Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística

Coeficientes Binomiales

Prof. Gudberto José León Rangel

MÉRIDA- VENEZUELA, 2015

Coeficientes Binomiales [1]

Si n es un entero positivo y se expresa el binomio $(x + y)^n$ en la multiplicación término por término, cada término será el producto de las x y las y, donde una x o una y proviene de cada uno de los factores $x + y$. Por ejemplo, la expresión

$$
\begin{aligned}
(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) \\
&= x*x*x + x*x*y + x*y*x + x*y*y + y*x*x + y*x*y + y*y*x + y*y*y \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
\end{aligned}
$$

produce términos de la forma x^3, x^2y, xy^2 e y^3.

Sus coeficientes son 1, 3, 3, 1 y el coeficiente de xy^2, por ejemplo, es $\binom{3}{2} = 3$, el número de formas en que se pueden escoger los dos factores que proporcionan las y. De la misma manera, el coeficiente de x^2y es $\binom{3}{1} = 3$, el número de formas en que se puede elegir el factor que proporciona la y, y los coeficientes de x^3 e y^3 son $\binom{3}{0} = 1$ y $\binom{3}{3} = 1$.

En forma más general, si n es un número positivo y se multiplica $(x + y)^n$ término por término, el coeficiente de $x^{n-k}y^k$ es $\binom{n}{k}$, el número de formas en las que se pueden elegir los k factores que proporcionan las y.

Según esto se llama a $\binom{n}{k}$ ***coeficiente binomial***, así

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \qquad (1)$$

para cualquier entero positivo n, se conoce como ***teorema binomial*** [2].

[1] Basado en Freund, Jhon y Walpole, Ronald. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Págs. 13-18.

Nota 1: [3]

En lo expuesto en la sección de técnicas de conteo, el *número combinatorio* $\binom{n}{k}$ es significativo sólo si *n* y *k* son enteros no negativos con $0 \le k \le n$. Sin embargo, $\binom{n}{k}$ puede ser generalizado de un entero positivo *n* a cualquier número real. Se sabe que

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$ y $\binom{n}{k} = 1$ para $k = 0$.

Se puede observar que la última expresión es significativa si *n* es cualquier número real y *k* es cualquier entero no negativo. De esta manera se tiene que:

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$
$$= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}$$

$$\boxed{\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}} \qquad (2)$$

Lo que se conoce como el ***número combinatorio negativo***.

Así, por ejemplo, $\binom{-3}{5} = \frac{-3(-4)\cdots(-7)}{5!}$.

Utilizando esta versión extendida de los coeficientes binomiales, puede expresarse la ***forma generalizada del teorema binomial***

[2] $(x+y)^n$ se conoce también como el **Binomio de Newton**.

[3] Tomado de Mood, Graybill y Boes. *Introduction to the Theory of Statistics*. Págs. 530; Meyer, Paúl. *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. Pág. 36.

$$(1+y)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} y^k \qquad (3)$$

Esta serie es significativa para cualquier *n real* y para todas las *y* tales que $|y|<1$. Obsérvese que si *n* es un entero positivo, la serie infinita se reduce a un número finito de términos, puesto que en ese caso $\binom{n}{k}=0$ si $k>n$.

Triángulo de Pascal [4]

Los coeficientes de las potencias sucesivas de *x + y* pueden ser distribuidos en una formación triangular de números, llamada ***Triángulo de Pascal***, como sigue:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$
$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

[4] Basado en Lipschutz, Seymour. Op. Cit. Pág. 20.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Figura 1.

Triángulo de Pascal.

El triangulo de Pascal tiene las siguientes propiedades interesantes:

a. El primero y último número de cada fila es 1.

b. Cada uno de los otros números de la formación se obtienen sumando los dos números que aparecen directamente encima de él. Por ejemplo: 10 = 4+6, 15 = 5+10, 20 = 10+10.

Teoremas que emplean Coeficientes Binomiales

<u>Teorema 1</u> Fórmula de Steaffel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Prueba:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Para obtener el mismo denominador en ambas fracciones, se multiplica la primera fracción por $\frac{k}{k}$ y la segunda fracción por $\frac{n-k+1}{n-k+1}$. Entonces:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{k\ \ n!}{k\ (k-1)!\ (n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)\ \ n!}{k!\ (n-k+1)(n-k)!}$$
$$=\frac{k\ \ n!}{k!\ (n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)\ \ n!}{k!\ (n-k+1)!}$$
$$=\frac{k\ \ n!\ +\ (n-k+1)\ n!}{k!\ (n-k+1)!}=\frac{\left[k\ +\ (n-k+1)\right]\ n!}{k!\ (n-k+1)!}$$
$$=\frac{(n+1)\ \ n!}{k!\ (n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!\ (n-k+1)!}$$

$$\boxed{\therefore \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}}$$

Teorema 2 Teorema Binomial

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ x^{n-k}y^k$$

Prueba: [5]

Por inducción matemática se tiene que:

El teorema es cierto para n = 1, puesto que:

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}\ x^{1-k}\ y^k\ =\ \binom{1}{0}\ x^1\ y^0\ +\ \binom{1}{1}\ x^0\ y^1\ =\ x\ +\ y\ =\ (x\ +\ y)^1$$

Se supone que el teorema se cumple para $(x+y)^n$ y se prueba que es cierto para $(x+y)^{n+1}$:

$$(x+y)^{n+1}=(x\ +\ y)(x+y)^n$$
$$=(x+y)\left[x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\cdots+\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1}+\binom{n}{k}x^{n-k}y^k+\cdots+\binom{n}{1}xy^{n-1}+y^n\right]$$

Ahora el término del producto que contiene y^k se obtiene de

[5] Basada en Lipschutz, Seymour. *Probabilidad*. Págs. 27-28.

$$y\left[\binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^{k-1}\right] + x\left[\binom{n}{k} x^{n-k} y^{k}\right] = \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^{k} + \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^{k}$$
$$= \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] x^{n-k+1} y^{k}$$

Pero por el Teorema 1 se sabe que $\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] = \binom{n+1}{k}$. Es decir, el término que contiene y^k es $\binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^{k}$.

Se observa que $(x+y)(x+y)^n$ es un polinomio de grado *n*+1 en y. En consecuencia,

$$\boxed{(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^{k}}$$

Coeficientes Multinomiales [6]

Son los coeficientes que se presentan en la expansión de $\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_k\right)^n$. El coeficiente multinomial del término $x_1^{n_1} * x_2^{n_2} * \cdots * x_k^{n_k}$ de la expansión de $\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_k\right)^n$ es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2! \cdots\ n_k!}$$

Este número se denomina ***coeficiente multinomial*** debido a que aparece en el ***teorema multinomial***, el cual se puede enunciar como sigue:

[6] Basado en Freund, Jhon y Walpole, Ronald. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Pág. 18; DeGroot. Morris, *Probabilidad y Estadística*. Págs. 31-32.

Teorema 3 Teorema Multinomial

Para cualesquiera números x_1, x_2,…, x_k y cualquier entero positivo n,

$$\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_k\right)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

En esta ecuación la suma se extiende sobre todas las combinaciones posibles de enteros no negativos $n_1, n_2, \cdots, n_k$ tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Nota 2:

Un coeficiente multinomial es una generalización del coeficiente binomial tratado anteriormente. Para k = 2, el teorema multinomial es el mismo que el teorema binomial y el *coeficiente multinomial* se convierte en un *coeficiente binomial*.

Teorema 4 [7]

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r} \binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$$

Prueba: [8]

Se probará el teorema igualando los coeficientes de y^k en las expresiones que figuran en ambos lados de la ecuación $\left(1+y\right)^{m+n} = \left(1+y\right)^m \left(1+y\right)^n$.

El coeficiente de y^k en $\left(1 + y\right)^{m+n}$ es $\boxed{\binom{m+n}{k}}$, y el coeficiente de y^k en

$$\left(1+y\right)^m \left(1+y\right)^n = \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1} y + \cdots + \binom{m}{m} y^m\right] \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} y + \cdots + \binom{n}{n} y^n\right]$$

[7] Esta propiedad es utilizada en consideraciones teóricas de la distribución Hipergeométrica.

[8] Tomado de Freund, Jhon y Walpole, Ronald. Op. Cit. Págs. 16-17.

es la suma de los productos que se obtienen al multiplicar el término constante del primer factor por el coeficiente de y^k en el segundo factor, el coeficiente de *y* en el primer factor por el de y^{k-1} del segundo factor,…, y el coeficiente de y^k del primer factor por el término constante del segundo factor.

Por tanto, el coeficiente de y^k en $(1+y)^m(1+y)^n$ es:

$$\boxed{\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{k-2} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \sum_{r=0}^{k}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}}$$

Lo cual completa la demostración:

$$\boxed{\therefore \sum_{r=0}^{k}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}}$$

Teorema 5 [9]

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m}{k} = (-1)^n\binom{m-1}{n} \qquad (4)$$

donde $m \geq 1$ es un número entero y también *n* es un entero con $n \geq 0$.

Prueba:

Se procederá por inducción completa en el valor de *m*.

Para *m* = 1,

Si *n* > 1, ambos miembros valen 0.

Si *n* = 0, $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{m}{k} = (-1)^0\binom{1}{0} = 1*1 = 1$ y $(-1)^0\binom{m-1}{0} = 1*1 = 1$, entonces ambos lados de la ecuación (4) son iguales a 1.

[9] Tomado de Universidad Nacional Abierta. *Introducción a la probabilidad*. Págs. 65-68.

Si n = 1, el primer miembro de (4) es:

$\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{m}{k}=(-1)^0\binom{1}{0}+(-1)^1\binom{1}{1}=0$ que coincide con el segundo miembro: $(-1)^1\binom{1-1}{1}=0$

Se puede admitir entonces que el teorema es válido hasta m–1 y se probará que de allí resulta que también lo es para m ($m > 1$)

Aplicando la fórmula de Steaffel del Teorema 1, adaptada para esta demostración (haciendo n+1=m en la relación del Teorema 1):

$$\binom{m}{k}=\binom{m-1}{k}+\binom{m-1}{k-1}; \quad (k \geq 1),$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}&=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}\\&=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\binom{m-1}{k}+\binom{m-1}{k-1}\right]\\&=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m-1}{k}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m-1}{k-1}}_{*}\end{aligned} \qquad (5)$$

Ahora se desarrollará * de la ecuación (5):

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m-1}{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\binom{m-1}{k}=-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}$$

Sustituyendo en la ecuación (5):

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m-1}{k}-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{m-1}{k} \qquad (6)$$

Aplicando ahora la hipótesis de inducción (el resultado es válido para m–1), se tiene que:

$$1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{m-1}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{m-1}{k} = (-1)^n \binom{m-2}{k}$$

Y

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{m-1}{k} = (-1)^{n-1} \binom{m-2}{n-1}$$

Reemplazando en (6):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{m}{k} &= (-1)^n \binom{m-2}{n} - (-1)^{n-1}\binom{m-2}{n-1} \\ &= (-1)^n \left[\binom{m-2}{n} - (-1)\binom{m-2}{n-1}\right] \\ &= (-1)^n \left[\binom{m-2}{n} + \binom{m-2}{n-1}\right]\end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la fórmula de Steaffel,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^n \binom{m-1}{n}}$$

Algunas Relaciones que emplean Números Combinatorios [10]

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

[10] Basado en Torres, Enrique. *Problemario de Matemáticas I*. Págs. 13-16; Freund, Jhon y Walpole, Ronald. Op. Cit. Págs. 20-21; Mood, Graybill y Boes. Op. Cit. Págs. 530-531.

2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$; $n \geq$ k (Fórmula de Steaffel)

4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

5. $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

6. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$

7. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

8. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

9. $\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n+k-1}{k} = \frac{n(n-1)......(n-k+1)}{k!}$

10. $(1+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} y^k \qquad n \in \mathbf{Z}^+$

11. Si $n \in \mathbb{R}$ y $|y| < 1$ entonces: $(1+y)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} y^k$

12. $(1-y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y^k$

13. $(1-y)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} y^k$, $|y| < 1$

14. $(x+y+z)^n = \sum \binom{n}{a\ b\ c} x^a y^b z^c$; *a*, *b*, *c* tales que *a*+*b*+*c*=*n* (Teorema Trinomial)

15. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^n \binom{m-1}{n}$

16. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

17. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}=\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-4\binom{n}{4}+\ldots\ldots\ldots\pm\binom{n}{n}=0$

18. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\binom{n}{1}\frac{1}{1}-\binom{n}{2}\frac{1}{2}+\binom{n}{3}\frac{1}{3}-\binom{n}{4}\frac{1}{4}+\cdots\pm\binom{n}{n}\frac{1}{n}$

19. $\binom{x+y}{n}=\binom{x}{0}\binom{y}{n}+\binom{x}{1}\binom{y}{n-1}+\cdots+\binom{x}{n}\binom{y}{0}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$

20. $n(n-1)2^{n-2}=(2.1)\binom{n}{2}+(3.2)\binom{n}{3}+(4.3)\binom{n}{4}+\cdots$

21. $\binom{n}{0}\binom{n}{k}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}-\cdots\pm\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}=0$

22. $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}y^k=\binom{m}{k}(1+y)^n$

23. $\binom{-n}{k}=(-1)^k\left(\frac{n+k-1}{k}\right)$

24. $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$; para $n = 1,2,\ldots$ y $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

Referencias

DeGroot, M. (1988). Probabilidad y Estadística. Segunda Edición. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Freund, J. y Walpole, R. (1990). Estadística Matemática con Aplicaciones. Cuarta Edición. México: Prentice-Hall.

Lipschutz, S. (1996). Probabilidad. México: McGraw-Hill.

Meyer, P. (1998). Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. México: Addison Wesley Longman.

Mood, A., Graybill F. y Boes, D. (1974). Introduction to the Theory of Statistics. Tercera edición. Nueva York: McGraw-Hill Book Co.

Universidad Nacional Abierta. (1987). Introducción a la probabilidad. Caracas: UNA.

Dirección: Av. Las Américas. Universidad de los Andes Conjunto La Liria. Edif. F. Piso 2. Departamento de Estadística. Cubículo 258. Mérida – Venezuela.
Telf. (0274) 2401153 (directo) – 2401122 (secretaria). e-mail: gudberto@ula.ve