

Notación de suma con sigma (sumatoria)

Antes de comenzar la siguiente sección, se introducirá un tipo de notación matemática que sirve para expresar muchas de las fórmulas que se utilizan en los procedimientos estadísticos que se estudiarán más adelante. En muchas ocasiones será necesario obtener la *suma* de un conjunto de números.

Supóngase que alguna variable \mathbf{X} toma los siguientes valores:

9 4 3 1 6

Nótese que puede considerarse 9 como el primer valor de \mathbf{X} , 4 como el segundo valor de \mathbf{X} , 3 como el tercer valor de \mathbf{X} , 1 como el cuarto valor de \mathbf{X} , y 6 como el quinto valor de \mathbf{X} . Una manera sencilla de expresar esto consiste en utilizar subíndices que representen la posición del valor en la lista. De este modo, el 9 que es el primer valor de \mathbf{X} será representado por x_1 ; de manera similar, debido a que 4 es el segundo valor de \mathbf{X} , estará representado por x_2 . Es decir:

$$x_1 = 9 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 3 \qquad x_4 = 1 \qquad x_5 = 6$$

Cuando se desee referir a un valor de \mathbf{X} de forma general sin hacer especificaciones, se utilizará el subíndice i y al valor se le llamará x_i (léase "equis sub i")

La letra griega Σ (sigma mayúscula) se utiliza para denotar una suma. Entonces $\sum_{i=1}^5 x_i = 23$. El

símbolo Σ en la expresión anterior indica que se deben sumar los valores de \mathbf{X} . Además, la expresión " $i = 1$ " que se encuentra debajo de sigma comienza con el valor de \mathbf{X} que tiene el subíndice $i = 1$ (x_1). De esta manera, se suman sucesivamente los valores de \mathbf{X} , uno cada vez, y la operación es finalizada cuando se alcanza el valor de \mathbf{X} cuyo subíndice es igual al número entero que se encuentra encima de sigma, 5 (x_5). Por consiguiente en la suma anterior se tiene paso por paso:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 x_i &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ &= 9 + 4 + 3 + 1 + 6 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Si sólo se desea sumar algunos valores, se utilizan los subíndices anotados por debajo y por encima de Σ . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^4 x_i &= x_2 + x_3 + x_4 \\ &= 4 + 3 + 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Al invertir este proceso, se puede utilizar este método para abreviar la expresión de los datos que se quiere sumar, por ejemplo:

$$x_3 + x_4 + x_5 \text{ se convierte en } \sum_{i=3}^5 x_i$$

$\sum_{i=1}^n x_i$ significa que n observaciones (todas) han de ser sumadas, y a menudo esto se abrevia con

los símbolos $\sum x_i$ o $\sum x$.

La notación sigma puede también utilizarse con expresiones más complicadas, como se demuestra en los siguientes ejemplos:

a. $\sum_{i=1}^3 i = 1 + 2 + 3 = 6$

b. $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 9^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2 + 6^2 = 143$

c. $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

Propiedades de Σ

Teorema 1

Si a es una constante y cada uno de los n valores diferentes de i es igual a a , entonces

$$\sum_{i=1}^n a = na$$

Prueba

Como cada una de las x es igual a una cantidad constante a :

$$\sum_{i=1}^n a = a + a + \dots + a = na$$

Teorema 2

Sea a una constante cualesquiera de todos los valores individuales que intervienen en la suma,

$$\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i$$

Prueba

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n ax_i &= ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n \\ &= a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Teorema 3

La notación sigma se puede distribuir respecto de la suma (o de la diferencia):

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i - z_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n z_i$$

Prueba

Lo anterior se cumple porque:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i - z_i) &= (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) + \dots + (x_n + y_n - z_n) \\ &= (x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n) - (z_1 + \dots + z_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n z_i \end{aligned}$$

Ejercicio:

Calcule cada una de las siguientes cantidades sirviéndose de los datos proporcionados (Nota: n es el número de observaciones)

<u>Y</u>
21
6
54
60
34
9
68
73
8

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|---|
| a. $\sum_{i=1}^6 8$ | e. $\left(\sum y\right)^2$ | i. $\frac{\left\{ \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left[\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}{n} \right\}}{n}$ |
| b. $\sum_{i=1}^n y_i$ | f. $\sum_{i=1}^n (y-37)$ | |
| c. $\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n}$ | g. $\sum_{i=1}^n (y-37)^2$ | j. $\sum_{i=1}^n (y-10)^2$ |
| d. $\sum y^2$ | h. $\frac{\sum_{i=1}^n (y-37)^2}{n}$ | |

Ejercicio:

Calcule las siguientes cantidades según los datos que se indican:

<u>X</u>	<u>Y</u>
3	10
5	11
9	15
10	19
2	21
1	26

- | | |
|---------------------------|--|
| a. $\sum x$ | d. $\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$ |
| b. $\sum_{i=1}^n y_i$ | e. $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)$ |
| c. $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ | f. $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)$ |