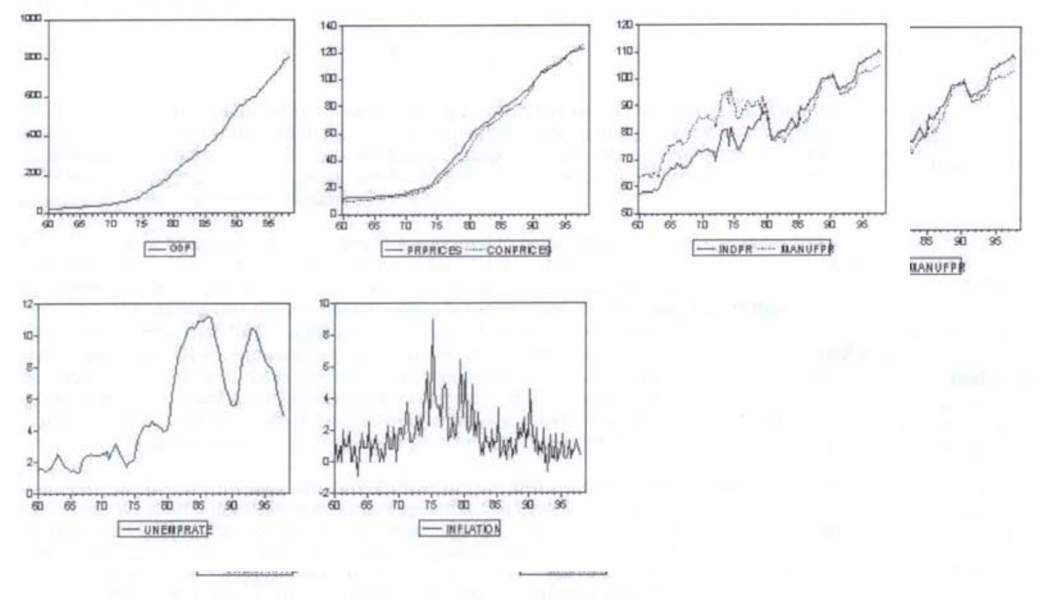
Notas sobre Análisis de Series de Tiempo: Estacionariedad, Integración y Cointegración

Dr. Dimitrios Asteriou

1 Generalidades

En esta parte del artículo, veremos las principales características de los datos encontrados al usar la econometría y discutiremos las técnicas para analizar esas características.

Consideraremos 3 tópicos principales: ***Estacionariedad***, ***Integración*** y ***Cointegracion***. Los siguientes gráficos representan la clase de datos con los cuales se tropiezan los investigadores cuando utilizan series temporales. Las variables (corresponden al Reino Unido, a menos que se indique lo contrario) se tomaron del CD-ROM de Indicadores Económicos Principales de la OECD: (i), GDP; (ii), tasa de inflación para los productores y los precios de los consumidores; (iii), producción industrial y producción industrial en el sector manufacturero; (iv), tasa de desempleo, y (v), inflación.



¿Cuáles son las principales características de las series temporales?

1. La mayor parte de las series temporales tienen una tendencia. Sus valores medios varían a lo largo del tiempo. Ellas son variables o series ***no estacionarias***.

2. Algunas series siguen un curso que recuerda a los meandros (meander) de los ríos, es decir, suben y bajan sin una tendencia a revertir hacia algún punto. Este comportamiento de caminata aleatoria[1] (**random walk**) es también una propiedad de muchas variables no estacionarias. Esto es cierto en todas las series objeto de estudio, con la excepción de la inflación y la tasa de interés.

---

1 Según Damodar Gujarati (p. 702) en Econometría, una serie de tiempo que tiene una raíz unitaria se conoce como ***caminata aleatoria***. Una caminata aleatoria es un ejemplo de una serie de tiempo no estacionaria.

3. Los Shocks (choques) tienen un alto grado de persistencia. Los cambios repentinos en la serie toman tiempo para decaer. Esto es especialmente cierto en las variables reales tales como la producción y la inversión.
4. Algunas series se mueven en forma conjunta, es decir tienen un co-movimiento positivo. Por ejemplo, diferentes tasas de interés se mueven en forma conjunta, al igual que lo hace la producción en diferentes países.

2 Prueba de Estacionariedad

2.1 Introducción e Intuición

Cointegración es una de las áreas más recientes de la econometría. Permite la posibilidad de estimar directamente las relaciones a largo plazo de manera simple y eficiente. Sin embargo, este tipo de análisis debe tomarse con mucho cuidado para evitar un mal empleo.

La cointegración utiliza conceptos complejos y abstractos de la teoría estadística. De tal manera que la intuición es vital para su comprensión. Considere el siguiente modelo simple:

$$y_t = a + bx_t + u_t$$

Esta es una simple relación estática entre x_t y y_t (la cual puede estar mal especificada en el sentido que los retardos de x_t y y_t pudieran estar presentes en el modelo verdadero). Asuma que x_t y y_t crecen en el tiempo; es decir, suponga que los valores de x_t y y_t son más altos ahora que en el pasado. Tal como lo vimos en la introducción, muchas series presentan esta característica. Este tipo de variable se describe como ***no estacionarias***, mientras que las variables que no muestran tendencia a crecer a lo largo del tiempo se describen como ***estacionarias***.

También vimos que en algunos casos dos variables aparentan ser no estacionarias cuando en realidad existe una relación entre ellos. Si x_t y y_t son variables como estas, entonces pudieran estar cointegradas; esto significa que aún cuando x_t y y_t crezcan en el tiempo, no sucederá lo mismo con el término error, es decir éste seria estacionario. Esto significa que hay una relación de largo plazo entre x_t y y_t; si no la hubiera, entonces ellas se separarán en el tiempo, de tal manera que el término del error crecería y sería no estacionaria. Si x_t y y_t están cointegradas, las estimaciones mínimo cuadráticas de a y de b serán consistentes, aún cuando los retardos se hayan omitido del modelo. De hecho, las estimaciones son super consistentes, es decir, ellos convergen hacia su verdadero valor a medida que el tamaño de la muestra crece mucho más rápido que la forma de crecimiento de las estimaciones mínimos cuadráticas. Como resultado de esto, se obtendrán estimaciones muy precisas, aún cuando el modelo pueda omitir términos retardados. De tal manera que no es necesario estimar modelos dinámicos complicados si lo que deseamos estimar es una relación a largo plazo.

Note sin embargo, que los errores estándard de los estimados impresos por los programas econométricos (Eviews, MicroFit, etc.) no son correctos; por lo que no se pueden usar los valores calculados de los estadísticos t, F, etc. También, esto puede ser mal empleado: las variables tienen que ser I(1), el término del error tiene que ser estacionario y las cosas se pueden complicar mucho más si el modelo incluye más de una variable explicativa.

2.2 Variables Estacionarias y No estacionarias

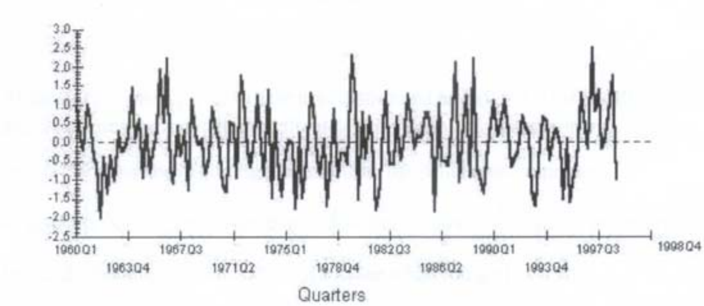
Formalmente, un variable X_t es estacionaria si:

- La esperanza matemática de la variable X_t ($E(X_t)$) es una constante, para todos los valores de t
- La varianza de la variable X_t ($Var(X_t)$) es una constante, para todos los valores de t
- La Covarianza del producto ($X_t\, X_{t+k}$) ($Cov(X_t X_{t-1})$) es una constante para todos los valores de t y todas las k, respectivamente.

Estas condiciones requieren que las ***medias***, ***varianzas*** y ***covariaciones*** de X_t permanezcan constante a lo largo del tiempo, ello significa que no importa si las observaciones vienen del principio o del fin de la muestra, con tal de que las medias y las varianzas sean siempre las mismas.

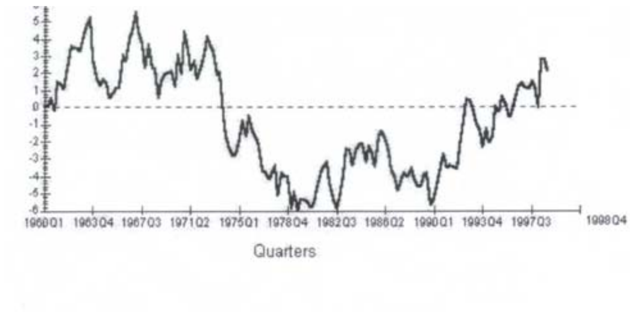
Ejemplos

1. X_t será estacionaria solo si la misma está distribuida normalmente con media ***0*** y varianza constante, es decir: $N(0,s^2)$. Esta serie fue creada y graficada con el paquete MicroFit:



2. Considere $X_t = X_{t-1} + u_t$, en donde u_t se distribuye como $N(0,s^2)$. Esto se denomina caminata aleatoria. Esta variable es no estacionaria debido a que su varianza se incrementa a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Aquí $X_1 = X_0 + u_1$, donde X_0 es el valor inicial de X ; $X_2 = X_1 + u_2 = X_0 + u_1 + u_2$ y $X_3 = X_2 + u_3 = X_0 + u_1 + u_2 + u_3$ y así sucesivamente. En el tiempo t, X es la suma de todos los valores pasados y actuales del término del error. De tal manera que la varianza de X_t se vuelve cada vez más grande a medida que se incremente el tamaño de la muestra.

Generemos una segunda serie normal de u_t, tal como la siguiente:

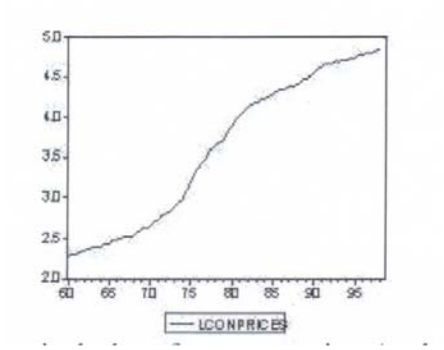


3. Considere $X_t = a + X_{t-1} + u_t$, en donde u_t está distribuida normalmente con media igual a cero y varianza constante ($N(0,s^2)$). Esta es la llamada caminata aleatoria con deriva (***drift***), en donde el parámetro a captura la tasa de crecimiento promedio. Esta variable es no estacionaria.
4. considera $X_t = rX_{t-1} + u_t$, en donde u_t está distribuida normalmente con media igual a cero y varianza constante ($N(0,s^2)$). Esta es estacionaria siempre y cuando se cumpla que $-1 < r < 1$

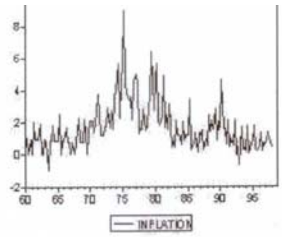
2.3 Pruebas de Estacionariedad

2.3.1 Pruebas informales: Examen de los datos.

Se puede examinar la estacionariedad de una variable con solo mirar su representación gráfica. En la parte inferior de esta página se grafica el logaritmo del Índice de Precios de los Consumidores del Reino Unido. ¿ Es estacionaria la serie ? ¡ A primera vista podemos decir que NO !. Parece más bien una serie no estacionaria debido a que la misma crece continuamente a medida que transcurre el tiempo. Sin embargo, no hay una causa obvia que nos lleve a concluir que se trata de una serie estacionaria. Así pues, tenemos que ser muy cuidadosos al llamarla no estacionaria.



El gráfico siguiente muestra el cambio en el logaritmo de los precios de los consumidores (o de la tasa de inflación; es decir, la tasa de crecimiento del nivel de precio). Esto hace que parezca más estacionaria. Sin embargo, nuevamente no es tan obvio: aunque la media cambie a lo largo del tiempo, no hay una tendencia obvia.



2.3.2 Pruebas Formales: La prueba de Dickey-Fuller

Dickey y Fuller (1979, 1981) diseñaron un procedimiento para probar formalmente la presencia de Raíces Unitarias. La prueba comienza por suponer que la serie X_t sigue un ***proceso autorregresivo*** de primer orden $AR(1)$, de la forma:

[2] $$X_t = rX_{t-1} + e_t$$

y se prueba para el caso de que ***r sea igual a 1***: (r = 1), (unity, de aquí la expresión ***raíz unitaria***). Dickey y Fuller (1979) consideran tres diferentes ecuaciones de regresión que se pueden utilizar para probar la presencia de una raíz unitaria:

[3] $$X_t = rX_{t-1} + e_t$$

[4] $$X_t = a_0 + rX_{t-1} + e_t$$

[5] $$X_t = a_0 + rX_{t-1} + a_1 t + e_t$$

La diferencia entre las tres regresiones se debe a la presencia de los elementos determinísticos a_0 y $a_1 t$. El primero es un modelo puro de caminata aleatoria, el segundo agrega un intercepto o término de deriva, y el tercero incluye ambos, es decir un intercepto y una línea de tendencia.

El parámetro de interés en todas las ecuaciones de regresión es ***r*** ; ***si r = 1, la serie contiene una raíz unitaria***. Una versión simple de la prueba consiste en estimar una (o más) de las ecuaciones antes indicadas mediante el método de los Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) con el fin de obtener el valor estimado de r y su correspondiente error estándar asociado. Comparando el estadístico resultante (t^* tau) con el valor apropiado reportado en las tablas Dickey-Fuller el investigador puede determinar si acepta o rechaza la ***hipótesis nula r = 1***. Sin embargo, hay un problema. Aunque pueda parecer obvio que podamos probar esto utilizando el estadístico $([(\hat{r})]-1)/s_r$, en donde $\hat{r}$ es el estimado de r y s_r es una estimado de su error de estándar. Pero hay un problema. En esta prueba la hipótesis nula es, $H_0 : r = 1$, en cuyo caso decimos que X tiene una raíz unitaria. La hipótesis alternativa es $H_1 : r < 1$. Si la hipótesis alternativa es correcta entonces X es estacionaria. Por el contrario, si la hipótesis nula es correcta, entonces la variable es no estacionaria.

Suponga que re escribimos el modelo de X_t de la siguiente manera:

[6] $$DX_t = a_0 + g\,X_{t-1} + e_t$$

en donde $g = (r-1)$. En este caso la hipótesis nula es $H_0 : g = 0$, en cuyo caso $r = 1$ y la variable es no estacionaria. La hipótesis alternativa es $H_1 : g < 0$, significando que $r < 1$ y que X es estacionaria. Para ello construiremos el siguiente estadístico:

[7] $$\hat{g} / s_g$$

en donde $[\hat{g}]$ es el estimado de g en la regresión (6) y s_g es una estimación de su error estándar. Esto es fácil de calcular, pues es justamente el estadístico t de g en la regresión. Rechazamos la hipótesis nula y concluimos que X es estacionaria si la relación de t en g es suficientemente negativo. El problema es que la estadística no sigue la distribución de t cuando sea no estacionaria si la hipótesis nula es correcta. Dickey y Fuller resolvieron este problema generando datos aleatorios (mediante un experimento de Monte Carlo) dando lugar a valores críticos correctos. Los resultados obtenidos resultaron ser sustancialmente más bajo que lo normal. La prueba de Dickey-Fuller (DF) es la prueba estándar para la estacionariedad.

Los valores críticos son:

Nivel de significación	Tamaño de la muestra					
	25	50	100	500	□	Valor usual de t
0.01	**-3.75**	**-3.58**	**-3.51**	**-3.44**	**-3.43**	**-2.33**
0.05	**-3.00**	**-2.93**	**-2.89**	**-2,87**	**-2.86**	**-1.65**
0.10	**-2.63**	**-2.60**	**-2.58**	**-2.57**	**-2.57**	**-1.28**

Nota:

1. Los valores críticos son todos negativos. Esto se justifica porque necesitamos saber si g es suficientemente negativo; un g positivo significa que la serie es definitivamente no estacionaria.
2. Los valores críticos son más negativos que la t-estadística convencional. Esto es porque la teoría estándar no trabaja con variables no estacionarias.
3. Los valores críticos disminuyen a medida que aumenta el tamaño de la muestra; lo cual hace que la prueba sea más eficiente asintóticamente.

2.4 Prueba Aumentada de Dickey-Fuller para Raíces Unitarias.

La prueba Aumentada de Dickey-Fuller (ADF) incluye términos autorregresivos, $AR(p)$, de los términos DX_t en cada uno de los tres modelos alternativos. Por lo tanto tenemos:

[8] $$DX_t = gX_{t-1} + \sum_{t=1}^{p} b_j DX_{t-1} + e_t$$

[9] $$DX_t = a_0 + gX_{t-1} + \sum_{t=1}^{p} b_j DX_{t-1} + e_t$$

[10] $$DX_t = a_0 + gX_{t-1} + a_2 t + \sum_{t=1}^{p} b_j DX_{t-1} + e_t$$

La diferencia en las tres regresiones se debe a la presencia de los elementos determinísticos: a_0 y $a_2 t$.

El parámetro del interés en todas las ecuaciones de regresión es, nuevamente g. Si $g = 0$, la serie contiene una raíz unitaria. La prueba implica, entonces, estimar una (o más) de las ecuaciones [7], [8] ó [9] usando MCO con el fin de obtener el valor estimado de g y de su correspondiente error estándar asociado. Comparando la t estadística resultante ($t^* = se\ lee\ tau$) con el valor apropiado reportado en las tablas de Dickey-Fuller le permitirá al investigador determinar si acepta o rechaza la hipótesis nula $g = 0$. Note que en la prueba Aumentada de Dickey-Fuller se utilizan diferentes tablas estadísticas con valores críticos en cada uno de los casos.

¿Cómo decidir cuántos retardos se deben utilizar?. Hay varias posibilidades:

1. Incluya tantos retardos como sean necesarios para remover la correlación serial en los u_t (éste es el procedimiento utilizado por Thomas en su libro de texto).
2. Use pruebas estadísticas tales como el Criterio de Información de Akaike (AIC) o el Criterio de Schwarz Bayesian (SBC) para determinar la longitud óptima del retardo (seleccione aquel retardo que de el valor más alto de AIC o de SBC). Este es el procedimiento utilizado por el programa MicroFit
3. Mire los retardos de cada una de las pruebas y haga un juicio pragmático basándose en el saldo de la evidencia. No incluya en la ecuación más retardos de los necesarios. Este es el procedimiento apoyado por Verbeek (p.244), quien argumenta que a medida que añadimos más variables retardadas (las cuales están correlacionadas entre si) a la regresión, se incrementará el error estándar de los parámetros estimados. Si usamos retardos superiores a los necesarios en la prueba DFA, puede conducirnos a no rechazar la hipótesis nula de no estacionariedad. Por otra parte, también se corre riesgo cuando se incluyen menos retardos de los que son necesarios. Verbeek (p. 246) tiene un ejemplo de una serie de datos mensuales que es estacionaria en la prueba DFA hasta con 11 retardos, pero no estacionaria si se usan 12 retardos.

3. Cointegration

Considere las siguientes series de tiempo: x_t y y_t. La cointegración se puede definir si:

1. Ambas series son integradas de orden I(1), es decir, se vuelven estacionarias al diferenciarlas por primera vez (diferenciar una variable significa extraer su primera diferencia)
2. Hay alguna combinación lineal de x_t y y_t de orden I(0) que sea estacionaria

En general, cuando se tienen dos variables integradas de orden uno, los investigadores normalmente esperan que exista alguna combinación lineal entre ellas de la forma:

$$y_t = b_0 + b\,x_t + u_t$$

o

$$u_t = y_t - b_0 + b\,x_t$$

por ejemplo con b_0 y b_1 tomando diferentes valores, para convertirse en I(1). Sin embargo, si x_t y y_t se unen en una relación lineal a largo plazo, entonces ocurrirá algo inusual, concretamente se cumplirá la segunda condición para la existencia de cointegración: habrá, al menos, una combinación lineal de x_t y y_t integrada de orden I(0), es decir será estacionaria.

Cuando este sea el caso, podemos estar seguros que cualquier correlación a lo largo del tiempo entre las variables x_t y y_t no será espuria. Cuando se cumplen las condiciones 1 y 2, mencionadas anteriormente, los estadísticos acostumbran a decir que las series temporales x_t y y_t están cointegradas. Por consiguiente, cointegración es el equivalente estadístico de la existencia de una relación económica a largo plazo entre las variables que estén integradas de orden I(1). Lo que esto significa es que existe una relación de equilibrio a largo plazo.

4. La Metodología de Engle-Granger

Suponga que dos variables, digamos x_t y y_t están integradas de orden uno y se desea determinar si existe una relación de equilibrio entre ellas. La prueba propuesta por Engle y Granger para probar la presencia de cointegración envuelve los siguientes tres pasos:

1er Paso. Determine el orden de integración de las variables

Por definición, la cointegración requiere que las variables estén integradas del mismo orden. Por lo tanto, el primer paso consiste en probar cada variable para determinar su orden de integración. La prueba de Dickey-Fuller y la prueba

Aumentada de Dickey-Fuller se pueden aplicar para inferir el número de raíces unitarias (si acaso alguna) en cada una de las variables. En el procedimiento se pueden distinguir los siguientes casos, los cuales nos pueden indicar si detenernos o avanzar al siguiente paso:

- Si las variables x_t y y_t son estacionarias de orden I(0), no es necesario continuar con la prueba debido a que los métodos estándar de estimación son suficientes para estimar la relación a largo plazo entre las variables (en otras palabras, podemos aplicar el análisis de regresión clásico de los MCO).
- Si las variables x_t y y_t resultan integradas de diferente orden, digamos por ejemplo orden; I(o), I(1), I(2), etc., es posible concluir que ellas nos están cointegradas y por lo tanto no se deben aplicar los métodos convencionales de estimación, por cuanto producirían resultados espurios.
- Si las variables x_t y y_t resultan tener el mismo orden de integración, por ejemplo de orden I(1), entonces se debe proseguir con el paso 2.

2^do^ Paso. Realice la prueba de Cointegración

Si los resultados del paso 1 muestran que las variables x_t y y_t están integradas con el mismo orden, digamos el orden I(1) –en economía las variables generalmente resultan integradas de orden I(1)--, el siguiente paso consiste en estimar la siguiente relación de equilibrio a largo plazo:

$$Y_t = b_0 + b X_t + u_t$$

Si las variables están cointegradas, entonces los MCO producirán estimadores ***super consistentes*** para los parámetros de cointegración b_0 y b_1, respectivamente. Para determinar si las variables están actualmente cointegradas, denotemos la secuencia de residuos estimados con el símbolo $\hat{u}_t$. De tal manera que $\hat{u}_t$ es la serie de los residuos estimados de la relación a largo plazo. Si se encuentra que estas desviaciones de equilibrio a largo plazo son estacionarias, entonces x_t y y_t están cointegradas.

En este caso se procede a realizar la prueba de Dickey-Fuller (DF) en los residuos con el fin de determinar su orden de integración. La forma de la prueba de DF es la siguiente:

$$D\hat{u}_t = a_1 \hat{u}_{t-1} + e_t$$

Dado que $\hat{u}_t$ es residual no se le incluye ni constante ni tendencia. El parámetro de interés es a_1. Si se rechaza la hipótesis nula que $a_1 = 0$, se concluye que los residuos están integrados de orden cero, $\hat{u}_t \sim I(0)$, lo cual equivale a decir que las variables x_t y y_t están cointegradas

3er Paso. Estime el Modelo de Corrección de Errores

Si las variables están cointegradas, entonces se pueden utilizar los residuos de la regresión de equilibrio para estimar el modelo de corrección de errores y analizar los efectos a largo y a corto plazo de las variables, así como también estimar el coeficiente de ajuste, el cual es el coeficiente del término residual retardado de la relación de equilibrio a largo plazo identificado en el paso 2. Al final se debe chequear para ver si el modelo realiza pruebas adecuadas de diagnóstico.