estudios de postgrado
en computación

Análisis y Diseño de Algoritmos (AyDA)

Isabel Besembel Carrera

TÉCNICAS DE PRUEBA Y CORRECCIÓN DE ALGORITMOS

estudios de postgrado en computación

Unidad 1. Tema 3.

Técnicas de pruebas y corrección de algoritmos

- Pruebas de corrección parcial
- Pruebas de parada
- Pruebas de programas iterativos y recursivos
- Eliminación de la recursividad
- Objetivo:
  - Desarrollar habilidades en el uso de las técnicas de prueba y corrección de algoritmos

Algoritmos recursivos

- Aparente circularidad del método: para resolver un problema, primero resuelva el problema!!!!
- Correcta interpretación del método: una instancia se resuelve mediante la solución de una o más instancias diferentes y más pequeñas
- Es un algoritmo recursivo si su ejecución provoca una o varias llamadas a él mismo.
- Recursividad simple: donde todas las llamadas recursivas se realizan dentro del mismo algoritmo

Algoritmos recursivos

- Recursividad cruzada: cuando las llamadas recursivas se realizan del algoritmo recursivo R al algoritmo recursivo V y viceversa
- Para probar que un algoritmo recursivo da la solución correcta a alguna instancia, se asume que da una solución correcta a las instancias más pequeñas y esto sugiere inmediatamente, que se debe usar inducción sobre el tamaño de las instancias para probar que el algoritmo es correcto.

Algoritmos recursivos

Ejemplo 1: calcular el factorial de un número n

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si n} = 0 \\ n * n - 1! & \text{si n} > 0 \end{cases}$$

Marzo/05 **factorial(Entero: n):Entero** **{ pre: n ≥ 0 }**		**{ pos: x = n! }**
1 2	x = Si (n = 0) entonces 1 sino n * factorial(n-1) fsi regrese f	**x:** Entero. Valor del factorial de n
1 2	n = 0 => x = 1 n = 3 => x = 6	

Algoritmos recursivos

- **Prueba de corrección del ejemplo 1**

Teorema: Para todo entero $n \geq 0$, factorial(n) regresa n!

Prueba: por inducción sobre n

Etapa base: $n = 0$. La condición $n = 0$ es cierta y el algoritmo regresa 1. Es correcto ya que $0! = 1$

Etapa inductiva: Hipótesis inductiva: factorial(j) regresa j!, para todo j en el rango $0 \leq j \leq n-1$.

Algoritmos recursivos

Se debe demostrar que factorial(n) regresa n!

Si n > 0, la prueba de la condición n = 0 falla y

x = n * factorial(n-1).

Por la hipótesis inductiva, factorial(n-1) regresa (n-1)!, por lo cual factorial(n) regresa n x (n-1)!, lo que es igual a n!

- La prueba es posible solamente porque la llamada recursiva se hace sobre una instancia más pequeña, y por ello la hipótesis inductiva puede aplicarse

Algoritmos recursivos

Ejemplo 2: Búsqueda binaria. Determinar si un valor x está en el vector ordenado A[a..b]

Marzo/05

busquedaBinaria(Arreglo[a..b]DeTipoEle: A, Entero: a, b, TipoEle: x):Lógico

{ pre: $a < b + 1 \wedge A_a \leq \ldots \leq A_b$} **{ pos: enc $\Rightarrow$ ($a \leq m \leq b \wedge x = A_m$)}**

1	Si (a > b) entonces
	  regrese falso
	sino
	  m = (a + b)/2
	  Si (x = A_m) entonces
	    regrese verdadero
	  sino si (x < A_m) entonces
	      regrese busquedaBinaria(A, a, m-1, x)
	   sino
	      regrese busquedaBinaria(A, m + 1, b, x)
	  fsi
	fsi
		a, b: Entero. Valores inicial y final de los subíndices del vector A.
		m: Entero. Subíndices.

1 2 3	A(), a = 0, b = -1, x = 'a' => enc = falso A(2, 3, 4), a = 1, b = 3, x = 3 => enc = verdadero A(6), a = 1, b = 1, x = 4 => enc = falso	Arreglo vacío Elemento encontrado Elemento no encontrado

Algoritmos recursivos

- **Prueba de corrección del ejemplo 2**

Teorema: Para todo $n \geq 0$, donde $n = b - a + 1$ es el número total de elementos en el vector A[a..b],

busquedaBinaria(A, a, b, x) regresa correctamente el valor de la condición $x \in A[a..b]$

Prueba: por inducción sobre n (el tamaño del arreglo)

Etapa base: $n = 0$. El vector está vacío, $a = b+1$, la prueba $a>b$ es exitosa y el algoritmo regresa falso. Es correcto, ya que x no puede estar en el vector vacío

Algoritmos recursivos

Etapa inductiva: $n>0$. Hipótesis inductiva: $\forall j$, $0 \leq j \leq n-1$, donde $j=b'-a'+1$, busquedaBinaria(A, a, b, x) regresa correctamente la condición $x \in A[a..b]$. Por la asignación $m=(a+b)/2$ se concluye que $a \leq m \leq b$.

Si $x=A[m]$, claramente $x \in A[a..b]$ y el algoritmo regresa el valor correcto **verdadero**.

Si $x<A[m]$, como A está ordenado se concluye que $x \in A[a..b]$ si y solo sí $x \in A[a..m-1]$. Por la hipótesis inductiva esta segunda condición la regresa busquedaBinaria(A, a, m-1, x). Se aplica la hipótesis inductiva ya que $0 \leq (m-1)-a+1 \leq n-1$.

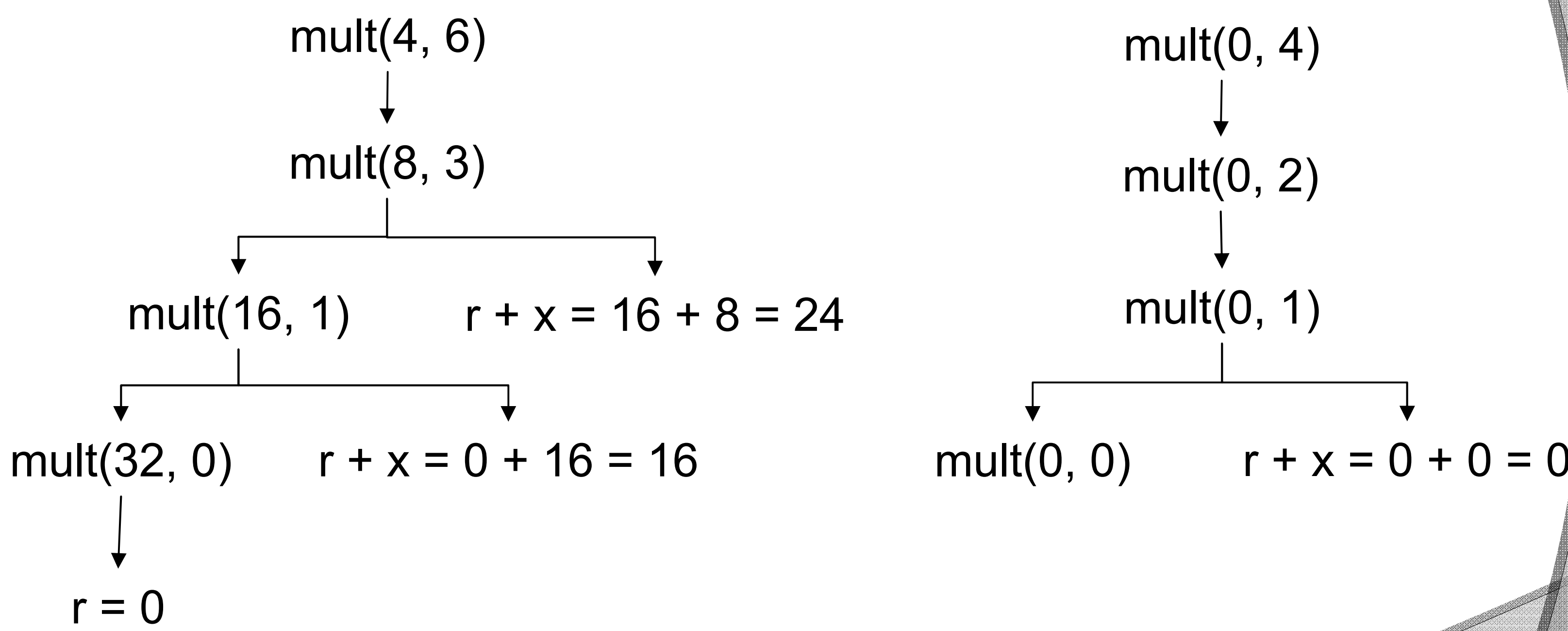
El caso $x>A[m]$ es similar y se concluye que el algoritmo calcula correctamente todas las instancias de tamaño n

Algoritmos recursivos

- Árboles de ejecución
  - Raíz: algoritmo recursivo etiquetado con la instancia inicial del problema
  - Nodos: etiquetados con las instancias de las llamadas realizadas

Marzo/05 **mult(Entero+: x, y):Entero** **{ pre: x, y ≥ 0 }**		**{ pos: r = xy ≥ 0 }**
1 2	r = Si (y = 0) entonces 0 sino si (y es par) entonces mult(2x, y/2) sino mult(2x, y/2) r + x fsi regrese r	**r:** Entero+. Resultado de la multiplicación de x por y.
1 2 3 4	x = 0, y = 0 => r = 0 x = 0, y = 4 => r = 0 x = 3, y = 0 => r = 0 x = 4, y = 6 => r = 24	Ambos operandos son nulos El operando x es nulo El operando y es nulo Ambos operandos son diferentes de nulo

Árboles de ejecución de algoritmos recursivos



Eliminación de la recursión

- Todo algoritmo recursivo puede ser transformado en un algoritmo iterativo
- Los algoritmos recursivos se utilizan cuando los problemas admiten una descomposición recurrente natural, ya que el algoritmo calca dicha descomposición, siendo más clara y fácil la prueba de corrección
- Inconvenientes de los algoritmos recursivos:
  - Ciertos lenguajes de programación no soportan la recursividad (Ejm: el lenguaje de máquina)
  - Son más costosos en tiempo de ejecución y en espacio de memoria

Eliminación de la recursión

Mismas etapas de un compilador para traducir el programa fuente a lenguaje de máquina

- Se realiza en dos etapas:
  - Eliminación de los parámetros y variables locales
  - Transformación
- Etapa 1: sustituir cada ocurrencia de un parámetro formal variable por el parámetro actual correspondiente a la llamada
  - Eliminación de los parámetros por valor
    - Usando una pila para preservar sus valores
    - Convirtiéndolos en variables globales

Eliminación de la recursión

- Eliminación de las variables locales

- El compilador usa una pila para guardar los valores de cada parámetro por valor y cada variable local
- Etapa 2:
  - Una sola llamada recursiva: colocar un lazo con un contador o con el control de la pila
  - Varias llamadas recursivas: cada llamada se reemplaza por una bifurcación al inicio del algoritmo

Ejemplo

Marzo/05		
hanoi(Entero: n, TipoEle: a, b, c)		
{ pre: n ≥ 0 }		**{ pos: n ≥ 0 }**

1	Si (n = 1) entonces
	    mover(a,b)
	sino
	    hanoi(n-1, a, c, b)
	    mover(a,b)
	    hanoi(n-1, c, b, a)
	fsi
		mover(). Mueve un aro de a hacia b

Ejemplo

Marzo/05	**hanoiIte(Entero: n, TipoEle: a, b, c)** **{ pre: $n \geq 0$ }**	**{ pos: $n \geq 0$ }**
1 2 3 4	($n \neq 1$) [aux, b, c, n = b, c, aux, n-1 p.empilar(1)] mover(a, b) ($\neg$ p.vaciaPila() $\wedge$ p.conPila() = 2) [p.desempilar() aux, a, c, n = a, c, aux, n+1] Si ($\neg$ p.vaciaPila()) entonces p.desempilar() aux, b, c = b, c, aux mover(a,b) aux, a, c = a, c, aux p.empilar(2) ir a 1 fsi	**mover().** Mueve un aro de a hacia b **aux: TipoEle.** Variable auxiliar para efectuar el intercambio **p: Pila.** Pila auxiliar para la eliminación de la recursión **empilar(), vaciaPila(), conPila(), desempilar().** Operaciones definidas para la clase Pila.

Ejercicio: Eliminar el “ir a 1” del algoritmo anterior