Definición del problema

- El flujo de algún material a través de una red es la tasa de movimiento del material de un punto de la red a otro.
- **Aplicaciones**:
  - Modelado de líquidos fluyendo a través de tuberías,
  - piezas a través de líneas de ensamblaje,
  - corriente a través de redes eléctricas,
  - información a través de redes de comunicación, etc.
- **Problema del flujo máximo:** encontrar la rata máxima a la cual el material puede ser transportado de una fuente (s) a un destino (t), sin violar las restricciones de capacidad de la red.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Red de flujo

- Una red de flujo $G = (N, A)$ es un digrafo etiquetado cuyos pesos se denominan capacidad (c) y son siempre positivos, $c(u, v) \geq 0$.
- Si $(u, v) \notin A \Rightarrow c(u, v) = 0$
- Por cada nodo $v \in N$ hay un camino de s a t que pasa por v $\Rightarrow$ G es conexo $(|A| \geq |N| - 1)$
- Un flujo en G es una función real $f : N \times N \rightarrow \Re$ que satisface las propiedades siguientes:
  - **Restricción de capacidad:** $\forall\ u, v \in N$ se requiere que $f(u, v) \leq c(u, v)$
  - **Simetría oblicua:** $\forall\ u, v \in N$ se requiere que $f(u, v) = - f(v, u) \Rightarrow f(u, u) = 0$

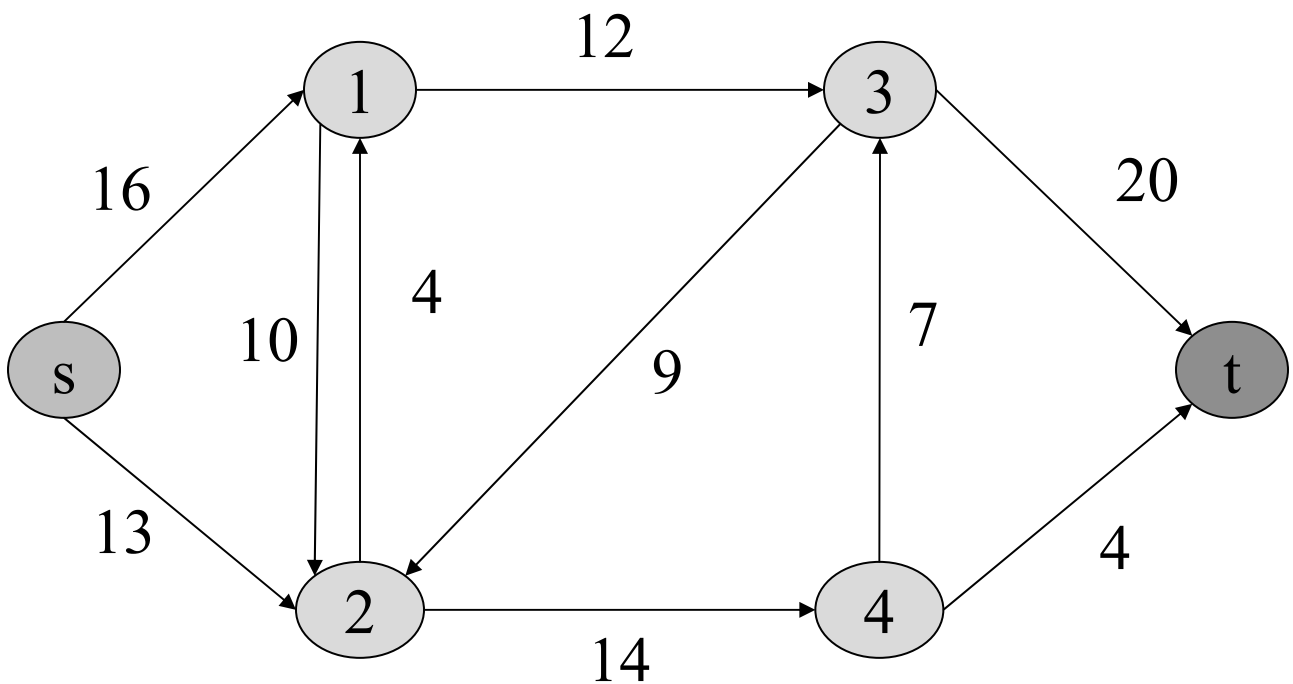
Red de flujo

- **Conservación de flujo:** $\forall$ u $\in$ N - {s, t} se requiere que $\sum_{u \in N} f(u,v) = 0$

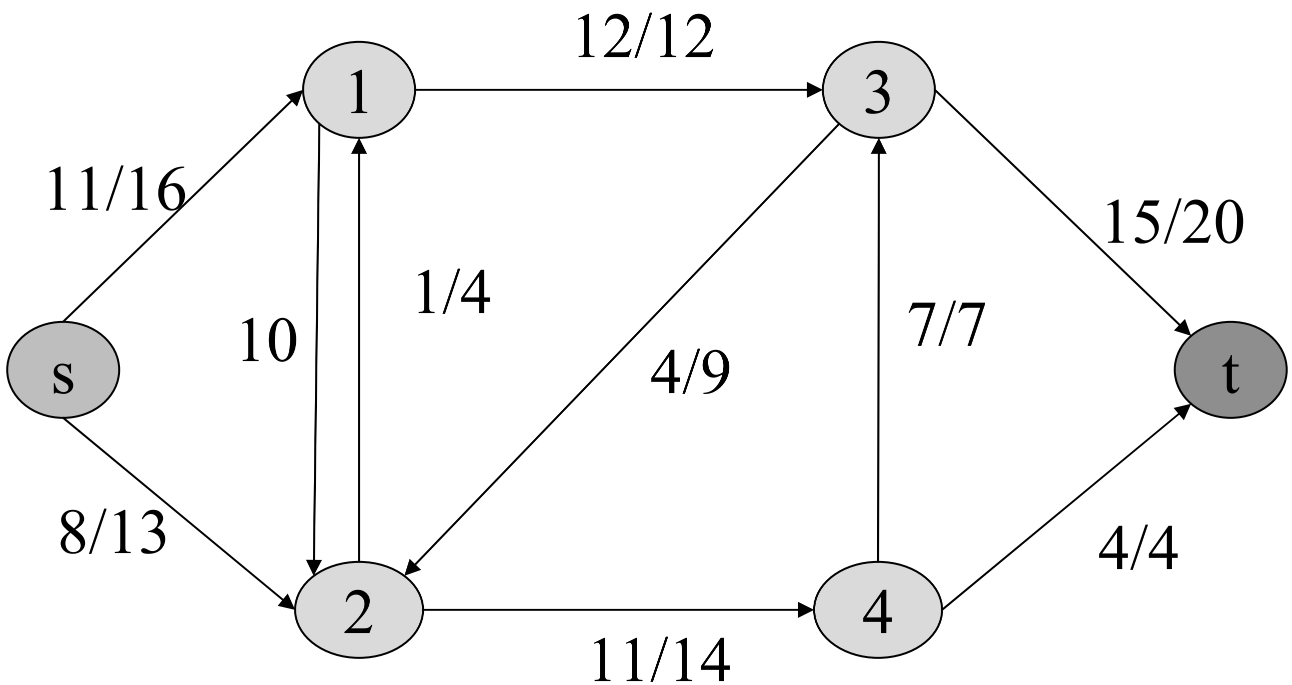
denominado el flujo neto desde u hasta v.

- f(u, v) puede ser positivo o negativo, pero el flujo neto total dentro de un nodo debe ser cero.
- El flujo neto total desde s es FNT = $\sum_{v \in N}$ f(s, v)
- **El problema del flujo máximo se define como:** dado G, s (fuente) y t (destino) encontrar el flujo neto total máximo desde s hasta t
- Flujo neto positivo entrando a un nodo v es $\sum_{u \in N, f(u,v) \rangle 0} f(u,v)$ y el que sale se define simétricamente.

Ejemplo red de flujo



Ejemplo red de flujo

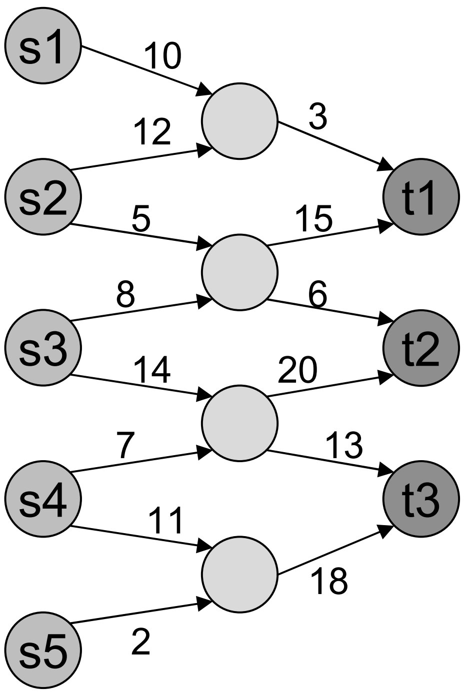


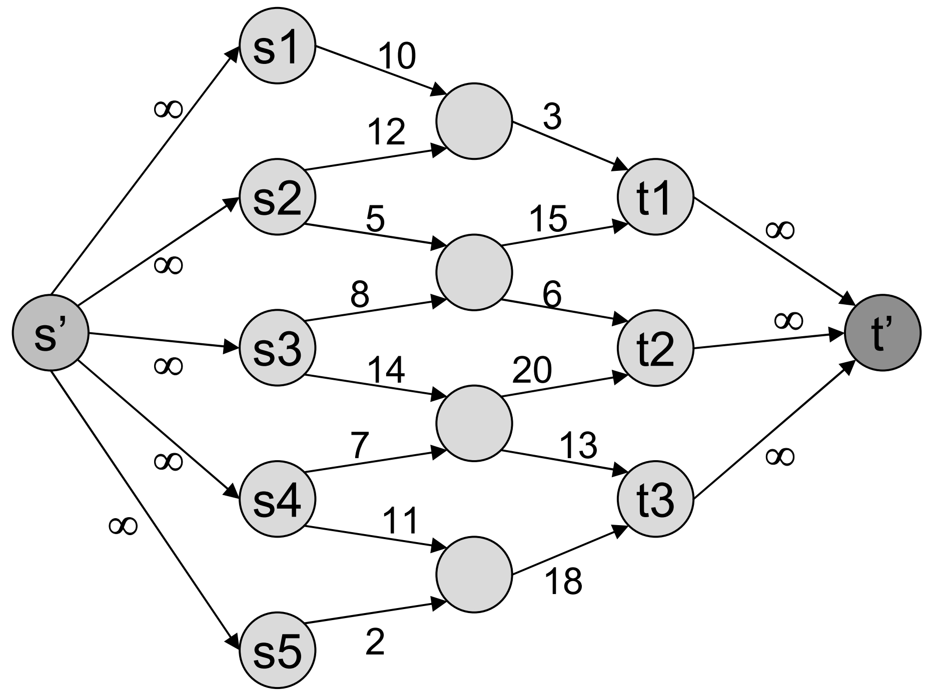
f(u, v)/c(u, v)

Red de flujo

- Por la propiedad de conservación de flujo se tiene que el flujo neto positivo entrando a un nodo diferente de s o t debe ser igual al flujo neto positivo dejando el nodo
- Redes con varios nodos fuente y varios nodos destino:
  - se reduce al anterior colocando dos nodos ficticios denominados:
    - el nodo superfuente s y
    - el nodo superdestino t,
  - ambos nodos se conectan a los otros nodos con arcos de capacidad ∞.
  - Anexar
    - un arco (s, s_i) por cada nodo fuente de G con $i = 1, 2, ..., m$ y
    - un arco (t_j, t) por cada nodo destino de G con $j = 1, 2, ..., n$

Redes con varias fuentes y varios destinos





Red de flujo

- **Lema 19.1:** Sea G = (N, A) una red de flujo y f el flujo de G, entonces:
  - Para $X \subseteq N$, $f(X, X) = 0$.
  - Para $X, Y \subseteq N$, $f(X, Y) = - f(Y, X)$.
  - Para $X, Y, Z \subseteq N$ con $X \cap Y = \emptyset$,
    $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ y
    $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$

Método de Ford-Fulkerson

- Es un método iterativo que inicia f(u, v) = 0 para todos los nodos de G, en cada iteración el flujo se aumenta por medio del alargamiento del camino desde s hasta t, se repite el proceso hasta que no hay alargamiento posible.
- **Algoritmo general:** métodoFordFulkerson(G, s, t)

1) iniciar f en cero
2) mientras exista un alargamiento del camino p

   aumente el flujo f a lo largo de p

3) regrese f

Red residual

- Dados una red de flujo y un flujo, la red residual consiste de los arcos que pueden admitir mas flujo neto.
- La cantidad adicional de flujo neto que se puede enviar desde u hasta v antes de exceder c(u, v) es la capacidad residual de (u, v), cf(u, v) = c(u, v) - f(u, v)
  - Si c(u, v) = 16 y f(u, v) = 11, entonces se pueden enviar cf(u, v) = 5 unidades adicionales antes de exceder la capacidad del arco
- Dada una red de flujo G =(N, A) y un flujo f, la red residual de G inducida por f es Gf = (N, Af), donde
  $Af = \{(u, v) \in N \times N : cf(u, v) > 0\}$

Red residual

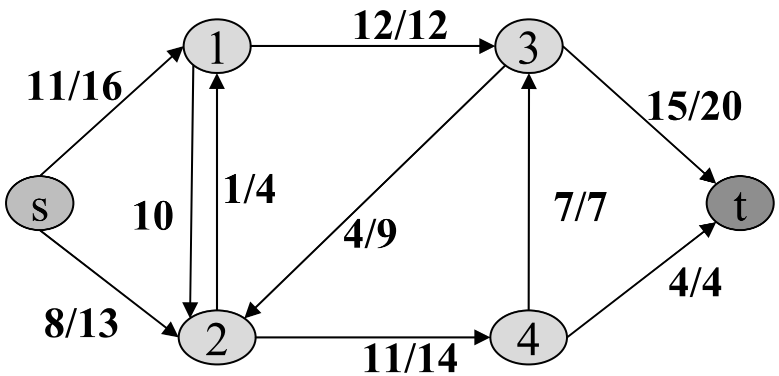
- Un arco (u, v) aparece en Gf solo si (u, v) $\in$ A y hay un flujo neto positivo de u a v

  $|Af| \leq 2|A|$

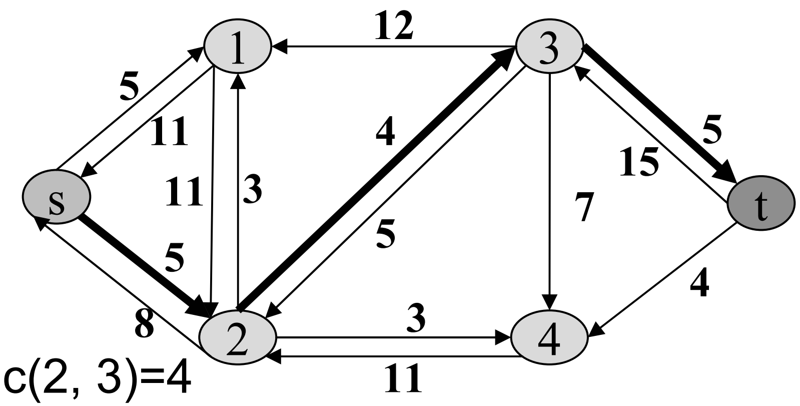
- **Lema 19.2:** Sea G=(N, A) una red de flujo con s, t y f. Sea Gf la red residual de G inducida por f y sea f ' el flujo de Gf. Entonces, el flujo f + f ' definido por (f 1 + f 2) (u, v) = f 1(u, v) + f 2(u, v) es un flujo en G cuyo valor es | f + f ' | = | f | + | f ' |

Red residual

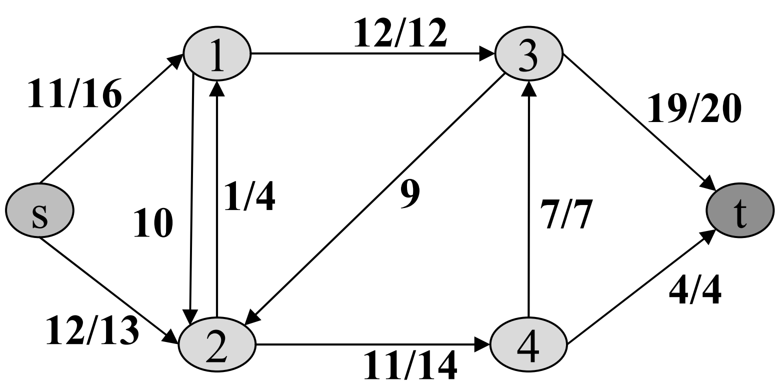
G con flujo f



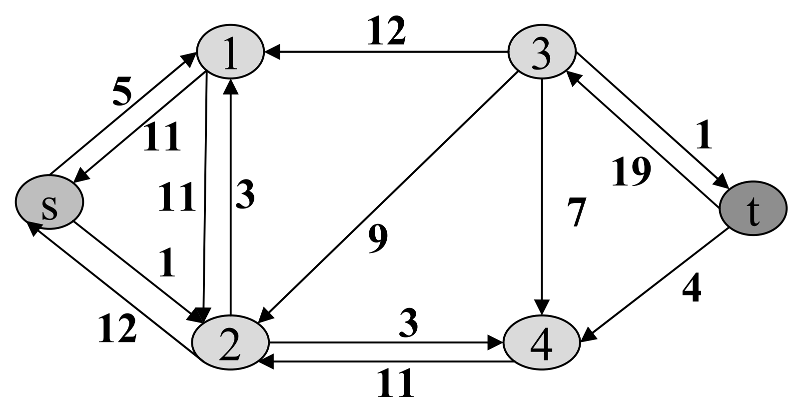
Gf con camino aumentado **p**



cf(**p**)=c(2, 3)=4



El flujo en G que resulta de aumentar en **p** su capacidad residual de 4



Red residual inducida por el flujo

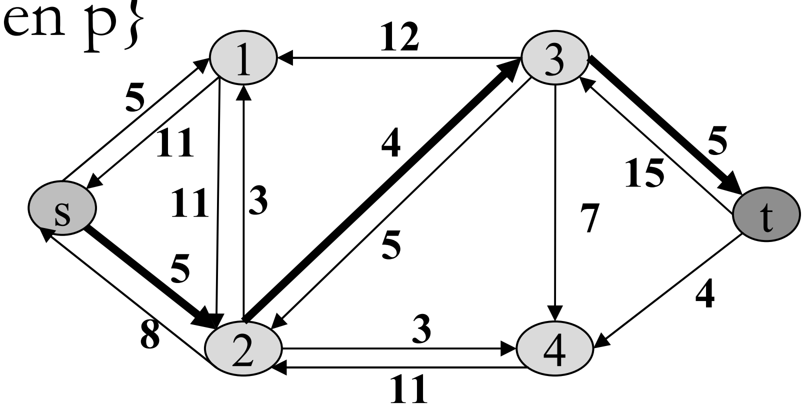
Camino aumentado

- Un camino aumentado p es un camino simple desde s a t en la red residual Gf.
- La capacidad residual de p es la máxima cantidad de flujo neto que se puede transportar a lo largo de los arcos de p y se define como:

  cf(p) = min{cf(u, v) : (u, v) está en p}

Gf con camino aumentado **p**

cf(**p**)=c(2, 3)=4



Camino aumentado

- **Lema 19.3:** Sea G =(N, A) una red de flujo con flujo f y sea p el camino aumentado de Gf, la función fp : N x N $\rightarrow \Re$ se define como:

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{si (u, v) está en p,} \\ -c_f(p) & \text{si (v, u) está en p,} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

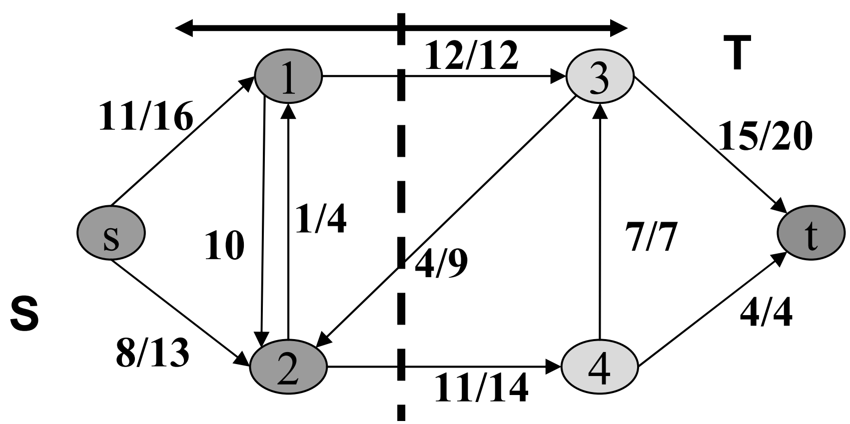
  Donde fp es el flujo en Gf con | fp | = cf(p) > 0
- Un flujo en G es f ' = f + fp y cuyo valor en G es | f ' | = | f | + | fp | > f

Cortes en la red de flujo

- Un corte (S, T) en una red de flujo G = (N, A) es una partición de N en S y T = N - S tal que $s \in S$ y $t \in T$
- Si f es un flujo, entonces el flujo neto a través del corte (S, T) está definido por f(S, T) y su capacidad es c(S, T).
- El flujo neto a través del corte (S, T) es f(S, T) = | f |
- El valor de cualquier flujo f en una red de flujos G está limitado superiormente por la capacidad de cualquier corte de G.

Cortes en la red de flujo

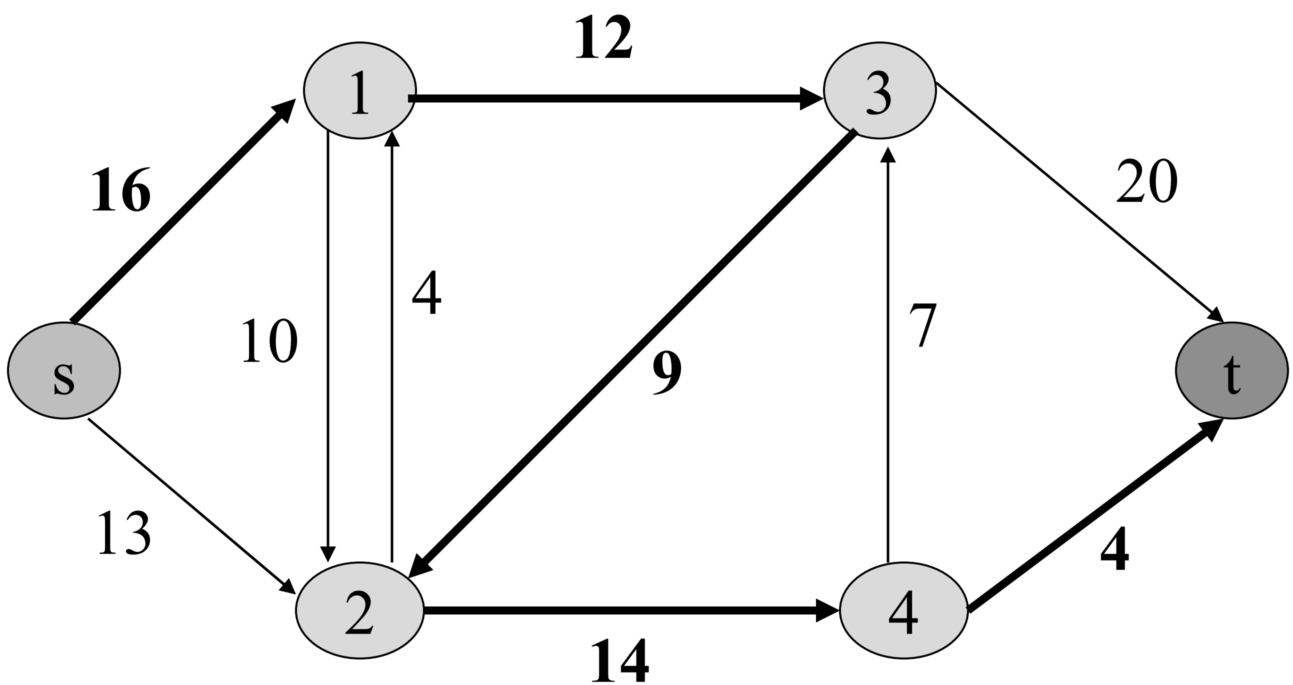
- **Teorema 1:** Si f es un flujo en la red de flujo G = (N, A) con fuente s y destino t, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
  - **f** es un flujo máximo de G
  - La red residual Gf no contiene caminos aumentados
  - | f | = c(S, T) para algún corte (S, T) de G.

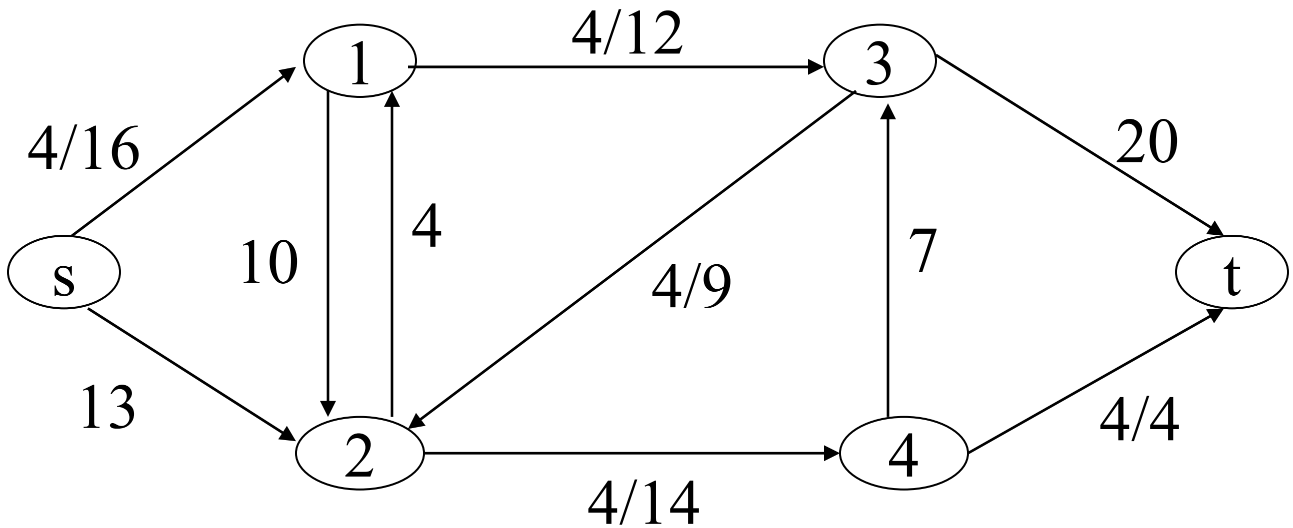


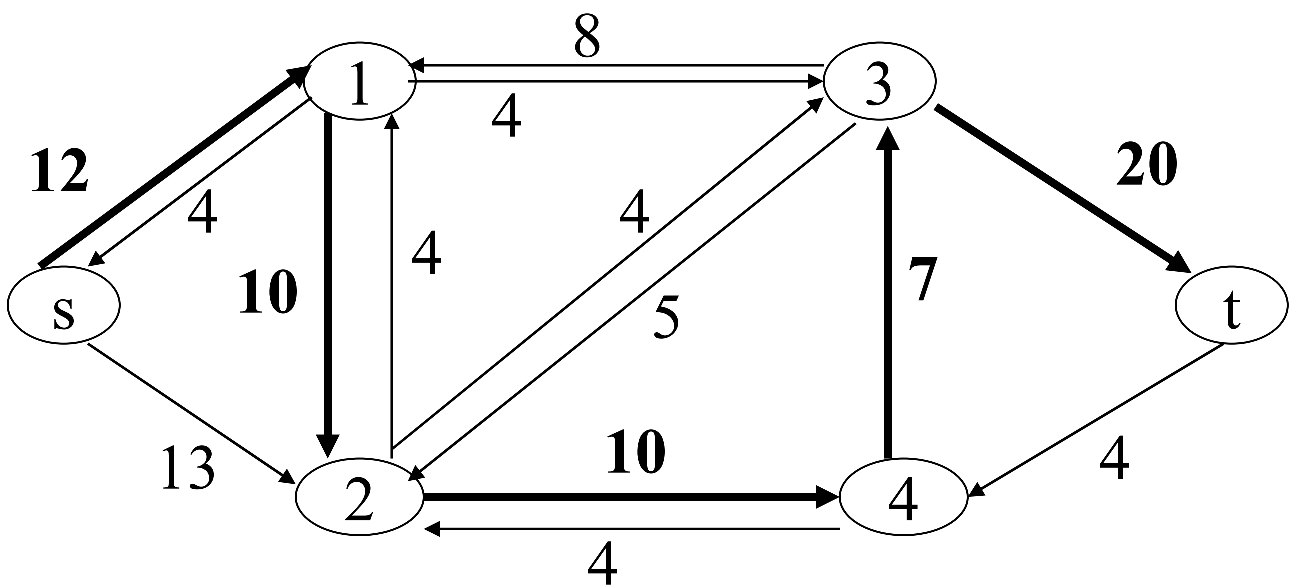
Corte (S, T)
S={s, 1, 2}
T={3, 4, t}
f(S, T) = 19
c(S, T) = 26

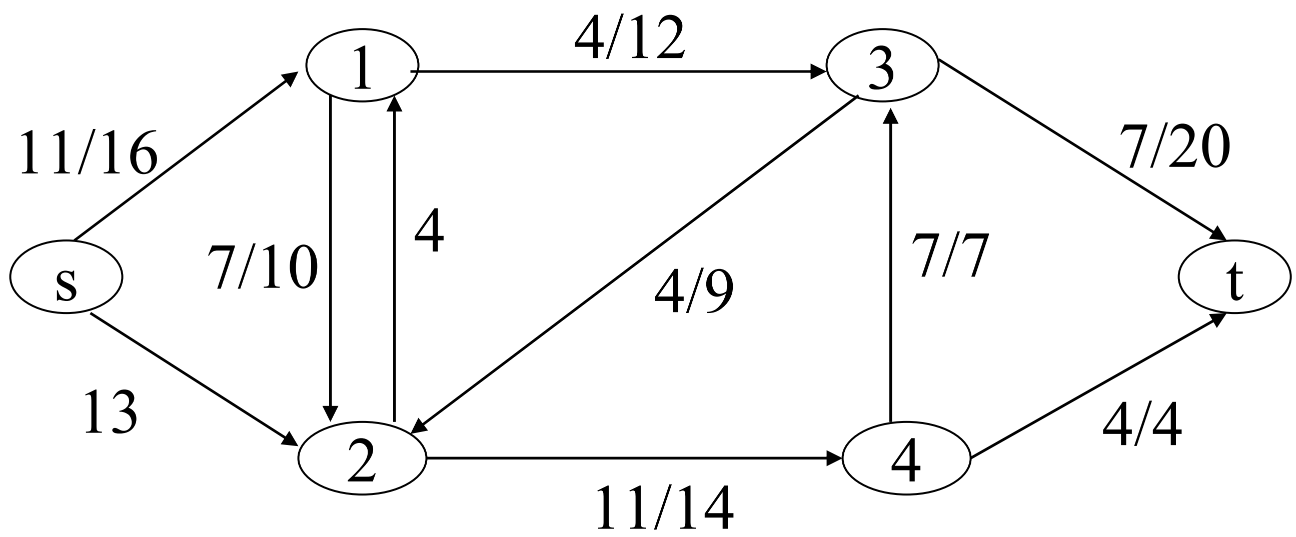
Algoritmo de Ford-Fulkerson

<table>
<tr><td colspan="3">26/11/98
fordFulkerson(Nodo: s, t)
{pre: n > 0 } {pos: n > 0 }</td></tr>
<tr><td>1
2</td><td>[f(u, v), f(v, u) = 0, 0] (u, v) ∈ A // Inicia f
(∃ un p de s a t en Gf) [cf(p) = min(cf(u, v) : (u, v) está en p
[f(u, v) = f(u, v) + cf(p)
f(v, u) = - f(u, v)] (u, v) en p
] // Aumenta el flujo a lo largo de p
// por cf (p) hasta que no hayan mas p</td><td>-u, v: Nodo. Nodos del grafo.
-Gf: Grafo. Grafo residual.
-cf: Entero.Capacidad residual
-p: Camino aumentado de Gf.
-f: Arreglo(n x n)De [Entero].
Flujo del arco.</td></tr>
</table>

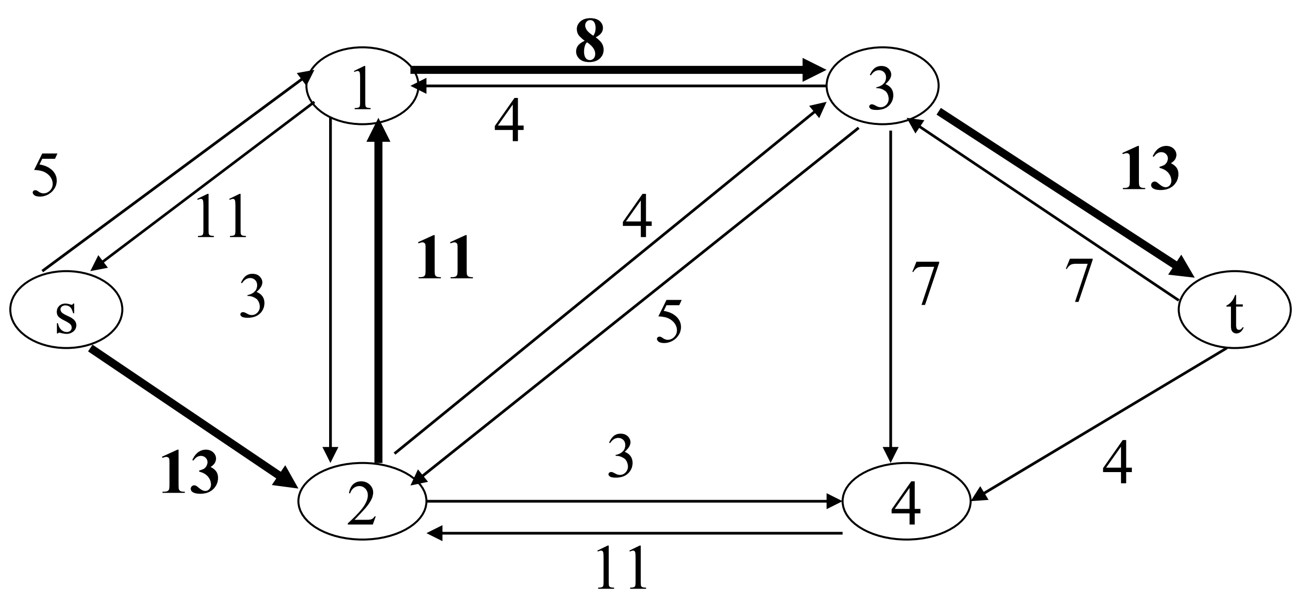

12
1
3
16
20
4
10
7
s
9
t
13
4
2
4
14


4/12
1
3
4/16
20
4
10
7
s
4/9
t
13
4/4
2
4
4/14

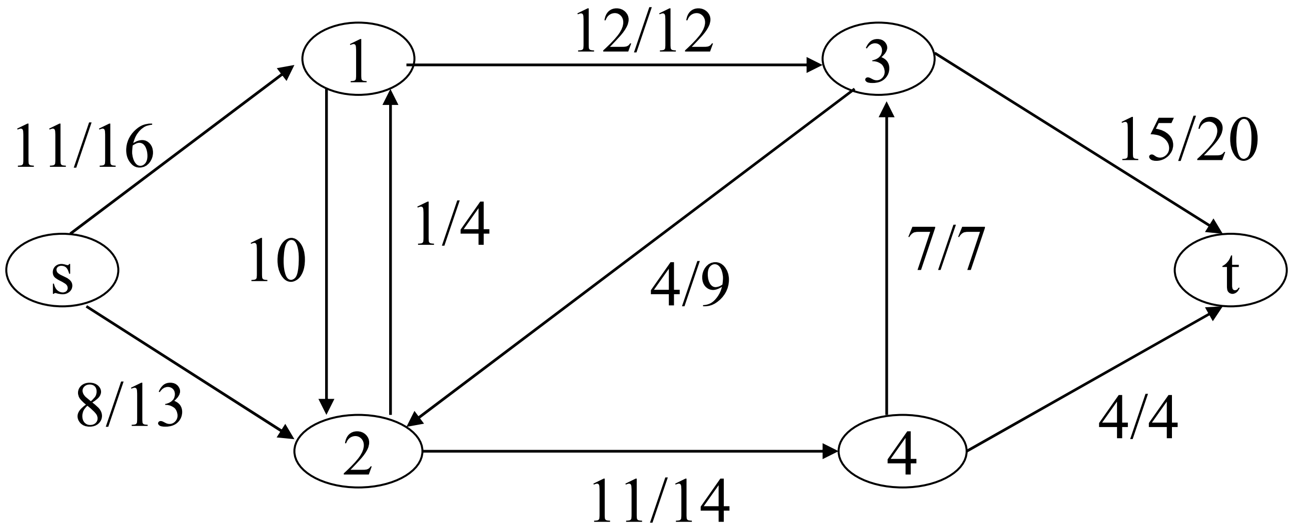

8
1
3
4
12
20
4
4
4
10
7
s
5
t
10
13
4
2
4
4

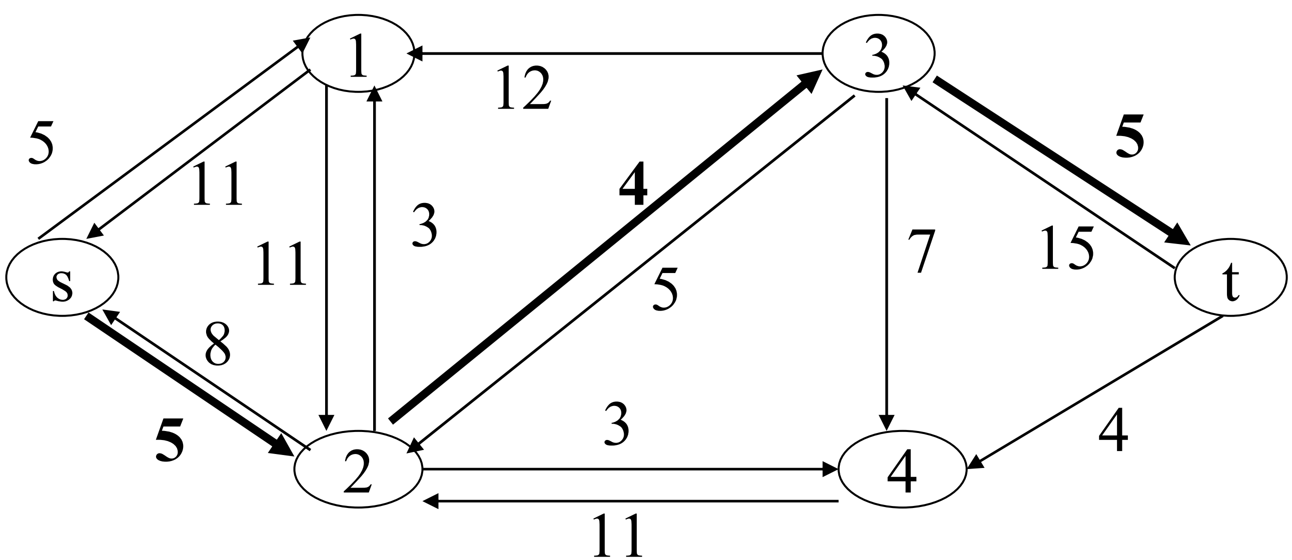


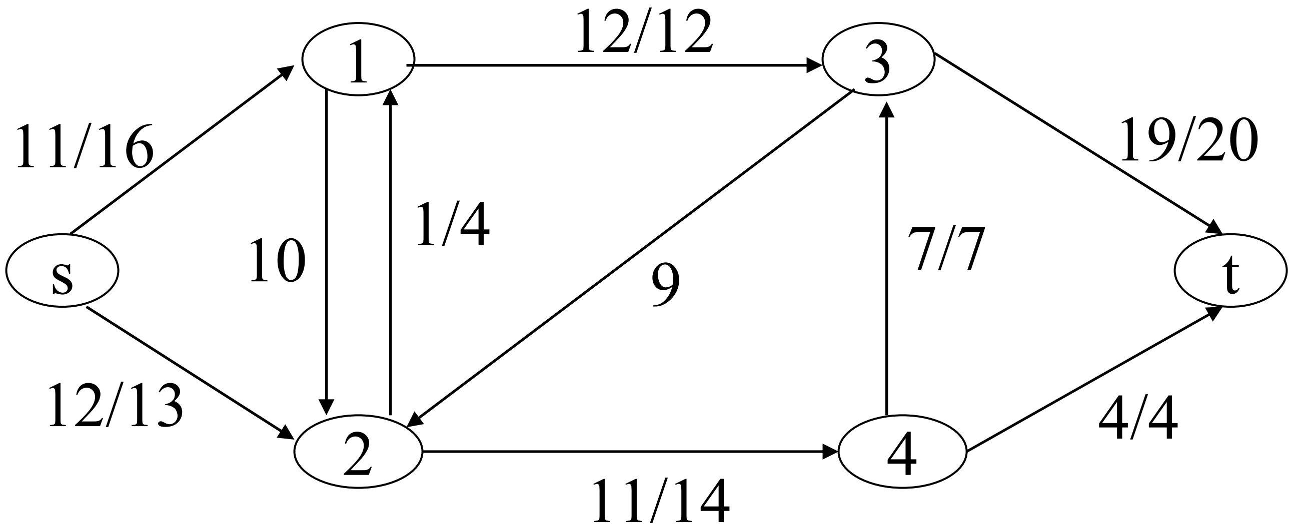
1
3
s
t
2
4
11/16
4/12
7/20
7/10
4
4/9
7/7
13
4/4
11/14

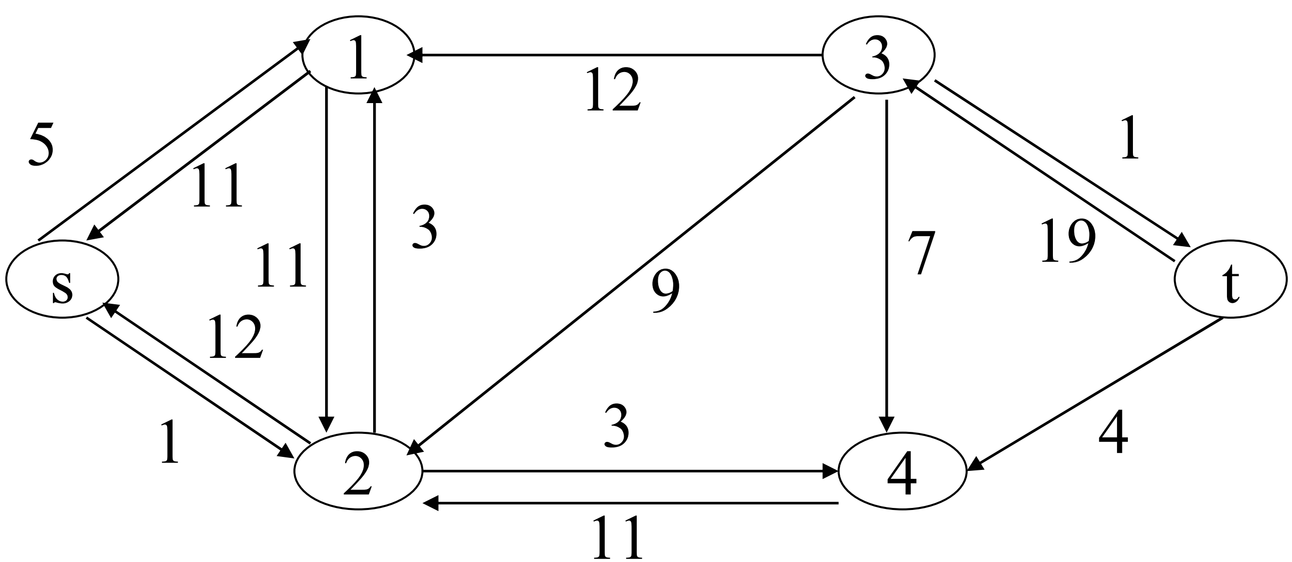


1
3
s
t
2
4
8
4
5
11
13
11
4
3
7
7
5
13
3
4
11


1
3
s
t
2
4
12/12
11/16
15/20
1/4
10
4/9
7/7
8/13
4/4
11/14


1
3
s
t
2
4
12
5
5
11
4
11
3
7
15
5
8
5
3
4
11


1
3
s
t
2
4
12/12
11/16
19/20
10
1/4
7/7
9
12/13
4/4
11/14


1
3
s
t
2
4
12
5
11
1
11
3
19
7
9
12
1
3
4
11

Análisis del algoritmo de Ford-Fulkerson

- El análisis del algoritmo depende de cómo se encuentren los caminos aumentados, pues es posible que no converja
- Con capacidades enteras, su $T(n) = O(A \mid f^* \mid)$, donde f^* es el máximo flujo encontrado

Algoritmo de Edmonds-Karp

- Si se escogen los caminos aumentados con el método usado por la búsqueda en amplitud en el lazo del paso 2, entonces se obtiene el algoritmo Edmonds-Karp
- con tiempo polinomial $T(n) = O(N\ A^2)$, para cada iteración de Ford-Fulkerson $O(\ A\ )$ y para la búsqueda en amplitud $O(\ N\ A\ )$

Análisis del algoritmo Edmonds-Karp

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

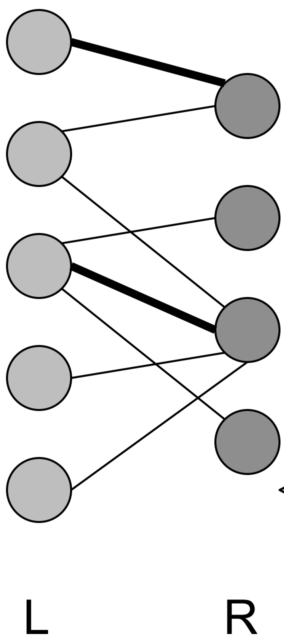
- **Lema 19.4:** Si el algoritmo Edmonds-Karp se ejecuta con una red de flujo G con s y t, entonces para todos los nodos $v \in N - \{s, t\}$, la distancia del camino más corto $\delta f\,(s, t)$ en la red residual Gf se incrementa monotonamente con cada aumento del flujo
- **Teorema 2:** Si el algoritmo Edmonds-Karp se ejecuta con una red de flujo G con s y t, entonces el número total de aumentos del flujo desarrollados por el algoritmo es a lo sumo O(N A).

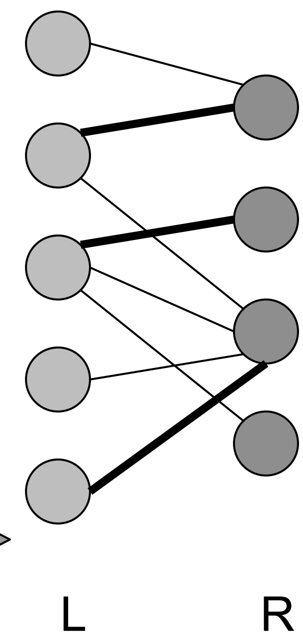
Máximo "matching" en grafos bipartitos

- Dado un grafo no dirigido G = (N, A), un "matching" es un subconjunto de aristas $M \subseteq A$, tal que para todos los nodos $v \in N$, a lo sumo una arista de M incide en v.
- Un "matching" M es máximo si tiene una cardinalidad máxima tal que para cualquier M' se tiene $| M' | \geq | M |$.
- **Aplicación:** Asignar un conjunto de R tareas que se efectuarán simultáneamente sobre un conjunto de L máquinas.
  - Se coloca una arista de la máquina i a la tarea j si ésta última se puede realizar en la máquina i.
  - La asignación es máxima cuando se asigna la mayor cantidad posible de tareas

Ejemplo

- $N = L \cup R$
- Asignación de R tareas que serán desarrolladas simultáneamente en L máquinas
- Asignación de cardinalidad 2
- De cardinalidad 3





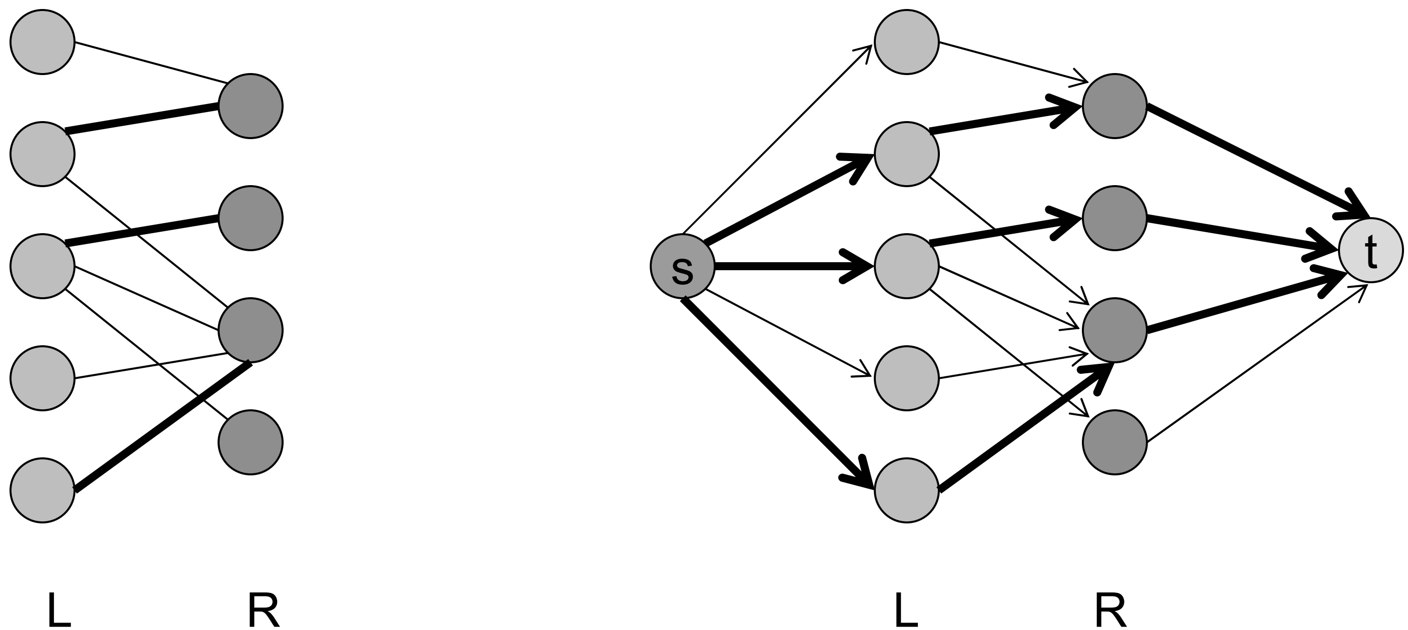
Grafo bipartito

- **Grafo bipartito:** Aquel donde N puede ser dividido en $N = L \bigcup R$, $L \bigcap R = \varnothing$ y todos las aristas en A van de los nodos de L a los de R.
- El problema se resuelve con el algoritmo de Ford-Fulkerson construyendo una red de flujo G' = (N', A') con dos nodos ficticios s y t, $N' = N \bigcup \{s, t\}$ y los arcos de G' son:

$$A' = \{(s,u) : u \in L\} \bigcup \{(u,v) : u \in L, v \in R, (u,v) \in A\} \bigcup \{(v,t) : v \in R\}$$

y se le asigna capacidad de 1 a los arcos de A'.

Aplicación del algoritmo



Asignación máxima en un grafo bipartito

- Si M es una asignación ("matching") en G, entonces hay un flujo de valor entero en G' cuyo valor | f | = | M | y viceversa.
- **Teorema 3:** Si la función de capacidad c toma solamente valores enteros, entonces el flujo máximo f producido por el método de Ford-Fulkerson tiene la propiedad de ser entero (| f |) y $\forall$ u, v el valor de f(u, v) es un entero.
- La cardinalidad de la asignación máxima en un grafo bipartito G es el valor del flujo máximo en su correspondiente red de flujo G'.
- Encontrar la asignación máxima en un grafo bipartito toma O(N A).