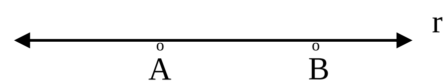
APUNTES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

CAPÍTULO 1: LA RECTA EN EL PLANO

Conceptos Primitivos: Punto, recta, plano.

Definición 1 (Segmento) Llamaremos segmento a la porción de una línea recta comprendida entre dos puntos. A esos dos puntos se les llama extremos del segmento. Así, para la recta r de la figura, *AB* es un segmento cuyos extremos son *A* y *B*.



La **Longitud** del segmento *AB* se representa por $\overline{AB}$.
Para efectos de la geometría analítica un segmento tiene **dirección**, en este caso *AB* es el segmento dirigido de *A* hacia *B*.
Al punto *A* se le llama punto inicial u **origen** y el punto *B* se le llama punto final o **extremo**.
El establecimiento de la dirección pasa por aceptar que si un segmento *AB* tiene longitud positiva, entonces el segmento *BA* tiene longitud negativa.

$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$

Relación fundamental entre tres puntos de un segmento: Para cualesquiera sean tres puntos en un segmento se cumple la relación: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Sistema Coordenado Lineal

Consideremos una recta *X'X* y sea *O* un punto cualquiera sobre *X'X*. Para cualquier punto *P* situado a la derecha de *O*, al segmento *OP*, de longitud positiva, corresponde un único número positivo *x*, y para cualquier punto *P'* a la izquierda de *O*, al segmento *P'O*, de longitud negativa, corresponde un único número negativo *x'*.

Definición 2 (**Sistema Coordenado Lineal**) Al conjunto de todos los puntos-números situados sobre la recta *X'X* se llama sistema coordenado lineal. Al número real *x* que corresponde al punto *P* se le llama coordenada del punto *P*. El punto *P* es la representación geométrica o gráfica del número real *x*. Mientras la coordenada *x* es la representación analítica del punto *P*. Se estable así una relación biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales.

Distancia entre dos puntos

Teorema 1: En un sistema lineal coordenado, la **longitud del segmento dirigido** que une dos puntos cualesquiera se obtiene, en magnitud y signo restando la coordenada del origen de la coordenada del extremo.

Demostración: Dados dos puntos $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$, por la relación fundamental entre tres puntos se tiene:

$$OP_1 + P_1P_2 = OP_2.$$

$$\text{Pero} \quad OP_1 = x_1 \text{ y } OP_2 = x_2.$$

$$\text{Luego} \quad x_1 + P_1P_2 = x_2$$

$$\text{Donde} \quad P_1P_2 = x_2 - x_1$$

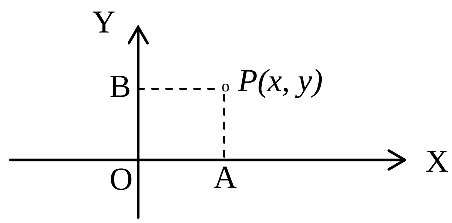
Definición 3: (Distancia entre dos puntos) Se define la distancia entre dos puntos como el valor absoluto de la longitud del segmento que une esos dos puntos. d = $\left|\overline{P_1P_2}\right| = \left|x_2 - x_1\right|$.

Sistema de coordenadas rectangulares

Definición 4 (**Sistema de coordenadas rectangulares**) Se llama sistema de coordenadas rectangulares al formado por dos rectas perpendiculares entre si que se cortan en el punto O, llamado origen del sistema. A la recta horizontal se le llama eje X o de las abscisas y a la recta vertical eje Y o de las ordenadas.

Determinan cuatro regiones, denominadas cuadrantes, numerados siguiendo un sentido contrario a las agujas del reloj. La dirección positiva del eje X es hacia la derecha y la del eje Y es hacia arriba.

Para cualquier punto P en el plano determinado por estas rectas existen dos números reales llamados coordenadas de P. La coordenada x sobre el eje X viene dada por la longitud del segmento *OA*, mientras la coordenada y sobre el eje Y viene dada por la longitud del segmento *OB*. Véase la figura. Esto se representa por P(x, y).



En correspondencia con lo dicho anteriormente, se establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano coordenado y un par ordenado de números reales.

Distancia entre dos puntos

Teorema 2: La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ viene dada por:

$$d(P_1\,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demostración: Es inmediata aplicando Teorema de Pitágoras.

División de un segmento en una razón dada.

Teorema 3: Si $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento, entonces las coordenadas del punto P(x, y) que divide a este segmento en la razón $r = P_1P : PP_2$ son

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}\ ,\ \ y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}\ ,\ r \neq -1$$

Demostración: Hacer $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \dfrac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}}$, siendo A_1, A, A_2 los pies de las perpendiculares sobre el eje X de los puntos P_1, P, P_2, respectivamente. Esto permite hallar el valor de x. Un procedimiento similar de los pies de las perpendiculares de los puntos dados sobre el eje Y, permite encontrar el valor de *y*.

Corolario: Las coordenadas del punto medio de un segmento cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ vienen dadas por:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \ , \ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Pendiente de una recta

Definición 5 (Ángulo entre dos rectas) Se llama ángulo de dos rectas dirigidas al formado por los lados que se alejan del vértice.
Si dos rectas son paralelas entonces forman un ángulo de 0º si tienen la misma dirección y 180º si tienen dirección contraria.
Al ángulo mayor que 180º que forman dos rectas al cortarse se le llama ángulo cóncavo. Para efectos de este curso, sólo consideraremos ángulos menores o iguales a 180º.

Definición 6 (Ángulo de inclinación) Se llama ángulo de inclinación de una recta al formado por la parte positiva del eje X y la recta, cuando esta se considera dirigida hacia arriba. Por convención sólo trataremos rectas dirigidas hacia arriba. Nótese que para rectas dirigidas hacia abajo sería suficiente considerar la dirección negativa del eje X.
De acuerdo a las definiciones 5 y 6, el ángulo de inclinación α de una recta cumple con

$$0º \leq \alpha \leq 180º$$

Definición 7 (Pendiente de una recta) Se llama pendiente de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación. Si designamos con m el valor de la pendiente de una recta, tendremos que $m = tg\alpha$, siendo α el ángulo de inclinación de dicha recta.

Observación: Qué ocurre con el valor de la pendiente de una recta vertical (paralela al eje Y)?. El ángulo de inclinación de una recta paralela al eje Y es $\alpha = 90º$, para el cual la tangente no existe, recordemos que $tg90º = \infty$, donde ∞ no es un número. Así para una recta paralela al eje Y la pendiente no existe.

Teorema 4: Si $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta viene dada por

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, x_1 \neq x_2$$

Demostración: Es inmediata al considerar la relación trigonométrica de la tangente como razón entre los catetos de un triángulo rectángulo.

Observación: Si $x_1 = x_2$ entonces la recta es paralela al eje Y y por tanto la pendiente no existe. Nótese además que se pueden conmutar los valores de las coordenadas de los puntos, ambos simultáneamente, y el valor que se obtiene para la pendiente es el mismo.

Significado de la frase *"condición necesaria y suficiente"*

En la proposición condicional p → q, cuando la misma constituye una afirmación verdadera, la proposición p se dice que es condición suficiente y la proposición q se dice que es necesaria. Note que si al mismo tiempo la proposición p fuese condición necesaria y suficiente se tendría una proposición de la forma p ↔ q, conocida como bicondicional. Cuando una proposición condicional p → q, es verdadera, siendo además p verdadera, se dice que es una implicación, lo cual se interpreta diciendo que la ocurrencia de p asegura la ocurrencia de q. Note que siendo p verdadera, el valor de verdad de la implicación depende del valor de verdad de q; si q es verdadera, entonces la implicación p → q será verdadera.

Teorema 5: El ángulo θ formado por dos rectas que se cortan se obtiene a partir de la relación $tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, $m_1 m_2 \neq -1$ donde m_1 es la pendiente inicial y m_2 es la pendiente final correspondiente al ángulo θ.

Demostración: Ejercicio.

Corolario 1: La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales.

Previo a la demostración del corolario observemos que el enunciado del corolario puede rescribirse diciendo: Dos rectas son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales. Lo que implica la demostración de un bicondicional.

Demostración: (⇒) Si las rectas r_1, r_2 son paralelas, por la definición 5 ellas forman ángulos de 0º o 180º, en cualquier caso tgθ = 0. Por lo que, según teorema 5, $m_2 - m_1 = 0$ y por tanto $m_2 = m_1$.
(⇐) Si $m_2 = m_1$, entonces $m_2 - m_1 = 0$, así, por teorema 5, tgθ = 0, con lo cual el resultado es inmediato.

Corolario 2: La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares entre sí, es que el producto de sus pendientes sean iguales a –1.

Demostración: (⇒) Si las rectas r_1, r_2 son perpendiculares, el ángulo entre ellas es 90º, por teorema 5, $ctg\theta = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$. Como $ctg 90º = 0$, entonces $1 + m_1 m_2 = 0$, de donde $m_1 m_2 = -1$.
(⇐) Si $m_1 m_2 = -1$, por teorema 5, $ctg\theta = 0$, por lo que θ = 90º, resultando r_1 y r_2 perpendiculares.

Demostración de teoremas geométricos por el método analítico. Los teoremas enunciados y demostrados en Geometría Plana pueden ser probados utilizando métodos de la geometría analítica. A diferencia que en la geometría plana, en la geometría analítica se cuenta con un sistema de coordenadas y las demostraciones se basan en un uso apropiado del mismo. Es necesario que al momento de realizar la demostración se realice un dibujo de la situación problema, el cual debe ser el más sencillo posible, pero sin particularizar la situación a demostrar. Por ejemplo, al demostrar un teorema referente a triángulos, bien podemos utilizar los puntos P (a, b), Q (c, d), R (e, f) como los vértices del triángulo, sin embargo debemos notar que tal utilización complicaría más de lo debido la demostración, pues se tienen seis coordenadas desconocidas. Es conveniente, en este caso tomar dos de los vértices sobre el eje X, incluso, uno de ellos en el origen (0, 0), el segundo tendría coordenadas (a, 0) y el tercero (b, c), reduciéndose el número de coordenadas desconocidas a tres. No obstante la simplificación que se busca no debe llevar a una particularización de la situación; en efecto, podríamos asumir que el tercer punto se encuentra sobre el eje Y, pero esto nos llevaría a estar considerando un triángulo rectángulo lo cual no representa a cualquier triángulo.

Dos problemas fundamentales de la geometría analítica.

1. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente.
2. Dada una figura geométrica o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Gráfica de una ecuación

La forma general de una ecuación de dos variables puede escribirse como $f(x, y) = 0$.

Definición 6: (Gráfica de la ecuación o lugar geométrico) El conjunto de puntos que satisface una ecuación $f(x, y) = 0$, se llama gráfica de la ecuación o, bien su lugar geométrico.

Definición 7: Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $f(x, y) = 0$ pertenecen a la gráfica de la ecuación.

Es necesario enfatizar en la reciprocidad que encierran las definiciones enunciadas. Es decir, si un punto satisface la ecuación $f(x, y) = 0$, entonces está en su gráfica y, recíprocamente, si un punto está en la gráfica, entonces satisface su ecuación.

Observación: Se debe tener en cuenta que no todas las ecuaciones del tipo $f(x, y) = 0$ tienen necesariamente una gráfica o representen un lugar geométrico. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + 4 = 0$. Para esta ecuación no existen puntos con ambas coordenadas números reales que la satisfagan, por tanto dado que nuestro sistema coordenado está restringido a pares ordenados de números reales, entonces la misma no tiene gráfica.

Para la determinación de la gráfica de una ecuación no es suficiente con tratar de deducirla a través de lo que indiquen un conjunto finito de sus puntos. Para ello es necesario hacer un estudio que comprende los siguientes procedimientos:

1. Intercepciones con los ejes.
2. Simetrías.
3. Extensión de la curva.
4. Asíntotas.
5. Cálculo de algunas coordenadas.

Definición 8: (Intercepciones con los ejes) Llamaremos intercepción de una curva con el eje X a la abscisa del punto de intersección de la curva con el eje. Análogamente, la intercepción de una curva con el eje Y es la ordenada del punto de intersección de la curva con el eje.

Es claro que para el punto de intersección con el eje X, la coordenada en Y es cero. Por tanto es suficiente hacer y = 0 en la ecuación para encontrar las intercepciones posibles. Análogamente para Y.

Definición 9: (Simetría respecto a una recta – eje de simetría) Se dice que dos puntos son simétricos con respecto a una recta si la recta es perpendicular al segmento que los une en su punto medio. La recta respecto a la cual los puntos son simétricos se llama eje de simetría.

Definición 10: Se dice que dos puntos son simétricos con respecto a un punto O si O es punto medio del segmento que los une. El punto O se llama punto de simetría.

Teorema 6: Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable y es reemplazada por –y, entonces la curva es simétrica con respecto al eje X.

Demostración: Dada una curva cuya ecuación viene dada por $f(x, y) = 0$, supongamos que $f(x, y) = 0$ no se altera al reemplazar y por –y, esto dice que $f(x, -y) = 0$, de lo cual se deduce que los puntos (x, y), (x, –y) están en la curva. El segmento que une estos dos puntos es perpendicular al eje X siendo (x, 0) el punto de intercepción del eje con tal segmento, dónde, además $\frac{x+x}{2} = x$ y $\frac{y+(-y)}{2} = 0$, (x, 0) es el punto medio de dicho segmento. Así la curva es simétrica respecto al eje X.

Observación: El recíproco del Teorema 6 es también verdadero. Su enunciado y demostración se deja como ejercicio.

Análogo al Teorema 6 se tiene el siguiente

Teorema 7: Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable x es reemplazada por –x, entonces la curva es simétrica con respecto al eje Y.

Demostración: Es totalmente análoga a la del Teorema 6.

Teorema 8: Si la ecuación de una curva no se altera cuando las variables x, y son reemplazadas por –x, –y respectivamente entonces la curva es simétrica con respecto al origen y recíprocamente.

Demostración: Si al hacer los reemplazos correspondientes, la ecuación de la curva no se altera, entonces los puntos (x, y) y (–x, –y) están en la curva, y dado $\frac{x+(-x)}{2} = 0$, $\frac{y+(-y)}{2} = 0$, entonces la curva es simétrica respecto al origen (0, 0).

Observación: Nótese que de los teoremas 6, 7, 8, resulta que si una curva es simétrica respecto a ambos ejes, entonces es simétrica respecto al origen. Sin embargo, el recíproco de esta afirmación no es verdadero. Como ejemplo vale citar la curva cuya ecuación es $xy = 1$.

Extensión de una curva. El estudio de extensión de una curva es la determinación de los intervalos de variación para los cuales x, y son números reales. Esto permite determinar la localización de la curva y saber si la curva es cerrada o de extensión indefinida. La determinación de los intervalos para los cuales x, y son reales, se obtienen simplemente resolviendo la ecuación dada para y en términos de x y para x en términos de y.

Definición 11: (Asíntotas) Si para una curva dada, existe una recta tal que a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende cero, entonces dicha recta se llama asíntota de la curva.

Observación: La existencia de una asíntota a la curva implica dos cosas: 1. una curva que tenga asíntota no es una curva cerrada, sino que se extiende indefinidamente; 2. una curva se aproxima a la asíntota en la medida que se extiende más y más.

La diferentes orientaciones de una asíntota pueden ser: Horizontal, Vertical, Oblicua. Para el estudio inicial que se realiza de la gráfica de curvas sólo trabajaremos las asíntotas horizontal y vertical.

Proposición: Una asíntota vertical cuya distancia al eje Y es un número k, tiene como ecuación $x = k$.

Demostración: Debemos verificar dos cuestiones: a) si un punto está en la asíntota vertical, debe satisfacer la ecuación, y, b) si un punto satisface la ecuación entonces está en la asíntota vertical. Primero observemos que si P es un punto que está en la asíntota vertical, entonces P tiene abscisa $x = k$, por lo que se verifica inmediatamente la primera cuestión. Ahora si un punto satisface la ecuación $x = k$, tendrá como abscisa el valor k, con lo cual está en la asíntota cuya distancia al eje Y es k.

Observación: Análogamente a la situación anterior, se puede probar que una asíntota horizontal cuya distancia al eje X es un número k , tendrá como ecuación $y = k$.

Para finalizar la construcción de curvas se recomienda revisar los ejercicios resueltos del libro texto.