

Guía de Integrales Definidas. Matemáticas II

Prof. Wilson Herrera.

1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$

i) $\int_0^1 \frac{z^3}{z^8 + 1} dz$

b) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx$

j) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 \alpha d\alpha$

c) $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy$

k) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx$

l) $\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{y^6+4}} dy$

e) $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi$

f) $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$

n) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

g) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2} dx$

ñ) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

h) $\int_{-1}^1 \frac{y^2}{y+2} dy$

o) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

2. Utilizando las sustituciones que se indican, calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad x = t^2$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{3+2\cos t}, \quad \tan \frac{t}{2} = z$

b) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx, \quad e^x-1 = z^2$

d) $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3} dx, \quad x-2 = z^3$

3. Valiéndose de sustituciones adecuadas, calcular las integrales:

a) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$

c) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$

b) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

d) $\int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}$

Áreas de figuras planas.

4. Encuentre el área de la figura limitada por $y = x^4 - 2x^3 + 2$, $y = 0$ entre $x = -1$ y $x = 2$.
5. Encuentre el área de la región limitada por $y = \frac{x^2}{3} - 4$, el eje x , $x = -2$ y $x = 3$.
6. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje de las abscisas.
7. Calcular el área de la figura limitada por la curva $y = \ln x$, el eje OX y la recta $x = e$.
8. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX .
9. Calcular el área de la figura comprendida entre una semionda de la senoide $y = \sin x$ y el eje OX .
10. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y^3 = x$, la recta $y = 1$ y la vertical $x = 8$.
11. Calcular el área de la figura comprendida entre la curva $y = \tan x$, el eje OX y la recta $x = \frac{\pi}{3}$.
12. Calcular el área del segmento de la parábola $y = x^2$, que corta la recta $y = 3 - 2x$.
13. Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ y la recta $y = 2x$.
14. Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = \frac{x^2}{3}$ y $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

-
15. Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.
16. Calcular el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = 2x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 8$.
17. Calcular el área de la superficie comprendida entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y la parábola $x^2 = 12(y - 1)$.
18. En los siguientes ejercicios hallar el área comprendida por las curvas dadas.
- a) $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$, $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 3$
- b) $y = 5x - x^2$, $y = 0$, entre $x = 1$ y $x = 3$
- c) $y = (x - 4)(x + 2)$, $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 3$
- d) $y = x^2 - 4x - 5$, $y = 0$, entre $x = -1$ y $x = 4$
- e) $y = \frac{1}{4}(x^2 - 7)$, $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 2$
- f) $y = x^3$, $y = 0$, entre $x = -3$ y $x = 3$
- g) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, entre $x = -2$ y $x = 2$
- h) $y = \sqrt{x} - 10$, $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 9$
- i) $y = (x - 3)(x - 1)$, $y = x$
- j) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 4$, $x = 0$
- k) $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2$
- l) $y = x^2 - 9$, $y = (2x - 1)(x + 3)$
- m) $x = 8y - y^2$, $x = 0$
- n) $x = (3 - y)(y + 1)$, $x = 0$
- $\tilde{n}$) $x = -6y^2 + 4y$, $x + 3y - 2 = 0$
- o) $x = y^2 = 2y$, $x - y - 4 = 0$
- p) $4y^2 - 2x = 0$, $4y^2 + 4x - 12 = 0$

$$q) \ x = 4y^4, \ x = 8 - 4y^4$$

19. Hallar el área del círculo de radio r .

20. Hallar el área de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Volumenes de sólidos de revolución.

21. Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región R , acotada por $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$.

22. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la curva $y = x^3$, el eje y y la recta $y = 3$ en torno al eje y .

23. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las parábolas $y = x^2$, y $y^2 = 8x$

24. La región semicircular acotada por la curva $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y se hace girar alrededor de la recta $x = -1$. configure la integral que representa su volumen.

25. En los siguientes ejercicios halle el volumen del sólido generado al hacer girar la figura alrededor del eje x .

$$a) \ y = \frac{x^2}{\pi}, \ y = 0$$

$$b) \ y = x^3, \ x = 3, \ y = 0$$

$$c) \ y = \frac{1}{x}, \ x = 2, \ x = 4, \ y = 0$$

$$d) \ y = x^{3/2}, \ y = 0, \ \text{entre } x = 2 \text{ y } x = 3$$

$$e) \ y = \sqrt{9 - x^2}, \ y = 0, \ \text{entre } x = -2 \text{ y } x = 3$$

$$f) \ y = x^{2/3}, \ y = 0, \ \text{entre } x = 1 \text{ y } x = 27$$

26. En los siguientes ejercicios halle el volumen del sólido generado al hacer girar la figura alrededor del eje y .

$$a) \ x = y^2, \ x = 0, \ y = 3$$

$$b) \ x = \frac{2}{y}, \ y = 2, \ y = 6 \ x = 0$$

$$c) \ x = 2\sqrt{y}, \ y = 9, \ x = 0$$

$$d) \ x = y^{2/3}, \ y = 27, \ x = 0$$

$$e) \ x = \sqrt{4 - y^2}, \ x = 0$$

27. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar en torno al eje x la región acotada por la mitad superior de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y el eje x .

28. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x , la región acotada por la recta $y = 6x$ y la parábola $y = 6x^2$.

29. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x , la región acotada por la recta $x - 2y = 0$ y la parábola $y^2 = 4x$.

30. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x , la región en el primer cuadrante acotada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, el eje x y la recta $x = r - h$, $0 < h < r$, calculando así el volumen de un *casquete esférico* de altura h , de una esfera de radio r .

31. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno a la recta $y = 2$, la región en el primer cuadrante acotada por las parábolas $3x^2 - 6y + 48 = 0$ y $x^2 - 16y + 80 = 0$ y el eje y .

32. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $x = 4$ y el eje x :

$$a) \text{ en torno a la recta } x = 4; \quad b) \text{ en torno a la recta } y = 8.$$

33. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $y = 8$ y eje y :

a) en torno a la recta $x = 4$; b) en torno a la recta $y = 8$.

34. La región acotada por $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, el eje x , $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar en torno al eje y . Encuentre el volumen del sólido resultante.

35. La región acotada por la recta $y = (r/h)x$, el eje x y $x = h$ se hace girar alrededor del eje x y por ello se genera un cono. Encuentre el volumen del sólido generado.

36. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar en torno al eje y , la región en el primer cuadrante que está por encima de la parábola $y = x^2$ y por debajo de la parábola $y = 2 - x^2$.

37. Encuentre el volumen del sólido generado de las regiones acotadas por las curvas dadas, alrededor del eje que se indica.

a) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; alrededor del eje y

b) $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$; alrededor del eje y

c) $y = \sqrt{x}$, $x = 3$, $y = 0$; alrededor del eje y

d) $y = 9 - x^2 (x \geq 0)$, $x = 0$, $y = 0$; alrededor del eje y

e) $y = \sqrt{x}$, $x = 5$, $y = 0$; alrededor de la recta $x = 5$

f) $y = 9 - x^2 (x \geq 0)$, $x = 0$, $y = 0$; alrededor de la recta $x = 3$

g) $y = \frac{1}{4}x^3 + 1$, $y = 1 - x$, $x = 1$; alrededor del eje y

38. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación, alrededor del eje OX , de la superficie limitada por el eje OX y la parábola $y = ax - x^2$ ($a > 0$).

39. Hallar el volumen del elipsoide, engendrado por la rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje OX .

Longitud de Arco.

40. Encuentre el perímetro de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.
41. Encuentre la longitud del segmento de recta de $A(0, 1)$ a $B(5, 13)$.
42. Encuentre la longitud de arco de la curva $y = x^{3/2}$, desde el punto $(1, 1)$ hasta el punto $(4, 8)$.
43. En los ejercicios siguientes encuentre la longitud de la curva que se indica.
 - a) $y = 4x^{3/2}$ entre $x = 1/3$ y $x = 5$
 - b) $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 2$
 - c) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 8$
 - d) $y = \frac{x^4 + 3}{6x}$ entre $x = 1$ y $x = 3$
 - e) $x = \frac{y^4}{16} + \frac{1}{2y^2}$ entre $y = -3$ y $y = -2$
 - f) $30xy^3 - y^8 = 15$ entre $y = 1$ y $y = 3$
44. Hallar la longitud de arco de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
45. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ desde el origen de coordenadas hasta el punto cuyas coordenadas son $x = 4$, $y = 8$.
46. Hallar la longitud de la catenaria $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ desde el vértice $A(0, a)$ hasta el punto $B(b, h)$.
47. Calcular la longitud de arco de la parábola $y = 2\sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Coordenadas polares

48. Hallar el área de la figura limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$.
49. Hallar el área comprendida entre la primera y segunda espira de la espiral de Arquímedes $r = a\varphi$.

50. Hallar el área limitada por la curva $r^2 = a^2 \sin 4\varphi$.
51. Hallar el área limitada por el caracol de Pascal $r = 2 + \cos \varphi$.
52. Hallar el área limitada por la parábola $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ y las semirrectas $\varphi = \frac{\pi}{4}$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
53. Hallar el área de la figura limitada por la curva $r = 2a \cos 3\varphi$, que está fuera del círculo $r = a$.
54. *Continuara*