estudios de postgrado
en computación

Análisis y Diseño de Algoritmos (AyDA)

Isabel Besembel Carrera

MATRICES MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Conceptos básicos

- Matriz: arreglo bidimensional A(MxN)
- Vector: arreglo unidimensional X(N)
- Matriz transpuesta A(NxM)$\leftarrow$A^T
- Vector fila: $X(N)=(X_1, X_2,\ldots, X_N)$
- Vector columna: $\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_N \end{matrix}$
- Vector unidad: algún Xi $\neq$ 0 con i$\in$[1,N]
- Matriz cuadrada: A(NxN)
  - Matriz diagonal: solo los Ai,i $\neq$ 0, con i= 1,2,…, N
  - Matriz identidad: I(NxN) con Ij,j =1 y el resto son 0
  - Matriz tridiagonal: solo los $A_{i,i} \neq 0$ con i=1,2,…,N y $A_{i,i+1}$, $A_{i+1,i} \neq 0$ con i = 1, 2, … N-1

Conceptos básicos

- Matriz triangular superior: solo los Ai,j = 0 si i > j
- Matrix unidad triangular superior: 1 en la diagonal principal
- Matriz triangular inferior: Ai,j = 0 si i < j
- Matriz unidad triangular inferior: 1 en la diagonal principal
- Matriz permutación: solo un 1 en cada fila o columna (tiene el efecto de reacomodar los elementos al ser multiplicada por un vector)
- Matriz simétrica: si $A = A^T$

- Conjunto de todas las matrices reales R^{MxN}

Operaciones

- Suma: $C=A+B$, $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$. $A=A+0$.
- Multiplicación por un escalar: $\lambda A=\lambda A_{i,j}$
- Negación: $-A = -A_{i,j}$. $A + (-A) = 0$
- Resta: $C=A-B = A + (-B)$
- Multiplicación de matrices: $C = A B$, A y B deben ser compatibles. $C_{i,j}=\sum_{k=1} A_{i,k} B_{k,j}$. $A\,0 = 0$. $A(B C) = (A B) C$ si son compatibles
- $A(B + C) = A B + A C$
- $(B + C) D = B D + C D$
- Si $N > 1$ $A(NxN)$ $B(NxN)$ no es conmutativa, $A B \neq B A$

Operaciones

- Producto escalar: $X^T Y = \sum_{k=1} XkYk$
- Norma (euclidiana) $||X|| = (X^T X)^{1/2}$, es la longitud en el espacio euclidiano n-dimensional
- Inversa: A^{-1}, $A A^{-1} = I = A^{-1} A$
- Singular: matrix que no tiene inversa
- Si A y B son matrices no singulares cuadradas entonces $(B A)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$ y $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- X1(N), X2(N),…,Xn(N) son linealmente dependientes si ∃ c1, c2, …, cn no todos iguales a cero / c1 X1 + c2 X2 +…+ cnXn = 0

Operaciones

- Rango de columna (fila): A(MxN) no cero, es el tamaño del conjunto más grande de columnas (filas) de A linealmente independientes
- Rango completo de A(NxN) = N si y solo si A es no singular
- Un vector nulo para A es un vector no cero / A X = 0
- A tiene un rango de columna completo si y solo si A no tiene un vector nulo
- Una matrix cuadrada es singular si y solo si ella tiene un vector nulo

Determinantes

- Según el menor i,j-ésimo de A NxN para N>1, es la matriz A(i,j) de (N-1)x(N-1) borrando la i-ésima columna y la j-ésima fila de A

  Está definido recursivamente en términos del menor por:

$$\det(A) = \begin{cases} a(1,1) & \text{si } N=1 \\ a(1,1)\det(A_{([11])}) - a(1,2)\det(A_{([12])}) \\ +..+(-1)^{N+1}a(1,N)\det(A_{([1N])}) & \text{si } N>1 \end{cases}$$

El término $(-1)^{N+1}\det(A_{([ij])})$ es el cofactor

Cálculo del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(4.7 - 5.6) - (0) + (2)(3.6 - 4.5)$$

$$= -2 - 4$$

$$= -6$$

Determinantes

- Teorema 28.4: (Propiedades del determinante)
  - Si alguna fila o columna de A es cero, entonces det(A)=0
  - Si la entrada de cualquier fila o columna de A se multiplica por λ, entonces λ.det(A)
  - $\det(A) = \det(A^T)$
  - Para dos matrices cuadradas A y B, det(A B) = det(A) det (B)
  - Si las entradas de cualquier fila o columnas se suman a las de otra fila o columna, det(A) no cambia
  - Si se intercambian cualquier fila o columna, entonces det (A) se multiplica por -1

Matrices

- Teorema 28.5: una matrix A(NxN) es singular si y solo si det(A)=0
- Matriz definida positiva: A(NxN) es definida positiva si $X^T A X > 0 \ \forall X \neq 0$

  Ejemplo: la matriz identidad está definida positiva

  $X=(X1, X2, \ldots, Xn)^T$, $X^T I_n X = X^T X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 > 0$
- Teorema 28.6: para cualquier A con rango completo, $A^T A$ está definida positiva

estudios de postgrado en computación

Algoritmo de Strassen

- Utiliza la técnica divide-y-vencerás
- Divide las matrices A y B cuadradas cuyo N es potencia de 2 en 4 N/2 x N/2 matrices reescribiendo la ecuación C=A B como

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$r = a\,e + b\,g$ $\qquad$ $s = a\,f + b\,h$

$t = c\,e + d\,g$ $\qquad$ $u = c\,f + d\,h$

$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2) = \Theta(n^3)$

Con el método de Strassen $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2) = O(n^{2.81})$

Método Strassen

1. Dividir las matrices A y B en N/2 x N/2 submatrices
2. Calcular las 14 matrices A1, B1, …, A7, B7 de N/2 x N/2 utilizando sumas y restas escalares en $\Theta(N^2)$
3. Calcular recursivamente los 7 productos de las matrices Pi = Ai Bi
4. Calcular las submatrices r, s, t, u que conforman C con las combinaciones de sumas y restas de las Pi utilizando sumas y restas escalares en $\Theta(N^2)$

Productos de las submatrices

- $P_i = A_i B_i = (\alpha_{i1} a + \alpha_{i2} b + \alpha_{i3} c + \alpha_{i4} d) . (\beta_{i1} e + \beta_{i2} f + \beta_{i3} g + \beta_{i4} h)$

  Con $\alpha_{ij}\ \beta_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ en la matriz Q

  $$r = a\,e + b\,g = (a\ b\ c\ d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

  $s = a\,f + b\,h$ con $Q_{12}=1$ y $Q_{24}=1$

  $t = c\,e + d\,g$ con $Q_{31}=1$ y $Q_{43}=1$

  $u = c\,f + d\,h$ con $Q_{32}=1$ y $Q_{44}=1$

Reducción de multiplicaciones de matrices

- s = P1 + P2
  - P1 = A1 B1 = a(f-h) = a f – a h = Q con Q12 = 1 y Q14 = -1
  - P2 = A2 B2 = (a+b) h = a h + b h = Q con Q14 = 1 y Q24 = 1
- t = P3 + P4
  - P3 = A3 B3 = (c+d) e = c e + d e = Q con Q31 = 1 y Q41 = 1
  - P4 = A4 B4 = d (g-e) = d g – d e = Q con Q41 = -1 y Q43 = 1
  - P5 = A5 B5 = (a+d)(e+h) = a e + a h + d e + d h = Q con Q11, Q14, Q41, Q44 = 1
  - P5+P4-P2= a e + d h + d g – b h = Q con Q11, Q43, Q44 = 1 y Q24 = -1

Reducción de multiplicaciones de matrices

  - $P6 = A6\ B6 = (b-d)(g+h) = b\,g + b\,h - d\,g - d\,h = Q$ con $Q23, Q24 = 1$ y $Q43, Q44 = -1$
- $r = P5 + P4 - P2 + P6 = a\,e + b\,g = Q$ con $Q11, Q\ 23 = 1$
- $u = P5 + P1 - P3 = a\,e + a\,f - c\,e + d\,h = Q$ con $Q11, Q12, Q44 = 1$ y $Q31 = -1$
  - $P7 = A7\ B7 = (a-c)(e+f) = a\,e + a\,f - c\,e - c\,f = Q$ con $Q11, Q12 = 1$ y $Q31, Q32 = -1$
- $u = P5 + P1 - P3 - P7 = c\,f + d\,h = Q$ con $Q31, Q44 =1$

Análisis

- El método Strassen no es tan estable numérica-mente como el método de la fuerza bruta $\Theta(N^3)$
- Las submatrices consumen espacio
- Los métodos para matrices esparcidas son más veloces
- Actualmente no se sabe cual es el mejor algoritmo, pues depende del tamaño de la matrices
- Se usa Strassen para N>20 ó 12 ó 8 y luego se pasa al de la fuerza bruta, depende del caso
- El mejor tiempo está entre $O(N^{2.376})$ y $\Omega(N^2)$

Algoritmo de Strassen

- Qué hacer cuando N no está en potencias de 2
  - Divida A y B en 4 bloques
    - Un bloque en potencia de 2
    - Tres restantes son vectores

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & b_{12} \\ \hline b_{21} & b_{22} \end{array}\right)$$

Algoritmo de Strassen

$$\left(\begin{array}{c|c} C_{11} & c_{12} \\ \hline C_{11} & c_{12} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + a_{12}b_{21} & A_{11}\, b_{12} + a_{21}b_{22} \\ \hline a_{21}\, B11 + a_{22}\, b_{21} & a_{21}\, b_{12} + a_{22}b_{22} \end{array}\right)$$

- A11 B11 se calculan por el método de Strassen y las otras por el método de la fuerza bruta, lo cual no afecta la complejidad $T(N) = O(N^{\log 7})$ para N>1

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

- Solución del sistema: x1, x2, …, xn que satisfacen las ecuaciones

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 & \vdots & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

$A\,x = b$, si A no es singular => $x = A^{-1}\,b$

Sistemas de ecuaciones lineales

- Tres casos:
  1. El número de ecuaciones < número de incógnitas => sistema subdeterminado, soluciones infinitas
  2. El número de ecuaciones > número de incógnitas => sistema sobredeterminado, no existe solución
  3. El número de ecuaciones = número de incógnitas => sistema determinado si A es no singular

Descomposición LUP

- Numéricamente estable y más rápido
- Descomponer A en tres matrices L, U y P de NxN tal que: $P A = L U$, donde:
  - L: matriz unidad triangular inferior
  - U: matriz triangular superior
  - P: matriz permutación
- $A x = b$ y $P A = L U$
  - $P A x = P b$
  - $L U x = P b$
  - Siendo $U x = y$ "sustitución hacia atrás"
    $L y = P b$ "sustitución hacia adelante"
  - $A \; x = P^{-1} L U x = P^{-1} L y = P^{-1} P b = b$

Descomposición LUP

- Sustitución hacia adelante

$L\,y = P\,b$

$$
\begin{array}{lcl}
y_1 & = & b\pi_{[1]} \\
l_{21}\,y_1 + y_2 & = & b\pi_{[2]} \\
 & \vdots & \\
l_{n1}\,y_1 + l_{n2}\,y_2 + \ldots + y_n & = & b\pi_{[n]}
\end{array}
$$

Rápidamente $y_1 = b\pi_{[1]}$; $y_2 = b\pi_{[2]} - (l_{21}\,y_1)$

$y_3 = b\pi_{[3]} - (l_{31}\,y_1 + l_{32}\,y_2)$

En general: $y_i = b\pi_{[i]} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\,y_j$

Descomposición LUP

- Sustitución hacia atrás

  $U\,x = y$

$$
\begin{aligned}
u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n &= y_1 \\
u_{22}x_2 + \ldots + u_{2n}x_n &= y_2 \\
&\vdots \\
u_{nn}x_n &= y_n
\end{aligned}
$$

  Al igual que la sustitución hacia delante:

  En general: $x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\,x_j \;/\; u_{ii}$

Algoritmo de solución con LUP

12/2009 soluLUP(Arreglo(NxN)De Real: L, U, P, Arreglo(N)De Real: b):Arreglo(N)De Real {pre: N>0} {pos: N > 0 }	
$[y(i) = b\,P(i) - \sum_{j=1}^{i-1} L(i,j)\,y(j)]\ i = 1, N$ $[\,x(i) = (\,y(i) - \sum_{j=i+1}^{N} U(i,j)\,x(j)\,)/\,U(i,i)\,]\ i = n, 1, -1$ Regrese x	-y: Arreglo(N)De Real. Vector auxiliar para calcular la sustitución hacia atrás -L: Arreglo(NxN)De Real. Matriz triangular inferior -U: Arreglo(NxN)De Real. Matriz triangular superior -x: Arreglo(N)De Real. Vector solución

O(N^2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 8 \\ 1.4 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1.4 \\ 1.5 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} -1.4 \\ 2.2 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Cálculo de L y U

- Descomposición de A(NxN) no singular por el método de Gauss
  - Si N=1 => L=I y U=A
  - Si N>1 => dividir A en 4 partes

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ v & A' \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ v & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - vw^{\mathrm{T}}/a_{11} \end{pmatrix}$$

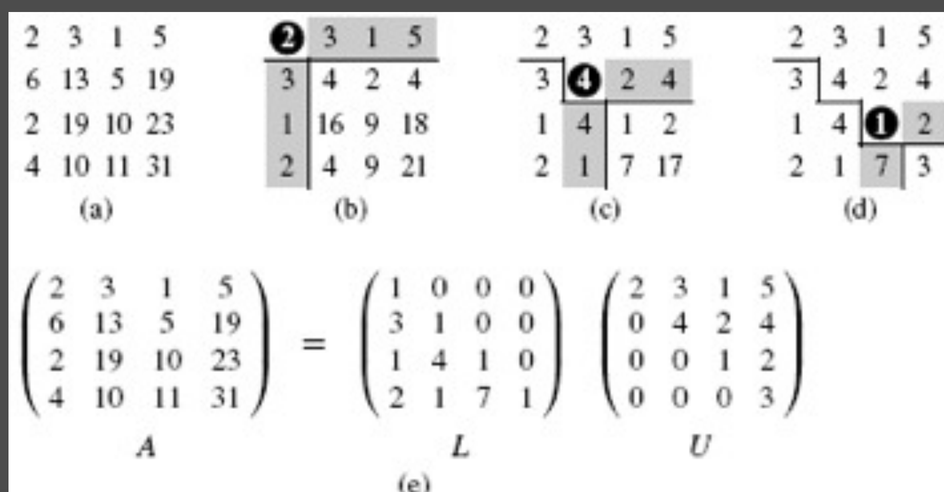
Complemento de Schur de A con respecto de a_{11}

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - vw^{\mathrm{T}}/a_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & U' \end{pmatrix} \\ &= LU, \end{aligned}$$

Algoritmo descomposiciónLU

12/2009 descomposicionLU(Arreglo(NxN)De Real: A, L, U) {pre: N>0} {pos: N > 0 }		
1 2	[U(k,k) = A(k,k) [L(i,k) = A(i,k)/U(k,k) U(k,i) = A(k,i)] i = k+1, N [[A(i,j) = A(i,j) – L(i,k) U(k,j)] j = k+1, N] i = k+1, N] k = 1, N Regrese L, U	-k, i, j: Entero. Subíndices -L: Arreglo(NxN)De Real. Matriz triangular inferior (L(i,k) mantiene los v (i)) -U: Arreglo(NxN)De Real. Matriz triangular superior (U(k,i) mantiene los w^T(i))

$O(N^3)$



Cuál es el problema?

Mejora al algoritmo LU

- descomposicionLU calcula L y U pivoteando los elementos de la diagonal para evitar la división por cero
- Mejora del algoritmo anterior: intercambio de filas para evitar división por cero o por otro valor muy pequeño, logrando dividir por los valores grandes

Lo que equivale a multiplicar A por una matriz permutación Q

$$
\begin{aligned}
QA &= \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ v & A' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - vw^{\mathrm{T}}/a_{k1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Mejora al algoritmo LU

$$
\begin{aligned}
PA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} QA \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - vw^{\mathrm{T}}/a_{k1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - vw^{\mathrm{T}}/a_{k1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & P'(A' - vw^{\mathrm{T}}/a_{k1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & U' \end{pmatrix} \\
&= LU ,
\end{aligned}
$$

- Al final el algoritmo calcula L y P en la matriz A de tal modo que el procedimiento termina como

$$
a_{ij} = \begin{cases} l_{ij} & \text{si } i > j \\ u_{ij} & \text{si } i \leq j \end{cases}
$$

Algoritmo descomposiciónLUP

12/2009 descomposicionLUP(Arreglo(NxN)De Real: A) {pre: N>0} {pos: N > 0 }		

1
2
	[pi(i) = i] i = 1, N
	[p = 0
	  [si (|A(i,k)| > p) entonces
	      p = |A(i,k)|
	      k’ = i
	   fsi] i = k, N
	  si (p = 0) entonces
	   error(“Matriz singular”)
	  fsi
	  intercambie pi(k) con pi(k’)
	  [intercambie A(k,i) con A(k’, i)] i = 1, N
	  [A(i,k) = A(i,k)/A(k,k)
	   [A(i,j) = A(i,j) – A(i,k)*A(k,j)] j = k+1, N
	  ] i = k+1, N
	] k = 1, N
		-k, i, j: Entero. Subíndices
		-pi: Arreglo(N)De Real. Vector permutación, si pi(i) = j indica que la i-ésima fila de P contiene un 1 en la columna j.
		-p: Real. Variable auxiliar para calcular el mayor
		-k’: Entero. Posición del mayor

$O(N^3)$

Ejemplo

K = 1

1	2	0	2	.6
2	3	3	4	-2
3	5	5	4	2
4	-1	-2	3.4	-1

Ejemplo

1	2	0	2	.6
2	3	3	4	-2
3	5	5	4	2
4	-1	-2	3.4	-1

K = 1

3	5	5	4	2
2	3	3	4	-2
1	2	0	2	.6
4	-1	-2	3.4	-1

Ejemplo

1	2	0	2	.6
2	3	3	4	-2
3	5	5	4	2
4	-1	-2	3.4	-1

K = 1

3	5	5	4	2
2	3	3	4	-2
1	2	0	2	.6
4	-1	-2	3.4	-1

3	5	5	4	2
2	.6	0	1.6	-3.2
1	.4	-2	.4	-.2
4	-.2	-1	4.2	-.6

Ejemplo

1	2	0	2	.6
2	3	3	4	-2
3	5	5	4	2
4	-1	-2	3.4	-1

K = 1

3	5	5	4	2
2	3	3	4	-2
1	2	0	2	.6
4	-1	-2	3.4	-1

3	5	5	4	2
2	.6	0	1.6	-3.2
1	.4	-2	.4	-.2
4	-.2	-1	4.2	-.6

K = 2

3	5	5	4	2
2	.6	0	1.6	-3.2
1	.4	-2	.4	-.2
4	-.2	-1	4.2	--.6

Ejemplo

1	2	0	2	.6
2	3	3	4	-2
3	5	5	4	2
4	-1	-2	3.4	-1

K = 1

3	5	5	4	2
2	3	3	4	-2
1	2	0	2	.6
4	-1	-2	3.4	-1

3	5	5	4	2
2	.6	0	1.6	-3.2
1	.4	-2	.4	-.2
4	-.2	-1	4.2	-.6

K = 2

3	5	5	4	2
2	.6	0	1.6	-3.2
1	.4	-2	.4	-.2
4	-.2	-1	4.2	--.6

3	5	5	4	2
1	.4	-2	.4	-.2
2	.6	0	1.6	-3.2
4	-.2	-1	4.2	-.6

Ejemplo

K = 1

1	2	0	2	.6
2	3	3	4	-2
3	5	5	4	2
4	-1	-2	3.4	-1

3	5	5	4	2
2	3	3	4	-2
1	2	0	2	.6
4	-1	-2	3.4	-1

3	5	5	4	2
2	.6	0	1.6	-3.2
1	.4	-2	.4	-.2
4	-.2	-1	4.2	-.6

K = 2

3	5	5	4	2
2	.6	0	1.6	-3.2
1	.4	-2	.4	-.2
4	-.2	-1	4.2	--.6

3	5	5	4	2
1	.4	-2	.4	-.2
2	.6	0	1.6	-3.2
4	-.2	-1	4.2	-.6

3	5	5	4	2
1	.4	-2	.4	-.2
2	.6	0	1.6	-3.2
4	-.2	.5	4	-.5

Ejemplo

K = 3

3	5	5	4	2
1	.4	-2	.4	-.2
2	.6	0	1.6	-3.2
4	-.2	-.5	4	-.5

Ejemplo

K = 3

3	5	5	4	2
1	.4	-2	.4	-.2
2	.6	0	1.6	-3.2
4	-.2	-.5	4	-.5

3	5	5	4	2
1	.4	-2	.4	-.2
4	-.2	.5	4	-.5
2	-.6	0	1.6	-3.2

Ejemplo

K = 3

3	5	5	4	2
1	.4	-2	.4	-.2
2	.6	0	1.6	-3.2
4	-.2	-.5	4	-.5

3	5	5	4	2
1	.4	-2	.4	-.2
4	-.2	.5	4	-.5
2	-.6	0	1.6	-3.2

3	5	5	4	2
1	.4	-2	.4	-.2
4	-.2	.5	4	-.5
2	.6	0	.4	-3

Ejemplo

K = 3

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & .4 & -2 & .4 & -.2 \\ 2 & .6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 4 & -.2 & -.5 & 4 & -.5 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & .4 & -2 & .4 & -.2 \\ 4 & -.2 & .5 & 4 & -.5 \\ 2 & -.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & .4 & -2 & .4 & -.2 \\ 4 & -.2 & .5 & 4 & -.5 \\ 2 & .6 & 0 & .4 & -3 \end{array}$$

$$\underset{P}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & .6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3.4 & -1 \end{pmatrix}} = \underset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ .4 & 1 & 0 & 0 \\ -.2 & .5 & 1 & 0 \\ .6 & 0 & .4 & 1 \end{pmatrix}} \underset{U}{\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & .4 & -.2 \\ 0 & 0 & 4 & -.5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

Inversión de matrices

- Cálculo utilizando la descomposición LUP
- Usando el algoritmo soluLUP se obtiene la solución de A x = b en $\Theta(N^2)$, por lo que se pueden resolver k sistemas A x = bk en $\Theta(kN^2)$
- La ecuación A X = I denota un conjunto de N sistemas de ecuaciones, donde Xi es la i-ésima columna de X y Zi la i-ésima columna de I
- A Xi = Zi se resuelve con la descomposicionLUP para cada Xi en $\Theta(N^2)$
- Con descomposicionLUP de A en $\Theta(N^3)$, la inversa de A se determina también en $\Theta(N^3)$

Inversión de matrices

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A*A^{-1}$ = In por lo cual A*X = In X debe ser A^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por descomposición LUP n veces se puede calcular A^{-1} de A en $\theta(n^3)$

Equivalencia entre multiplicación e inversión de matrices

- Teorema 28.7: si I(N) es el tiempo para invertir una matriz NxN,donde $I(N) = \Omega(N^2)$ e I(N) satisface la condición de regularidad donde $I(3N)=O(I(N))$, entonces la multiplicación de dos matrices NxN tiene $O(I(N))$
- Teorema 28.8: suponga que la multiplicación de dos matrices NxN es en $M(N)= \Omega(N^2)$ y M(N) satisface dos condiciones de regularidad $M(N+k)=0$ con $0 \leq k \leq N$ y $M(N/2) \leq cM(N)$ para alguna constante $c < ½$. Entonces el cálculo de la inversa de cualquier matriz NxN no singular tiene $O(M(N))$

Trazado de curvas por aproximación de mínimos cuadrados

- Lema 28.9: Cualquier matriz NxN definida positiva es no singular
- La k-ésima submatriz líder Ak se forma con la intersección de las primeras k filas con las k primeras columnas de A
- Lema 28.10: Si A es una matriz definida positiva simétrica, entonces cada submatriz líder de A es definida positiva y simétrica
- Corolario 28.12: la descomposicionLU de una matriz simétrica definida positiva nunca causa una división por cero

Aproximación de mínimos cuadrados

- Se tienen un conjunto de m puntos (x1,y1), (x2,y2), …, (xm,ym)
  (-1,2), (1,1), (2,1), (3,0), (5,3)
- Se sabe que la medición de los yi está sujeta a cierto margen de error
- Determinar F(x) según yi = F(xi) + ηi, con i=1, …,m y donde los errores por aproximación ηi sean mínimos
- Si se asume $F(x) = \sum c_j f_j(x)$ para constantes c_j y $f_j(x)= x^{j-1}$, ello implica un polinomio de j-1 grados $F(x)=c_1+c_2x+c_3x^2+\ldots+c_nx^{n-1}$

Aproximación de mínimos cuadrados

- Sea $A_{i,j} = f_j(x_i)$, $c = (c_k)$ el vector de coeficientes y $\eta = A\,c - y$ el vector de los errores de aproximación

$$Ac = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \dots & f_n(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x_1) \\ F(x_2) \\ \vdots \\ F(x_m) \end{pmatrix}$$

$$\|\eta\|^2 = \|Ac - y\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j - y_i \right)^2$$

$$\frac{d\,\|\eta\|^2}{dc_k} = \sum_{i=1}^{m} 2 \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j - y_i \right) a_{ik} = 0$$

- Las n ecuaciones son equivalentes a $(A\,c - y)^T A = 0$ ó $A^T (A\,c - y) = 0 \Rightarrow A^T A\,c = A^T y$ (ecuación normal) $c = ((A^T A)^{-1} A^T)\, y = A^+ y$

Aproximación de mínimos cuadrados

- Selección de $F(x)=c_1+c_2x+c_3x^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

(-1,2), (1,1), (2,1), (3,0), (5,3)

- Aplicando la ecuación

  $c = A^+ y$

  Donde c es el vector de los coeficientes buscados para el polinomio y $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ es la matriz seudoinversa de A

Aproximación de mínimos cuadrados

- Calculando la matriz seudoinversa

$$A+ = \begin{bmatrix} .5 & .3 & .2 & .1 & -.1 \\ -.388 & .093 & .190 & .193 & -.088 \\ .06 & -.036 & -.048 & -.036 & .06 \end{bmatrix}$$

- Se obtiene $c = y\,A^{+}$

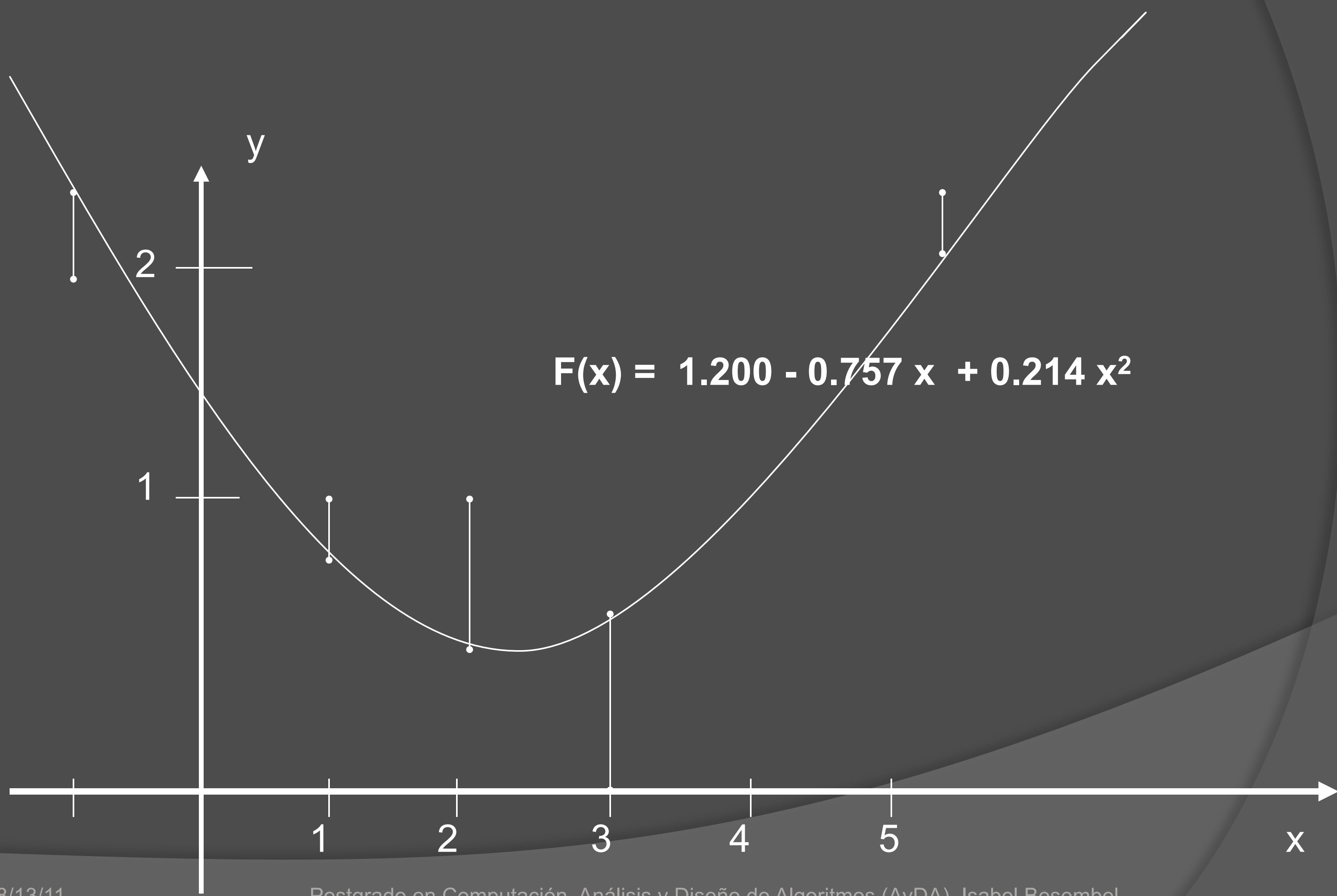
(-1,2), (1,1), (2,1), (3,0), (5,3)

$$c = \begin{bmatrix} 1.200 \\ -.757 \\ .214 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5 & .3 & .2 & .1 & -.1 \\ -.388 & .093 & .190 & .193 & -.088 \\ .06 & -.036 & -.048 & -.036 & .06 \end{bmatrix}$$

- Se sustituye en el polinomio

$F(x) = 1.2 - .757\,x + .214\,x^2$

Trazado de curvas por aproximación de mínimos cuadrados



Aproximación de mínimos cuadrados

- Se soluciona la ecuación multiplicando por la transpuesta de A y luego encontrando la descomposición LU de $A^T A$
- Si A tiene rango completo, la matriz $A^T A$ no es singular, ya que ella es simétrica y definida positiva