Guía de Ejercicios No. 7

Variable Aleatoria, Función de Distribución, Funciones de Probabilidad

1. Sea Ω un espacio muestral discreto y sea $\mathcal{A}$ el conjunto potencia del conjunto Ω. Demuestre que cualquier función real valorada definida sobre Ω es una variable aleatoria.
2. Sea X una función definida sobre Ω por $X(w) = a \;\forall\, w \in \Omega$, donde a es algún número real (fijo). Demuestre que X es una variable aleatoria. *Nota*: la función X definida por $X(w) = a$ para todo $w \in \Omega$, es una función constante y se dice que X es una variable aleatoria *degenerada*.
3. Sea X el número de caras en tres lanzamientos de una moneda.
    a. Describa a Ω
    b. ¿Qué valores asigna X a los puntos de Ω?
    c. ¿Cuáles son los eventos: $\{X \le 2{,}75\}, \{0{,}5 \le X \le 1.72\}$?
4. Un dado es lanzado dos veces. Sea X la suma de los valores observados y sea Y el valor absoluto de la diferencia de los valores observados.
    a. Describa a Ω
    b. ¿Qué valores asignan X y Y a los puntos de Ω?
    c. Verifique que X y Y son variables aleatorias.
5. Se lanza un dado 5 veces. Sea X la suma de los valores obtenidos. Describa los eventos $\{X = 4\}$, $\{X = 6\}$, $\{X = 30\}, \{X \ge 29\}$.
6. Sea $\Omega = [0,1]$, y $\mathcal{A}$ la sigma álgebra de Borel de subconjuntos de Ω. Se define $X: \Omega \to \mathcal{R}$ por:
$$X(w) = \begin{cases} w & \text{si } 0 \le w \le \dfrac{1}{2} \\ w - \dfrac{1}{2} & \text{si } \dfrac{1}{2} < w \le 1 \end{cases}$$
¿Es X una variable aleatoria? Si lo es calcule el evento $\left\{w: X(w) \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.
7. Suponga que la función de distribución de una variable aleatoria es dada por:
$$F_X^{(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{4} e^{-x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$
    a. Grafique la función de distribución
    b. Encuentre las siguientes probabilidades:
    i. $P(X = 0)$ ii. $P(0 < X \le 2)$ iii. $P(0 \le X \le 2)$ iv. $P(-3 < X < 0)$ v. $P(-3 \le X \le 0)$
8. Sea X la variable aleatoria que denota el número de horas de estudio que dedica un estudiante durante un día seleccionado aleatoriamente. Suponga que la ley de probabilidad es especificada por la función de distribución dada por:
$$F_X^{(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{8} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{2} & \text{si } 2 \le x < 4 \\ 1 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$
    a. Grafique la función de distribución
    b. Encuentre la probabilidad de que el estudiante:
    i. Estudie exactamente 2 horas
    ii. Estudie exactamente 3 horas
    iii. Estudie

iv. Estudie más de 2 horas
v. Estudie menos de dos horas
vi. Estudie entre 1 y 3 horas, es decir, $P(1 < X < 3)$
vii. Estudie más de 2 horas dado que él estudia
viii. Estudie menos de 3 horas dado que él estudia al menos 1 hora.

9. En un juego de lanzamiento de dos dados, un jugador gana \$100 si la suma de los valores de los dados es 7 u 11, y pierde \$100 si la suma es 2 o 12, de otro modo ni gana ni pierde.
   a. Defina la variable aleatoria que describe el juego
   b. Calcule la función de distribución de la variable aleatoria definida en la parte a.

10. Suponga una función de masa de probabilidad, $f_X^{(x)}$, dada por:

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } \; x = -4;\ -1; \text{o } 2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } \; x = -2{,}5 \\ \frac{1}{12} & \text{si } \; x = 1{,}5 \\ \frac{1}{12} & \text{si } \; x = 3 \end{cases}$$

   a. Grafique la función de probabilidad
   b. Encuentre:
      i. $P(-2 < X \leq -2{,}2)$
      ii. $P(-1 < X \leq 1{,}5)$
      iii. $P(-1 \leq X \leq 1{,}5)$
      iv. $P(-1 \leq X < 1{,}5)$

11. Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad de dólares que un trabajador gana durante una hora seleccionada aleatoriamente. Suponga que la función de masa de probabilidad de X es dada por:

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} 0{,}3 & \text{si } \; x = 0 \\ kx & \text{si } \; x = 2 \text{ o } 3 \\ k(x-2) & \text{si } \; x = 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde k es una constante.

   a. Encuentre la constante k.
   b. Encuentre la probabilidad de que el trabajador tenga ganancia positiva para la hora.
   c. Encuentre la probabilidad condicional de que él gane por lo menos tres dólares, dado que él tiene ganancia positiva para la hora.

12. Suponga que la función de distribución de una variable aleatoria, está dada por:

$$F_X^{(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < -1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } \; -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \; 0 \leq x < 1{,}5 \\ \frac{5}{6} & \text{si } \; 1{,}5 \leq x < 2{,}5 \\ 1 & \text{si } \; x \geq 2{,}5 \end{cases}$$

   a. Grafique la función de distribución
   b. Encuentre la función de masa de probabilidad de X y grafíquela.

13. Sea $[x]$ la *parte entera de* x, es decir, $[x]$ denota el entero más grande menor o igual a x. (Por ejemplo: $[1{,}5] = 1; [-0{,}5] = -1$, y así sucesivamente). Suponga que la función de distribución de una variable aleatoria X está dada por:

$$F_X^{(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{[x]} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Encuentre la función de masa de probabilidad de X y pruebe que realmente lo es.

14. Suponga que la función de masa de probabilidad $f_X^{(x)}$ de una variable aleatoria está dada por:

$$f(-2) = \frac{1}{6}, f(2) = \frac{1}{6}, f(4) = \frac{1}{3}, f(5) = \frac{1}{6} \ \text{ y } \ f(8) = \frac{1}{6}$$

   a. Grafique $f_X^{(x)}$
   b. Encuentre la función de distribución de la variable aleatoria

15. Suponga que la función de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por:

$$f_X^{(x)} = a(1-a)^x; \ \ x = 0,1,2, \ldots ; \ \text{ donde } a \text{ es un número fijado, } 0 < a < 1.$$

   a. Pruebe que $f_X^{(x)}$ es realmente una función de masa de probabilidad.
   b. Encuentre la función de distribución de X.

16. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por:

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a. Encuentre la función de distribución de X, analíticamente y geométricamente usando el grafico de $f_X^{(x)}$.
   b. Grafique $F_X^{(x)}$.

17. Verifique si las siguientes funciones son funciones de densidad:

   a. $f_X^{(x)} = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & \text{si} \ \ x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, donde $\theta > 0$.

      i. Encuentre la función de distribución asociada con $f_X^{(x)}$; si X es una variable aleatoria con función de densidad $f_X^{(x)}$.
      ii. Calcule $P(X \geq 1)$

   b. $f_X^{(x)} = \begin{cases} \frac{\left[(x+1)e^{-\frac{x}{\theta}}\right]}{[\theta(\theta+1)]} & \text{si} \ \ x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, donde $\theta > 0$.

      i. Encuentre la correspondiente función de distribución.

18. Para que valores de k las siguientes funciones definen funciones de masa de probabilidad:

   a. $f_X^{(x)} = k\left(\frac{\lambda^x}{x!}\right), \ \ x = 0,1,2, \ldots; \ \ \lambda > 0.$
   b. $f_X^{(x)} = \frac{k}{N}, \ \ x = 1,2, \ldots, N.$

19. Demuestre que la siguiente función es una función de densidad:

$$f_X^{(x)} = \frac{1}{2} e^{|x|}, \qquad -\infty < x < \infty$$