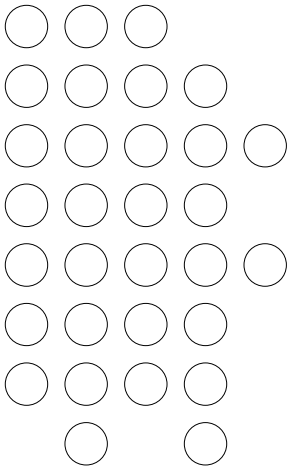
Técnicas de prueba y corrección de algoritmos



Diseño y Análisis de Algoritmos

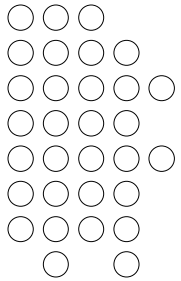
Cátedra de Programación

Carrera de Ingeniería de Sistemas

Prof. Isabel Besembel Carrera

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos



- Un algoritmo A define una secuencia de pasos que se aplica a cualquier instancia del problema definida por los datos L sobre un conjunto de resultados R

  $\forall$ d $\in$ L, A define una secuencia de cálculo finito que da el resultado A(d) $\in$ R

- A se escribe para calcular una función f de D $\subset$ L
- A es correcto $\Leftrightarrow$ A calcula bien f

  $\forall$ d $\in$ D, A(d) = f(d)

- Método usual de pruebas: enfoque empírico

  Se escoge un conjunto finito de datos $d_1, d_2, \ldots, d_n$, se ejecuta A para cada uno y se verifica $A(d_1)=f(d_1)$, $A(d_2)=f(d_2)$,…, $A(d_n)=f(d_n)$

Prueba de algoritmos

- El método es insuficiente pues no recubre D
- El método **no** prueba que A es correcto, sólo prueba que **A es incorrecto** al tener d_i, $A(d_i) \neq f(d_i)$

Ejemplo:

Marzo/05	**division(Entero: a, b, c, r)**	
	{ pre: a ≥ 0 ∧ b > 0 }	**{ pos: c ≥ 0 ∧ b > r }**
1 2	r, c = a, 0 (r ≥ b) [r, c = r - b, c + 1]	**a, b, c, r:** Entero. Numerador, denominador, cociente y residuo, respectivamente.
1 2	a = 0, b = 1 => c = 0, r = 0 a = 42, b = 17 => c = 2, r = 8	

Prueba de algoritmos

- $D = \aleph \times \aleph^+$, $R = \aleph \times \aleph$, f: D→R que asocia a cada par (a, b) de $\aleph \times \aleph^+$ un par (c, r) de $\aleph \times \aleph$ / $(a = bc+r) \wedge (r < b)$
- La prueba de f se divide en 2 partes:
  - Prueba de corrección parcial: demuestra que el resultado es correcto
  - Prueba de parada: demuestra que para todo $\aleph \times \aleph^+$ el programa termina

Prueba de algoritmos

- **Prueba de corrección parcial**

E {A} S donde E, S son condiciones y A es una secuencia de sentencias. ⟨E, A, S⟩ tripleta Hoare.

E: precondición

S: postcondición

Aserciones: son sentencias lógicas sobre el estado de un programa que se consideran verdaderas

E, S son aserciones o condiciones que pueden tomar valores lógicos ligadas con operadores lógicos {¬, ∧, ∨, →, ~}

Implica: $a \rightarrow b \sim \neg a \vee b$

a \ implica	V	F
V	V	F
F	V	V

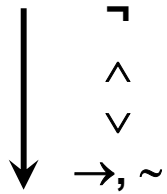
b

Prueba de algoritmos

Equivalencia: $(a \sim b) \sim (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$

a \ b	equivalencia	V	F
	V	V	F
	F	F	V

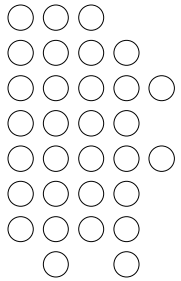
- Jerarquía de precedencia



- Axiomas y reglas para las pruebas de corrección parcial
  - Axiomas y teoremas son de la forma E {A} S
    1. Regla de la precondición: si E {A} S y E' → E ⇒ E'{A} S
    2. Regla de la postcondición: si E {A} S y S' → S ⇒ E {A} S'
    3. Regla del y-lógico: si E {A} S y E {A} S' ⇒ E {A} S ∧ S'
    4. Regla del o-lógico: si E {A} S y E' {A} S ⇒ E ∨ E' {A} S
    5. Regla de la composición de las sentencias (;): si E {A} F y F {B} S ⇒ E {A; B} S

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos



- Axiomas de la asignación: x = exp y una postcondición S se tiene el axioma E {x = exp}S donde E se obtiene a partir de S por substitución
- E es la condición que deben satisfacer las variables antes de la ejecución de la asignación para que S sea verdadera

Ejemplos:

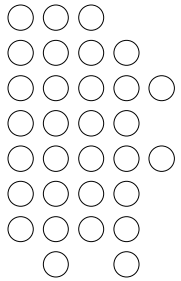
$$(x\ y \geq 0)\ \{ z = x * y \}\ (z \geq 0)$$

$$(q + 1 \geq 0)\ \{ q = q + 1 \}\ (q \geq 0)$$

$$((x + y)^2 = y)\ \{ x = x + y \}\ (x^2 = y)$$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos



- Dado E = S (x/exp)

  S(x/si a entonces e_1 sino e_2) = (a $\wedge$S(x/e_1))$\vee$($\neg$a$\wedge$S(x/e_2))

  Probar que

  $(z \geq 0)\{z =$ si b > 0 entonces z + b sino z - b$\}(z \geq 0)$

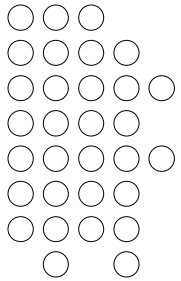
- Regla de las decisiones

1. Si E$\wedge$B{A}S y E$\wedge\neg$B$\rightarrow$S$\Rightarrow$E{si B entonces A}S
2. Si E$\wedge$B{A}S y E$\wedge\neg$B{P}S$\Rightarrow$E{si B entonces A sino P}S

La evaluación de B no modifica los valores de las variables del A

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos



- Regla del lazo (repita mientras)

  (condición)[bloque de sentencias a repetir]

  Si $E \wedge B\{A\}E \Rightarrow E\{\text{mientras B haga A}\}\ E \wedge \neg B$

  La condición E se denomina la invariante del lazo

  No hay recetas para encontrar buenas invariantes

- Regla de la sentencia compuesta

  Si $E\ \{A\}\ S \Rightarrow E\{\text{inicio A fin}\}\ S$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos

- Prueba de la corrección del algoritmo division

  Se quiere demostrar que

  $(a \geq 0) \wedge (b > 0)$ {division} $(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0) \wedge (r < b)$

  Invariante del lazo **$(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0)$**

  Por la regla de la asignación

  $(a=b(c+1)+r) \wedge (c+1 \geq 0) \wedge (r \geq 0)$ {c=c+1} $(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0)$ y

  $(a=b(c+1)+r-b) \wedge (c+1 \geq 0) \wedge (r-b \geq 0)$ {r=r-b} $(a=b(c+1)+r) \wedge (c+1 \geq 0) \wedge (r \geq 0)$

  Por la regla de la composición de sentencias se tiene el enunciado 1:

  $(a=b(c+1)+r-b) \wedge (c+1 \geq 0) \wedge (r-b \geq 0)$ {r=r-b; c=c+1} $(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0)$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos

Estudiando la precondición obtenida

$(a=b(c+1)+r-b) \wedge (c+1 \geq 0) \wedge (r-b \geq 0) \sim (a=bc+r-b) \wedge (c \geq -1) \wedge (r \geq b)$

Ya que **$(c \geq 0) \rightarrow (c \geq -1)$** y **$(r \geq 0) \wedge (r \geq b) \rightarrow (r \geq b)$**

Se tiene que **$(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0) \wedge (r \geq b) \rightarrow (a=bc+r-b) \wedge (c \geq -1) \wedge (r \geq b)$**

El enunciado 1 pasa a ser (por la regla de la precondición)

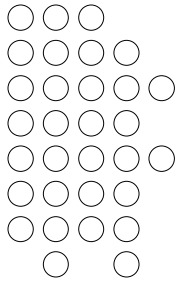
$(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0) \wedge (r \geq b)$ {r=r-b ; c=c+1} $(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0)$

Se deduce el enunciado 2, por la regla del lazo

$(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0)$ {mientras r ≥ b haga inicio r=r-b ; c=c+1 fin} $(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0) \wedge (r < b)$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos



Se usa la invariante del lazo como postcondición para las primeras sentencias de la secuencia, por la regla de la asignación

$(a=b.0+r) \wedge (0 \geq 0) \wedge (r \geq 0)$ {c=0} $(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0)$ y
$(a=b.0+r) \wedge (0 \geq 0) \wedge (r \geq 0) \sim (a=r) \wedge (r \geq 0)$

Se aplica de nuevo la regla de la asignación

$(a=a) \wedge (a \geq 0)$ {r=a} $(a=r) \wedge (r \geq 0)$ y $(a=a) \wedge (a \geq 0) \sim (a \geq 0)$

Por la regla de la composición, se tiene la sentencia 3

$(a \geq 0)$ {r=a ; c=0} $(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0)$

Por la regla de la composición aplicada a los enunciados 2 y 3, se tiene

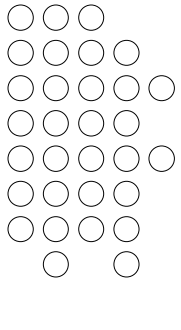
$(a \geq 0)$ {division} $(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0) \wedge (r < b)$

Y la regla de la precondición permite concluir que

$(a \geq 0) \wedge (b > 0)$ {division} $(a=bc+r) \wedge (c \geq 0) \wedge (r \geq 0) \wedge (r < b)$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos



- **Prueba de parada**

Un algoritmo sin recursividad y ni bifurcaciones incondicionales, no puede producir secuencias de cálculo infinitas, a menos que ejecute infinitas veces el cuerpo del lazo

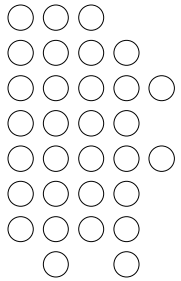
Probar que tal algoritmo termina para toda instancia del problema con $d \in D$, es probar que cada lazo del algoritmo no puede ser ejecutado sino un número finito de veces para todo $d \in D$.

Sea un lazo repita mientras, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ las variables del algoritmo y W_C el conjunto de los valores del vector $w = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$ tal que dichas variables verifican una condición C

Sea E una condición invariante para el lazo considerado y satisfecha antes de su ejecución

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos



Sea w_1 que pertenece a W_E, el valor de w antes de la ejecución del lazo.

Si w_1 pertenece a $W_{E \wedge \neg B}$, el lazo termina.

Sino w_1 pertenece a $W_{E \wedge B}$ y luego de la ejecución de A, w tiene un valor w_2.

Si w_2 pertenece a $W_{E \wedge \neg B}$, el lazo termina.

Sino luego de la ejecución de A, w tiene un valor w_3, etc.

Para probar la terminación del lazo, es necesario demostrar que toda secuencia w_1, w_2,…, w_n, es finita

Un método para demostrarlo consiste en definir una aplicación m, de $W_{E \wedge B}$ en $\aleph$, tal que se pueda mostrar que

Prueba de algoritmos

$E \wedge B \wedge (m(w) = m_0)$ {A} $\neg B \vee (m(w) < m_0) \quad \forall\, m_0 \in \aleph$

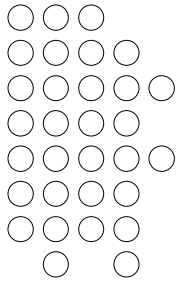
Esto indica que si w tienen un valor w_i antes de la ejecución de A, luego de la ejecución de A, o bien el lazo termina o bien w tiene un valor w_{i+1} tal que $m(w_{i+1}) < m(w_i)$

Para toda secuencia $w_1, w_2, \ldots, w_n$ la secuencia $m(w_1)$, $m(w_2)$, … es estrictamente decreciente en $\aleph$, y por ello termina

Lo que implica que $w_1, w_2, \ldots$ es finita y que el lazo termina para todo valor w que satisfaga E

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos



- Prueba de parada para division

Tiene un solo lazo (r ≥ b) [r, c = r - b, c + 1]

La condición ($r \geq 0$) está en la invariante del lazo

Se considera el conjunto $W_1 = W_{(r \geq 0) \wedge (r \geq b)}$

Sea la aplicación $m : W_1 \rightarrow \aleph$ tal que $m(w)=r$

Falta probar que la variable r tomó valores estrictamente decrecientes

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos

Enunciado 1:

$(r \geq 0) \wedge (r \geq b) \wedge (r=m_0)$ {r=r-b ; c=c+1} $(r < b) \vee (r < m_0)$ $\forall\ m_0 \in \aleph$

Por la regla de la asignación

$(r-b < m_0)$ {r=r-b ; c=c+1} $(r < m_0)$ $\forall\ m_0 \in \aleph$

Que conduce con la aplicación de las reglas de la precondición y de la postcondición al enunciado 2

$(r \geq 0) \wedge (r \geq b) \wedge (r=m_0) \wedge (r-b < m_0)$ {r=r-b ; c=c+1} $(r < b) \vee (r < m_0)$ $\forall\ m_0 \in \aleph$

O $(r=m_0) \wedge (r-b < m_0) \sim (r=m_0) \wedge (m_0-b < m_0)$

$\sim (r=m_0) \wedge (b > 0)$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Prueba de algoritmos

La condición b > 0 es siempre verdadera, pues (a, b) ∈ D = $\aleph$ x $\aleph^+$, entonces

$(r=m_0) \wedge (r-b < m_0) \sim (r=m_0)$

Lo que permite deducir directamente el enunciado 1 del enunciado 2 y se prueba la terminación del algoritmo division

- Esta prueba no se puede aplicar si L = Z × Z, ya que division entra en un lazo infinito si b = 0

Algoritmos iterativos

- Prueba de corrección cuando el algoritmo contiene una estructura de repetición "repita-mientras"

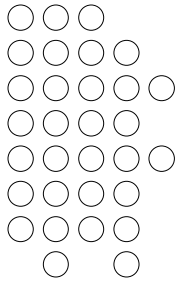
  (condición)[bloque de sentencias a repetir]

Ejemplo 1: determinar la suma de los elementos de un vector A [a..b]

Marzo/05 **sumaElementos(Arreglo[a..b]DeTipoEle: A, Entero: a, b):TipoEle** **{ pre: a ≤ b + 1 }** **{ pos: sum = $\Sigma_{j=a}$ A_j }**		
1 2 3	i, sum = a, 0 (i ≠ b+1) [sum, i = sum + A_i, i + 1] regrese sum	**a, b:** Entero. Valores inicial y final de los subíndices del vector A. **sum:** TipoEle. Acumulador de la sumatoria **i:** Entero. Iterador.
1 2	A(), a = 0, b = 0 => sum = NuloTipoEle A(2, 3, 4), a = 1, b = 3 => sum = 9	

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

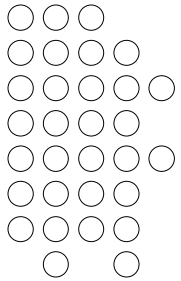
Algoritmos iterativos



- Tanto la pre como la postcondición deben ser verdaderas
- Por definición, A[a..a-1] denota un vector vacío cuya suma es Nulo del TipoEle y el algoritmo lo calcula correctamente
- Etapa clave de la prueba de corrección: encontrar la invariante del lazo, que es verdadera al inicio y al final del mismo
- El inicio del lazo es el momento justo antes de evaluar la condición del "repita-mientras"
- Pueden haber varias invariantes del lazo, pero la útil es aquella que captura la relación entre las variables que cambian de valor a medida que el lazo progresa.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Algoritmos iterativos



- La invariante del lazo para sumaElementos es $sum = \sum_{j=a}^{i-1} A_j$, que expresa la relación entre las variables i y sum
- Teorema: Al inicio de la k-ésima iteración del algoritmo sumaElementos, la condición $sum = \sum_{j=a}^{i-1} A_j$ se cumple
  - Demostración por inducción sobre k
  - Etapa base: k = 1. Al inicio de la primera iteración, se inician las variables, i = a y sum = 0, por lo cual $0 = \sum_{j=a}^{i-1} A_j$ la condición se cumple
  - Etapa inductiva: hipótesis inductiva: la condición $sum = \sum_{j=a}^{i-1} A_j$ se cumple al inicio de la k-ésima iteración. Se probará que dicha condición aún se cumple luego de una iteración mas, se asume que el lazo no se termina, i ≠ b+1.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Algoritmos iterativos

- Sean i' y sum' los valores de i y sum al inicio de la (k+1)-ésima iteración. Se debe mostrar que $sum' = \sum_{j=a}^{i'-1} A_j$. Como:

  sum' = sum + A_i y i' = i+1 se tiene

  sum' = sum + Ai

  $$sum' = \sum_{j=a}^{i-1} A_j + A_i$$

  $$sum' = \sum_{j=a}^{i} A_j$$

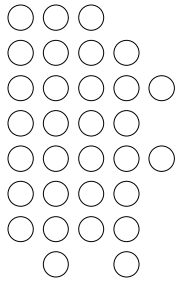
  $$sum' = \sum_{j=a}^{i'-1} A_j$$

  y la condición se cumple al inicio de la (k+1)-ésima iteración.

- Establecer la invariante del lazo es siempre la parte más difícil de la prueba.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Algoritmos iterativos



- La postcondición debe cumplirse al final.
- Al final del lazo se tiene $sum = \sum_{j=a}^{i-1} A_j \wedge i = b+1$

  se cumple, pero

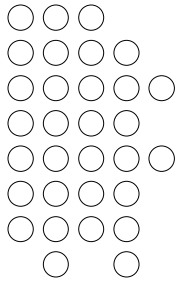
$$sum = \sum_{j=a}^{i-1} A_j \wedge i = b+1 \Rightarrow sum = \sum_{j=a}^{b} A_j$$

que es la postcondición

- Antes de terminar la ejecución del lazo (B)[…], con la invariante del lazo I, la condición I $\wedge$ ¬B se cumple, por lo que es necesario probar que implica postcondición (pos)

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Algoritmos iterativos



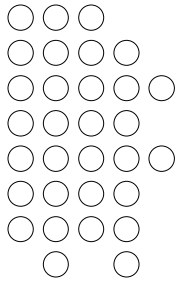
- La etapa final de la prueba de corrección es probar que no hay un lazo infinito.
- El método consiste en identificar algún entero que crezca (o decrezca) estrictamente de una iteración a la siguiente y mostrar que cuando dicho entero sea suficientemente grande (o pequeño) el lazo termina

  En el algoritmo sumaElementos, i es estrictamente creciente y cuando llega a b+1 el lazo termina

  La precondición debe ser cierta al entrar al algoritmo para garantizar el fin del lazo

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

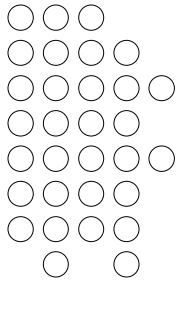
Algoritmos iterativos



- Resumen:
  - Adivinar una condición I
  - Probar por inducción que I es la invariante del lazo
  - Probar que $I \wedge \neg B \Rightarrow pos$
  - Probar que el lazo termina
- La invariante del lazo involucra a todas las variables cuyos valores cambian dentro de él, pero dicha invariante expresa una relación que no cambia entre las variables.
- La invariante del lazo contiene una información completa de lo que el lazo calcula

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Algoritmos iterativos



- Guía para encontrar la invariante del lazo: como **I** $\wedge \neg$**B** $\Rightarrow$ **pos**, y **B** y **pos** son conocidos, se generaliza **pos** para encontrar una posible invariante.

Ejemplo 2: Prueba para el algoritmo de búsqueda binaria

La invariante del lazo debe contener la condición $x \in A[a..b] \Leftrightarrow x \in A[i..j]$, tomando en cuenta las variables i y j

El problema es incorporar a enc y m en la invariante, por lo cual se agrega la pos, $enc \Rightarrow (a \leq m \leq b \wedge x = Am)$

Quedando la invariante como $(x \in A[a..b] \Leftrightarrow x \in A[i..j]) \wedge (enc \Rightarrow (a \leq m \leq b \wedge x = Am))$

- Ejercicio: Hacer la prueba

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Algoritmos iterativos

Marzo/05

busquedaBinaria(Arreglo[a..b]DeTipoEle: A, Entero: a, b, TipoEle: x):Lógico

{ pre: $a < b + 1 \wedge A_a \leq \ldots \leq A_b$} **{ pos: $enc \Rightarrow (a \leq m \leq b \wedge x = A_m)$ }**

1 2 3	i, j, enc = a, b, falso ((i < j+1) ∧ ¬enc)) [m = (i+j)/2 enc = Si ($x = A_m$) entonces verdadero fsi j, i = Si ($x < A_m$) entonces m – 1, i sino j, m + 1 fsi] regrese enc	**a, b:** Entero. Valores inicial y final de los subíndices del vector A. **enc:** Lógico. Bandera que indica que el elemento x se encuentra en el vector A **i, j, m:** Entero. Subíndices.
1 2 3	A(), a = 0, b = -1, x = 'a' => enc = falso A(2, 3, 4), a = 1, b = 3, x = 3 => enc = verdadero A(6), a = 1, b = 1, x = 4 => enc = falso	