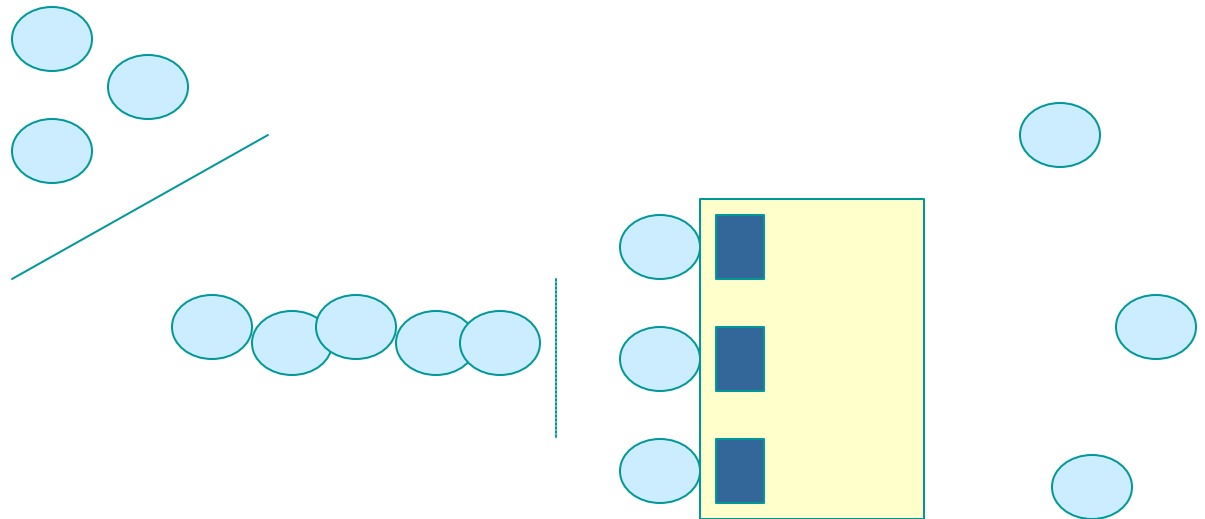


Teoría de Colas

Ernesto Ponsot Balaguer
Universidad de Los Andes
Escuela de Estadística



El Objetivo

- La teoría de colas o “líneas de espera”, procura el estudio riguroso del fenómeno (muy común en estos tiempos) de la espera organizada, que debe hacer un cliente para la obtención de un servicio que presta un servidor



La Justificación...

- Prácticamente en todas las organizaciones, existen problemas de colas. La principal razón de este fenómeno, es la limitación en los recursos disponibles, para la atención de todos los clientes que buscan ser servidos por la organización



La Justificación...

- Las colas ocasionan problemas a veces muy serios. Por ejemplo, en un hospital, la llegada de un paciente grave a la sala de emergencias, que no puede ser atendido por escasez de personal, puede ocasionarle la muerte... La extensión en demasía y



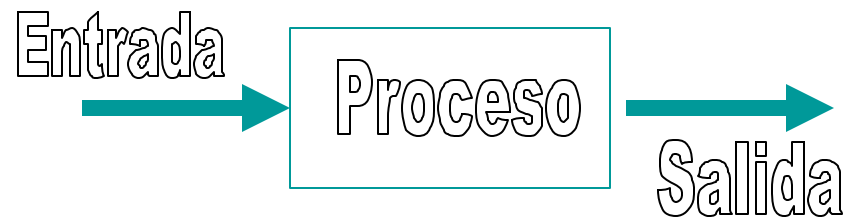
La Justificación...

permanente de la cola de un banco, puede causar el retiro de fondos de un número importante de clientes... La acumulación de equipos en un taller de reparaciones, puede ocasionar grandes pérdidas por su inutilidad o por la falta de espacio para almacenarlos... etc.

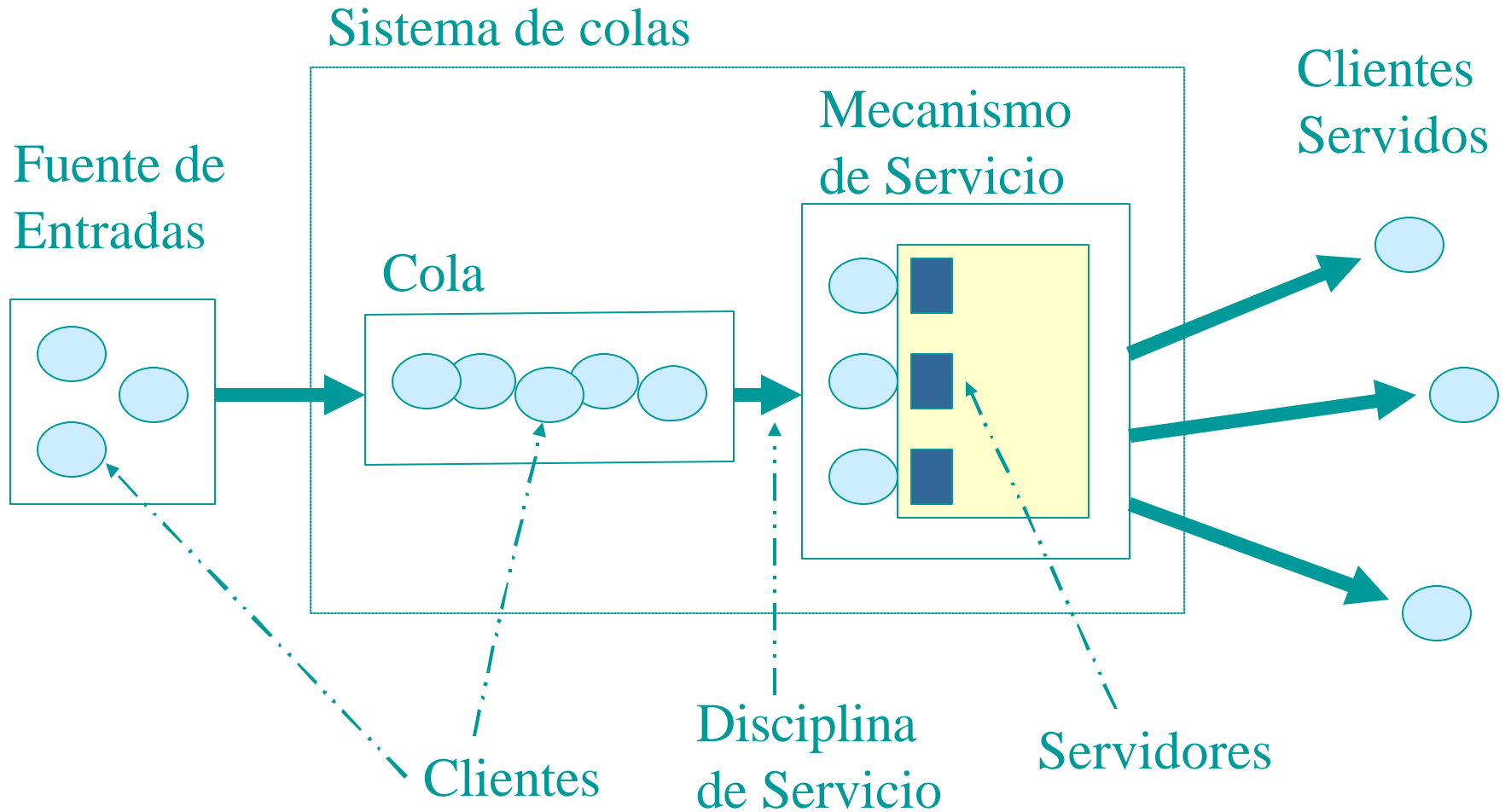


El Sistema de Colas...

- Este fenómeno puede ser modelado utilizando las ideas clásicas de sistemas E-P-S



El Sistema de Colas...



...Consideraciones

- **El tamaño de la fuente de entrada y su distribución**
- **El tiempo entre llegadas y su distribución**
- **El tamaño de la cola (máximo, promedio, etc.)**
- **La disciplina del servicio (FIFO y otras)**
- **El número de instalaciones de servicio**
- **El número de servidores (o canales de servicio) en cada instalación de servicio**
- **La disposición (en serie, paralelo o combinados) de los canales de servicio**
- **El tiempo de servicio y su distribución**



Notación

- $A / B / s$ (en un modelo sencillo)
- Donde A representa la distribución de la llegada (generalmente del tiempo entre llegadas); B la distribución del tiempo de servicio y s el número de servidores
- Además, convencionalmente se utiliza: M para la distribución exponencial, G para una distribución arbitraria en los tiempos de servicio, $G|$ para una distribución arbitraria en los tiempos de llegada y D para un número determinístico
- Por ejemplo: $M / M / 2$ significa un sistema de colas con tiempo entre llegadas exponencial, tiempo de servicio exponencial y dos servidores

Variables

En un sistema $M / M / 1$:

λ = Tasa media de llegadas (clientes por unidad de tiempo)

$1/\lambda$ = Tiempo medio entre llegadas

μ = Tasa media de servicio (en clientes por unidad de tiempo)

$1/\mu$ = Tiempo medio de servicio

L = Cantidad de clientes esperada en el sistema

L_q = Cantidad de clientes esperada en la cola

W = Tiempo total de espera en el sistema

W_q = Tiempo de espera en la cola

P_0 = Probabilidad de que el sistema esté vacío

Ecuaciones

$$l < m$$

$$L = \frac{l}{m - l}$$

$$L_q = \frac{l^2}{m(m - l)}$$

$$W = \frac{1}{m - l}$$

$$W_q = \frac{l}{m(m - l)}$$

$$P_0 = 1 - l / m$$

Ecuaciones de Little

$$L = l W$$

$$L_q = l W_q$$

$$W = W_q + 1 / m$$

Hagamos un Ejercicio

Una fotocopidora de la Facultad atiende estudiantes que llevan artículos o notas a fotocopiar. Los estudiantes son atendidos según alguna disciplina en la fotocopidora. Las siguientes son tablas que corresponden a la observación, en un día cualquiera, del trabajo en la fotocopidora:

Llegada	Llegadas Tiempo (min)	Servicio Duración (min)
0	0	-
1	10	10
2	30	12
3	50	8
4	70	10
5	90	10

Explique todas las consideraciones necesarias para modelar esta cola según lo que conoce hasta ahora. Dé recomendaciones al encargado de la fotocopidora sobre la base de los cálculos posibles.

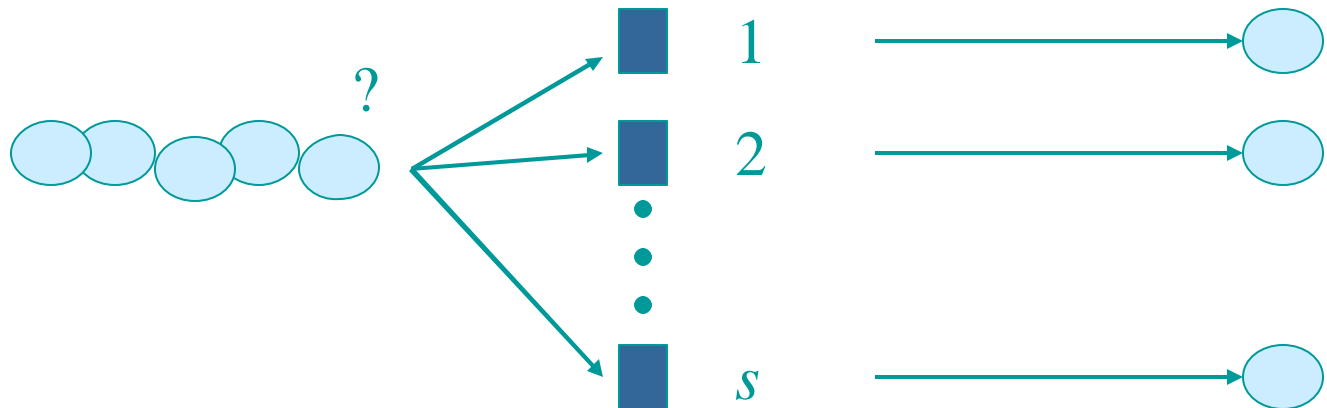
Modelo $M/G/1$

- En este caso, la distribución de los tiempos de servicio se supone desconocida (general), sin embargo, es necesario conocer al menos su media ($1/m$) y su varianza (s^2). Así:

$$L_q = \frac{l^2 s^2 + (l/m)^2}{2(1 - l/m)}$$

Modelo $M/M/s$

- En este caso, se supone que los clientes se forman en la fila y al llegar al final, toman el primer servidor que esté disponible (de los s que existen). Aquí, $\lambda < s \mu$



Las ecuaciones *M/M/s*

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(1/m)^n}{n!} + \frac{(1/m)^s}{s!} \left(\frac{1}{1 - (1/sm)} \right)}$$

$$L_q = P_0 \left(\frac{(1/m)^{s+1}}{(s-1)!(s-1/m)^2} \right)$$

Optimización del Modelo *M/M/s*

- Cuando se introducen factores de costo en un modelo de colas, se puede pensar en la necesidad de “optimizar” la función de costos del sistema (generalmente asociados con una cierta unidad de tiempo).



Optimización...

- Se puede suponer que se cuenta con dos tipos de costos asociados a los parámetros fundamentales del sistema:
 - ◆ C_s : Costo de disponer un servidor, por unidad de tiempo.
 - ◆ C_w : Costo, por unidad de tiempo, que representa una persona en el sistema.

Optimización...

- En primer lugar, es necesario responder a la pregunta: ¿qué unidad de tiempo se debe utilizar como referencia?. Para ello, se podría pensar en utilizar la unidad en que se tengan los costos o trasladar éstos a la unidad en que se computaron las ecuaciones del modelo...

Optimización...

- ...sin embargo, esta decisión no es relevante, ya que los resultados del modelo de colas son independientes de la unidad de tiempo escogida para el análisis.

Optimización... La función Objetivo

- En vista de los costos propuestos, se podría pensar en la siguiente función objetivo de la optimización:

Costo Total (función de s)

$$CT(s) = sC_s + C_w L(s)$$

Número de servidores

Número de Clientes Esperados en el Sistema (función de s)

Optimización... El Problema

- La función objetivo debe ser minimizada (¿?), entonces:

$$\min_s CT(s)$$

- Sin embargo, en la mayoría de los casos, no existen métodos analíticos para responder a este problema, así que, puede procederse por métodos numéricos (o por pruebas sucesivas).

Ejercicios “Altamente” Recomendados

- Del texto de Gould, pág. 563 en adelante: 13-5; 13-6; 13-7; 13-8; 13-17 (debe leerse “la media del tiempo de servicio”); 13-21; 13-22; 13-24; en el problema 13-21, encuentre el número óptimo de oficinistas que necesita la Steco.
- Del texto de Hillier, pág. 657 en adelante: leer las secciones 17.1 y 17.2.