Capítulo $\boxed{1}$

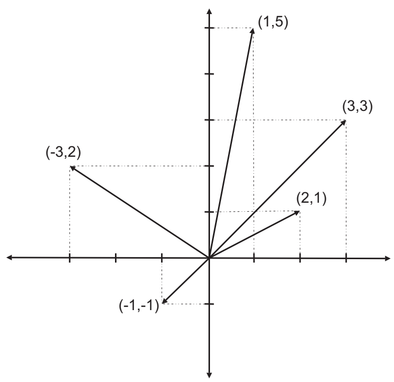
Subespacios

Definición 1.1 (Subespacio) *Sea H un subconjunto no vacio de un espacio vectorial $V(K)$. Si H es un espacio vectorial sobre K bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en V. Entonces se dice que H es un subespacio de V. En este caso se denota $H \subset H$*

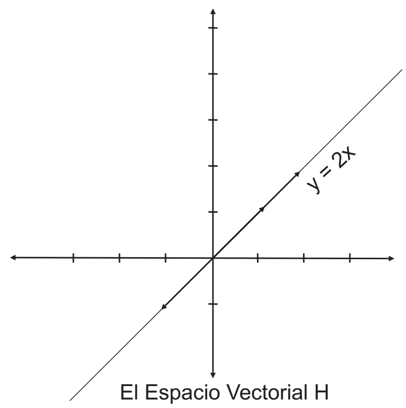
Ejemplo 1.2 *En el capitulo anterior se demostró que el conjunto*

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

es un espacio vectorial. Geométricamente el conjunto V puede ser visto como el conjunto de vectores fijos en el plano.



El Espacio Vectorial V



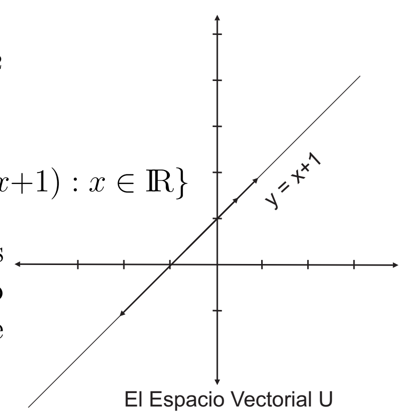
El Espacio Vectorial H

Consideremos el conjunto $H = \{(x, y) : y = 2x\} = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$. Claramente H es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, porque H es el conjunto de vectores fijos sobre la recta $y = 2x$. Con un poco de trabajo, nada complicado, se puede demostrar que H es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones definidas en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, de acuerdo a la Definición 1.1 H es un subespacio de V.

Es importante aclarar que no todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, el conjunto

$$U = \{(x, y) : y-x-1 = 0\} = \{(x, y) : y = x+1\} = \{(x, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$$

es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, en efecto, consiste de todos los vectores sobre la recta $y = x + 1$. Este subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Esta afirmación se comprobará más adelante.



El Espacio Vectorial U

El siguiente teorema nos permite reconocer fácilmente cuando un subconjunto de un espacio vectorial $V(K)$ es un subespacio sobre K con las operaciones definidas en V.

Teorema 1.3 *Un subconjunto no vacio H de un espacio vectorial $V(K)$ es un subespacio de V si, y solo si cumple con las siguientes condiciones*

a) Dado $u \in H$ y $v \in H$, entonces $u + v \in H$

b) Dado $\alpha \in K$ y $v \in H$, entonces $\alpha v \in H$

Según este teorema no es necesario verificar todos los axiomas de la definición de espacio vectorial para determinar si un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio. Bastará con verificar la cerradura en ambas operaciones.

Ejemplo 1.4 *Demuestra que $H = \{(x, y) : y = 2x\} = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Según el Teorema 1.3 para verificar si H es un subespacio bastará con verificar las dos condiciones de cerradura. Para ello, sea u, v dos elementos de H, entonces $u = (x_1, 2x_1)$ y $v = (x_2, 2x_2)$ para algunos x_1, x_2 números reales. Como

$$u + v = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) = (r, 2r)$$

para algún $r = x_1 + x_2$ número real se sigue que la suma $u + v$ es efecto un elemento de H y por consiguiente $u + v \in H$. Por otro lado, para algún escalar α se tiene que

$$\alpha u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, 2\alpha x_1) = (t, 2t)$$

para algún $t = \alpha x_1$ número real. Lo que significa que αu es un elemento de H y por ende $\alpha u \in H$.

Una consecuencia del Teorema 1.3 es el siguiente Corolario

Corolario 1.5 *Todo subespacio de un espacio vectorial V contiene al elemento neutro.*

Gracias a este Corolario tenemos una herramienta muy util para verificar cuando un subconjunto de un espacio vectorial V no es un subespacio de V. la razón se debe a lo siguiente: El corolario anterior se puede expresar de la siguiente manera

$$\boxed{\text{Si } H \text{ es un subespacio vectorial, entonces } H \text{ contiene al elemento neutro.}}$$

Si decimos que p es la proposición p: H es un subespacio vectorial y q es la proposición q: H contiene al elemento neutro, vemos que el corolario tiene la forma lógica

$$p \to q$$

El recíproco de esta implicación lógica definido por $\sim q \to \sim p$ también es válido y se enuncia de la siguiente manera

$$\boxed{\text{Si } H \text{ no contiene al elemento neutro, entonces } H \text{ no es un subespacio vectorial.}}$$

Con esta afirmación podemos comprobar fácilmente que $U = \{(x, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. En efecto, el elemento neutro de $\mathbb{R}^2$ es $(0,0)$ y claramente $(0,0)$ no es un elemento de U.
Veamos algunos ejemplos de subespacios

Ejemplo 1.6 (El subespacio Trivial) *Para cualquier espacio vectorial el subconjunto formado únicamente por el elemento neutro* $\{e\}$ *es un subespacio. En efecto,* $e + e = e$ *y* $\alpha e = e$ *para todo escalar alpha. Este subespacio vectorial se llama el Subespacio Trivial.*

Ejemplo 1.7 *Todo espacio vectorial es un subespacio en si mismo. Es decir, para todo espacio vectorial* V, V *es un subespacio de si mismo.*

Estos dos ejemplos nos muestran que todo espacio vectorial V contiene dos subespacio. Pero es de nuestro interés conocer otros subespacios que no sean estos, nos referimos a los subespacios propios de un espacio vectorial.

Ejemplo 1.8 (En el Plano) *Consideremos el espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$*, un subespacio propio de* $\mathbb{R}^2$ *es el subconjunto*

$$H = \{(x, y) : y = mx\}.$$

El conjunto formado por todas las rectas del plano que pasan por el origen. Nótese que si $m = 2$ *coincide exactamente con el subespacio del Ejemplo 1.4. En general, los únicos subespacios propios de* $\mathbb{R}^2$ *son rectas que pasa por el origen (¿por qué?).*

Ejemplo 1.9 (En el Espacio) *Consideremos el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$*. Un subespacio propio de* $\mathbb{R}^3$ *es el subconjunto*

$$H = \{(x, y, z) : x = at, y = bt, z = ct, \quad \textit{donde } a,\ b,\ c,\ t \textit{ son números reales}\}$$

(en el espacio ¿qué representa este subespacio?). Se puede decir que este es el único subespacio propio de $\mathbb{R}^3$*.*

Ejemplo 1.10 (En el espacio de las matrices) *Consideremos el espacio vectorial de las matrices* $M(K)_{m\times n}$*. Este espacio vectorial tiene una gran variedad de subespacios propios. Por ejemplo:*

1. *El subconjunto formado por las matrices cuadradas* $n \times n$ *es un subespacio de* $M(K)_{m\times n}$*.*
2. *El subconjunto* $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c, \in K \right\}$ *es un subespacio de* $M(K)_{m\times n}$*.*

Ejemplo 1.11 (En el espacio de la funciones continuas) *Consideremos el espacio vectorial $C[a,b]$. Este espacio vectorial tiene como algunos de sus subespacios propios a los siguientes subconjuntos:*

1. *El conjunto P_n, los polinomios de grado menor o igual que n es un subespacio propio de $C[a,b]$.*

$$P_n = \{p(x) : p(x) \text{es un polinomio de grado} \leq n\}$$

2. *El conjunto de las funciones con primera derivada continua en el intervalo $[a,b]$; $C^1[a,b]$, es un subespacio propio de $C[a,b]$.*

3. *El subconjunto $H = \left\{ f \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = 0 \right\}$ es un subespacio propio de $C[a,b]$.*

Como es de notar los ejemplos acá presentados nos permiten visualizar que un espacio vectorial puede tener un gran número y gran variedad de subespacios vectoriales.

Ejercicios Propuestos

1. Suponga que $V = M(\mathbb{R})_{n\times n}$. Demuestra que los siguientes subconjuntos de V son subespacios de V.

   a) El subconjunto $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c, \in K \right\}$

   b) $H = \{A \in V : A \text{ es triangular superior}\}$

   c) $H = \{A \in V : a_{ii} = 0 \ \forall i = 1, ..., n\}$

   d) El subconjunto $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in K \right\}$ ¿Es un subespacio de V?.

2. Demuestra que los tres subconjuntos de $C[a,b]$ dados en el Ejemplo 1.11 son subespacios de $C[a,b]$.

3. Si H_1 y H_2 son dos subespacios de un espacio vectorial $V(K)$, demuestra que $H_1 \bigcap H_2$ es un subespacio de $V(K)$. ¿Es $H_1 \bigcup H_2$ un espacio de $V(K)$?.

Capítulo $\boxed{2}$

Espacio Generado

En este sesión trataremos el concepto de espacio generado. Que en pocas palabras consiste en un reducido grupo de vectores que genera todo el espacio, en cuyo caso lo llamaremos Sistema de Generadores y lo denotaremos con la letra mayúscula S. En realidad no hay distinción matemática entre conjunto, familia, colección, sistema, etc... Sólo la costumbre introduce esta diferencia de vocabulario.

Definición 2.1 (Combinación Lineal) *Dada una familia de vectores v_1, v_2, v_3, ..., v_n de un espacio vectorial $V(k)$. Una expresión de la forma*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

donde α_1, α_2, α_3, ..., α_n son escalares del cuerpo K es una combinación lineal de v_1, v_2, v_3, ..., v_n.

Al vector $v \in V$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

se llama vector combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3, ..., v_n.

Ejemplo 2.2 *En el espacio $M(R)_{2\times 2}$ cualquier matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es combinación lineal de las matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En efecto,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.3 *En el espacio de los polinomios P_n, cualquier polinomio se puede escribir como combinación lineal de los monomios 1, x, x^2, x^3, ..., x^n.*

Ejemplo 2.4 *Encuentra los escalares α_1 y α_2 que permiten expresar el vector $(2, 3)$ como combinación lineal de los vectores $(1, 3)$, $(2, 5)$.*

Definición 2.5 (Conjunto Generador) *Se dice que los vectores v_1, v_2,...,v_n en un espacio vectorial $V(K)$ generan a V si todo vector v en V se puede escribir como combinación lineal de los vectores v_1, v_2,...,v_n. Es decir, si existen escalares α_1, α_2, α_3,...,α_n tal que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

para todo vector $v \in V$.

Ejemplo 2.6 *El conjunto* $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *genera todo el espacio* $M(R)_{2\times 2}$. *En efecto, toda matriz* 2×2 *se expresa como combinación lineal de ellos.*

Ejemplo 2.7 *El conjunto* $S = \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ *genera al espacio* P_n. *(¿Por qué?)*

Ejemplo 2.8 *El conjunto de vectores* $S = \{(1,0), (0,1), (1,2), (3,4)\}$ *genera al espacio* $\mathbb{R}^2$. *En efecto, note que todo vector de* $\mathbb{R}^2$ *se puede expresar como combinación lineal de esta vectores:*

$$(a, b) = a(1,0) + b(0,1) + 0(1,2) + 0(3,4).$$

Como puede verse no hay nada especial con los vectores $(1,2)$ *y* $(3,4)$. *Estos vectores pueden ser reemplazados por cualquier par de vectores y el resultado sigue siendo válido. Más aún, se pueden seguir agregando más vectores al conjunto* S *y el resultado no varía siempre que cada escalar que sea múltiplo de él sea cero.*

El siguiente teorema es un método para encontrar subespacios de un espacio vectorial V.

Definición 2.9 (Espacio generado) *Sean los vectores* v_1, v_2,...,v_k *en un espacio vectorial* $V(K)$. *El espacio generado por* $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *es el conjunto de combinaciones lineales de* v_1, v_2,...,v_k. *Es decir,*

$$gen\{v_1, v_2, ..., v_k\} = \{v \in V : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k\}$$

Ejemplo 2.10 *Los monomios* 1, x, x^2 *generan el subespacio de polinomios de grado menor o igual a* 2. *Esto es:*

$$gen = \{1, x, x^2\} = \{p(x) : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2\} = P_2$$

Notese que los escalares son a_0, a_1, a_2. *Hemos usado esta notación por la costumbre de denotar polinomios de esta forma. Claramente, este conjunto no es el único conjunto que genera a* P_2. *Por ejemplo, el conjunto* $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ *también genera a* P_2. *En efecto, cualquier polinomio de grado* 2 *se puede expresar de la forma:*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + 0x^3 + 0x^4.$$

En los ejemplos 2.8 y 2.10 se aprecia que el conjunto de generadores de un subespacio no es único.

Un problema frecuente es determinar si un vector dado pertenece o no a un espacio generado por una colección de vectores.

Ejemplo 2.11 *¿El vector* $(1,2,3)$ *pertenece al espacio generado por los vectores* $(1,3,-1)$, $(-1,2,-1)$*?*

Solución. Para responder esta pregunta debemos investigar si el vector dado se puede expresar como combinación lineal de los vectores generadores. Esto, debemos investigar si existen escalares α y β que permitan expresar a $(1,2,3)$ de la siguiente manera:

$$(1,2,3) = \alpha(1,3,-1) + \beta(-1,2,-1).$$

De esta igualdad obtenemos al siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta = 2 \\ -\alpha - \beta = 3 \end{cases}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 3 & 2 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & 18 \end{pmatrix}$$

Como el rango de la matriz A es menor que el rango de la matriz A' el sistema no tiene solución, lo que sgnifica que no existen escalares α y β con tal condición. Por lo tanto el vector $(1,2,3) \notin gen\{(1,3,-1),(-1,2,-1)\}$.

Ejercicios Propuestos

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores no puede generar a $\mathbb{R}^2$?

   a) $(1,1),(2,2)$ *b*) $(3,2),(-1,3)$ *c*) $(2,4),(1,2)$ *d*) $(3,-1),(1,2),(2,-1)$

2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores no puede generar a $\mathbb{R}^3$?

   a) $(1,2,3),(-1,2,3),(5,2,3)$ *b*) $(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)$
   c) $(2,0,1),(3,1,2),(1,1,1),(7,3,5)$

3. ¿Cuales de los siguientes conjuntos de vectores no puede generar a $M(\mathbb{R})_{2\times 2}$?

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

4. Demuestre que si u y v están en $gen\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, entonces $u+v$ y αu también están en $gen\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Falso-verdadero

Justifica la veracidad de cada afirmación.

1. El vector $(3,5)$ está en el espacio generado por $\{(1,1),(2,4)\}$.
2. El vector $(1,2,3)$ está en el espacio generado por $\{(2,0,4),(-1,0,3)\}$.
3. El conjunto $\{1,x,x^2,x^3\}$ genera el espacio P_4.
4. El conjunto $\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5\}$ genera el espacio P_3.
5. Si el conjunto $\{(1,2),(2,3)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, entonces $\{(1,2),(2,3),(-2,5)\}$ también genera a $\mathbb{R}^2$.

2.1. Independencia Lineal

La dependencia e independencia lineal es uno de los conceptos centrales en el álgebra lineal.

Definición 2.12 (Dependencia e independencia lineal) *Consideremos una colección de n vectores en un espacio vectorial V: $v_1, v_2, ..., v_n$. Se dice que los vectores son linealmente independientes o constituyen un conjunto linealmente independiente si para toda combinación lineal*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Si los vectores no son linealmente independientes se dice que son linealmente dependientes.

Ejemplo 2.13 *Un vector v no nulo $v \neq \mathbf{0}$ en $V(K)$ es siempre linealmente independiente. En efecto,*

$$\alpha v = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$$

El siguiente teorema nos dice cuando dos vectores son linealmente dependientes

Teorema 2.14 *Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y sólo si uno es múltiplo escalar del otro. Es decir, dos vectores u, v son linealmente dependientes si, y sólo si existe un escalar α tal que $u = \alpha v$.*

Ejemplo 2.15 *Los vectores $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes.*

Solución. De acuerdo al Teorema 2.14, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes si, y sólo si existe α tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{3\alpha}{2} \\ -2\alpha & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2$$

Como existe un valor para α, se deduce que ambos vectores son linealmente dependientes.

Este teorema es muy útil para investigar la dependencia o independencia de dos vectores. A pasar de su utilidad no es aplicable para una cantidad superior de vectores. La mayoría de las veces nos va interesar estudiar dicha dependencia en un conjunto de vectores superior a dos vectores. En general, analizar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores depende de la solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. El siguiente teorema explica como vienen las soluciones en este tipo de sistemas.

Teorema 2.16 (Soluciones de un sistema lineal homogéneo)

1. *Un sistema lineal homogéneo tiene únicamente la solución trivial si el rango de la matriz asociada al sistema es mayor o igual al número de incógnitas.*

2. *Un sistema lineal homogéneo tiene varias soluciones, aparte de la solución trivial, si el rango de la matriz es menor que el número de incógnitas.*

Ejemplo 2.17 *Demuestra que los vectores* $(1, 3)$ *y* $(3, 4)$ *son linealmente independientes.*

Solución. Consideremos la siguiente combinación lineal

$$\alpha(1, 3) + \beta(3, 4) = \mathbf{0}$$

de la cual se deduce el sistema $\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$ Como podemos ver se trata de un sistema homogéneo donde el rango de la matriz asociada al sistema es igual al número de incógnitas (¿por qué?). Lo que significa que el sistema tiene como única solución la solución trivial $\alpha = \beta = 0$. Por lo tanto, los vectores son linealmente independientes.

Ejemplo 2.18 *Demuestra que los vectores* $(1, 4)$, $(3, -2)$ *y* $(-1, 3)$ *son linealmente dependientes.*

Ejemplo 2.19 *Demuestra que los vectores* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *son linealmente independientes.*

Ejemplo 2.20 *Demuestra que los vectores* 1, x, x^2 *y* x^3 *son linealmente dependientes.*

Ejemplo 2.21 *Demuestra que los vectores* $x-2x^2$, x^2-4x, $-7x+8x^2$ *son linealmente dependientes.*

Terminamos esta sesión con un teorema que nos será muy útil más adelante.

Teorema 2.22 *Si un conjunto* S *de* n *vectores es linealmente independiente, cualquier subconjunto de* S *es también linealmente independiente.*

Ejercicios Propuestos

1. Verifica lo establecido en los Ejemplos 2.18, 2.19, 2.20 y 2.21.

2. Sean f, g en $C^1[a,b]$. El wronskiano de f y g está definido por

$$W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

   Demuestre que si f y g son linealmente dependientes, entonces $W(f,g)(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

3. Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores es linealmente dependiente o independiente en el espacio $C[0,1]$

   a) $\operatorname{sen} x, \cos x$ *b*) $x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$ *c*) $x, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x$.

4. ¿Los polinomios 3, $2x$, $-x^3$ y $3x^4$ son linealmente independientes en P_4?

2.2. Base y Dimensión

Definición 2.23 (Base y Dimensión) *Un subconjunto* $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *de un espacio vectorial* V *es una base de* V *si*

1. $v_1, v_2, ..., v_n$ *es una colección de vectores linealmente independientes*

2. $gen\{v_1, v_2, ..., v_n\} = V$.

En este caso se dice que V *es un espacio de dimensión* n *y se denota* $\dim(V) = n$. *A estos espacios se les llama espacios de dimensión finita. Un espacio vectorial que no tenga una base de dimensión finita se les llama espacio de dimensión infinita. La dimensión del espacio vectorial cero es cero (a pesar de que el espacio vectorial cero no tiene base).*

Ejemplo 2.24 *El conjunto* $\mathbb{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ *es una base para el espacio* R^2 *y se llama la* ***base estándar*** *de* $\mathbb{R}^2$ *(verifique por qué). Lo que significa que* $dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Ejemplo 2.25 *El conjunto* $\mathbb{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *es una base para el espacio* R^3 *y se llama la base estándar de* $\mathbb{R}^3$ *(verifique por qué). Lo que significa que* $dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Ejemplo 2.26 *En general, el conjunto* $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *donde cada*

$$e_j = (0,0,...,0,\underbrace{1}_{j},0,...,0,0)$$

para $j = 1,...,n$. *Es la* ***base estándar*** *de* $\mathbb{R}^n$. *Lo que significa que* $dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Ejemplo 2.27 *El conjunto* $\mathbb{B} = \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ *es la* ***base estándar*** *de* P_n *(explique por qué). De modo que* $\dim(P_n) = n+1$. *En particular el espacio* P_3 *es generado por* $\{1, x, x^2, x^3\}$ *de modo que* $\dim(P_3) = 4$, *el espacio* P_2 *es generado por* $\{1, x, x^2\}$ *de modo que* $\dim(P_2) = 3$.

Ejemplo 2.28 *Consideremos las matrices* $E_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{en la posición } ij; \\ 0, & \textit{en otro lado.} \end{cases}$ *. El conjunto* $\mathbb{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, ..., E_{mn}\}$ *es la* ***base estándar*** *del espacio* $M(K)_{mn}$ *(explique por qué). Lo que significa que* $\dim(M(K)_{mn}) = mn$.

Hasta ahora los ejemplos presentados corresponden a espacios de dimensión finita. Los siguientes ejemplos nos presenta espacios de dimensión infinita.

Ejemplo 2.29 *Suponga que* P *es el espacio de los polinomios de cualquier grado. Veamos que no puede existir una colección finita de vectores que generen a un polinomio arbitrario en el espacio* P. *Razonemos por el absurdo, supongamos que existe una colección finita de vectores que genera a* P. *Digamos,* $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$. *Sea* p_k *el polinomio de mayor grado en* P *y digamos que* $N = grad(p_k)$. *Entonces el polinomio* x^{N+1} *no puede ser expresado como combinación lineal de los polinomios* $p_1, p_2, ..., p_m$, *lo cual es una contradicción porque ellos generan a* P. *Por lo tanto, el espacio* P *no puede ser generado por una colección finita de vectores. En este caso la base estándar de* P *es:*

$$\mathbb{B} = \{1, x, x^{\cdot} x^3, ..., x^n, ...\}$$

Este hecho nos permite afirmar que el espacio de las funciones continuas es también un espacio de dimensión infinita.

Ejemplo 2.30 *Si consideramos los polinomios como funciones definidas en un intervalo* $[a,b]$. *Entonces* $P[a,b] \subset C[a,b]$. *Razonemos nuevamente por el absurdo, si* $C[a,b]$ *fuera de dimensión finita, entonces* $P[a,b]$ *también tendría dimensión finita, pero esto contradice lo demostrado en el ejemplo anterior. De modo que* $C[a,b]$ *es de dimensión infinita. De manera análoga se comprueba que el espacio* $C^1[a,b]$ *es de dimensión infinita, esto debido a que* $P[a,b] \subset C[a,b]$. *Recuerde que los polinomios son continuos y tienen primera derivada continua.*

Además de las bases estándar un espacio vectorial puede tener muchas otras bases.

Ejemplo 2.31 *Demuestre que los vectores* $(1,2)$ *y* $(3,2)$ *constituyen una base para* $\mathbb{R}^2$.

Solución. Para verificar que $(1,2)$ y $(3,2)$ constituyen una base para $\mathbb{R}^2$, debemos ver que verifica dos condiciones: Son linealmente independientes, generan a $\mathbb{R}^2$. Veamos la primera (voy a usar el teorema 2.14),

$$(1,2) = \alpha(3,2) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1/3 \quad \text{y} \quad \alpha = 1$$

Como no existe un valor de α que verifique la condición se deduce que ambos vectores son linealmente independientes. Veamos si genera a $\mathbb{R}^2$, para ello, sea $v = (a,b)$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$ y veamos si existen escalares α, β que verifique la siguiente propiedad

$$\alpha(1,2) + \beta(3,2) = (a,b).$$

De esta igualdad obtenemos al siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = a \\ 2\alpha + 2\beta = b \end{cases}$$

Luego

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & \vdots & a \\ 2 & 2 & \vdots & b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & -4 & \vdots & -2a+b \end{array} \right)$$

De donde se obtienen los siguientes valores para α y β

$$\alpha = \frac{3b-2a}{4}, \quad \beta = \frac{2a-b}{4}.$$

Claramente, α y β existen para cualquier valor de a y b. Por lo tanto, los vectores $(1,2)$ y $(3,2)$ generan a $\mathbb{R}^2$ y como son linealmente independientes constituyen una base para $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.32 *Demuestre que el conjunto* $\mathbb{A} = \{1+x, -1+x, x^2\}$ *constituye una base para* P_2.

Solución. Se deja como ejercicio al lector.

Observación 2.33 *En los Ejemplos 2.31 y 2.32 hemos presentados dos bases distintas que generan a los espacios* $\mathbb{R}^2$ *y* P_2 *respectivamente. Notese que ambas bases tienen la misma cantidad de vectores que las bases estándar. Esto no es casualidad, esto es consecuencia del siguiente teorema.*

Teorema 2.34 *Si un espacio vectorial* V *tiene una base con* n *elementos (lo que es igual a decir que* $\dim(V) = n$*), entonces cualquier otra base de* V *también tiene* n *elementos.*

Ejemplo 2.35 *¿El conjunto* $\{1, x+1, x^2+2x\}$ *puede ser una base para* P_3*?*

Solución. De ser así, tendríamos una base para P_3 conformada por 3 vectores lo que significa que $\dim(P_3) = 3$. Esto contradice lo establecido en el Teorema 2.34. Por lo tanto, el conjunto $\{1, x+1, x^2+2x\}$ no puede ser una base para P_3.

El siguiente teorema determina el número de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión finita.

Teorema 2.36 *Un conjunto de* n *vectores en un espacio* V *de dimensión* m *es linealmente dependiente si* $n > m$*.*

Ejemplo 2.37 *Demuestre que el conjunto de vectores*

$$\{(1,3,4), (-2,1,-1), (2,1,3), (4,-3,1)\}$$

es linealmente dependiente.

Solución. En primer lugar observamos que los vectores $(1,3,4), (-2,1,-1), (2,1,3)$ y $(4,-3,1)$ pertenecen al espacio $\mathbb{R}^3$ y este espacio es de dimensión 3. Por lo tanto, tenemos 4 vectores en un espacio de dimensión 3 entonces, en virtud del Teorema 2.36, los vectores son linealmente dependientes.

Como consecuencia de este Teorema 2.36 tenemos el siguiente corolario

Corolario 2.38 *Un conjunto de* n *vectores en un espacio de dimensión* n *constituye una base para* V *si ellos son linealmente independientes.*

Ejemplo 2.39 *¿Los vectores* $(1,2,3)$*,* $(2,-1,3)$ *y* $(-1,3,-2)$ *constituyen una base para* $\mathbb{R}^3$*?*

Solución. En virtud del Corolario sólo debemos investigar si estos vectores son linealmente independientes. Comprobar esto lo dejamos como ejercicio para el lector.

Para concluir esta sesión, mostraremos una situación que ocurre con frecuencia

Teorema 2.40 *Sean V un espacio vectorial de dimensión n, S un subconjunto de $k < n$ vectores de V y W el subespacio de V generado por S. Si S es linealmente independiente entonces S es una base para W y* $\dim(W) < \dim(V)$.

Ejemplo 2.41 *En un espacio de dimensión n un vector no nulo genera un subespacio de dimensión 1 (¿por qué?). En particular, el vector $(1, 2)$ genera un subespacio de dimensión 1 en el espacio $\mathbb{R}^2$. A saber, el subespacio*

$$W = \{(x, y) : (x, y) = \alpha(1, 2)\} = \{(x, y) : x = \alpha, \quad y = 2\alpha\} = \{(x, y) : y = 2x\}$$

¡Una recta que pasa por el origen! tal como esperábamos. Recuerda que en $\mathbb{R}^2$ los únicos subespacios propios son las rectas que pasan por el origen.

Para concluir esta sesión mostraremos algunos ejemplos en donde se determina la base y dimensión de un subespacio dado.

Ejemplo 2.42 *Encuentre una base y la dimensión para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por*

$$H = \{(x, y, z) : 2x - 3y - 4z = 0\}$$

Solución.

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y, z) : 2x - y - 4z = 0\} = \{(x, y, z) : y = 2x - 4z\} \\ &= \{(x, 2x - 4z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, 2x, 0) + (0, -4z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 2, 0) + z(0, -4, 1) : x, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H = gen\{(1, 2, 0), (0, -4, 1)\}$. Sólo falta verificar que ambos vectores son linealmente independientes (eso queda como ejercicio para el lector). Por tanto, $\mathbb{B} = \{(1, 2, 0), (0, -4, 1)\}$ es una base para H y $\dim(H) = 2$.

Ejemplo 2.43 *Encuentre una base y la dimensión para el espacio solución del sistema homogéneo dado.*

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

Solución. Primero debemos definir el espacio solución. Del sistema tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De modo que el espacio solución viene dado por

$$S = \{(x, y, z) : x - 3y + z = 0, \quad 4y - z = 0\}$$

Luego, buscamos los vectores generadores de este espacio.

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) : x - 3y + z = 0, \quad 4y - z = 0\} = \{(x, y, z) : x = 3y - z, \quad z = 4y\} \\ &= \{(x, y, z) : x = -z, y = 1/4z\} = \{(-z, 1/4z, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1, 1/4, 1) : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el espacio solución esta generado por un solo vector y obviamente es linealmente independiente. En consecuencia, una base para S es $\mathbb{B} = \{(-1, 1/4, 1)\}$ y $\dim(S) = 1$.

Ejercicios Propuestos

1. Determine si el conjunto de vectores dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere

   a) En P_2: $1 - x^2$, x

   b) En P_2: $x^2 - 1$, $x^2 - 2$, $x^2 - 3$

   c) En P_3: 1, $1 + x$, $1 + x^2$, $1 + x^3$

   d) En $\mathbb{R}^3$: $(3, -2, 1)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, -3)$

   e) En $M(R)_{2\times 3}$:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En el espacio $\mathbb{R}^3$ investiga cuáles son los subespacios de dimensión 1 y cuáles son los subespacios de dimensión 2.

3. Suponga que los vectores v_1, v_2 y v_3 constituyen una base para el espacio vectorial V. Demuestra que los vectores $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$ y $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ también constituye una base para V.

4. Encuentre una base y la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios

a) $H = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$

b) $H = \{(x, y, z) : x = 4t, y = 3t, z = -5t\}$

c) $H = \{(x, y, z, w) : w = x + y, \quad z = x - y\}$

5. Encuentre una base para el espacio solución del sistema homogéneo dado.

a) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ -3x + 9y - 6z = 0 \end{cases}$