Su coordenada *y* es cero; si la coordenada *z* es positiva, el punto se encuentra en la parte superior de PV, si es negativa, se encuentra en la parte inferior. La proyección horizontal del punto se ubica sobre la línea de tierra.
7. Punto G ubicado en ambos planos de proyección: Es un punto que pertenece a la línea de tierra, ya que ésta constituye el lugar común a PV y PH. Sus coordenadas *y* y *z* son cero. Ambas proyecciones se ubican sobre la línea de tierra.

Las posiciones descritas se muestran en la Fig. 1.7.

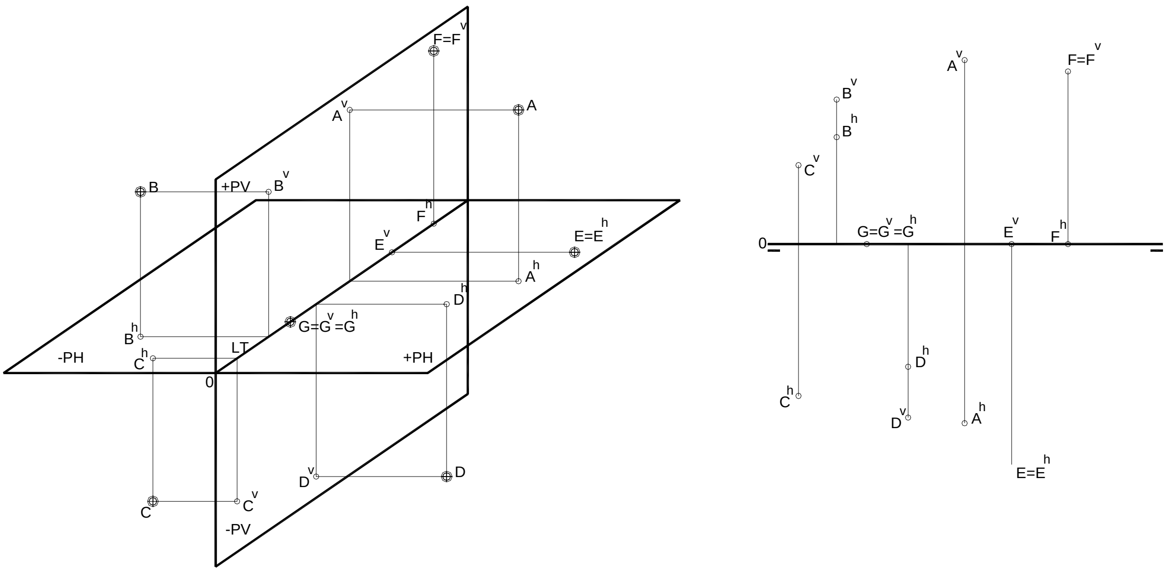


Fig. 1.7: Posiciones del punto. Representación en el Sistema Diédrico.

1.5 LA RECTA

Es el elemento geométrico *unidimensional* y puede determinarse a través de un *segmento de recta,* el cual, a su vez, se define como la menor distancia entre dos puntos.

El estudio de las proyecciones diédricas de la recta se realiza atendiendo a las distintas posiciones que ésta puede adoptar con respecto al sistema de referencia empleado, es decir, con respecto a los planos coordenados de proyección: Plano Vertical y Plano Horizontal.

Las variables objeto de estudio es las proyecciones diédricas son, en definitiva, las concernientes a las características de la recta: tamaño de un segmento (longitud) y ángulos que forma con los planos de proyección (dirección). La clasificación de las distintas posiciones de recta se realiza variando estos ángulos, comenzando por las *posiciones notables*, que son aquellas situaciones en las que la recta forma con los planos de proyección ángulos *notables:* cero y noventa grados.

Si un punto del espacio pertenece a una determinada recta, las proyecciones de aquél deben situarse sobre las proyecciones homónimas de ésta.

1.5.1 Trazas de la recta

Sea una recta "m" definida por el segmento AB; los puntos pertenecientes a una recta "m" que se encuentran sobre los planos de proyección se denominan *trazas de la recta "m".* En vista de que existen dos planos principales de proyección, se llamará *traza horizontal* (TH) de la recta al punto común entre ella y PH, y *traza vertical* (TV) de la recta al punto común entre ella y PV (Fig. 1.8).

Evidentemente, la traza vertical es también el punto de intersección de la recta con su proyección vertical, y como este punto se halla en el plano vertical, tendrá su proyección horizontal en la línea de tierra. Por otra parte, siendo la traza vertical un punto perteneciente a la recta en el espacio, su proyección vertical deberá encontrarse sobre la proyección vertical de "m"; por lo tanto, la proyección horizontal de la traza vertical corresponde al corte entre la proyección horizontal de "m" con la línea de tierra. Análogamente, el corte de la proyección vertical de la recta "m" con la línea de tierra es la proyección vertical de la traza horizontal (punto de PH, Z = 0); la proyección horizontal de ese punto se encuentra sobre la proyección horizontal de la recta "m".

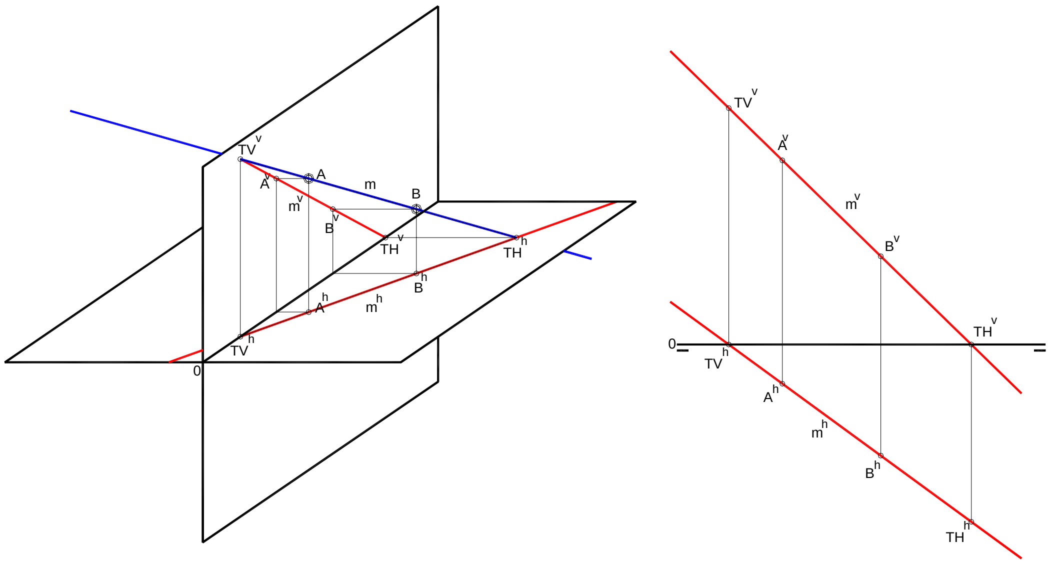


Fig. 1.8: Trazas de una recta.

Nótese cómo los puntos de traza marcan un cambio de región de la recta "m". En el ejemplo, a la izquierda de TV "m" se encuentra la segunda región; entre TV y TH, la recta está en la primera región y a la derecha de TH, "m" se sitúa en la cuarta región del espacio.

1.5.2 Posición de la recta

La recta es un elemento geométrico único que adopta distintas posiciones en el espacio con relación al sistema de referencia, es decir, con respecto a los planos de proyección del sistema diédrico. Se denomina α al ángulo que se forma entre la recta y el plano horizontal y β al formado con el plano vertical.

De acuerdo con los valores que pueden tomar los ángulos α y β es posible asignar nombres a las posiciones que adopta la recta. Estas posiciones se denominan notables cuando forma ángulos de cero o noventa grados con respecto a los planos de proyección, vale decir, cuando es paralela o perpendicular a uno de ellos. En el primer caso, un segmento de recta de determinada longitud se proyecta como otro segmento de igual tamaño, en tanto que en el segundo caso, se proyecta como un punto, ya que los rayos proyectantes correspondientes a cada uno de los infinitos puntos de la recta se confunden en uno solo.

1.5.2.1 Recta en posición paralela al plano horizontal

El ángulo formado con el plano horizontal (α) es, obviamente, igual a cero. La intersección de la recta con este plano (TH) es un punto impropio, o lo que es lo mismo, está en el infinito (Fig. 1.9). Dependiendo del valor del ángulo formado por la recta con respecto al plano vertical, se obtienen los siguientes casos:

- **Recta de Punta**: En esta situación, la recta forma un ángulo con PV $\beta = 90°$, por lo que su proyección vertical (a^v) se reduce a un punto. La proyección horizontal de la recta (a^h) es otra recta, la cual es perpendicular a la línea de tierra y se presenta en *Verdadero Tamaño,* ya que un segmento AB en esta posición se proyecta en A^hB^h con su misma longitud.

- **Recta Paralela a la Línea de Tierra**: En este caso particular, la recta es paralela a ambos planos de proyección, por lo que $\beta = 0$. Se representa en ambas proyecciones como rectas paralelas a la línea de tierra y en Verdadero Tamaño. Ambos puntos de traza (TV y TH) resultan ser puntos impropios.

- **Recta Horizontal**: La recta en esta posición, es oblicua con respecto a PV, vale decir, $0<\beta<90°$. Como consecuencia, la proyección vertical (c^v) es una recta paralela a la línea de tierra cuya longitud es menor con relación a la magnitud de la recta en el espacio (c), en una proporción igual al coseno del ángulo β. La proyección horizontal (c^h) refleja el Verdadero Tamaño y es una recta inclinada con respecto a la línea de tierra; el valor de este ángulo es el mismo valor de β.

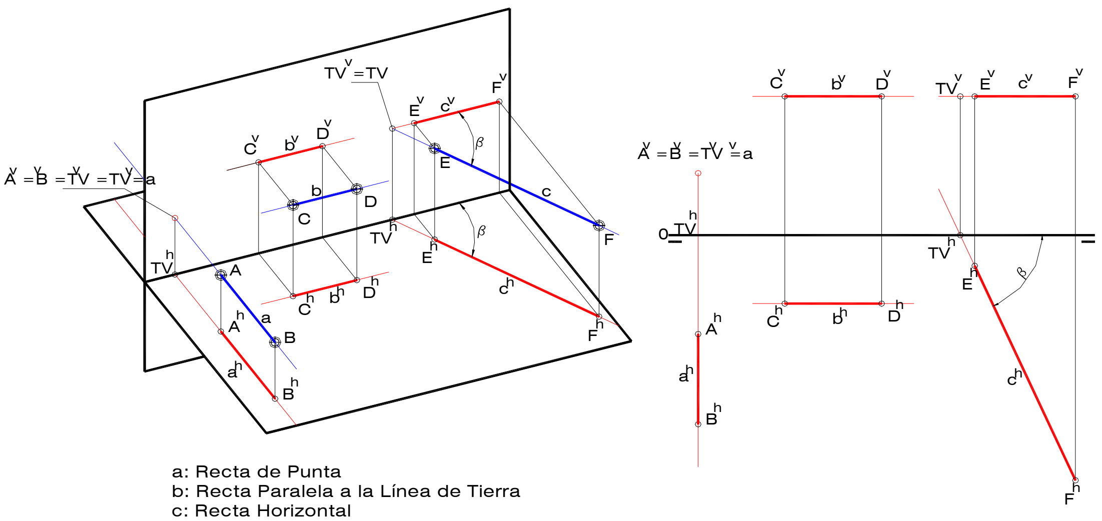


Fig. 1.9: Recta en posición paralela al Plano Horizontal

1.5.2.2 Recta en posición paralela al Plano Vertical

El ángulo formado con el plano vertical (β) es igual a cero. La intersección de la recta con este plano (TV) es un punto impropio, o lo que es lo mismo, está en el infinito (Fig. 1.10). Dependiendo del valor del ángulo formado por la recta con respecto al plano horizontal, se presentan los siguientes casos:

- **Recta de Pié**: En esta situación, la recta forma un ángulo con PH $\alpha = 90°$, por lo que su proyección horizontal (d^h) se reduce a un punto. La proyección vertical de la recta (d^v) es otra recta, la cual es perpendicular a la línea de tierra y se presenta en *Verdadero Tamaño,* ya que un segmento GH en esta posición se proyecta en G^vH^v con su misma longitud.

- **Recta Paralela a la Línea de Tierra**: Dedo que en esta posición la recta también es paralela a PH, se trató en el numeral 1.5.2.1.

- **Recta Frontal**: La recta en esta posición, es oblicua con respecto a PH, vale decir, $0<\alpha<90°$. Como consecuencia, la proyección horizontal (e^h) es una recta paralela a la línea de tierra cuya longitud es menor con relación a la magnitud de la recta en el espacio (e), en una proporción igual al coseno del ángulo α. La proyección vertical (e^v) refleja el Verdadero Tamaño y es una recta inclinada con respecto a la línea de tierra; el valor de este ángulo de inclinación es el mismo valor de α.

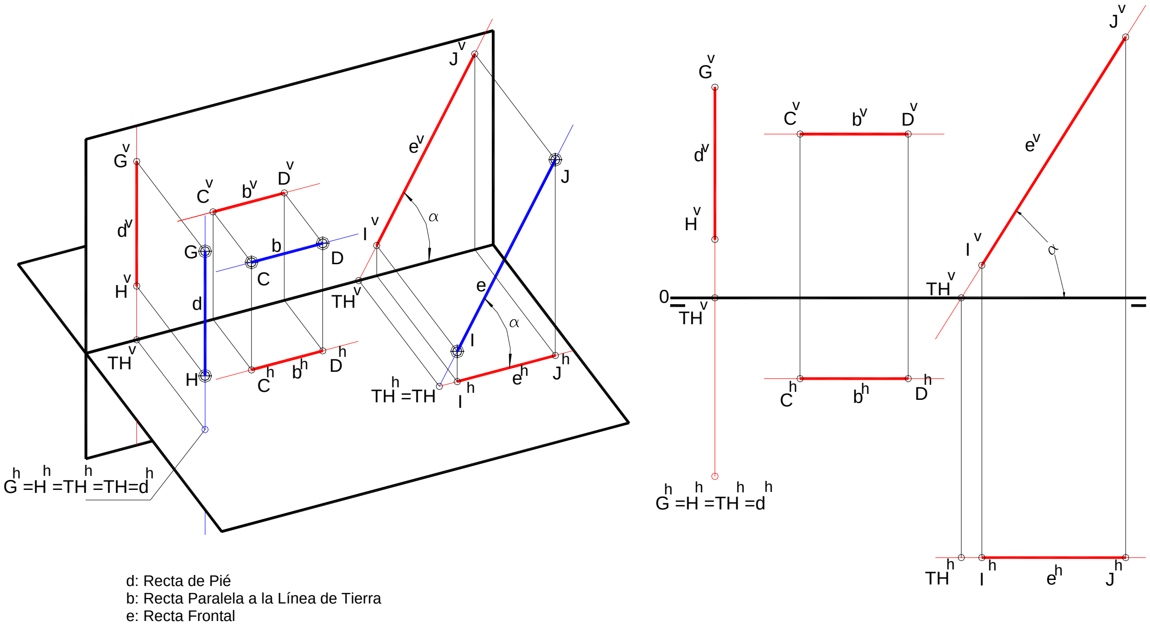


Fig. 1.10: Recta en posición paralela al Plano Vertical.

1.5.2.3 Recta en posición oblicua con respecto a los planos de proyección

En este caso los valores que adoptan los ángulos α y β son distintos de cero y de noventa grados. Esto trae como consecuencia que ninguna de las proyecciones diédricas reflejan el Verdadero Tamaño de un determinado segmento de recta en esta posición; de igual manera, los propios valores de α y β aparecen distorsionados. Ante esta realidad, se hace necesario aplicar un método auxiliar que permita determinar los valores angulares y el Verdadero Tamaño, bien mediante el cambio de posición del segmento de recta objeto de estudio, bien mediante la introducción de nuevas proyecciones cilíndricas ortogonales (Fig. 1.11 y 1.12). En general, existen dos casos de recta en posición oblicua, originados por la consideración de un tercer plano de proyección: el plano coordenado XZ o uno paralelo a él.

- **Recta de Perfil**: En esta posición, la recta forma ángulos distintos de cero y noventa grados con los planos de proyección vertical y horizontal, pero es paralela al plano coordenado XZ (Plano Lateral), por lo que se cumple que

  $$\alpha + \beta = 90$$

  El Verdadero Tamaño de un segmento de recta en esta posición se refleja en una proyección auxiliar, la cual se hace sobre un plano cualquiera paralelo al plano coordenado XZ y, por lo tanto, perpendicular a LT. Como este plano auxiliar se proyecta como líneas rectas en los planos de proyección principales, será necesario abatirlo sobre uno de ellos para lograr "ver" la proyección lateral resultante. El abatimiento se realiza comúnmente en torno a la intersección entre PV y el plano lateral auxiliar mediante un giro de 90°.

  El procedimiento para encontrar esa *proyección lateral* partiendo de las proyecciones diédricas, es el siguiente (Fig. 1.11):
  Se comienza ubicando a cualquier distancia del origen de coordenadas – preferiblemente a la derecha de las proyecciones de la recta de perfil – un plano lateral, el cual se representa por líneas que forman ángulo recto con la línea de tierra, las cuales se cortan sobre ella en el punto *R.* Enseguida se trazan por las proyecciones horizontales de los puntos que definen al segmento de recta líneas de referencia paralelas a LT y que cortan a la proyección horizontal del plano lateral auxiliar en 1 y 2.

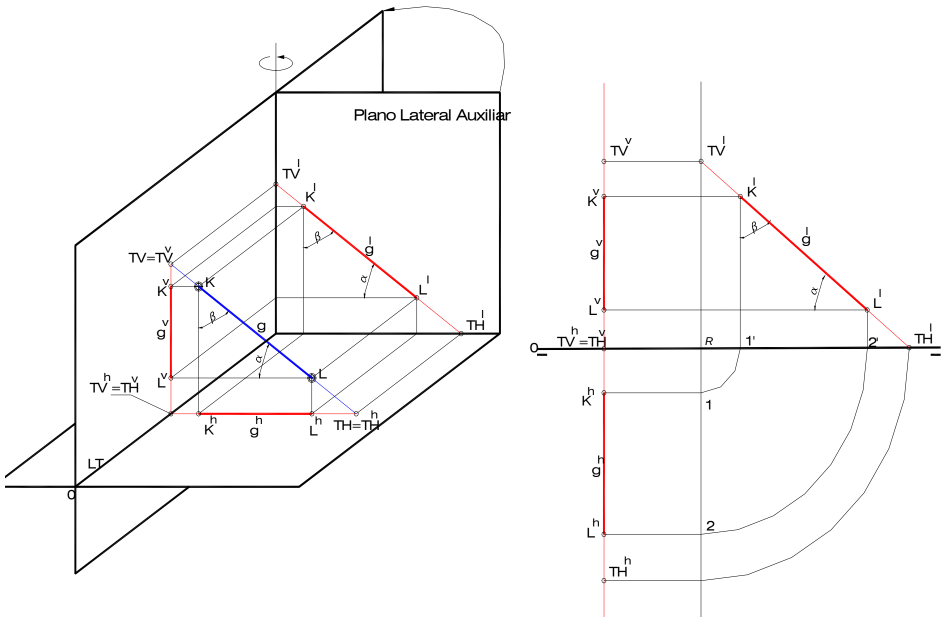


Fig. 1.11: Recta de Perfil.

  Luego, con centro en *R* y radios *R*1 y *R*2 se dibujan cuartos de circunferencia que definen sobre la línea de tierra a los puntos 1' y 2'. Si se levantan perpendiculares a LT por 1' y 2', y paralelas a LT por las proyecciones verticales de los puntos que definen al segmento de recta, se obtienen, en los cortes correspondientes, las proyecciones laterales abatidas de estos puntos, y, en consecuencia, la proyección lateral abatida de la recta de perfil (Fig. 1.11).

  La proyección lateral permite también la determinación de las trazas de la recta: el corte entre la proyección lateral de la recta y la proyección vertical del plano lateral define a TV^l (proyección lateral de la traza vertical), en tanto que el corte entre al proyección lateral de la recta de perfil y LT define a TH^l. Una vez obtenidas estas proyecciones laterales se procede a determinar las proyecciones diédricas de los puntos de traza, aplicando el procedimiento descrito anteriormente en forma inversa y recordando los conceptos de los puntos de traza.

- **Recta Oblicua, en Posición Accidental o en Posición Cualquiera**: En esta posición, la recta forma ángulos distintos de cero y noventa grados con los tres planos coordenados, es decir, no es paralela a PV, PH ni PL, por lo que el verdadero tamaño de un segmento de recta en estas condiciones no se refleja ni en las proyecciones diédricas ni en la proyección lateral. Por lo anterior se cumple que

$$\alpha + \beta < 90$$

ya que los planos de proyección PV y PH forman entre sí 90°. Si se asocia una recta con la trayectoria ideal de un móvil, si se supone ese movimiento de izquierda a derecha, y se considera al observador en la primera región del espacio, puede entonces hablarse de cuatro situaciones generales para la recta en posición accidental: Ascendente hacia adelante (Fig. 1.12-a), Ascendente hacia atrás (Fig. 1.12-b), Descendente hacia adelante (Fig. 1.12-c), Descendente hacia atrás (Fig. 1.12-d).

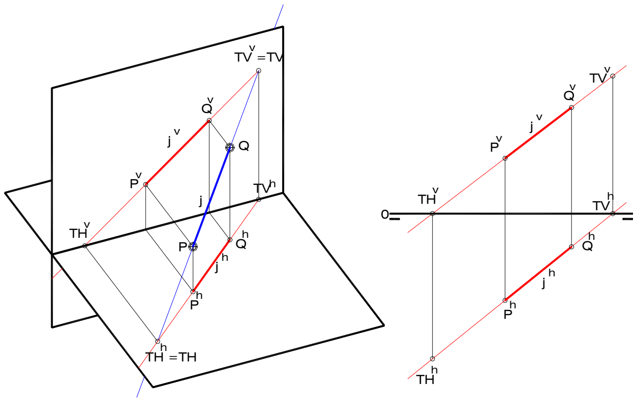


Fig. 1.12-a: Recta Oblicua Ascendente hacia delante.

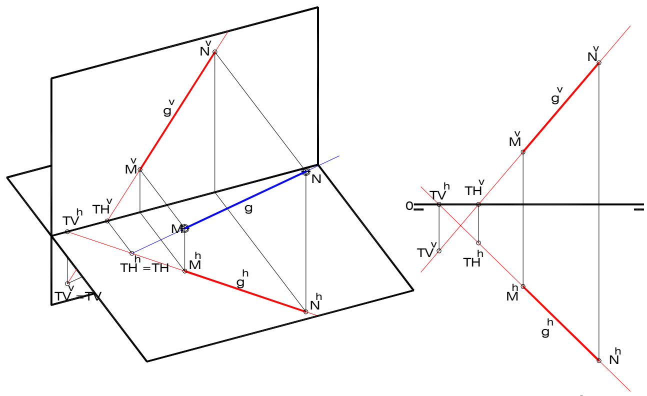


Fig. 1.12-b: Recta Oblicua Ascendente hacia atrás.

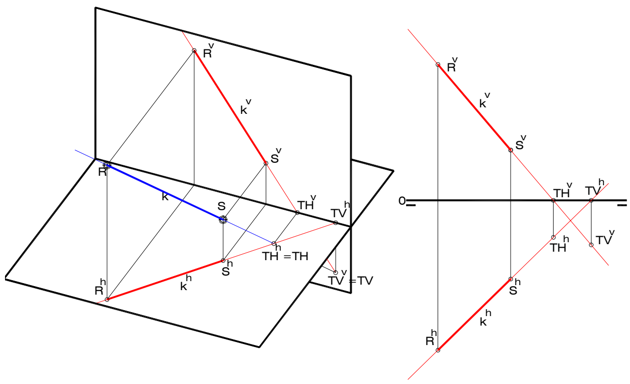


Fig. 1.12-c: Recta Oblicua Descendente hacia delante.

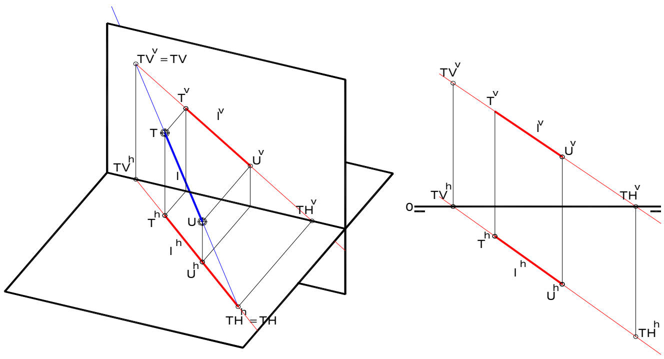


Fig. 1.12-d: Recta Oblicua Descendente hacia atrás.

1.5.3 Métodos utilizados en la determinación del Verdadero Tamaño de segmentos de recta

Como ya se ha indicado, los segmentos de recta en posición oblicua no reflejan en las proyecciones diédricas su Verdadero Tamaño. Lo mismo ocurre con los valores angulares α y β. Por tal motivo, es absolutamente necesaria la aplicación de métodos que permitan la resolución de los siguientes tipos de problema:

- Dado un segmento en posición oblicua, determinar su Verdadero Tamaño y los valores de α y β.

- Determinar un punto P sobre una recta en posición oblicua, teniendo como referencia la distancia que hay entre P y cualquier otro punto de la recta.
- Construir las proyecciones de una recta si se conocen el Verdadero Tamaño de un segmento sobre ella, y los valores α y β.

Los métodos comúnmente empleados para lograr el objetivo planteado son los siguientes:

1. Abatimiento
2. Giro
3. Introducción de nuevos planos de proyección

1. **Abatimiento:** Consiste en la rotación de un segmento de recta en torno a un eje paralelo a uno de los planos de proyección (eje de abatimiento) hasta lograr que adopte una posición favorable, es decir, una en la que su Verdadero Tamaño se proyecte sobre alguno de los planos de proyección.

Sea un segmento AB – el cual define una recta “a” - en posición oblicua (Fig. 1.13-a). Si se traza una recta paralela a la proyección horizontal del segmento por su extremo de menor cota (A), se genera un triángulo rectángulo denominado *triángulo de abatimiento.* Su hipotenusa es el segmento AB en el espacio (Verdadero Tamaño), el ángulo formado entre ella y la recta paralela a la proyección horizontal de AB es α y el cateto opuesto a este ángulo es un segmento perpendicular a PH de longitud igual a la diferencia entre las cotas de A y B ($\Delta Z_{AB} = |Z_B - Z_A|$). Ahora bien, si el triángulo rota un ángulo de 90° en torno al cateto adyacente al ángulo α (eje de abatimiento), adopta una posición de paralelismo con respecto a PH, por lo que, si se proyecta el triángulo sobre este plano de proyección, se obtiene el Verdadero Tamaño (VT) del segmento AB y el valor real de α. La proyección del punto B’ (nueva posición del punto B) se denota por B^R (B abatido).

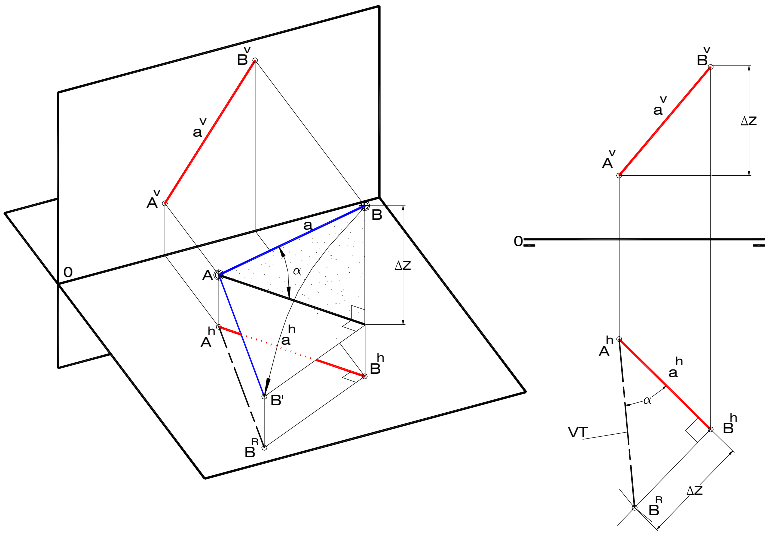


Fig. 1.13-a: Triángulo de Abatimiento

En la representación diédrica se procede de la siguiente manera: se traza por la proyección vertical del extremo del segmento de menor cota (A^v) una paralela a LT, que al cortar la referencia del otro extremo define la diferencia de cota. Enseguida se copia el valor de esta diferencia – usando el compás – sobre una perpendicular a la proyección horizontal del segmento de recta, trazada por la icnografía (proyección horizontal) del extremo de mayor cota (B), lo que resulta en el punto B^R. Luego, el segmento definido por B^R y la proyección horizontal del otro extremo (A^h) es la hipotenusa del triángulo de abatimiento, cuya longitud es el Verdadero Tamaño (VT) del segmento AB. Finalmente, el ángulo formado entre el Verdadero Tamaño del segmento y su proyección horizontal tiene el mismo valor del ángulo α, formado entre la dirección “a” – definida por A y B – y el plano horizontal.

Del mismo modo, es posible generar un triángulo de abatimiento que permita la visualización del Verdadero Tamaño del segmento AB y del valor real del ángulo formado entre la dirección “a” y PV, es decir, β.

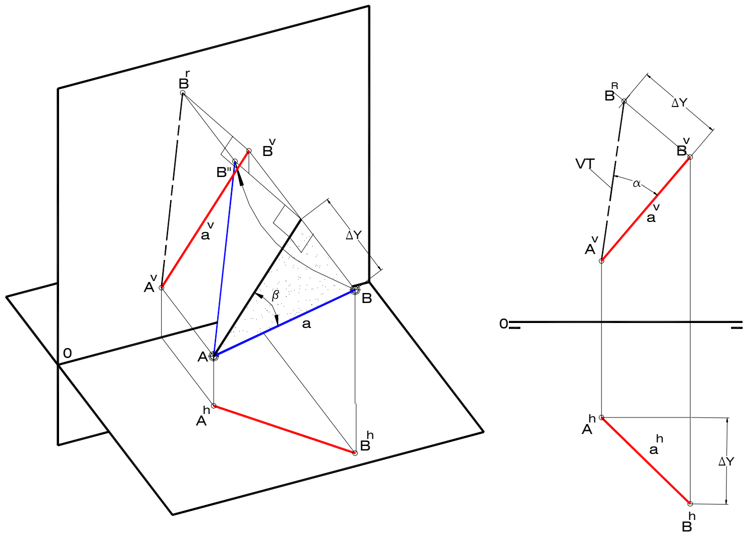


Fig. 1.13-b: Triángulo de Abatimiento

Su construcción se lleva acabo ubicando una paralela a la proyección vertical del segmento AB, en el punto de menor vuelo (A), siendo su hipotenusa el segmento AB en el espacio, β es el ángulo formado entre AB y la paralela a la proyección vertical y el cateto opuesto a β tiene un tamaño igual a la diferencia entre los vuelos de A y B ($\Delta Y_{AB} = |Y_B - Y_A|$) (Fig. 1.13-b).

Mediante un movimiento de rotación de 90° en torno a la recta paralela a la proyección vertical del segmento, el triángulo de abatimiento llega a ser paralelo al PV, por lo que, si se proyecta sobre este plano en la nueva posición, se obtiene que el segmento definido por B^R y A^v es el Verdadero Tamaño de AB, en tanto que el ángulo formado entre ese Verdadero Tamaño y la proyección vertical del segmento tiene el mismo valor que el ángulo β.

La construcción de este segundo triángulo de abatimiento en el sistema diédrico es análoga a la del primero, y es fácilmente deducible de la Fig. 1.13-b.

2. **Giro:** Al igual que el Abatimiento, el Giro se fundamenta en la rotación de un segmento de recta en posición oblicua en torno a una recta paralela a uno de los planos de proyección. La diferencia entre ambos métodos radica en que el giro se realiza en torno a rectas de pié o de punta (eje de giro), lo que implica que el ángulo de rotación o giro sea de noventa grados únicamente si se trata de segmentos de recta en posición de perfil. La rotación se realiza hasta conseguir que el segmento oblicuo adopte una posición horizontal (eje de punta) o frontal (eje de pié).

   Con el fin de simplificar el procedimiento, se selecciona un eje de giro que tenga un punto común con el segmento de recta objeto de estudio y se hace, además, coincidir ese punto con uno de los extremos de dicho segmento.

   Sea un segmento AB – el cual define una recta “a” - en posición oblicua. Considérese una recta de punta que pasa por el punto A como eje de giro. El radio de giro será el segmento KB. La rotación del punto B en torno a ese eje se realiza en un plano paralelo a PV, por lo que la trayectoria de B se proyecta en el plano vertical como una circunferencia de radio $A^v B^v$.

   Como se quiere llevar el segmento a una posición horizontal, el corte de esa circunferencia con una paralela a la línea de tierra trazada por la proyección vertical del centro de giro, da como resultado la nueva proyección vertical de B (B'^v), como se muestra en la Fig. 1.14-a.

Considerando que el giro de B se realiza en un plano paralelo a PV, es evidente que su vuelo permanece invariable, por lo que, en el corte de una paralela a LT trazada por B^h con una perpendicular a LT trazada por B'^v , se obtiene la proyección horizontal del punto B en su nueva posición (B'^h).

Claro está que al aplicarse el giro del segmento AB como se ha indicado, el ángulo que forma con el plano vertical ha permanecido constante; así, en las proyecciones diédricas, el ángulo β de la recta definida por A y B es igual al formado entre la nueva proyección horizontal del segmento y la línea de tierra, ya que en la nueva posición la recta es horizontal. Por esta misma razón, el segmento A^h B'^h constituye el Verdadero Tamaño del segmento AB.

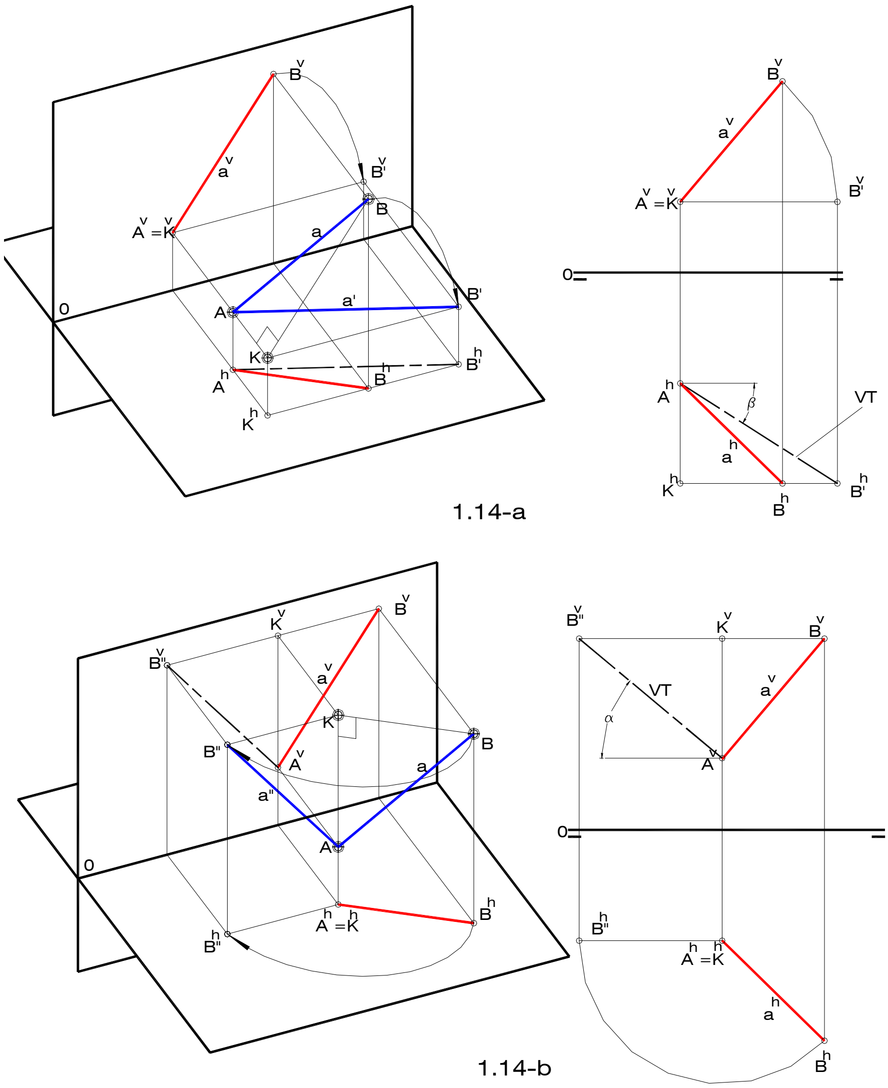


Fig. 1.14: Giro de un segmento de recta

Análogamente, el giro del segmento oblicuo en torno a un eje de pié se realiza en un plano paralelo a PH. Supóngase que el eje de giro pasa por A (Fig. 1.14-b); el vuelo de B permanece constante en el movimiento, así como también es constante el ángulo formado entre la recta y el plano horizontal, es decir, α. En la segunda posición, el segmento AB'' es frontal, por lo tanto, su Verdadero Tamaño se proyecta sobre PV según el segmento $A^vB''^v$.

Finalmente, el ángulo formado entre A^v B''^v y la línea de tierra tiene el mismo valor que el ángulo α que la dirección de recta "a", definida por A y B, forma con el plano vertical de proyección.

El procedimiento en la representación diédrica del giro de un segmento en torno a un eje de pié es análogo al aplicado cuando el eje es de punta.

3. **Introducción de nuevos planos de proyección (Cambio de Plano):** A diferencia de los dos métodos expuestos anteriormente, no se fundamenta en el cambio de posición del segmento de recta oblicuo, objeto de estudio. Este método se basa en el cambio de posición de uno de los observadores virtuales y de la dirección de los rayos proyectantes correspondientes. Este movimiento genera un nuevo plano de proyección, el cual deberá ser – evidentemente - paralelo a la recta oblicua objeto de estudio, de tal forma que ésta se proyectará en verdadero tamaño sobre el mencionado plano.

   Sea AB un segmento que define a la recta “a” en posición oblicua (Fig. 1.15-a). Si se introduce un nuevo plano de proyección horizontal PH2 que sea paralelo a la recta “a” y perpendicular al plano vertical, se genera un segundo sistema de proyección, en el que los puntos A y B se proyectan en A^2 y B^2. Nótese cómo la segunda línea de tierra LT2 debe ser paralela a la proyección vertical del segmento AB, ya que el nuevo plano horizontal de proyección es paralelo a la recta AB en el espacio.

   En la nueva proyección (A^2B^2), el segmento AB se encuentra en Verdadero Tamaño, y, como en el sistema constituido por los planos de proyección PV y PH2 la recta “a” está en posición horizontal, el ángulo formado entre la proyección A^2B^2 y LT2 es el ángulo β de la recta “a”, puesto que dicha recta no ha variado su posición relativa con respecto a PV.

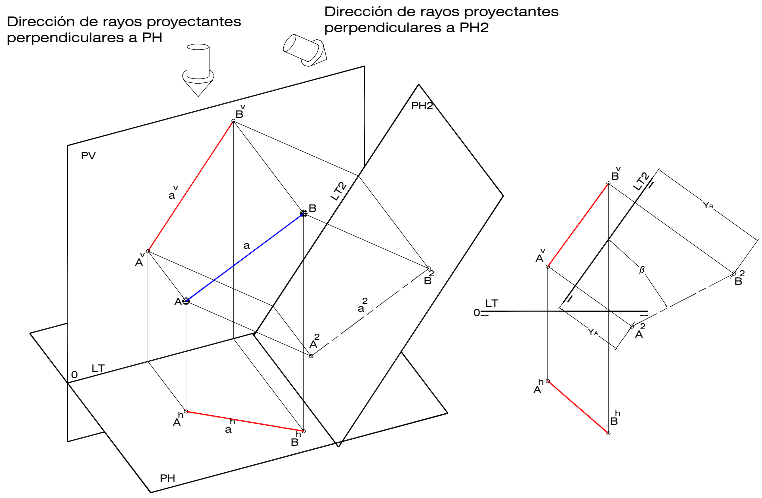


Fig. 1.15-a: Introducción de un nuevo plano horizontal de proyección.

   El procedimiento en la representación diédrica comienza por el trazado de la nueva línea de tierra LT2, paralela a la proyección horizontal de AB y a cualquier distancia de este segmento. Seguidamente se trazan por A^h y B^h líneas de referencia perpendiculares a LT2. Como los sistemas LT y LT2 comparten el mismo plano vertical, el vuelo de los puntos A y B es el mismo, así, determinamos las nuevas proyecciones de A y de B copiando las distancias de A^h y B^h a LT sobre las referencias perpendiculares a LT2 y a partir de ella.

   Es importante señalar que si el vuelo de uno de los puntos es negativo en el sistema LT se mantendrá negativo en el sistema LT2, pues, como ya se ha dicho, ambos comparten el mismo plano vertical de proyección.

   Considérese ahora un nuevo plano vertical PV2, perpendicular a PH, paralelo a la recta “a” y a cualquier distancia de ella; la intersección de PV2 con PH resulta en una nueva línea de tierra LT3 que es paralela a la proyección vertical de la recta “a”. Las proyecciones ortogonales de A y B sobre el nuevo plano reflejan el verdadero tamaño del segmento AB, por la posición frontal que éste tiene en el sistema diédrico definido por PH y PV2; por esa misma razón, el ángulo formado entre A^3B^3 y LT3 tiene el mismo valor del ángulo α de la recta "a". Finalmente, como el plano horizontal es común para los sistemas LT y LT3, la cota de los puntos A y B no varía de un sistema a otro. El trazado en diédrico en este caso es análogo al anterior (Fig. 1.15-b).

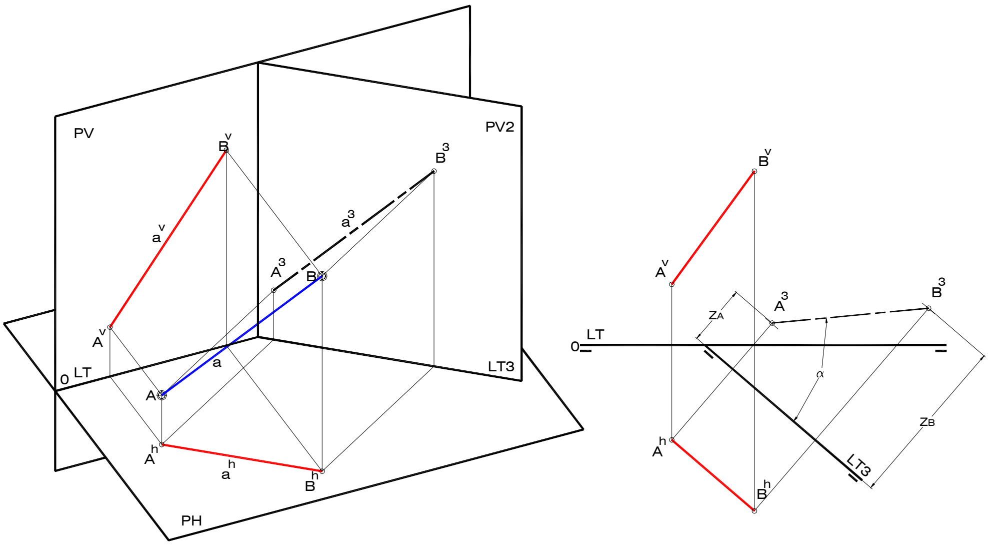


Fig. 1.15-b: Introducción de un nuevo plano vertical de proyección.

1.5.4 Aplicaciones de los triángulos de abatimiento

Cuando se quiere determinar las proyecciones de diédricas de un segmento de recta – en posición oblicua - a partir de datos como el Verdadero Tamaño y los ángulos que forma con los planos de proyección, es útil utilizar los triángulos de abatimiento, puesto que en ellos se encuentran todas las variables mencionadas relacionadas de manera precisa con las proyecciones hechas sobre PV y PH. El conocimiento de dichos triángulos y la habilidad para utilizarlos garantizan la resolución de cualquier problema de este tipo.

En general, es posible establecer los siguientes casos típicos:

1. **Determinar un segmento de recta conocida una proyección y el Verdadero Tamaño.**

   Sea un segmento de recta AB y supóngase que se conoce el punto A y sólo una de las proyecciones de B, la horizontal por ejemplo. Además, el Verdadero Tamaño de AB es también conocido.

   Como se conocen los valores de vuelo de ambos extremos (A y B) es posible determinar la diferencia de vuelo entre ellos; por otra parte el triángulo de abatimiento formado por VT, proyección vertical (la incógnita) y diferencia de vuelo se puede construir siempre que se conozcan dos de sus lados, dado que es rectángulo.

   Así, el tamaño de la proyección vertical de AB será el cateto "pv" de un triángulo rectángulo, que tiene por hipotenusa el Verdadero Tamaño de AB y el otro cateto de tamaño igual a la diferencia de vuelo (ΔY) entre A y B.

Finalmente, haciendo centro en la proyección vertical de A y con radio igual al tamaño de la proyección vertical de AB, se traza un arco que, al cortar la referencia del punto B, define la proyección vertical de este punto (Fig. 1.16-a).

Este problema puede tener dos soluciones, como se aprecia en la Fig. 1.16-a, una solución o ninguna solución. La primera situación se obtiene si la suma de los ángulos α y β del segmento AB es menor que 90; la segunda situación corresponde a una recta en posición horizontal (arco tangente a la línea de referencia del punto B) en cuyo caso la suma de α y β resulta ser igual a 90; finalmente, no existe solución posible si esa suma es mayor que 90, lo que en el ejemplo se traduce en un tamaño de proyección vertical menor que la diferencia de coordenadas X entre los puntos A y B.

Por otra parte, este ejercicio puede ser resuelto aplicando giro en torno a un eje de pié (o de punta). Para ello se procede dibujando un arco de centro en la proyección horizontal del punto A y de radio igual a A^hB^h, el cual corta a una paralela a LT trazada por A^h en el punto B'^h, proyección horizontal del punto B en la segunda posición (después del giro). Seguidamente, se construye un arco de centro en A^v y radio igual al verdadero tamaño del segmento AB; el punto de corte entre dicho arco y la referencia perpendicular a LT correspondiente a B', viene a ser la proyección vertical de B'. Luego si se traza por B'^v una paralela a LT se obtiene, en el corte con la referencia correspondiente al punto B, la proyección faltante de éste punto, es decir, B^v (Fig. 1.16-b).

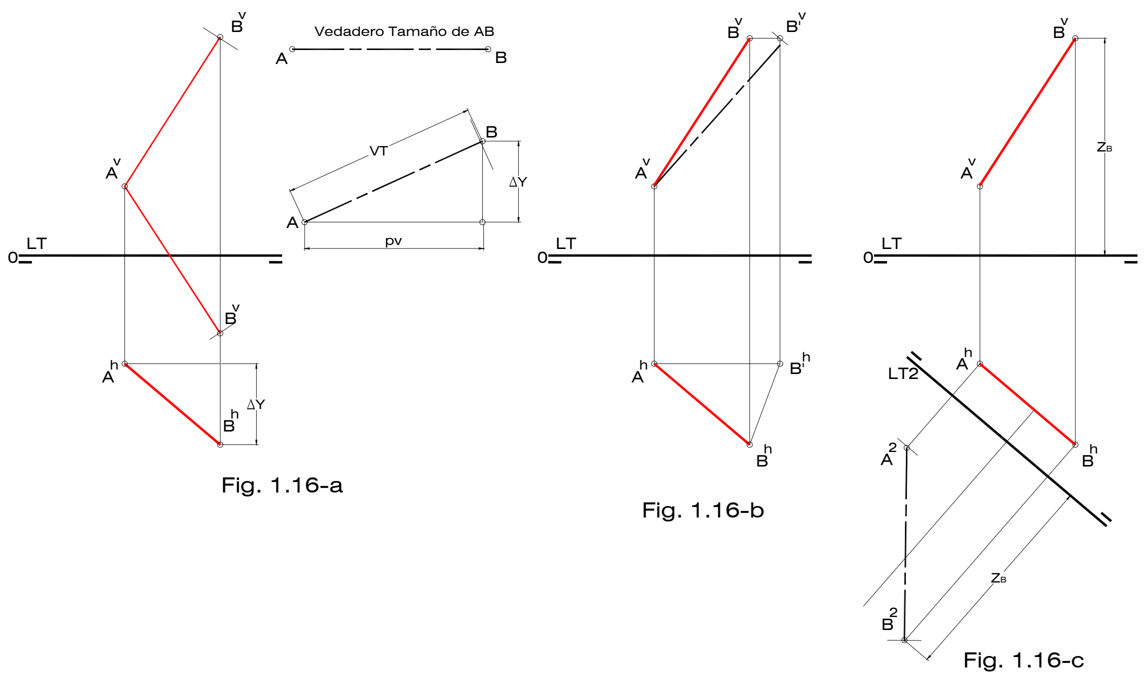


Fig. 1.16-a

Fig. 1.16-b

Fig. 1.16-c

Si se introduce un nuevo plano de proyección (Fig. 1.16-c) es también posible resolver el problema. Dado que se conoce la proyección horizontal del segmento AB y la proyección vertical de uno de sus extremos (A), resulta evidente la posibilidad de crear un nuevo plano de proyección vertical paralelo al segmento AB, lo cual se traduce en una línea de tierra LT2 paralela a la proyección horizontal de dicho segmento. Una vez hallada la proyección auxiliar (A^2) del punto A, se construye un arco de centro en este punto y radio igual al verdadero tamaño de AB; el punto de corte entre dicho arco y la referencia perpendicular a LT2 correspondiente al punto B es la proyección auxiliar B^2 de este punto. Finalmente se determina su proyección vertical recordando que la cota de B es igual en los sistemas LT y LT2.

2. **Determinar un segmento de recta conocida una proyección y el ángulo formado entre la recta y la proyección desconocida.**

Sea un segmento de recta AB y supóngase que se conoce el punto A y sólo una de las proyecciones de B, la vertical por ejemplo. Además, el valor del ángulo que forma la recta con la proyección desconocida, es decir, α, es también conocido.

Como se conocen los valores de cota de ambos extremos (A y B) es posible determinar la diferencia de cota entre ellos; por otra parte el triángulo de abatimiento formado por VT, proyección horizontal (la incógnita) y diferencia de cota se puede construir siempre que se conozcan el ángulo α y uno de sus lados, puesto que es rectángulo.

Si se dibuja un triángulo rectángulo con un ángulo interno igual a α y de cateto opuesto a ese ángulo igual a la diferencia de cota entre A y B (ΔZ), se obtiene que el cateto adyacente a α es la proyección horizontal del segmento (ph). Finalmente, haciendo centro en la proyección horizontal de A y con radio igual al tamaño de la proyección horizontal de AB, se traza un arco que, al cortar la referencia del punto B, define la proyección horizontal de este punto (Fig. 1.17-a).

Al igual que en el caso número uno y por las mismas razones, es posible obtener dos soluciones, tal y como se muestra en la Fig. 17-a, una solución o ninguna solución.

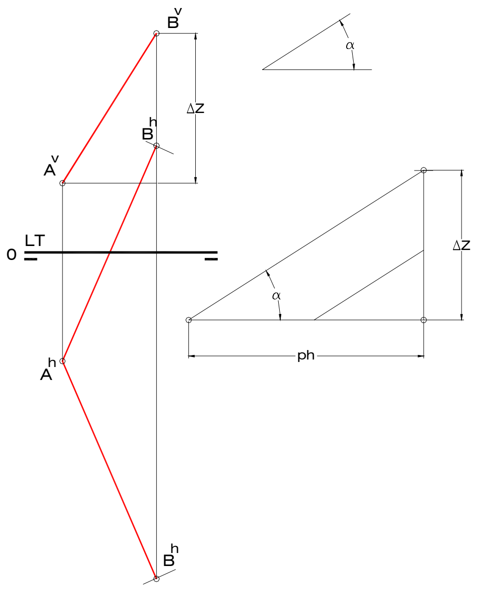


Fig. 1.17-a

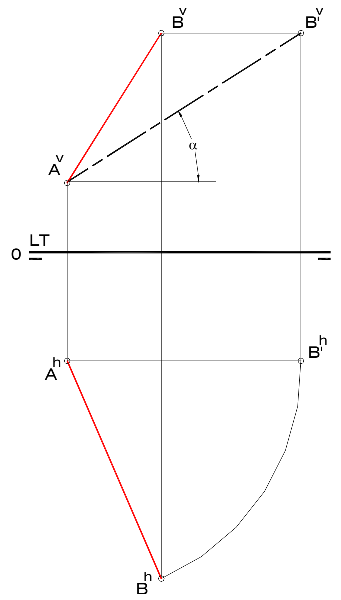


Fig. 1.17-b

Para hallar la solución de este ejercicio aplicando giro (Fig. 1.17-b) es necesario realizar el movimiento de rotación en torno a un eje de pié, ya que el ángulo conocido es el que forma el segmento AB con el plano horizontal de proyección. En primer lugar se dibuja por A^v una recta que forme α grados con LT correspondiente a la proyección vertical de la recta luego del giro; el punto de corte entre esta recta y una paralela a LT trazada por A^v viene a ser B'^v. Luego, en vista de que la recta AB' es frontal, la proyección horizontal de B' se halla en una paralela a LT trazada por A^h. Por último, se traza una arco de centro en la proyección horizontal de A y radio igual al segmento $A^hB'^h$, el cual corta a la referencia perpendicular a LT que corresponde al punto B en B^h.

Resulta imposible determinar la solución (o soluciones) de este ejercicio mediante la introducción de un nuevo plano de proyección, ya que el ángulo conocido es el que forma la recta con la proyección desconocida.

3. **Determinar un segmento de recta conocida una proyección y el ángulo formado entre la recta y la proyección dada.**

Sea un segmento de recta AB y supóngase que se conoce el punto A y sólo una de las proyecciones de B, la vertical por ejemplo. Además, el valor del ángulo que forma la recta con la proyección dada, es decir, β, es también conocido. La proyección vertical del segmento AB es el cateto adyacente al ángulo β del triángulo de abatimiento, en tanto que el cateto opuesto es la diferencia de vuelo entre los puntos extremos del segmento.

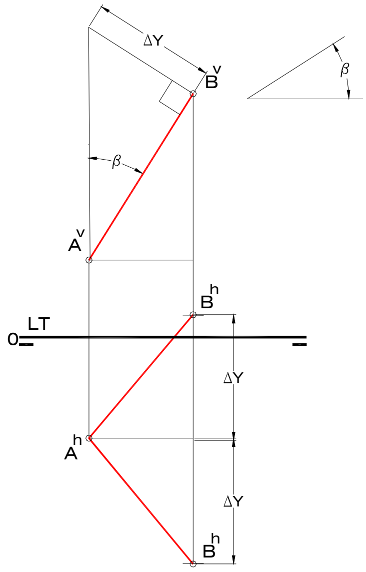


Fig. 1.18-a

Si por la proyección vertical (dada) de cualquiera de los puntos extremos del segmento de recta, se traza una línea que forme un ángulo β con la proyección vertical del segmento, y si por el otro extremo de ésta se levanta una perpendicular a ella, se obtiene, el valor de la diferencia entre los vuelos de A y B.

Finalmente, el tamaño de ΔY se consigna sobre la referencia del punto B, por delante o por detrás del nivel de vuelo del punto A, obteniéndose así la proyección horizontal del punto B. Es evidente que existen dos posibles soluciones, tal y como se muestra en la Fig. 1.18-a.

Aplicando giro del segmento AB en torno a una eje de punta es también posible hallar la solución del problema. El procedimiento se inicia con el trazado de un arco de centro en A^v y radio igual a la proyección vertical de AB, el cual corta a una paralela a LT trazada por A^v en el punto B'^v. A continuación, se construye por A^h una recta que forme β grados con la línea de tierra, recta ésta que viene a ser la proyección horizontal del segmento AB', el cual tiene una posición horizontal. Finalmente, se traza por B'^h una paralela a LT que corta a la referencia correspondiente al punto B en la proyección horizontal de este punto (Fig. 1.18-b).

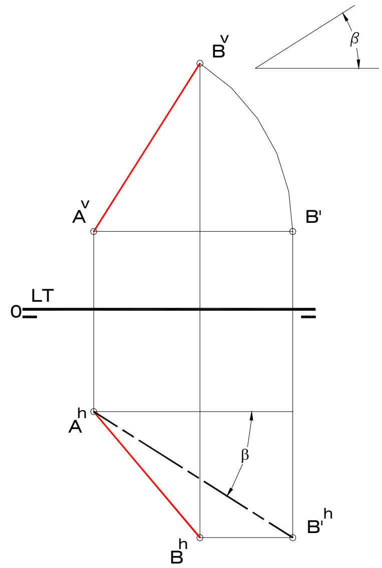


Fig. 1.18-b

De igual manera, la solución del problema se obtiene si se introduce un nuevo plano de proyección horizontal paralelo al segmento AB, generándose así un nuevo sistema de proyección cuya línea de tierra LT2 debe ser paralela a la proyección vertical de AB, y en el cual éste segmento tiene una posición horizontal. Trazando por A^2 una línea que forme β grados con LT2 se obtiene, en el corte con la referencia perpendicular a LT2 que pasa por B^v, la proyección auxiliar de B. Luego, sabiendo que la cota del punto B es igual en los sistemas LT y LT2, es fácil hallar la proyección horizontal del punto B (Fig. 18-c).

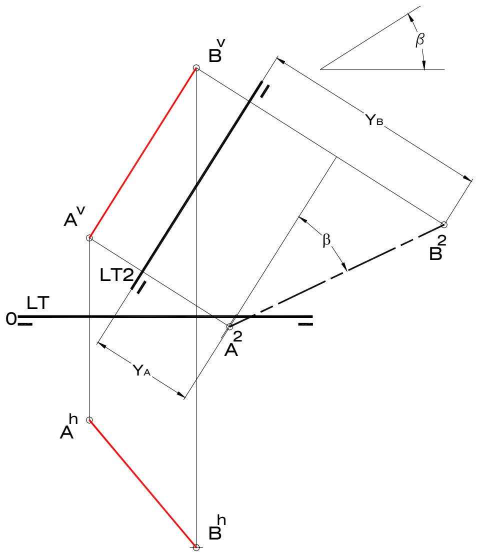


Fig. 1.18-c

4. **Determinar un segmento de recta conocido el Verdadero Tamaño y el valor de α y β.**

Sea un segmento de recta AB y supóngase que se conoce el punto A y ninguna de las proyecciones de B. Además, se conocen los valores angulares α y β.

Como para un mismo segmento AB ambos triángulos de abatimiento tienen en común la hipotenusa (VT), y como se conocen ambos ángulos con los planos de proyección, es necesario construir los dos polígonos. Se parte de la construcción de una circunferencia de diámetro VT, en la cual se inscriben los triángulos de abatimiento (recuérdese que ambos triángulos son rectángulos y que el *arco capaz* de 90° es una semicircunferencia[1]), trazando desde uno de los extremos del diámetro VT líneas que formen ángulos α y β con éste. Luego, los cortes de las líneas trazadas se unen con el otro extremo del diámetro VT.

De la construcción anterior se obtienen los valores de ambas proyecciones del segmento AB y de las diferencias de cota y vuelo entre esos dos puntos (Fig. 1.19-a)

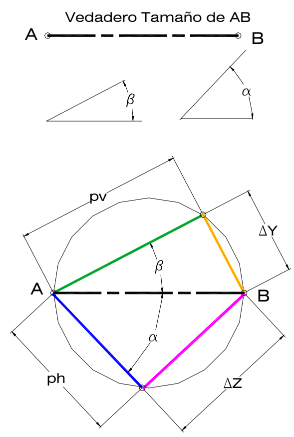


Fig. 1.19-a

[1]De acuerdo con Puig Adam (Curso de Geometría Métrica, Tomo I. Editorial Biblioteca Matemática. Madrid 1973), el arco capaz de un ángulo α sobre un segmento AB es el lugar geométrico formado por los vértices de los ángulos iguales a α y cuyos lados pasan por los puntos A y B.

El traslado de esos valores a la representación diédrica se realiza de la siguiente forma: Se construye una circunferencia de centro en A^v y radio igual a "pv" y una circunferencia de centro en A^h y radio igual a "ph". Seguidamente se consigna el tamaño de ΔZ por arriba y por debajo del nivel de cota de A y sobre su referencia, y se trazan líneas paralelas a LT por los puntos así obtenidos. Luego, se consigna el valor de ΔY por delante y por detrás del nivel de vuelo A y sobre su referencia, trazando enseguida líneas paralelas a LT por los puntos resultantes.

Los cortes entre la circunferencia de centro en A^v y las paralelas a LT situadas a una distancia igual a ΔZ de esa proyección, son las cuatro posibles soluciones para B^v; del mismo modo, los puntos comunes a la circunferencia de centro en A^h y a las paralelas a LT situadas a una distancia igual a ΔY de esa proyección, definen cuatro posibles soluciones para B^h.

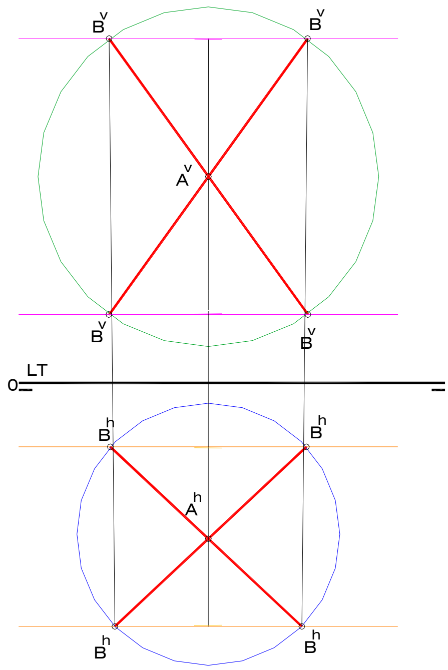


Fig. 1.19-b

De esta manera se concluye que existen cuatro posibles rectas que pueden contener al segmento AB y que existen, sobre esas cuatro rectas, ocho soluciones para el segmento AB (Fig. 1.19-b).

Es posible determinar las soluciones de este tipo de problema aplicando dos giros simultáneamente (la Fig. 1.19-c muestra una de ellas), uno en torno a una recta de pié que pasa por A y el otro en torno a una recta de punta que pasa por ese mismo punto. El procedimiento comienza con la construcción de la doble proyección ortogonal de un segmento de recta frontal AB', de longitud igual al verdadero tamaño de AB y que forma α grados con PH. En segundo lugar, se trazan las proyecciones de un segmento horizontal AB'', de igual longitud y formando β grados con PV. Para encontrar la proyección vertical del punto B se construye un arco de centro en A^v y radio igual a la proyección vertical de AB'', el cual corta a una paralela a LT trazada por B'^v en el punto buscado (B^v). De forma análoga, el corte entre un arco de centro en A^h y radio $A^hB'^h$ y una paralela a LT trazada por B''^h, corresponde a la proyección horizontal del punto B.

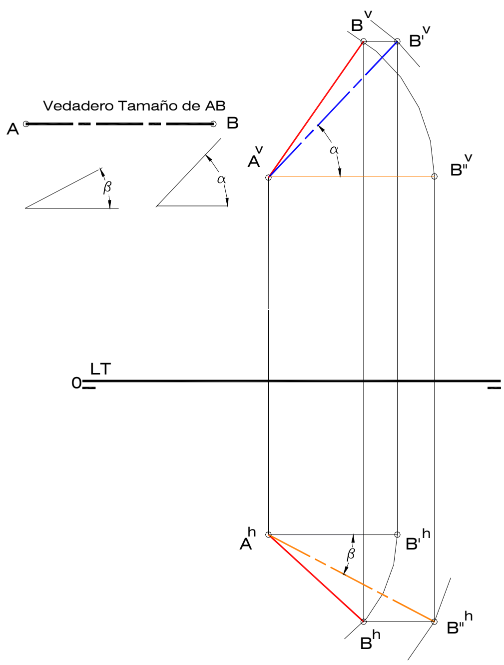


Fig. 1.19-c

Hay que destacar que no es posible resolver este problema aplicando nuevos planos de proyección, pues se desconocen ambas proyecciones diédricas del segmento AB.