



Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística

Técnicas de Conteo

Prof. Gudberto José León Rangel

MÉRIDA- VENEZUELA, 2015



Técnicas de Conteo¹

Si $n(A)$ y $n(\Omega)$ son grandes para un experimento aleatorio dado con un número finito de resultados igualmente probables, el conteo en si puede convertirse en un difícil problema. Tal conteo puede frecuentemente facilitarse por el uso de ciertas fórmulas combinatorias. Es decir, las *técnicas de conteo* son muy útiles para encontrar la $P(A)$ en *espacios muestrales finitos equiprobables*.

Es importante precisar los siguientes términos:

Selección al Azar o Aleatoria: Se refiere a espacios equiprobables y significa que si se elige un punto muestral, todos tienen el mismo chance de ser seleccionados.

Muestra: Si se tiene una colección de M objetos distintos, y se selecciona al azar de esta colección n objetos, entonces podrá decirse que se ha extraído una muestra de tamaño n .

Muestreo: Es el proceso de selección de muestras.

Muestreo con Reemplazo: El *muestreo es con reemplazo o con reposición*, si un objeto es retornado al lote antes de que el próximo sea seleccionado. En este caso, como el mismo objeto puede ser seleccionado más de una vez, no hay límite para el tamaño de n y podría ser cualquier entero positivo.

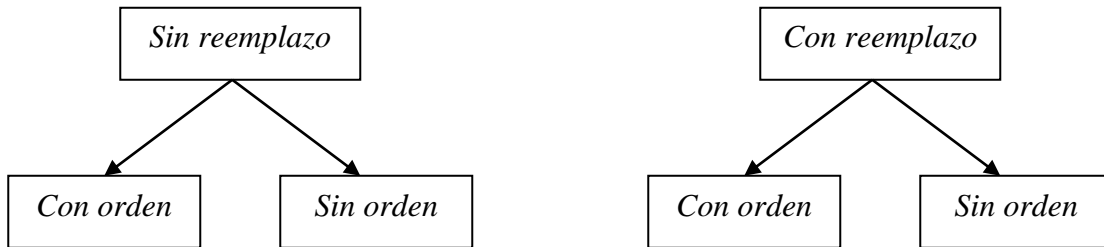
Muestreo sin Reemplazo: El *muestreo es sin reemplazo o sin reposición* si el objeto no puede ser retornado al lote después de ser seleccionado. Obviamente, con este tipo de muestreo hay un límite superior en n el cual puede a lo sumo ser igual a M .

¹ Esta sección está fundamentada en Khazanie, Ramakant. *Basic Probability Theory and Applications*. Pág. 45 – 63.



El Orden en la Selección de la Muestra

En cada uno de los casos donde el muestreo es llevado a cabo con o sin reemplazo, se puede o no estar interesados en el orden en el cual los objetos son seleccionados. Como resultado, se tienen las siguientes cuatro situaciones:



Considérese lo siguiente:

Supóngase que hay cuatro objetos distintos representados por las letras a, b, c, d , y dos de estas letras son seleccionadas. Los siguientes cuatro casos son posibles:

	a	b	c	d
a		ab	ac	ad
b	ba		bc	bd
c	ca	cb		cd
d	da	db	dc	

Caso 1:

Sin reemplazo, con orden

	a	b	c	d
a		ab	ac	ad
b			bc	bd
c				cd
d				

Caso 2:

Sin reemplazo, sin orden



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>aa</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>	<i>ad</i>
<i>b</i>	<i>ba</i>	<i>bb</i>	<i>bc</i>	<i>bd</i>
<i>c</i>	<i>ca</i>	<i>cb</i>	<i>cc</i>	<i>cd</i>
<i>d</i>	<i>da</i>	<i>db</i>	<i>dc</i>	<i>dd</i>

Caso 3:

Con reemplazo, con orden

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>aa</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>	<i>ad</i>
<i>b</i>		<i>bb</i>	<i>bc</i>	<i>bd</i>
<i>c</i>			<i>cc</i>	<i>cd</i>
<i>d</i>				<i>dd</i>

Caso 4:

Con reemplazo, sin orden

En los casos 1 y 2, el muestreo es llevado a cabo sin reemplazo, y en consecuencia, no hay posibilidades como: *aa*, *bb*, *cc*, *dd*. Esto explica por qué no hay entradas a través de la diagonal en estos casos. En el caso 2, además, no existe interés en el orden, así que, por ejemplo, *ab* es listado, pero no *ba*.

En el caso 3, son listadas todas las dieciséis posibilidades. En el caso 4, como el muestreo es con reemplazo, se tienen resultados como *aa*, *bb*, *cc*, *dd*. Sin embargo, como el orden no es relevante, *ab* es el mismo que *ba*, y así sucesivamente. Aquí no hay entradas bajo la diagonal.

Nota 1:

1. Cuando el orden es importante cada posibilidad es llamada un **arreglo**, o una **permutación**. Si el orden no importa, ésta es llamada una **combinación**.
2. Cuando *n* objetos son seleccionados y el orden es importante, es conveniente escribir los puntos muestrales como una ***n*-úpla** (x_1, x_2, \dots, x_n) donde el *i*-ésimo componente x_i , representa el *i*-ésimo objeto seleccionado. Así, x_1 representa el resultado de la primera extracción, x_2 de la segunda extracción, y así sucesivamente.



Principios Básicos del Conteo

El Principio de la Multiplicación

Si un primer objeto puede escogerse entre en r posibles, y después de realizada esta selección puede escogerse un segundo objeto entre k posibles, entonces pueden escogerse $r * k$ pares diferentes de objetos².

Para entender este principio, supóngase que los resultados del primer experimento son escritos como $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ y los del segundo experimento como $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. Entonces los resultados del experimento combinado pueden ser representados en un arreglo rectangular como pares ordenados (a_i, b_j) :

Tabla 1.

Resultados posibles de un primer experimento A y un segundo experimento B .

	b_1	b_2	...	b_j	...	b_k
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	...	(a_1, b_j)	...	(a_1, b_k)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	...	(a_2, b_j)	...	(a_2, b_k)
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
a_i	(a_i, b_1)	(a_i, b_2)	...	(a_i, b_j)	...	(a_i, b_k)
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
a_r	(a_r, b_1)	(a_r, b_2)	...	(a_r, b_j)	...	(a_r, b_k)

En otras palabras, los resultados del experimento combinado pueden ser representados como el producto cartesiano $A \times B$. Claramente hay $r * k$ pares. Esto demuestra que $n(A \times B) = n(A) * n(B)$

Otra manera de ilustrar el principio anterior es mediante un *diagrama de árbol*, como se muestra en la Figura 1.

² Basado en Nieto, José H. *Teoría Combinatoria*. Pág. 7

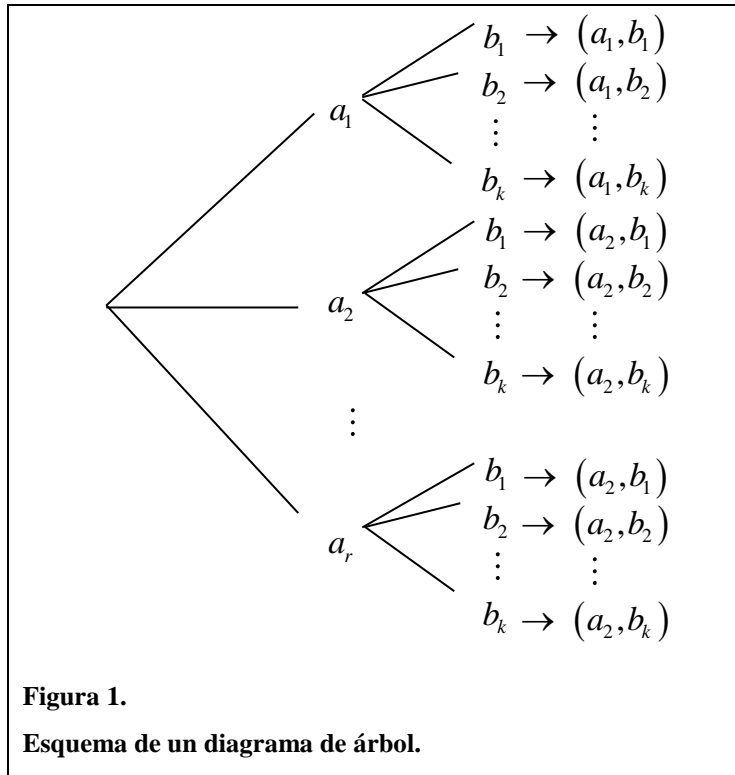


Figura 1. Esquema de un diagrama de árbol.

Primero se listan los resultados de un experimento, y entonces, correspondiendo a cada uno de estos, se listan los resultados del otro experimento. El número total de ramas, $r \cdot k$, dan todas las combinaciones posibles.

El principio básico del conteo puede ser extendido a cualquier número de experimentos de una manera obvia:

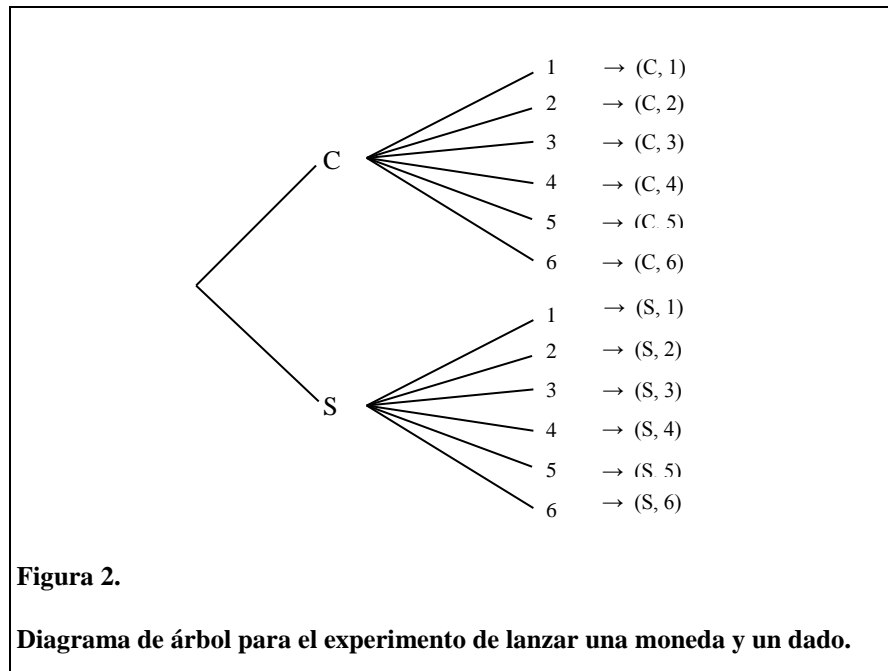
Si un primer objeto puede escogerse entre n_1 posibles, y para cada selección puede escogerse un segundo objeto entre n_2 posibles, y luego un tercero entre n_3 posibles, etc., hasta un k -ésimo objeto que se puede escoger de n_k maneras, entonces el número de grupos ordenados de k objetos que pueden seleccionarse es $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$.³

³ Tomado de Nieto, José H. Op. Cit. Pág. 8



Ejemplo 1:

- a. Si se lanza una moneda y luego un dado, entonces hay $2 \cdot 6 = 12$ posibles resultados, como se observa en el siguiente diagrama de árbol:



- b. Si una persona tiene 8 camisas diferentes, 6 corbatas diferentes, y 5 chaquetas diferentes, entonces el puede vestirse para una ocasión de $8 \cdot 6 \cdot 5 = 240$ maneras.
- c. Suponga que las placas de los vehículos están formadas con tres letras distintas seguidas por tres dígitos distintos. Entonces hay 27 formas de escoger la primera letra, 26 para la segunda y 25 para la tercera. También, hay 10 formas de escoger el primer dígito, 9 para el segundo, y 8 para el tercero. Finalmente, hay $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 12.636.000$ placas diferentes.

■

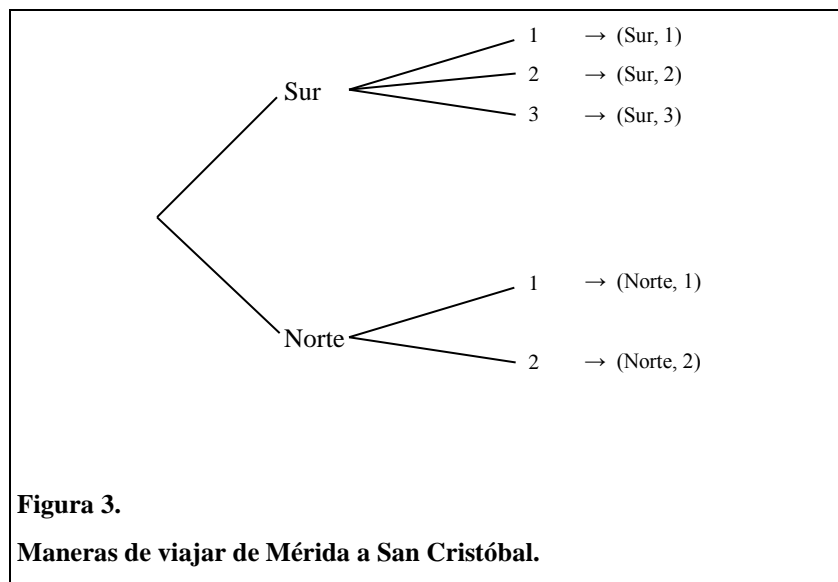


El Principio de Adición ⁴

Supóngase que un procedimiento, designado con A , se puede hacer de n maneras. Supóngase también que un segundo procedimiento, designado B , se puede hacer de m maneras. Además, no es posible que ambos, A y B , puedan ocurrir simultáneamente. Entonces, el número de maneras como se puede hacer A ó B es $n + m$.

Ejemplo 2:

Para ir de la ciudad de Mérida a San Cristóbal, existen tres maneras por el sur de la ciudad y dos por el norte. El número total de maneras para ir de Mérida a San Cristóbal es entonces $3+2 = 5$:



Ejemplo 3:

Supóngase que se planea un viaje y se debe tomar la decisión entre usar transporte por autobús o por tren. Si hay cuatro rutas para el autobús y dos para el tren, entonces hay $4+2 = 6$ rutas diferentes disponibles para el viaje.

⁴ Basado en: Meyer, Paúl. *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. Págs. 32-33; Rodríguez, José. *El Arte de Contar*. Pág.3; Nieto, José H. Op. Cit. Pág. 5-6.



También este principio puede generalizarse como sigue: si hay k procedimientos y el i -ésimo procedimiento se puede hacer de n_i maneras, $i = 1, 2, \dots, k$, entonces el número de maneras como puede realizarse el procedimiento 1, ó el procedimiento 2 ó ... ó el procedimiento k está dado por $n_1 + n_2 + \dots + n_k$, suponiendo que los procedimientos no se pueden realizar en forma conjunta (es decir los procedimientos son mutuamente excluyentes).

Caso 1: Sin Reemplazo, Con Orden (Permutaciones)

Ejemplo 4:

Supóngase que la colección inicial de objetos es el conjunto $\{a, b, c, d\}$ y que se seleccionan tres objetos. Si se listan todas las posibilidades, se obtienen los siguientes arreglos:

<i>abc</i>	<i>abd</i>	<i>acd</i>	<i>bcd</i>
<i>acb</i>	<i>adb</i>	<i>adc</i>	<i>bdc</i>
<i>bca</i>	<i>bad</i>	<i>cad</i>	<i>cbd</i>
<i>bac</i>	<i>bda</i>	<i>cda</i>	<i>cdb</i>
<i>cab</i>	<i>dab</i>	<i>dac</i>	<i>dbc</i>
<i>cba</i>	<i>dba</i>	<i>dca</i>	<i>dcb</i>

El orden en el cual se escriben las letras es importante. Por ejemplo, *abc* y *cab* son arreglos diferentes, aun cuando ambas usan las mismas letras a, b, c . Cualquier arreglo particular es llamado una **permutación**.

En la lista anterior hay 24 permutaciones en total. La razón es simple. Se seleccionan tres letras de un total de cuatro. La primera letra puede ser seleccionada de 4 maneras; una vez hecho esto, la segunda letra puede ser seleccionada de 3 maneras; y después de seleccionar las primeras dos letras, la tercera puede escogerse de 2



maneras. Entonces por el *principio de la multiplicación*, el número total de posibles selecciones de tres letras es de $4*3*2 = 24$.

■

Cambiando al caso general, supóngase que hay M objetos distintos y n de estos son seleccionados sin reemplazo. Cualquier arreglo particular de n objetos es llamado una *permutación*.

Denótese el número total de permutaciones por ${}_M P_n$. Hay M formas de extraer el primer objeto, $M - 1$ formas de extraer el segundo objeto, $M - 2$ formas de extraer el tercer objeto, y así sucesivamente. Finalmente, hay $M - (n - 1)$ formas de seleccionar el n -ésimo objeto. Así una aplicación directa de la regla básica da:

El número de permutaciones (o arreglos) de n objetos seleccionados de una colección de M objetos distintos es:

$${}_M P_n = M(M - 1)(M - 2)\dots(M - n + 1)$$

Ejemplo 5:

El número de permutaciones cuando 4 objetos son seleccionados de 8 objetos distintos es $8*7*6*5 = 1680$

■

En particular, ${}_M P_M$, el número de permutaciones (o arreglos) de M objetos tomados todos, es $M(M - 1)(M - 2)\dots3*2*1$. Tal producto de enteros consecutivos es denotado por

$${}_M P_M = M! \quad (1)$$

y se lee "***M factorial***".

Usando la *notación factorial*, puede escribirse ${}_M P_n$ como:



$${}_M P_n = M(M-1)\dots(M-n+1) \frac{(M-n)(M-n-1)\dots 1}{(M-n)(M-n-1)\dots 1}$$

$$\therefore {}_M P_n = \frac{M!}{(M-n)!} \quad (2)$$

Se sabe que ${}_M P_M = M!$. Se puede ver que la fórmula anterior es significativa cuando $n = M$, entonces es conveniente definir $0! = 1$.

Ejemplo 6:

- a. El número de permutaciones de las letras a, b, c, d será de $4! = 24$ (muestras ordenadas sin reemplazo)
 Ahora los grupos distintos de 2 letras que se pueden formar son:

$${}_4 P_2 = \frac{4!}{2!} = 12$$

Estas serán $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$, esto es, doce permutaciones.

- b. En un juego de béisbol se dispone de 12 jugadores, pero siempre el pitcher y el catcher deben ser los mismos. El número de equipos diferentes que se pueden formar es:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604.800$$

$${}_{10} P_7 = \frac{10!}{(10-7)!} = 604.800$$

Ya que en el juego de béisbol participan nueve jugadores, pero se tienen a dos jugadores fijos: el pitcher y el catcher, del total de los 12 jugadores disponibles. Así se tiene que formar lo que falta para completar el equipo (7 jugadores) con los 10 jugadores disponibles.

■



Caso 2: Sin Reemplazo, Sin Orden (Combinaciones)

Se ha visto que si son seleccionadas tres letras de $\{a, b, c, d\}$ y si el orden es importante, entonces se obtienen 24 *permutaciones*. En este caso, sin embargo, no es de interés el orden, y por tanto hay 4 posibilidades: abc , abd , acd , y bcd . Cada una de estas posibilidades es llamada una **combinación**.

Entre las 24 permutaciones del Caso 1 (ver página 9) la primera columna consiste de las permutaciones de las letras a, b, c y como ya se sabe, hay $3!$ de ellas. Esto es porque hay $3!=6$ arreglos en la columna 1. Lo mismo se cumple para las columnas 2, 3 y 4. En consecuencia, se tiene del ejemplo, que el número de *combinaciones*, multiplicado por $3!$, es el número de *permutaciones* ($4*3!=24$).

Ahora, se tomará el caso general en donde son seleccionados n objetos sin reemplazo de M objetos distintos, y en el cual el orden no es importante. Simbólicamente se denotará el número de formas de hacer esto por $\binom{M}{n}$ y será llamado el *número de combinaciones de n objetos de un conjunto M* . El objetivo es derivar una expresión para $\binom{M}{n}$.

Obsérvese que si una combinación tiene n elementos, entonces hay $n!$ posibles *permutaciones* de sus elementos. De cada combinación surgen $n!$ *permutaciones*, por tanto resultan todas las permutaciones:

$$M(M-1)(M-2)\dots(M-n+1)$$

Así se tiene que:

$$\binom{M}{n} * n! = M(M-1)(M-2)\dots(M-n+1) = \frac{M!}{(M-n)!}$$

Entonces,

$$\binom{M}{n} = \frac{M!}{n! * (M-n)!} \quad (3)$$

es el número de muestras no ordenadas de tamaño n , que pueden extraerse sin reemplazo de M objetos distintos.

**Ejemplo 7:**

El número de formas de escoger un conjunto de 3 libros para leer de un conjunto de 8 libros es:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! * 5!} = 56$$

(Note que no estamos interesados en el orden en el cual los libros son leídos)

■

Nota 2:

1. Por conveniencia, las siguientes convenciones son adoptadas:

$$\binom{M}{0} = 1 \quad (4)$$

$$\binom{M}{n} = 0, \text{ si } n < 0 \text{ ó } n > M \quad (5)$$

2. Seleccionar n objetos de un grupo de M es lo mismo que seleccionar $(M - n)$ objetos de M , de los que no pertenecen al grupo. Así, por ejemplo el número de formas de escoger 3 libros para leer de un conjunto de 8 libros es lo mismo que el número de formas de seleccionar 5 libros para no leer de 8. De esta manera, se tiene que:

$$\binom{M}{n} = \binom{M}{M-n} \quad (6)$$

Esto también puede ser visto, observando que $\binom{M}{n}$ y $\binom{M}{M-n}$ son ambos iguales a $\frac{M!}{n! * (M-n)!}$



Caso 3: Con Reemplazo, Con Orden

El número de formas de seleccionar n objetos de M objetos distintos es M^n cuando los objetos son seleccionados con reemplazo y cuando el orden es importante. Esto es fácil de ver ya que en cada extracción hay M escogencias distintas.

Ejemplo 8:

- Con los nueve dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se pueden formar $9^3 = 729$ números distintos de tres dígitos.
- Si hay M celdas, entonces n objetos pueden ser colocados en ellas de M^n formas. (se está asumiendo que una celda puede tener más de un objeto) colocando un objeto en una celda viene a ser como seleccionar una de las M celdas, y permitiendo a una celda tener más de un objeto viene a ser como muestrear con reemplazo.
- Si 10 personas van en un tren que se detiene en 6 estaciones, entonces hay 6^{10} posibles formas en que las 10 puedan bajarse del tren. Nótese que una persona puede bajarse en cualquiera de las 6 estaciones así que él tiene 6 escogencias posibles. Esto se cumple para cada una de las 10 personas. También, si una persona se baja en una estación, ese no excluye que otra persona pueda bajarse en la misma estación.

Caso 4: Con Reemplazo, Sin Orden

La derivación de la fórmula en este caso es bastante difícil. Se tiene que el número de muestras no ordenadas de tamaño n cuando los objetos son seleccionados con reemplazo de M objetos distintos es:

$$\binom{M+n-1}{n} \quad (7)$$

Por ejemplo, el número de formas de colocar n bolas no distinguibles dentro de M celdas es $\binom{M+n-1}{n}$

(véase la analogía entre bolas indistinguibles y la irrelevancia del orden)



Considérese la siguiente manera de deducir la fórmula anterior con un ejemplo⁵.

Sea $M = 3$ y $n = 3$. Sean los símbolos 1, 2 y 3. Listando todos los arreglos en una columna tal que a precede a b si y sólo si a , leída como un número ordinario de tres dígitos, es menor que b . En una columna adyacente se lista un nuevo conjunto de sucesiones formadas del conjunto anterior sumando 0 al primer dígito, 1 al segundo dígito y 2 al tercer dígito.

111	123	= (1+0, 1+1, 1+2)
112	124	= (1+0, 1+1, 2+2)
113	125	
122	134	
123	135	
133	145	
222	234	
223	235	
233	245	
333	345	

En la primera columna se tienen muestras no ordenadas de tamaño 3 (seleccionadas de $M=3$), con reemplazo. En la segunda columna se tienen muestras no ordenadas de tamaño 3 (seleccionadas de $M=5$), sin reemplazo. De esta manera, se puede hacer una correspondencia uno a uno entre muestras no ordenadas de tamaño n (seleccionadas de M) con reemplazo, y muestras no ordenadas de tamaño n (de $M+n-1$) sin reemplazo.

Así el número de tales muestras es $\binom{M+n-1}{n}$.

■

⁵ Basado en Ash, Robert. *Basic Probability Theory*. Págs. 18-21.



Una manera alterna de ver muestras no ordenadas con reemplazo, es pensando en M celdas (cajas) en las cuales pueden colocarse n bolas (o estrellas). Entonces la idea es contar todas las n -úplas (a_{i1}, \dots, a_{in}) , cada $a_{ik} \in \{a_1, \dots, a_M\}$, sujeto a la restricción de que las n -úplas tienen los mismos miembros de ocupación.

Los n_k , el número de ocurrencias de a_k , $k=1, 2, \dots, M$ son identificados. Estos n_k son enteros no negativos ($n_k \geq 0$) que satisfacen: $n_1 + n_2 + \dots + n_M = n$. De esta manera, debe contarse el número de soluciones de enteros no negativos (n_1, \dots, n_M) de la ecuación $n_1 + \dots + n_M = n$. Esto puede ser hecho "combinatoriamente" como sigue.

Considérese un arreglo de n estrellas y $(M - 1)$ barras:

| * | | * * * |

$n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 3$

(Muestra = $a_1 a_3 a_3 a_3$)

| * | * | * * |

$n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 2$

(Muestra = $a_1 a_2 a_3 a_3$)

Un símbolo de esos empieza y termina necesariamente con una barra, es decir las barras exteriores son fijas.

Para $M = 3, n = 4$; cada arreglo corresponde a una solución de $n_1 + n_2 + \dots + n_M = n$. El número de arreglos es el número de formas de seleccionar n posiciones de $(M + n - 1)$ para estrellas a ocurrir (o $M - 1$ posiciones para las barras); es decir,

$\binom{M + n - 1}{n}$

Para $M = 3; n = 4$, hay 15 soluciones:

n_1	n_2	n_3	MUESTRA
0	0	4	$a_3 a_3 a_3 a_3$
0	4	0	$a_3 a_2 a_2 a_2$
4	0	0	$a_1 a_1 a_1 a_1$
0	1	3	$a_2 a_3 a_3 a_3$
0	2	2	$a_2 a_2 a_3 a_3$

Basado en: Ash, Robert. Op. Cit. Págs. 18-21; Feller, William. *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*. Págs. 54-56 y Casella, George. *Statistical Inference*. Pág. 16.



0	3	1	$a_2 a_2 a_2 a_3$
1	0	3	$a_1 a_3 a_3 a_3$
2	0	2	$a_1 a_1 a_3 a_3$
3	0	1	$a_1 a_1 a_1 a_3$
1	3	0	$a_2 a_2 a_2 a_2$
2	2	0	$a_1 a_1 a_2 a_2$
3	1	0	$a_1 a_1 a_1 a_2$
2	1	1	$a_1 a_1 a_2 a_3$
1	2	1	$a_1 a_2 a_2 a_3$
1	1	2	$a_1 a_2 a_3 a_3$

Así $|***|*| | | |****|$ se usa como símbolo de una distribución de $n = 8$ estrellas en $M = 6$ cajas o celdas con números de ocupación 3, 1, 0, 0, 0, 4. Un símbolo de esos empieza y termina necesariamente con una barra, pero las restantes $M - 1$ barras y n estrellas aparecen en un orden arbitrario.

Ejemplo 9: ⁷

¿Cuántas piezas de dominó existen?

Solución:

Contar estas piezas de dominó es lo mismo que buscar todas las combinaciones de dos elementos del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sin importar el orden y con reemplazo. Es decir:

$$\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28$$



⁷ Tomado de Rodríguez, José. *El Arte de Contar*. Pág. 34.



Ejemplo 10: ⁸

Por un número de años la lotería del estado de Nueva York ha operado de acuerdo al siguiente esquema. Una persona puede adquirir un ticket con 6 números los cuales pueden ser del 1 al 44. El número ganador se decide aleatoriamente seleccionando seis números de los cuarenta y cuatro.

Si la selección es con reemplazo y sin orden, ¿Cuál es el número de tickets posibles?

Solución:

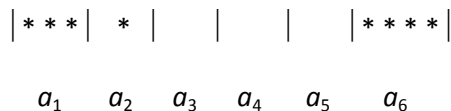
$$\binom{44+6-1}{6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13.983.816$$



Nota 3:

Analogía entre las bolas indistinguibles (estrellas) y la irrelevancia del orden: ⁹

Como el orden no importa, entonces interesa contar cuantas bolas (estrellas) tiene cada celda, sin importar el orden de las celdas.



Las a_i (cajas) representan a los objetos de interés y las estrellas al número de veces que se repiten las a_i , es decir cada estrella (bola) corresponde a la selección de una caja (a_i).

De tal manera, si importa el orden la sucesión $a_2 a_1 a_1 a_3$ corresponde a la primera bola dentro de la caja 2, la segunda y tercera en la caja 1, y la cuarta en la caja 3.

En general, un arreglo de n bolas en M cajas corresponde a una muestra de tamaño n de los símbolos a_1, \dots, a_M . Si se requiere que el muestreo sea con reemplazo, significa que una caja dada puede contener cualquier

⁸ Tomado de Casella, George. Op. Cit. Págs. 13 y 16.

⁹ Basado en Ash, Robert. Op. Cit. Págs. 18-20.



número de bolas. En el muestreo sin reemplazo significa que una caja dada no puede contener más que una bola.

Si se consideran muestras ordenadas, se está diciendo que las *bolas son distinguibles*. Por ejemplo, $a_3 a_7$ (bola 1 dentro de la caja 3, bola 2 dentro de la caja 7) es diferente de $a_7 a_3$ (bola 1 dentro de la caja 7, bola 2 dentro de la caja 3); en otras palabras, puede considerarse que las bolas han sido numeradas $1, 2, \dots, n$. Muestras no ordenadas corresponden a ***bolas indistinguibles***.

Si no hay restricción sobre el número de bolas en una caja dada, el número total de arreglos, tomando en cuenta el orden en que las bolas son colocadas (es decir, las bolas son distintas), es el número de muestras ordenadas de tamaño n (de $\{a_1, \dots, a_M\}$) con reemplazo, o M^n .

Si puede haber a lo sumo una bola en una caja dada, el número de arreglos (ordenados) es ${}_M P_n$. Si el orden en el cual las bolas son colocadas no es importante, simplemente se están escogiendo n cajas de M para ser ocupadas; o $\binom{M}{n}$ posibles selecciones de cajas.

Una caja puede contener un número ilimitado de bolas, pero las bolas no son distinguibles; es decir, el orden en el cual las bolas son colocadas no es importante, así que por ejemplo, $a_2 a_1 a_1 a_3$ es identificado con $a_1 a_3 a_1 a_2$. Por tanto, el número de arreglos a contar en este esquema es el número de muestras no ordenadas de tamaño n con reemplazo, o $\binom{M+n-1}{n}$.

Ejemplo 11: ¹⁰

Tres bolas son colocadas dentro de tres cajas. Encuentre la probabilidad de que exactamente una caja estará vacía.

¹⁰ Tomado de Ash, Robert. Op. Cit. Págs. 19-21



Solución:

Entonces se tienen las cajas a_1 , a_2 y a_3 ; y sucesiones de longitud 3 (tres bolas son colocadas). Tómense todas las $3^3 = 27$ muestras ordenadas con reemplazo como igualmente probables. Así,

$$P(\{\text{exactamente 1 caja esté vacía}\}) = P(\{\text{caja 1 vacía, cajas 2 y 3 ocupadas}\}) + P(\{\text{caja 2 vacía, cajas 1 y 3 ocupadas}\}) + P(\{\text{caja 3 vacía, cajas 1 y 2 ocupadas}\})$$

Además,

$$P(\{\text{caja 1 vacía, cajas 2 y 3 ocupadas}\}) = P\left(\left\{ \begin{array}{l} a_1 \text{ no ocurra en la sucesión } a_{i1}a_{i2}a_{i3}, \\ \text{pero } a_2 \text{ y } a_3 \text{ ocurren ambos} \end{array} \right\}\right)$$

Si a_1 no ocurre, tanto a_2 ó a_3 pueden ocurrir dos veces, y el otro símbolo una vez. Puede escogerse el símbolo que es ocurrir dos veces de dos maneras; el símbolo que ocurra una vez es entonces determinado. Si, supóngase, a_3 ocurre dos veces y a_2 una vez, la posición de a_2 puede ser cualquiera de tres posibilidades; la posición de las dos a_3 's es entonces determinada. Así la probabilidad de que la caja 1 estará vacía y las cajas 2 y 3 ocupadas es $2(3)/27 = 6/27$ (de hecho los seis resultados favorables son $a_2a_2a_3$, $a_2a_3a_2$, $a_3a_2a_2$, $a_3a_3a_2$, $a_3a_2a_3$ y $a_2a_3a_3$)

Así la probabilidad de que exactamente una caja estará vacía es, por simetría,

$$\boxed{3(6)/27 = 2/3}$$

■



Resumen de los Posibles Métodos de Conteo

Tabla 2.

Resumen de los Métodos de Conteo.

	Sin reemplazo	Con reemplazo
Ordenado	$\frac{M!}{(M-n)!}$	M^n
No ordenado	$\binom{M}{n}$	$\binom{M+n-1}{n}$

Nota 4:

Se dice que una **muestra es aleatoria** si el procedimiento de muestreo asigna la misma probabilidad a cada punto muestral. Así una muestra es aleatoria si su probabilidad de ser extraída es:

1. $\frac{1}{M^n}$ si el muestreo es con orden, con reemplazo.
2. $\frac{1}{{}_M P_n}$ si el muestreo es con orden, sin reemplazo.
3. $\frac{1}{\binom{M}{n}}$ si el muestreo es sin orden, sin reemplazo.
4. $\frac{1}{\binom{M+n-1}{n}}$ si el muestreo es sin orden, con reemplazo.



Referencias

Ash, R. (1970). *Basic Probability Theory*. Nueva York: John Wiley and Sons.

Khazanie, R. (1976). *Basic Probability Theory and Applications*. California: Goodyear Publishing Company, Inc.

Meyer, P. (1998). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. México: Addison Wesley Longman.

Nieto, J. (1996). *Teoría Combinatoria*. Maracaibo: Editorial de la Universidad del Zulia.

Feller, W. (1975). *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*. Volumen 1. México, D.F.:
Limusa.