

5) Encuentre una función generatriz para la sucesión (a_i) , donde a_i es:

a.- El número de soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = i \quad \text{donde } 0 < x_j < 5$$

solución:

Procedemos a construir un polinomio asociado a cada variable y luego multiplicamos dichos polinomios, de modo tal que el producto contenga 4 términos con exponentes entre 0 y 5.

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

El número de estos productos para los cuales los exponentes suman i , es la solución de la ecuación.

Si $i=0$: Existe una sola posibilidad $\therefore a_0 = 1$

Si $i=1$: $x^0 x^0 x^1; x^0 x^1 x^0; x^1 x^0 x^0$, es decir 3 posibilidades $\therefore a_1 = 3$

Si $i=2$: $x^0 x^0 x^2; x^0 x^2 x^0; x^2 x^0 x^0; x^1 x^1 x^0; x^1 x^0 x^1; x^0 x^1 x^1$, es decir 6 posibilidades $\therefore a_2 = 6$

La formula cerrada para tal contaje se expresa mediante la función generatriz

$$F_1(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3$$

Así,

$$F_1(x) = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 18x^5 + 19x^6 + \dots$$

De lo cual:

$$a_0 = 1; a_1 = 3; a_2 = 6; a_3 = 10; a_4 = 15; a_5 = 18; a_6 = 19 \dots$$

En general,

$$a_k = F_1(x) \Big|_{x^k}$$

b.- El número de soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = i \quad \text{donde} \quad 1 < x_j < 8$$

$$x_1 \text{ Par y } x_2 \text{ Impar}$$

solución:

De forma análoga al 5-a, calculamos los polinomios asociados a

cada variable

$$\begin{pmatrix} x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 \\ x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 \\ x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 \\ x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 \end{pmatrix}$$

Luego construimos la función generatriz Así

$$F_2(x) = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)_4$$

Así,

$$F_2(x) = (1 + 4x + 10x^2 + \dots)$$

En General:

$$a_k = F_2(x) \Big|_x^k$$

Gabriel A. Omaña V.

C.I:15.175.053



E-MAIL

[**gabrielomana@cantv.net**](mailto:gabrielomana@cantv.net)