TEORÍA DE JUEGOS

1 Definiciónes y Conceptos Básicos.

1.1 Definición:

La teoría de juegos es una herramienta de análisis económico usada para estudiar problemas caracterizados por la interacción estratégica entre agentes económicos. La teoría de juegos puede ser utilizada para analizar juegos sencillos como el *tic-tac-toe* (la vieja), problemas de mercados oligopólicos y hasta de negociación política como en el diseño y ubicación de un sistema antimisiles. Todos estos juegos se caracterizan por la interacción entre las decisiones de los agentes y cómo esas decisiones no solo afectan al jugador que realiza la decisión sino también a otros jugadores envueltos en el problema.

Los juegos objeto de análisis pueden ser:

Cooperativos: si existe la posibilidad de establecer un acuerdo entre los jugadores.

No cooperativos: juegos caracterizados por la rivalidad entre las estrategias y decisiones de los jugadores. Estos a su vez pueden ser estáticos, repetidos o secuenciales.
El tipo de juegos que se abordarán en este curso son de naturaleza no cooperativa ya que son los que brindan la posibilidad de estudiar situaciones caracterizadas por la interacción estratégica.

1.2 Elementos de un juego

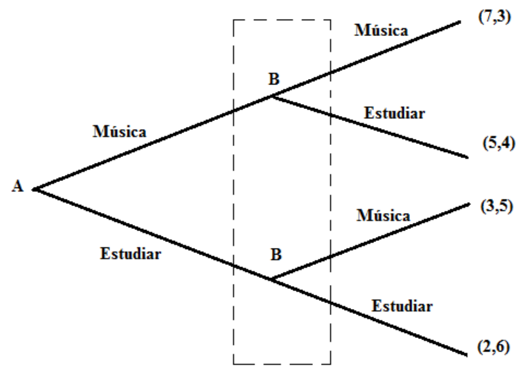
a. Jugadores: se necesitan por lo menos dos jugadores para desarrollar un juego. Aunque en algunas circunstancias pudiera existir un solo jugador. Ejemplo: un agricultor quiere seleccionar el mejor día para sembrar. En este juego, el agricultor está jugando un juego contra la naturaleza. Se usarán las letras mayúsculas del alfabeto, como A y B, para denotar el nombre de cada jugador y de esta manera se imprime un carácter impersonal al juego.
b. Estrategias: cada jugador tiene al menos un par de estrategias. No existe un jugador que tenga una sola estrategia ya que evidentemente esta no sería una estrategia. Las estrategias se caracterizan por contener elementos de incertidumbre que conllevan a cada jugador a asignar probabilidades a los diferentes resultados del juego. Se designan las letras S_A y S_B a los conjuntos de estrategias de los jugadores A y B, respectivamente.
c. El resultado de un juego para cada jugador al final del mismo se denomina "pago". Estos pueden ser medidos en términos de utilidad o bienestar, si se trata de consumidores, o en unidades monetarias como, por ejemplo, las ganancias o beneficios para las empresas. En general, se supone que cada jugador puede ordenar los pagos de mayor a menor y evidentemente seleccionar la o las estrategias que le permitan obtener el pago óptimo.
Notación:
Usualmente no es necesario escribir de manera completa un juego sino que una descripción literaria del mismo serviría como sustituto. De acuerdo con la notación estándar, se denota un juego particular G entre dos jugadores A y B por:

$$G[S_A, S_B, U_A(a,b), U_B(a,b)]$$

donde S_A y S_B representa el conjunto de estrategias disponibles a los jugadores A y B, $U_A(a,b)$ y $U_B(a,b)$ representan las utilidades o pagos obtenidos cuando cada jugador escoge una estrategia particular ($a \in S_A, b \in S_B$).

1.3 Representación de un juego.

Los juegos pueden ser representados de manera extensiva, en forma de árbol, o de manera normal, en forma matricial o tabular.
Ejemplo: El problema de dos estudiantes que comparten su dormitorio pero donde uno desea escuchar su música favorita y no desea tanto estudiar mientras que al otro le ocurre lo contrario.



El mismo juego puede ser representado de manera formal como:

	B	
A	Música	Estudiar
Música	7,3	5,4
Estudiar	3,5	2,6

En primer lugar, la forma extensiva del juego permitiría ver que el jugador A es quien realiza el primer movimiento y B ejecuta sus movimientos una vez conocida la decisión de A. Sin embargo, dado que se están analizando solo juegos estáticos, por el momento, los movimientos se realizarían de manera simultánea, de manera que para indicar la simultaneidad de movimientos, se introduce un rectángulo de línea discontinua alrededor de los nódulos de decisión de B. En la forma normal del juego no se puede apreciar quien realiza el primer movimiento. Adicionalmente, los pagos se leen de izquierda a derecha. Por ejemplo, si el jugador A, selecciona Música y B selecciona Estudiar entonces los pagos 5,4 significan que A recibe una utilidad de 5 mientras que B solo recibe 4 y así sucesivamente con el resto de pagos del juego.

2 Equilibrio de Nash.

Es un par de estrategias (a^*, b^*) representan una solución de equilibrio en un juego de dos jugadores, si a^* es la estrategia óptima de A cuando B escoge b^* y b^* es la estrategia óptima de B cuando A escoge a^*.
Por ejemplo, en el juego de los dos estudiantes expuesto anteriormente (alto, bajo) es una solución de equilibrio en el sentido de Nash, ya que *alto* es óptimo para A si B juega *bajo* y *bajo* es óptimo para B si A juega *alto*.

2.1 Equilibrios de Nash en estrategias puras.

La definición dada previamente para el equilibrio de Nash se restringe al caso de un equilibrio en estrategias puras; es decir, es un equilibrio en donde ambos jugadores escogen una y sólo una estrategia.
Para entender mejor, el sentido de la definición de equilibrio, es necesario introducir la definición de estrategia dominante.
Estrategia Dominante:
Se dice que a es una estrategia dominante para el jugador A, si es la mejor estrategia independientemente de las estrategias disponibles a B. Formalmente, $U_A(a,b) > U_B(a',b)$.
Por ejemplo, en el problema de los estudiantes, ¿Tiene alguno de los estudiantes una estrategia dominante? Evidentemente, *Música* es la estrategia dominante para A ya que es la mejor estrategia independientemente de qué estrategia seleccione B, mientras que *Estudiar* es la estrategia dominante para el jugador B.

2.1.1 Equilibrios de Nash.

Equilibrio en estrategias dominantes. Ocurre cuando ambos jugadores tienen cada uno una estrategia dominante. Por ejemplo:

	B	
A	Música	Estudiar
Música	7,3	5,4
Estudiar	3,5	2,6

Estrategia dominante de A: *Música*
Estrategia dominante de B: *Estudiar*
En consecuencia, (*Música*, *Estudiar*) es un equilibrio de Nash.

Equilibrio múltiple de Nash: Ocurre cuando existen más de dos equilibrios en un juego. Por ejemplo:

	B	
A	Música	Estudiar
Música	3,3	5,4
Estudiar	4,5	4,4

Como se puede apreciar ninguno de los dos jugadores posee una estrategia dominante. No obstante, dada la definición de equilibrio de Nash, (*Música*, *Estudiar*) y (*Estudiar, Música*) constituyen dos equilibrios de Nash.

Juegos sin equilibrio de Nash en estrategias puras

	B		
A	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0,0	-1,1	1,-1
Papel	1,-1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1,-1	0,0

Como se puede observar en este juego, no existe una estrategia dominante para ninguno de los jugadores ni existe un equilibrio de Nash en estrategias puras.

2.1.2 El dilema del Prisionero

	B	
A	Confesar	No Confesar
Confesar	-3,-3	0,-5
No Confesar	-5,0	-1,-1

Estrategia dominante: Cada jugador tiene una, confesar.
Equilibrio de Nash: (confesar, confesar) pero no es óptimo de Pareto.
Si ambos cooperan, entonces, ambos podrían beneficiarse.

2.2 Juegos de Estrategias Mixtas

Hasta el momento se han venido discutiendo juegos que por su naturaleza implican la escogencia de una y solo una estrategia. Sin embargo, se puede presentar el caso de que un juego se repitiera una y otra vez de manera continua. Considere el siguiente ejemplo. La batalla de los sexos donde dos esposos deben decidir sobre qué película ver (Romántica o de Vaqueros) que se muestra a continuación.

	B	
A	R	V
R	2,1	0,0
V	0,0	1,2

Como se puede apreciar, en este juego existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (R, R) y (V, V).

Dada la incertidumbre envuelta en las decisiones de los esposos se podría pensar en otra alternativa. Por ejemplo, que cada esposo pre-seleccionara una probabilidad óptima para jugar cada estrategia. En este caso es posible entonces pensar en un concepto de equilibrio de Nash un poco más amplio. Uno que incluya la mezcla de estrategias de acuerdo con cierta probabilidad. Este tipo de estrategias se denomina: Estrategia Mixta.

Se define como **estrategia mixta** al conjunto de estrategias que un jugador puede jugar de acuerdo con una determinada frecuencia o probabilidad. En consecuencia, **un equilibrio de Nash en estrategias mixtas** se define como el par de probabilidades p_A y $1 - p_A$, tal que el jugador A jugará R con probabilidad p_A y V con probabilidad $1 - p_A$ dada la frecuencia óptima de juego para el jugador B y un par de probabilidades p_B y $1 - p_B$ tal que el jugador B jugará R con probabilidad p_B y V con probabiliadad $1 - p_B$ dada la frecuencia óptima para A.
Para comprender mejor la naturaleza del juego y su solución considérese el ejemplo anterior. Supóngase además que A selecciona R con probabilidad r y V con probabilidad $1 - r$. De igual manera, B escoge R con probabilidad s y V con probabilidad $1 - s$. Dadas estas probabilidades, cada uno de los resultados del juego puede ocurrir de acuerdo con las siguientes probabilidades: $R, R = rs$; $R, V = r(1 - s)$; $V, R = (1 - r)s$; $V, V = (1 - r)(1 - s)$.

El problema para cada jugador consiste en seleccionar la mejor frecuencia con que jugar cada una de sus estrategias con el fin de maximizar su función objetivo (utilidad o ganancia) esperada; es decir la utilidad esperada de A vendría dada por:
$UE_A = 2rs + r(1 - s)(0) + (1 - r)s(0) + (1 - r)(1 - s)(1)$
$UE_A = 1 - s + r(3s - 1)$

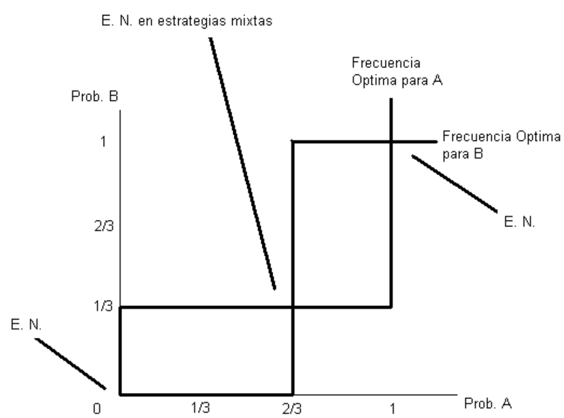
De la misma manera, la función de utilidad esperada para B sería:
$UE_B = rs + r(1 - s)(0) + (1 - r)s(0) + (1 - r)(1 - s)(2)$
$UE_B = 2 - 2r + s(3r - 2)$

Cada jugador debe pues seleccionar la mejor frecuencia dada la frecuencia del otro jugador. Para ello, cada jugador maximiza su función de utilidad esperada. Las condiciones de primer orden derivadas del problema de optimización de cada jugador serían como sigue:

Para A:
Max $UE_A = 1 - s + r(3s - 1)$
$\{r\}$
CPO. $3s - 1 = 0 \Rightarrow s = 1/3$.
Si $s = 1/3$, entonces A puede seleccionar cualquier frecuencia para sus estrategias.
Si $s < 1/3$, entonces A debe hacer $r = 0$. Es decir, debe ver películas de acción o jugar V.
Si $s > 1/3$, entonces A debe hacer $r = 1$. Es decir, debe ver películas románticas o jugar R.

Para B:
Max $UE_B = 2 - 2r + s(3r - 2)$
$\{s\}$
CPO. $3r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2/3$.
Si $r = 2/3$, entonces B puede seleccionar cualquier frecuencia para su estrategia.
Si $r < 2/3$, entonces B debe hacer $s = 0$. Es decir, debe ver películas de acción o jugar V.
Si $r > 2/3$, entonces B debe hacer $s = 1$. Es decir, debe ver películas románticas o jugar R.

Dada la definición de equilibrio de Nash,
El jugador A jugará R con probabilidad de 2/3 y V con probabilidad de 1/3 y B jugará R con probabilidad de 1/3 y V con probabilidad de 2/3.
$UE_A = 1 - (1/3) + (2/3)(3(1/3) - 1) = 2/3$
$UE_B = 2 - 2(2/3) + (1/3)(3(2/3) - 2) = 2/3$



3 Juegos Repetidos

Hasta el momento hemos discutido los juegos estáticos ya que hemos supuesto que las decisiones de los jugadores en un juego se toman una y sólo una vez. Sin embargo, en el mundo real los juegos a veces se juegan una y otra vez. Por ejemplo, lanzar una moneda es un juego que puede jugarse un número infinito o finito de veces. Otro ejemplo, es el juego común de los niños piedra, papel o tijera. Este juego suele hacerse tres veces con la finalidad de determinar un jugador quien puede entonces tomar una decisión en otro juego diferente (por ejemplo, escoger jugadores, escoger la cancha, obtener el saque inicial, etc.). Es por ello que es importante estudiar los juegos repetidos, ya que las estrategias se vuelven más complejas debido a que un jugador puede desarrollar una reputación por jugar o seleccionar una estrategia determinada.
¿Cómo una repetición puede cambiar el resultado de un juego?
Para dar una respuesta a esta pregunta es necesario estudiar en detalle si el juego se desarrolla de manera repetida un número finito o infinito de veces.

Juegos repetidos un número fijo o finito de veces.

Considere el siguiente juego del dilema del prisionero. Por ejemplo, los dos estudiantes que comparten la misma habitación y desean escuchar música estudiar.

	B	
A	Música	Estudiar
Música	10,10	100,-50
Estudiar	-50,100	50,50

Observando este juego se aprecia que ALTO es la estrategia dominante para cada uno de los jugadores y en consecuencia el equilibrio de Nash en estrategias puras en un juego estático sería (Música, Música)
Por el contrario, si ambos cooperaran podrían terminar cada uno con un pago de 50 en vez de 10.
Ahora, supóngase que el juego se repite por 10 veces. ¿Cambiarán las estrategias?
Jugador 1: piensa cooperar (Estudiar) durante los 9 primeros juegos y no cooperar (Música) en el último juego.
Jugador 2: piensa exactamente lo mismo.
Ambos jugadores se dan cuenta que el equilibrio en el último juego es no cooperar (Música). De esta manera deciden pensar en el juego 9 y juegan este como si fuese el último juego. Una vez más, el equilibrio los obliga a no cooperar y en consecuencia ambos terminan subiendo escuchando música. Nuevamente se dan cuenta que no cooperarán en el noveno juego y piensan en el juego octavo como si fuese el último. Y nuevamente no cooperan y escuchan música. Y el juego continúa así hasta llegar al primer juego y una vez más deciden no cooperar. Entonces en un juego repetido un número finito de veces, el único equilibrio que existe es el equilibrio de Nash no cooperativo, que en este ejemplo es (Música, Música) ya que cada jugador decide no cooperar.

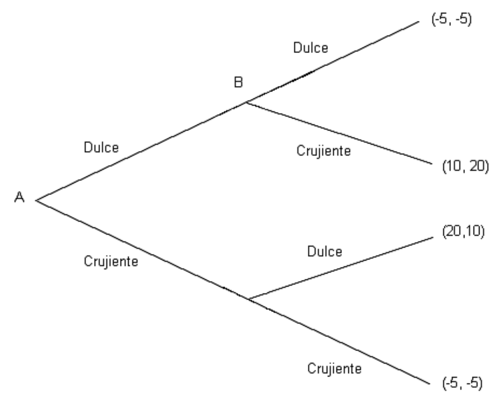
Juegos repetidos infinitas veces.
Considérese la matriz del juego anterior. Si el juego se repite indefinidamente, las estrategias se hacen más complejas y conducen al desarrollo de una reputación. En este sentido cada estudiante piensa en cooperar (Estudiar) ya que sabe que si sube escucha música entonces el otro jugador escuchará música en el siguiente periodo. En otras palabras, en un juego repetido un número infinito de veces la estrategia óptima a seguir por cada jugador es cooperar. En el juego de los dos estudiantes que se ha considerado, ambos jugadores piensan exactamente lo mismo y por tanto el único equilibrio que existe es (Estudiar, Estudiar).

4 Juegos Secuenciales

Un juego secuencial es aquel donde las decisiones no se toman de manera simultánea e independiente. Por el contrario, cada jugador conoce cual ha sido el movimiento previo del oponente y en consecuencia toma la decisión en función de la decisión tomada por su rival.
Por ejemplo, considere el siguiente juego:

	B	
A	Dulce	Crujiente
Dulce	-5,-5	10,20
Crujiente	20,10	-5,-5

Si el juego es estático entonces existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras:
(D, C) y (C, D)
Ahora si el juego se realiza de manera secuencial, es decir, el jugador A decide o ejecuta el primer movimiento, entonces, en el momento en que B debe tomar su decisión o seleccionar su estrategia, este conoce cual ha sido la decisión o el movimiento ejecutado por A. De manera extensiva, el juego puede ser representado por:



Obsérvese que al momento de tomar su decisión, el jugador B conoce exactamente que decisión tomó su adversario. Así, si el primer jugador o empresa A decidió producir el cereal crujiente, entonces el jugador o empresa B debería seleccionar producir el cereal dulce, ya que de esta manera obtendría un beneficio de 10 (en vez de -5 si escogiera crujiente). En ese caso, el equilibrio dependerá de la decisión tomada por el primer jugador. En cualquiera de los dos casos existen los mismos dos equilibrios de Nash que se obtuvieron con el juego estático.
Este análisis nos lleva al análisis de un problema frecuente observado en algunos mercados con características oligopólicas: el problema de AMENAZAS, COMPROMISO Y CREDIBILIDAD.
Consideremos la solución de Stackelberg a un duopolio. Este es un buen ejemplo donde los oligopolistas exhiben un elevado sentido de responsabilidad por sus acciones, compromiso, y evidentemente envían la señal de una elevada credibilidad.
Ahora bien, convendría preguntarse lo siguiente: ¿Qué ocurriría en un mercado donde una de las firmas entra primero al mercado o simplemente le impide la entrada a la otra? ¿Qué acciones pueden realizar o ejecutar las empresas para obtener ventajas sobre sus competidores en el mercado? ¿Cómo puede una empresa inducir a sus competidores a no entrar al mercado, a aumentar los precios o reducir la cantidad producida?
Una acción que le otorgue semejante poder a una firma se conoce con el nombre de MOVIMIENTO ESTRATÉGICO.

Definición: Un **movimiento estratégico** es aquel que influencia la decisión del otro competidor de manera favorable para quien lo realiza, afectando las expectativas del otro competidor acerca de cómo la empresa que realiza el movimiento estratégico se va a comportar.
Consideremos una vez más el ejemplo anterior.

	B	
A	Dulce	Crujiente
Dulce	-5,-5	10,20
Crujiente	20,10	-5,-5

¿Qué firma entrará primero al mercado, si ese fuese el caso?

Como se puede observar cada firma tiene el firme compromiso con ella misma de producir el cereal crujiente ya que maximizaría sus ganancias (si los pagos se miden de esa manera).
Ahora veamos lo siguiente: Si la firma A solo anuncia que producirá el cereal Crujiente, la empresa B no creerá esta estrategia. Este simple anuncio es simplemente una AMENAZA VACÍA a menos que venga acompañada de un COMPROMISO real de la empresa A que le muestre decisivamente al competidor que ella (la empresa A) producirá el cereal Crujiente. De esta manera la firma B creerá en la amenaza como un compromiso real y decidirá producir el cereal dulce.

Considérese este otro ejemplo:

	B	
A	Pa	Pb
Pa	100,80	80,100
Pb	20,0	10,20

Como se puede apreciar, cada firma tiene una estrategia dominante. El equilibrio de Nash sería (Pa, Pb) donde la firma A obtendría unas ganancias de 80 mientras su oponente obtendría 100.
Ahora bien, ¿Podría la firma A sólo amenazar la firma B que seleccionará la política de precios bajos? De acuerdo con la matriz, la respuesta es NO ya que esa estrategia no sería creíble. ¿Por qué? Porque la firma A prefiere ganarse 80 que 10.
Considerése este otro ejemplo: Suponga dos empresas en la industria del automóvil. La empresa C (columna) es el líder en el mercado, puede construir carros pequeños y/o carros grandes. La otra empresa (E) puede producir motores pequeños y/o motores grandes. La matriz de ganancias se presenta a continuación:

	C	
E	Cp	Cg
Mp	3,6	3,0
Mg	1,1	8,3

Como puede apreciarse en el juego, existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras. Obsérvese también que la mayor ganancia de C se obtiene sólo si E produce motores pequeños para carros pequeños. Entonces, ¿cómo podría hacer E para que C produzca carros grandes? Evidentemente, mediante un movimiento estratégico. Por ejemplo, destruir su planta de motores pequeños. De esa manera el juego cambia completamente en términos de pagos (beneficios)

	C	
E	Cp	Cg
Mp	0,6	0,0
Mg	1,1	8,3

Así el único equilibrio existente sería (Mg, Cg) y E se aseguraría una ganancia de 8 mientras que C sólo tendría una ganancia de 3.