

# 1

---

## NOCIONES BÁSICAS DE PROBABILIDAD

---

### 1.1 INTRODUCCIÓN

---

La probabilidad y la estadística son dos disciplinas íntimamente ligadas. Sin embargo, sólo después de conocer los fundamentos de la teoría de probabilidades y los procesos de inferencia estadística, es posible comprender a cabalidad ésta relación. Inicialmente el único punto de unión que se puede establecer es que ambas disciplinas tienen como objeto de estudio los fenómenos aleatorios. En éste sentido, la teoría de probabilidades tiene como un problema general describir mediante un modelo matemático cada tipo de fenómeno aleatorio, mientras que la inferencia estadística tiene planteado el problema inverso: a partir del conocimiento de una parte del fenómeno pretende establecer sus propiedades, para lo cual forzosamente debe utilizar algún modelo probabilístico que describa el fenómeno. Es ésta dependencia de la estadística de la teoría de probabilidad lo que justifica profundizar el conocimiento de ésta última. Ese es el objetivo de éste capítulo.

### 1.2 FENÓMENOS DETERMINÍSTICOS Y ALEATORIOS

---

Un fenómeno natural es toda manifestación natural que puede ser percibida mediante los sentidos o instrumentos. Los fenómenos naturales se pueden clasificar en determinísticos y aleatorios. Se puede definir un fenómeno determinístico, como toda manifestación natural que observada repetidamente bajo las mismas condiciones, produce siempre resultados idénticos. Por ejemplo, el tiempo que tarda un objeto en llegar al suelo invariablemente será el mismo, si las condiciones son iguales en cada repetición de la experiencia. Un fenómeno aleatorio, sería todo proceso que al observarlo repetidamente bajo el mismo conjunto de condiciones, produce resultados diferentes. El lanzamiento de un dado ejemplifica el concepto, pues aunque se conocen los resultados posibles, del uno al seis, no se puede predecir con completa certeza uno en particular.

Una manera de estudiar estos fenómenos es mediante la construcción de modelos matemáticos, los cuales intentan representar mediante expresiones cuantitativas las características, propiedades y/o funcionamiento de los procesos naturales. De modo que los modelos, son fórmulas que simplifican el fenómeno natural omitiendo aspectos y detalles que a juicio del investigador carecen de importancia en el desarrollo del fenómeno estudiado. Por lo tanto, el éxito de un modelo depende del acierto que se tenga en la eliminación de los "detalles" y en su capacidad de deducir un cierto número de consecuencias acordes con el funcionamiento del fenómeno natural estudiado. En relación a los tipos de fenómenos mencionados se colige que existen modelos determinísticos y modelos aleatorios.

### 1.2.1. Modelos determinísticos

Este tipo de modelo establece que las condiciones en las cuales se realiza un experimento determinan la ocurrencia de un resultado particular. Por ejemplo, si observamos el desplazamiento de un móvil cierta distancia, podemos utilizar como modelo matemático para describir la velocidad desarrollada la ecuación  $V = \text{distancia}/\text{tiempo} = d/t$ . Este es un modelo determinístico, porque cada vez que se repita la experiencia y se obtengan los mismos valores para  $d$  y  $t$ , se producirá el mismo valor de  $V$ . Las posibles desviaciones del valor predicho son tan pequeñas que no invalidan el modelo. Se puede observar que se ha simplificado una situación. En el modelo no están considerados aspectos presentes en la experiencia y que son irrelevantes para describir el fenómeno como son la temperatura del aire, la presión atmosférica, el peso del móvil, etc.

### 1.2.2. Modelos aleatorios

En estos modelos las condiciones de un experimento no determinan un resultado particular, sino su probabilidad de ocurrencia dentro de un conjunto de resultados posibles. En otras palabras, los modelos aleatorios, también conocidos como aleatorios, estocásticos o probabilísticos, son fórmulas que permiten obtener la distribución de probabilidades de los resultados posibles de un experimento. Por ejemplo, ¿cuántas veces saldrá el número seis al lanzar un dado cinco veces?. Esta experiencia no se puede describir mediante un modelo determinístico, puesto que cada vez que se repite el ensayo no tenemos certeza de cual será el resultado. Sólo conocemos el conjunto de posibles resultados: el número seis podrá salir 0, 1, 2, 3, 4, 5 veces. En éste caso se debe utilizar un modelo probabilístico, que aunque no indica un resultado particular, permite conocer cual es la probabilidad de obtener cualquiera de los resultados posibles. En el caso particular del ejemplo, el modelo aleatorio que describe el experimento es el siguiente:

$$p(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$$

Donde:

$x$  = número de veces o ensayos donde ocurre el resultado esperado (éxito).

$n$  = número de ensayos que forman el experimento.

$p$  = probabilidad de éxito, es decir de obtener un seis.

$q = (1-p)$  = probabilidad de fracaso, es decir de no obtener seis.

$C_x^n$  = número de maneras diferentes de obtener un mismo resultado =  $n!/x!(n-x)!$

La probabilidad de obtener 3 veces el número seis en cinco lanzamientos de un dado, se obtiene resolviendo la formulación anterior.

$$p(x=3) = C_3^5 (1/6)^3 (5/6)^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!} (1/6)^3 (5/6)^2 = 0.0312$$

Al calcular la probabilidad de obtener cada uno de los resultados posibles se puede construir la distribución de probabilidades del experimento, la cual da idea de su comportamiento probabilístico.

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	0,4020	0,4019	0,1615	0,0312	0,0021	0,0013

En éste momento no es importante comprender el modelo que describe la situación del ejemplo, sino entender como funcionan en términos generales los modelos aleatorios.

### 1.2.3. Experimentos aleatorios

Un experimento, desde el punto de vista estadístico, está constituido por uno o más ensayos, término que identifica cualquier acto repetible que produce un resultado único cada vez que se ejecuta. Por ejemplo, si se determina en familias con cuatro hijos el número de hembras, tenemos un experimento formado por cuatro ensayos. Cada ensayo consiste en determinar el sexo de los cuatro hijos, teniendo cada uno un resultado único: varón o hembra. El experimento sólo se completa después de determinar el sexo de los cuatro hijos. Verifique que éste experimento consta de 4 ensayos y 16 posibles resultados. Cualquier experimento que puede tener más de un resultado se califica como aleatorio y es posible encontrar un modelo probabilístico que permita determinar la probabilidad de ocurrencia de cada resultado. Los experimentos aleatorios a pesar de ser de naturaleza muy variada, mantienen ciertas características comunes, como las siguientes:

- Se pueden repetir indefinidamente manteniendo las condiciones en las cuales se realiza.
- Previo a cualquier ensayo no es posible predecir un resultado particular.
- Previo al experimento es posible predecir el conjunto de posibles resultados.
- La frecuencia de aparición de los diferentes resultados tiende a regularizarse al aumentar el número de repeticiones.

Algunos ejemplos de experimentos aleatorios son los siguientes: lanzar una o más monedas, lanzar un dado, determinar el número de individuos en varias unidades de muestreo, determinar la concentración de una sustancia en muestras bióticas o abióticas, entre otros. Verifique si estos ejemplos cumplen con las propiedades señaladas.

### 1.2.4. Espacio muestral

Asociado a cualquier experimento aleatorio (E) existe un espacio muestral (S) que lo definimos como el conjunto de todos los posibles resultados de E. En el caso del experimento de determinar el número de hembras en familia con cuatro hijos, se puede identificar el resultado de cada ensayo con las letras V = varón y H = hembra. El espacio muestral estaría integrado por todas las posibles formas de ocurrencia del experimento

$$S = \left\{ \begin{array}{l} VVVV \\ VVVH, VVHV, VHVV, HVVV \\ VVHH, VHVH, HVVH, VHHV, HVHV, HHVV \\ VHHH, HVHH, HHVH, HHHV \\ HHHH \end{array} \right\}$$

Esta forma simbólica de representar un espacio muestral es un proceso relativamente simple cuando son pocos los resultados. Pero si son numerosos es difícil encontrar todas las formas posibles como los resultados pueden ocurrir. En estos casos es mejor representar cada uno con un número. En nuestro ejemplo el espacio simbólico podemos transformarlo fácilmente en un

espacio numérico, si se cuenta en cada resultado el número de hembras. Así al resultado VVVV le corresponde el 0 (ninguna hembra); al grupo de resultados VVVH, VVHV, VHVV, HVVV les corresponde el 1 (una hembra) y así sucesivamente, de modo que el espacio muestral ahora está formado por números y se puede describir en la forma siguiente:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Si como en el presente caso, se escribe el valor de cada uno de los resultados se dice que el espacio muestral está descrito por extensión o descripción. Otra forma de representar el espacio muestral es por comprensión. En este caso el espacio numérico anterior se puede representar de la forma siguiente:

$$S = \{x \in \mathbb{Z}^+ (\text{enteros positivos}) / 0 \leq x \leq 4\}$$

Cuando el conjunto de resultados sigue una secuencia predecible, se pueden utilizar puntos suspensivos para sustituir la mayoría de los elementos. Por ejemplo, si una letra del abecedario se elige al azar, el espacio de este experimento se puede escribir de la forma siguiente:

$$S = \{a, b, c, d, \dots, x, y, z\}$$

### 1.2.5. Espacio muestral discreto y continuo

De acuerdo a la naturaleza de la variable que se esté manejando los espacios muestrales se clasifican en discretos y continuos. Es discreto si está formado por elementos numerables o contables, es decir que son consecuencia de enumerar o contar los resultados individuales de un experimento. A su vez el número de elementos contables puede ser finito o infinito. Entonces se habla de un espacio discreto y finito o de un espacio discreto e infinito. Al contar el número de hembras en familias de cuatro hijos se generó un espacio muestral discreto y finito. Pero si se cuenta el número de veces que hay que lanzar una moneda hasta obtener cara por primera vez, se genera un espacio muestral discreto e infinito. Para el caso de este último ejemplo, el espacio se puede representar con una de las tres formas siguientes:

- $S = \{S, SC, SSC, SSSC, SSSSC, \dots\}$  donde S = sale sello y C = sale cara
- $S = \{\text{número de lanzamientos}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $S = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x \geq 1\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

El espacio muestral es continuo si esta formado por elementos no numerables. Por naturaleza todo espacio muestral continuo es infinito. Todas las variables que resultan de un proceso de medición (tiempo, talla, peso, densidad, temperatura, etc.) generan espacios continuos e infinitos. Por ejemplo, si se mide el tiempo que tarda una semilla en germinar se produce un espacio muestral continuo e infinito que se puede representar de la forma siguiente:

$$S = \{t = \text{tiempo de germinación} / t \geq 0\}$$

En los ejemplos de los otros experimentos aleatorios dados anteriormente, existen espacios muestrales discretos y continuos. Señale los espacios muestrales discretos y continuos entre los ejemplos siguientes:

$E_1 = \text{lanzar una moneda}$	$S_1 = \{c, s\}$
$E_2 = \text{lanzar dos monedas}$	$S_2 = \{cc, cs, sc, ss\}$
$E_3 = \text{lanzar un dado}$	$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$E_4 = \text{contar número de individuos (x)}$	$S_4 = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x \geq 0\}$
$E_5 = \text{determinar concentración de una sustancia (x)}$	$S_5 = \{x \in \mathbb{R}^+ / 0 \leq x \leq \text{máximo}\}$

### 1.2.6. Evento o Suceso

Cualquier conjunto de resultados dentro de un espacio muestral se denomina evento o suceso. En la terminología de conjuntos se puede decir que un evento es un subconjunto del espacio muestral. Los eventos se identifican con letras mayúsculas. El evento integrado por todos los resultados es igual al espacio muestral (S). Por ejemplo, son eventos de los experimentos anteriores los siguientes:

$$A_1 = \{\text{sale cara}\} = \{c\}$$

$$A_2 = \{\text{sale al menos una cara}\} = \{cc, cs, sc\}$$

$$A_3 = \{\text{sale un número par}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$A_4 = \{\text{un número de individuos menor a 10}\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ / 0 \leq x \leq 9\}$$

$$A_5 = \{\text{contenidos mayores a 10 unidades}\} = \{x \in \mathbb{R}^+ / 11 \leq x \leq \text{valor máximo}\}$$

### 1.2.7. Evento elemental

Se define como cada resultado que conforma un espacio muestral o a un evento cualesquiera.

### 1.2.8. Evento complemento

Si se define un evento A dentro un espacio muestral S, el evento complementario de A, está constituido por todos los elementos que pertenecen a S y que no están en A. El evento complemento se representa con la misma letra del evento al que complementa con un tilde en la parte superior. En el caso del evento A su complemento queda indicado como  $\bar{A}$ .

$$\bar{A} = \{x / x \notin A\}$$

### 1.2.9. Evento vacío

Se define como un evento que no tiene elementos, y que, por lo tanto no puede ocurrir. Por lo general se identifica con el símbolo  $\emptyset$ .

## 1.3 ALGEBRA DE LOS EVENTOS

---

Con los eventos de un mismo espacio muestral se pueden realizar operaciones que resultan en la formación de nuevos eventos, los cuales siguen siendo subconjuntos del espacio muestral. Analizaremos dos operaciones básicas: la unión y la intersección de eventos, que en cierto modo son paralelas a las operaciones de suma y multiplicación respectivamente. Para tal fin consideremos un experimento cualquiera  $E$ , con un espacio muestral  $S$  y dos eventos  $A$  y  $B$ , incluidos dentro de  $S$ .

### 1.3.1. Unión de eventos

La unión de dos eventos  $A$  y  $B$  se representa  $A \cup B$ , y da como resultado a otro evento el cual esta formado por todos los elementos que pertenecen al evento  $A$ , al evento  $B$  o a ambos eventos a la vez.

$$A \cup B = C = \{x / x \in A \text{ ó } x \in B \text{ (o ambos)}\}$$

Si por ejemplo se escogen al azar personas y se le determina el color de su piel y de sus ojos, definiéndose los eventos "ojos negros" y "piel morena", la unión de ambos ocurrirá cada vez que escojamos una persona morena, una con los ojos negros, o una que sea a la vez morena y de ojos negros. En otras palabras el evento unión estará formado por tres resultados posibles: "ojos negros", "piel morena", "piel morena y ojos negros".

Cuando la unión de dos eventos equivale a todo el espacio muestral, se dice que los dos eventos son mutuamente exhaustivos. En el ejemplo anterior, los eventos piel morena y ojos negros no son mutuamente exhaustivos, porque la unión de ambos no llena todos los resultados posibles del espacio muestral, el cual incluye como resultados otros tipos de piel y colores de ojos. Pero si el experimento hubiese consistido en analizar el color de los ojos únicamente y definidos los eventos "ojos negros" y "ojos de otro color", ambos serían mutuamente exhaustivos, porque su unión equivale a todos los resultados posibles.

### 1.3.2. Intersección de eventos

La intersección de dos eventos  $A$  y  $B$  se representa  $A \cap B$ , y da como resultado otro evento el cual esta formado por los elementos que pertenecen a ambos eventos a la vez.

$$A \cap B = D = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

En el ejemplo anterior, la intersección de los eventos "ojos negros" y "piel morena", estaría representado por todos los elementos que cumplen con ambas condiciones a la vez: tener ojos negros y piel morena. Es decir que el evento intersección esta formado por el resultado "ojos negros y piel morena".

Cuando la intersección de dos eventos es vacía, se dice que los dos eventos son mutuamente excluyentes. Si por ejemplo se está determinando el sexo a los insectos colectados en una planta. Los eventos "macho" y "hembra" son mutuamente excluyentes, porque ningún ejemplar puede ser al mismo tiempo macho y hembra. Note que estos dos eventos, también son mutuamente exhaustivos.

### 1.3.3. Diagramas de Venn

Un recurso útil para manipular los conceptos de espacio muestral, de evento, sus relaciones y las operaciones que se pueden realizar entre ellos, son los diagramas de Venn. En la Figura 1.1 se representan mediante estos diagramas algunos conceptos y relaciones.

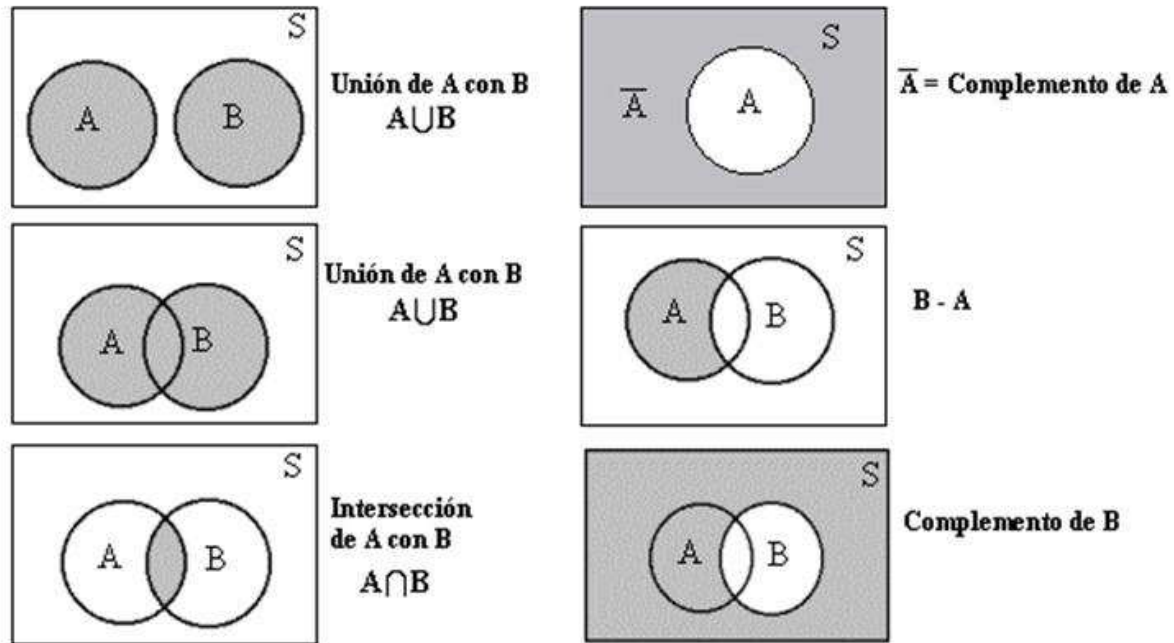


Figura 1.1. Diagramas de Venn. Los eventos o sucesos están representados por los círculos planos (A y B) y el espacio muestral por la superficie total del rectángulo (S). El área sombreada muestra el resultado de la operación con los eventos.

## 1.4 CONCEPCIONES DE LA PROBABILIDAD

Se puede definir a la probabilidad como un valor numérico que cuantifica la posibilidad o factibilidad de ocurrencia de un resultado determinado dentro de un conjunto de resultados posibles. Este valor varía entre 0 y 1. A un resultado imposible de ocurrir se le asigna una probabilidad de cero, si por el contrario es segura la ocurrencia, se le asigna una probabilidad de uno. A las probabilidades intermedias se les asocian valores entre 0 y 1. A mayor posibilidad de ocurrencia el valor de probabilidad es más cercano a uno.

Hay dos enfoques diferentes sobre como asignar la probabilidad a un evento: la asignación objetiva y la asignación subjetiva. Las trataremos a continuación.

### 1.4.1. Asignación objetiva de la probabilidad.

De acuerdo a ésta concepción la asignación de probabilidades se basa en el conocimiento fáctico del espacio muestral y de la frecuencia relativa de ocurrencia de sus eventos elementales. El conocimiento de estas dos características puede ser *a priori* o *a posteriori*.

### 1.4.1.1. Probabilidad *a priori*

Este enfoque se conoce como clásico por ser el más antiguo. Esta escuela de pensamiento supone que la probabilidad de ocurrencia de un resultado particular se conoce antes de producirse el mismo. Para esto es necesario presumir que todos los resultados elementales son igualmente probables y excluyentes. En estos casos hablamos de eventos igualmente probables o equiprobables y el espacio muestral se denomina espacio muestral equiprobable.

Si el espacio  $S$  tiene  $n$  eventos elementales equiprobables:  $S = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_r, \dots, e_n\}$  la probabilidad de ocurrencia de cada evento elemental  $e_i$  será  $1/n$ , es decir,  $P(e_i) = 1/n$ . Si en ese espacio  $S$  se define un suceso  $A$  formado por  $r$  eventos elementales,  $A = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_r\}$  la probabilidad de ocurrencia del evento  $A$  será igual a la suma de las probabilidades de los  $r$  sucesos elementales que lo forman:

$$P(A) = \sum_{i=1}^r P(e_i) = p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) + \dots + p(e_r).$$

Como la probabilidad de ocurrencia es la misma para todos los eventos elementales:

$$p(e_1) = p(e_2) = p(e_3) = \dots = p(e_r)$$

La probabilidad del evento  $A$  será entonces

$$P(A) = \underbrace{1/n + 1/n + 1/n + \dots + 1/n}_{r \text{ veces}} = r(1/n) = r/n$$

Por lo tanto, en la concepción clásica, la probabilidad de un evento es igual al número de resultados en que el evento ocurre dividido por el número de resultados posibles:

$$P(A) = \frac{\text{numero de eventos elementales que forman } A}{\text{numero de eventos elementales que forman } S} = \frac{r}{n}$$

#### Ejemplo 1.1.

Se lanza una moneda normal dos veces y se desea calcular la probabilidad de obtener al menos una cara.

El espacio muestral está formado por cuatro resultados  $S = \{cc, cs, sc, ss\}$ , con la misma probabilidad de ocurrencia  $P_{(cc)} = P_{(cs)} = P_{(sc)} = P_{(ss)} = 1/4$ . Puesto que el evento de interés está formado por tres resultados:  $A = \{\text{al menos una cara}\} = \{cc, cs, sc\}$ , su probabilidad será  $P(A) = 3/4$ .

**Ejemplo 1.2.**

Si de un mazo de barajas de póker se extrae aleatoriamente una carta y se quiere saber la probabilidad con la cual puede ocurrir los eventos siguientes: a) sale un As, b) sale corazón negro, c) sale una J o una Q, d) sale una pinta negra.

El espacio muestral está formado por 52 eventos elementales equiprobables.

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K \text{ (Corazón negro } \heartsuit \text{ )} \\ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K \text{ (Corazón rojo } \spadesuit \text{ )} \\ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K \text{ (Trébol negro } \clubsuit \text{ )} \\ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K \text{ (Pique rojo } \diamond \text{ )} \end{array} \right\}$$

Los eventos y sus respectivas probabilidades de ocurrencia se muestran a continuación:

Evento	Probabilidad
$A = \{I\heartsuit, I\spadesuit, I\clubsuit, I\diamond\}$	$P(A) = 4/52 = 0,077$
$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K (\heartsuit)\}$	$P(B) = 13/52 = 0,25$
$C = \{J\heartsuit, J\spadesuit, J\clubsuit, J\diamond, Q\heartsuit, Q\spadesuit, Q\clubsuit, Q\diamond\}$	$P(C) = 8/52 = 0,154$
$D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K (\text{Corazón negro } \clubsuit)\}$	$P(D) = \frac{26}{52}$

**1.4.1.2. Probabilidad a posteriori**

Como hemos visto, el concepto clásico de probabilidad sólo se puede aplicar en experimentos que tienen un número finito de resultados equiprobables. Desafortunadamente, la mayoría de los problemas que se presentan en la vida cotidiana no son de este tipo, de manera que se requiere una definición de probabilidad mucho más general. Esta otra concepción de la probabilidad surgió de la comprobación empírica. Es una observación común que en los experimentos aleatorios repetidos muchas veces la frecuencia relativa con la cual se produce un resultado se estabiliza alrededor de cierto valor. En la Figura 1.2A se muestra como al aumentar el número de lanzamientos de una moneda honesta, la frecuencia relativa de aparición del resultado cara tiende hacia el valor 0,5

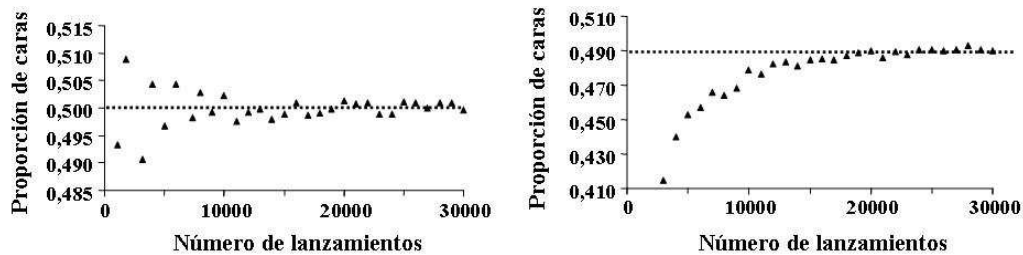


Figura 1.2. Frecuencia relativa del número de caras con el lanzamiento de una moneda honesta (A) y una moneda cargada (B)

En el caso de que se utilice una moneda cargada, la frecuencia relativa se estabiliza en un valor distinto como 0,490 (Figura 1.2B).

Si cualquier experimento aleatorio se repite indefinidamente, las frecuencias relativas con la cual aparecen los resultados se pueden hacer equivalentes a su probabilidad de ocurrencia, puesto que siempre se debe cumplir que la probabilidad de un evento A es el límite de su frecuencia relativa cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fr(A) = P(A)$$

Esta forma de proceder permite acercarnos al verdadero valor de probabilidad de un evento, pero obviamente, en términos prácticos, este valor es imposible de obtener. De manera que si se tiene un número limitado de repeticiones de un experimento, por conveniencia se puede asumir que la frecuencia relativa de aparición de un evento determinado es una buena estimación de su probabilidad de ocurrencia, teniendo siempre en cuenta que la estimación será mejor en la medida que el número de repeticiones incrementa. Esta concepción alternativa de la probabilidad se conoce como de frecuencia relativa o *a posteriori* por el hecho de que sólo puede obtenerse luego de repetir el experimento. Veamos los ejemplos siguientes:

### Ejemplo 1.3.

Se quiere conocer la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda cargada.

El espacio muestral sigue siendo:  $S = \{c, s\}$ , pero no es equiprobable porque la moneda no es honesta. Para poder conocer la probabilidad de ocurrencia de los eventos sale cara y sale sello, es necesario lanzar la moneda una gran cantidad de ocasiones, registrar el número de veces que aparece cada resultado y calcular su frecuencia relativa. Supóngase que se lanzó la moneda 200 veces y el evento cara ocurrió en 75 ocasiones, tenemos que:

$$fr(c) = 75/200 = 0,375 \text{ y } fr(s) = 125/200 = 0,625$$

Estos dos resultados se asignan como la probabilidad de ocurrencia de los eventos considerados, de modo que  $p(c) = 0,375$  y  $p(s) = 0,625$  respectivamente.

### 1.4.2. Asignación subjetiva de la probabilidad.

Muchos fenómenos pueden que nunca hayan ocurrido o se han producido muy pocas veces. Por ejemplo una carrera de caballos es un hecho único, que nunca puede repetirse bajo las mismas condiciones; el descubrimiento de un fármaco para curar una enfermedad como el Sida es un hecho único que no ha ocurrido; la llegada de un hombre al planeta Marte es un hecho que no se ha producido. En estos caso la asignación de la probabilidad no puede estar basada ni en el conocimiento previo del espacio muestral, ni en la frecuencia de ocurrencia de los hechos, de modo que el enfoque objetivo poco puede hacer para asignar probabilidades a este tipo de sucesos. En consecuencia se ha desarrollado un enfoque de asignación de probabilidades denominado subjetivista. De acuerdo a esta visión, el valor de probabilidad es asignado por una persona de acuerdo al grado de confianza que ella tenga en la ocurrencia del hecho. En otras palabras si una persona tiene confianza en que un resultado ocurrirá r veces en

n repeticiones, al evento se le asigna el valor del cociente la probabilidad  $r/n$ . Bajo este punto de vista, diferentes individuos disponiendo de la misma información pueden tener distintos grados de confianza acerca de la ocurrencia de un hecho. Un ejemplo de ésta situación son las apuestas en los eventos deportivos, donde es común escuchar que un determinado resultado está favorecido en una proporción de 2 a 3, es decir que dos de cada tres personas han apostado por ese resultado. Aunque el término subjetivo parece ubicar esta concepción de la probabilidad fuera del ámbito científico, no hay otra cosa más lejos de la realidad, actualmente el enfoque subjetivo tiene gran utilidad en la Teoría Bayesiana de la Decisión, área de la estadística en pleno desarrollo, de gran importancia en las ciencias sociales y económicas, donde frecuentemente se trabaja con muestras pequeñas.

## 1.5 DESARROLLO AXIOMÁTICO DE LA PROBABILIDAD

---

Las tres concepciones de probabilidad que se acaban de tratar, están de acuerdo en lo siguiente: i) la probabilidad es una proporción que varía entre cero y uno, y ii) éste cociente cumple con ciertos postulados o axiomas, a partir de las cuales se desarrolla el cálculo de probabilidades. A continuación veremos estos postulados o axiomas.

**1.5.1. Axioma de positividad:** la probabilidad de un evento nunca es un número negativo, es cero o un número real positivo. Todo evento que ocurre siempre tiene una probabilidad mayor a cero. Sólo los eventos imposibles de ocurrir tienen una probabilidad igual a cero. Por ejemplo la probabilidad de que un individuo vivo no muera es cero. Este axioma puede denotarse como:  $P(A) \geq 0$ .

**1.5.2. Axioma de certidumbre:** este postulado establece que la probabilidad de todo el espacio muestral es uno; es decir  $P(S) = 1$ . En otras palabras la probabilidad de todo evento con una certidumbre total de ocurrencia es uno. Por ejemplo, la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par o impar es un hecho seguro, porque cada vez que se lanza un dado sale un número par o un número impar, en consecuencia su probabilidad es uno. Los dos axiomas anteriores en conjunto dan soporte a la definición de la probabilidad como un número real que varía entre cero y uno, ambos inclusive. Esta consecuencia se expresa como  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

**1.5.3. Axioma de la adición:** la probabilidad de un evento A es igual a la suma de las probabilidades de los eventos elementales que lo conforman. Supongamos que A es un evento formado por n eventos elementales  $A = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$  su probabilidad será

$$P(A) = P(e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup \dots \cup e_n) = P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + \dots + P(e_n)$$

### Ejemplo 1.4.

En familias de cuatro hijos cuál es la probabilidad de encontrar una que tenga menos de tres hijos varones.

El espacio muestral está formado por 16 resultados equiprobables:  $P(e_i) = 1/16$ .

$$S = \left\{ \begin{array}{l} VVVV \\ VVVH, VVHV, VHVV, HVVV \\ \mathbf{VVHH, VHVH, HVVH, VHHV, HVHV, HHVV} \\ \mathbf{VHHH, HVHH, HHVH, HHHV} \\ \mathbf{HHHH} \end{array} \right\}$$

El evento  $A = \{\text{menos de tres varones}\} = \{0, 1, 2\}$  está formado por 11 resultados (área en negritas en S):

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{VVHH, VHVH, HVVH, VHHV, HVHV, HHVV} \rightarrow \text{Dos varones} \\ \mathbf{VHHH, HVHH, HHVH, HHHV} \rightarrow \text{Un varón} \\ \mathbf{HHHH} \rightarrow \text{Cero varones} \end{array} \right\}$$

La probabilidad del evento A será igual a la suma de las probabilidades de los 11 eventos elementales:

$$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} P(VVHH) + P(VHVH) + P(HVVH) + P(VHHV) + P(HVHV) + P(HHVV) + \\ P(VHHH) + P(HVHH) + P(HHVH) + P(HHHV) + \\ P(HHHH) \end{array} \right\} = 11 \left( \frac{1}{16} \right) = \frac{11}{16}$$

## 1.6 REGLAS PARA EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

A partir de los axiomas anteriores se pueden deducir algunas reglas básicas para calcular las probabilidades de diferentes tipos de eventos.

### 1.6.1. Regla del conjunto vacío (Teorema 1)

Sí  $\emptyset$  es el conjunto vacío, entonces  $P(\emptyset) = 0$ , El conjunto vacío representa un evento que no puede ocurrir. Por lo tanto, de acuerdo a la definición que hemos dado de probabilidad, le corresponde una probabilidad igual a cero.

### 1.6.2. Regla de adición para eventos mutuamente excluyentes (Teorema 2)

Sí A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, la probabilidad de ocurrencia de A ó de B es la suma de sus probabilidades separadas.

$$P(A \text{ ó } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

### Ejemplo 1.5.

Si dos individuos con el mismo genotipo Aa se aparean se deben producir cuatro tipos de cigotos, cada uno con la misma probabilidad de ocurrencia. La formación de cada cigoto es un

evento mutuamente exclusivo. ¿Cuál será la probabilidad de que un descendiente sea homocigoto ( $AA$  ó  $aa$ )?

El espacio muestral está formado por cuatro resultados  $S = \{AA, Aa, aA, aa\}$  con la misma probabilidad de ocurrencia  $P(e_i) = 1/4$ . El evento  $C = \{\text{individuos homocigoto}\}$  resulta de la unión de dos eventos mutuamente excluyentes  $A = \{AA\}$  y  $B = \{aa\}$ .

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/4 + 1/4 = 2/4 = 1/2$$

### 1.6.3. Regla de adición para eventos solapados (Teorema 3)

Sí  $A$  y  $B$  son dos eventos cualesquiera que pueden ocurrir juntos, significa que algunos de los eventos elementales que los conforman pertenecen tanto a  $A$  como a  $B$ , es decir forman parte de la intersección de los dos eventos. Por el axioma 3 sabemos que la probabilidad de ocurrencia de  $A$  o de  $B$  es la suma de las probabilidades de los eventos elementales que los forman. Ahora bien como los eventos están solapados si se suman  $P(A)$  y  $P(B)$ , en el resultado se están incluyendo dos veces las probabilidades de los eventos elementales que comparten. De manera que es necesario sustraer una vez la probabilidad de los eventos elementales compartidos, para obtener la probabilidad de la unión de  $A$  con  $B$ . En definitiva la regla de los eventos solapados es entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

#### Ejemplo 1.6.

En un estudio clínico efectuado para la población de pacientes que asistió a las consultas de endocrinología, se determinó que el 37% de los pacientes fueron obesos, un 4,8% sufrió de diabetes y 2,2% fueron obesos y diabéticos. ¿Cuál es la probabilidad que un paciente elegido aleatoriamente de esa población sea obeso ó diabético?

El espacio muestral esta formado por todos los pacientes que acudieron al servicio de endocrinología. Son tres los eventos definidos dentro de éste espacio muestral:

$$A = \{\text{Pacientes obesos}\} \quad B = \{\text{Pacientes diabéticos}\} \quad C = \{\text{Pacientes obesos y diabéticos}\}$$

El evento  $C$  representa el solapamiento o intersección entre los eventos  $A$  y  $B$ . Es importante fijarse que en éste caso se debe aplicar el concepto de frecuencia relativa en la asignación de las probabilidades, por lo tanto es necesario convertir los valores porcentuales en proporciones.

$$P(A) = 0,37$$

$$P(B) = 0,48$$

$$P(C) = P(A \cap B) = 0,022$$

Como lo que se requiere es la probabilidad de ocurrencia de dos eventos solapados, se debe aplicar la regla de la adición.

$$P(\text{obeso ó diabético}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,37 + 0,048 - 0,022 = 0,44$$

**Ejemplo 1.7.**

A veces cuando la asignación de probabilidades se hace en base a las frecuencias relativas, es conveniente presentar la frecuencia absoluta de los eventos conjuntos en forma de tabla. Por ejemplo en un estudio sobre los peces de un río se encontraron cuatro especies, siendo clasificados los individuos de cada especie en cuatro categorías de tamaño. La frecuencia con la cual ocurren los resultados se resume en la tabla siguiente:

Especie	Tamaño I	Tamaño II	Tamaño III	Tamaño IV	Total
Sp <sub>1</sub>	0	10	25	50	85
Sp <sub>2</sub>	5	15	8	0	28
Sp <sub>3</sub>	25	20	2	1	48
Sp <sub>4</sub>	2	6	30	15	53
Total	32	51	65	66	214

En cada una de las casillas centrales se muestra la frecuencia de la intersección de los eventos señalados en la primera fila y la primera columna. Las casillas de los márgenes inferior y derecho muestran el total de apariciones de cada evento, independientemente de si otro ha ocurrido o dejado de ocurrir. Se pueden usar los totales de cada fila o de cada columna para calcular las frecuencias relativas (probabilidades) de ocurrencia de cada evento, independientemente de cual otro lo haya acompañado. Por ejemplo la probabilidad de que un individuo sea de la especie 1 es  $P(\text{Sp}_1) = 85/214$  y la probabilidad de que sea de la talla III es  $P(\text{III}) = 65/214$ . Estas probabilidades se llaman marginales porque están calculadas con los valores totales de las casillas que se encuentran en los márgenes de la tabla. También se puede calcular la probabilidad de que dos eventos ocurran conjuntamente. Por ejemplo, la probabilidad de que al elegir un pez al azar pertenezca a la especie 2 y sea de la talla II es  $P(\text{Sp}_2 \cap \text{II}) = 15/214$ . La probabilidad de que un pez seleccionado aleatoriamente sea de la especie 3 ó de tamaño II, se obtiene de la forma siguiente:

$$P(\text{Sp}_3 \text{ ó II}) = P(\text{Sp}_3 \cup \text{II}) = P(\text{Sp}_3) + P(\text{II}) - P(\text{Sp}_3 \cap \text{II}) = \frac{48}{214} + \frac{51}{214} - \frac{20}{214} = \frac{79}{214} = 0,37$$

**1.6.4. Regla de la complementación (Teorema 4):** sean  $A$  y  $\bar{A}$  dos eventos complementarios en un espacio muestral  $S$ . Como sabemos los eventos complementarios son mutuamente excluyentes, por lo que se deduce de los axioma 2 y 3 que la probabilidad de la unión de  $A$  con  $\bar{A}$  es:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(S) = 1$$

Por lo tanto la probabilidad de  $A$ , será:  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

**Ejemplo 1.8.**

En el curso de una investigación de ecología animal se encontró que la distribución por tamaño de cierto roedor es la siguiente:

Longitud (cm)	Frecuencia relativa (fr)
8	0,250
10	0,400
12	0,200
14	0,080
16	0,05
18	0,02

Se quiere saber cuál es la probabilidad de que al extraer aleatoriamente un individuo tenga menos de 18 cm.

El espacio muestral  $S = \{8, 10, 12, 14, 16\}$  no es equiprobable. La frecuencia relativa con la cual ocurre cada resultado se asume como su probabilidad de ocurrencia. El evento que interesa es  $A = \{\text{ratas menores a } 18\text{cm}\} = \{8, 10, 12, 14, 16\}$  y su probabilidad se puede encontrar de dos formas:

a) Aplicando la regla de la adición:

$$P(A) = P(8) + P(10) + P(12) + P(14) + P(16) = 0,25 + 0,40 + 0,20 + 0,08 + 0,05 = 0,98$$

b) Aplicando la regla de la complementación.

$$\text{Si } A = \{8, 10, 12, 14, 16\} \text{ entonces } \bar{A} = \{18\}$$

$$\text{Por lo tanto } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(18) = 1 - 0,02 = 0,98$$

En muchas ocasiones la regla de la complementación facilita el cálculo de alguna probabilidad.

## **1.7 CALCULO DE PROBABILIDADES**

---

Una vez conocidos los axiomas de la probabilidad y algunos de sus teoremas básicos se debe estar en capacidad de calcular la probabilidad de ocurrencia de diferentes eventos. Para tal fin vamos a establecer un procedimiento general que puede facilitar el cálculo de probabilidades. Considérese un experimento aleatorio con un espacio muestral  $S$  en el cual se ha definido el evento  $A$  y del cual se quiere conocer la probabilidad de ocurrencia.

Paso 1: En primer término se debe definir correctamente el espacio muestral. En la Figura 1.3 se muestra un esquema de los distintos tipos de espacios muestrales que puede generar un experimento aleatorio.

Paso 2: Se asigna un valor de probabilidad a cada evento elemental de modo que se cumpla que  $\sum_{R_x} p(e_i) = 1,0$

Paso 3: Se define él o los eventos de interés en función de los eventos elementales que los componen.

Paso 4: Se calcula la probabilidad del evento o los eventos de nuestro interés de acuerdo a las formulaciones dadas en la Figura 1.3.

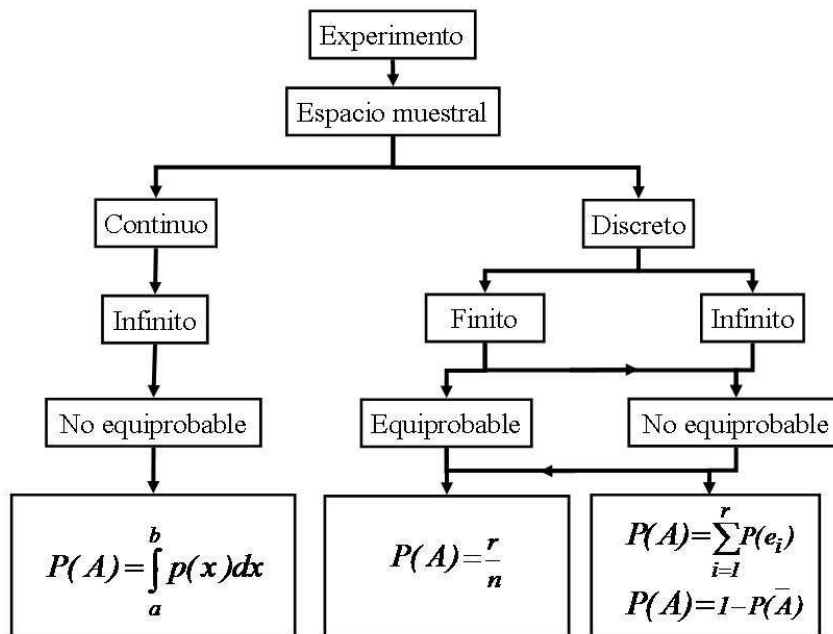


Figura 1.3: Esquema con las diferentes tipos de espacios muestrales y las fórmulas para el cálculo de las probabilidades de los eventos que contienen.

$P(A)$  = probabilidad del evento  $A$ ;  $P(e_i)$  = probabilidad del evento elemental  $i$ ;  $P(\bar{A})$  = probabilidad del evento complemento;  $p(x)$  = función de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ ;  $r$  = número de veces que ocurre un resultado;  $n$  = número de resultados posibles.

Veamos algunos ejemplos:

### Ejemplo 1.9.

Se lanza una moneda normal dos veces y se desea calcular la probabilidad de obtener al menos una cara.

Paso 1: Se tiene un espacio muestral discreto y finito formado por cuatro resultados equiprobables:  $S = \{cc, cs, sc, ss\}$

Paso 2: Cada evento elemental tiene la misma probabilidad de ocurrencia:  $p(e_i) = 1/4$  de modo que se cumpla que  $\sum_{Rx} p(e_i) = 1,0$ .

Paso 3: El evento definido es:  $A = \{\text{al menos una cara}\} = \{cc, cs, sc\}$

Paso 4: Como el espacio muestral es equiprobable la probabilidad de  $A$  es igual al número de veces que ocurre  $A$  sobre el total de posibles resultados:  $P(A) = 3/4$ .

### Ejemplo 1.10.

¿Cual será la probabilidad de obtener dos números pares cuando se lanzan dos dados?

Paso 1: Se tiene un espacio muestral discreto, finito y con 36 resultados equiprobables:

$$S = \{x, y / x = n^\circ \text{ cara superior primer dado}; y = n^\circ \text{ cara superior segundo dado}\}$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) \\ (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) \\ (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) \\ (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) \\ (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) \\ (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) \end{array} \right\}$$

Paso 2: Cada evento elemental tiene la misma probabilidad de ocurrencia,  $P(e_i) = 1/36$  de modo que se cumpla que  $\sum_{Rx} p(e_i) = 1,0$ .

Paso 3: El evento definido es:  $A = \{x, y / x \text{ e } y \text{ sean pares}\}$ , de manera que:

$$A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

Paso 4: Como el espacio muestral es equiprobable la probabilidad de  $A$  es igual al número de veces que ocurre  $A$  sobre el total de posibles resultados:  $P(A) = 9/36 = 1/4$

### Ejemplo 1.11.

En familias de cuatro hijos cuál es la probabilidad de que ¿3 y sólo 3 sean varones? ¿A lo sumo uno sea varón? ¿3 o 4 varones inclusive?

Paso 1: El espacio muestral es discreto, finito y con 16 resultados equiprobables:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} VVVV \\ VVVH, VVHV, VHVV, HVVV \\ VVHH, VHVH, HVVH, VHHV, HVHV, HHVV \\ VHHH, HVHH, HHVH, HHHV \\ HHHH \end{array} \right\}$$

Paso 2: Cada evento elemental tiene la misma probabilidad de ocurrencia,  $P(e_i) = 1/16$  de modo que se cumpla que  $\sum_{R_x} p(e_i) = 1,0$ .

Paso 3: los eventos definidos son:

$$A = \{\text{tres varones}\} = \{VVVH, VVHV, VHVV, HVVV\}$$

$$B = \{\text{a lo sumo un varón}\} = \{VHHH, HVHH, HHVH, HHHV, HHHH\}$$

$$C = \{\text{entre tres y cuatro varones}\} = \{VVVV, VVVH, VVHV, VHVV, HVVV\}$$

Paso 4: Como el espacio muestral es equiprobable la probabilidad de cada evento es igual al número de veces que ocurre cada evento sobre el total de posibles resultados.

$$P(A) = 4/16$$

$$P(B) = 5/16$$

$$P(C) = 5/16$$

### Ejemplo 1.12.

En el transcurso de una investigación efectuado para evaluar el efecto de una droga sobre cierta enfermedad parasitaria, se seleccionaron 200 grupos de cinco ratas, que después de dos días de haber sido inoculadas con el parásito se les aplicó una dosis de la droga y al cabo de dos semanas se registró el número de animales muertos. Los resultados fueron los siguientes:

Nº de ratas muertas (x)	Frecuencia
0	120
1	40
2	20
3	10
4	6
5	4

Se quiere conocer ¿cuál es la probabilidad de que muera alguna rata, si se repite la experiencia?

Paso 1: El espacio muestral es discreto, finito y con 6 resultados no equiprobables.

$$S = \{\text{nº ratas muertas}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Paso 2: En éste caso es necesario recurrir al concepto de frecuencia relativa, para asignar un valor de probabilidad a cada evento elemental. Así se tiene:

$$P(x=0) = 120/200 = 0,60$$

$$P(x=1) = 40/200 = 0,20$$

$$P(x=2) = 20/200 = 0,10$$

$$P(x=3) = 10/200 = 0,05$$

$$P(x=4) = 6/200 = 0,03$$

$$P(x=5) = 4/200 = 0,02$$

Se puede verificar que  $\sum_{R_x} p(e_i) = 1,0$

Paso 3: El evento definido es  $A = \{\text{una o más ratas muertas}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Paso 4: para calcular la probabilidad del evento A se puede recurrir a la regla de la complementación, sabiendo que  $\bar{A} = \{\text{ninguna rata muerta}\} = \{0\}$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(0) = 1 - 0,60 = 0,40$$

También se pudo usar la regla de la adición para calcular la probabilidad de A.

$$P(A) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) = 0,20 + 0,10 + 0,05 + 0,03 + 0,02 = 0,40$$

### Ejemplo 1.13.

En cierta zona donde existe un foco permanente de malaria, se sabe que la probabilidad de encontrar un mosquito anofeles infectado con el parásito causante de la enfermedad es de  $1/2$ . Estudios previos han demostrado que los mosquitos infectados y los sanos están mezclados en forma aleatoria, de modo que la captura de un mosquito infectado o sano no influye en la condición del siguiente mosquito capturado. Un entomólogo necesita uno de estos insectos infectados, de modo que inicia un programa de captura que sólo finalizará cuando obtenga el primer anofeles infectado ¿cuál es la probabilidad que el mosquito infectado se obtenga a lo sumo a la tercera captura? y ¿cuál es la probabilidad que el mosquito infectado se obtenga después de la segunda captura?

Paso 1: Se tiene un espacio muestral discreto, infinito y no equiprobable. Algunos de los primeros resultados son: el primer mosquito resultó infectado; el primer mosquito fue sano y el segundo infectado; los dos primeros fueron sanos y el tercero infectado, los cuatro primeros fueron sanos y el quinto infectado, etc. Simbólicamente, se puede representar como  $S = \{i, si, ssi, sssi, ssssi, \dots\}$  donde el evento mosquito sano se representa por s y el evento infectado se representa por i.

Paso 2: Si se considera que la captura de cada mosquito es independiente una de otra, la probabilidad de cada uno de los eventos del espacio muestral resulta de multiplicar sus probabilidades individuales, así se tiene que:

$$P(i) = 1/2.$$

$$P(si) = 1/2 \times 1/2 = 1/4.$$

$$P(ssi) = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8.$$

$$P(sssi) = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/16.$$

$$P(ssssi) = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/32.$$

.....

Se puede comprobar que  $\sum_{Rx} p(e_i) = 1,0$ . Más adelante veremos porque la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes resulta de la multiplicación de sus probabilidades individuales.

Paso 3: Los eventos definidos son:

$$A = \{\text{el 1}^{\text{er}} \text{ mosquito infectado se encuentra a lo sumo en la 3}^{\text{a}} \text{ captura}\} = \{i, si, ssi\}$$

$$B = \{\text{el 1}^{\text{er}} \text{ mosquito infectado se encuentra después de la 2}^{\text{a}} \text{ captura}\} = \{ssi, sssi, ssssi, \dots\}$$

Paso 4: La probabilidad del evento A se puede obtener por aplicación de la regla de la adición:

$$P(A) = P(i) + P(si) + P(ssi) = 1/2 + 1/4 + 1/8 = 0,875$$

La probabilidad del evento B se puede obtener por aplicación de la regla de la complementación, sabiendo que  $\bar{B} = \{i, si\}$  y  $P(\bar{B}) = 1/2 + 1/4 = 3/4 = 0,75$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$$

## 1.8 PROBABILIDAD CONDICIONAL

---

En muchas ocasiones la probabilidad de ocurrencia de un evento depende de la ocurrencia o no de otro suceso. Supongamos que en un grupo de 100 ratones: 80 hembras y 20 machos, se eligen aleatoriamente dos individuos y se verifica su sexo. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo ratón sea hembra?

Definamos los eventos siguientes:

$$A = \{\text{primer ratón hembra}\}$$

$$B = \{\text{segundo ratón hembra}\}$$

Si elegimos aleatoriamente un ejemplar y después de verificar su sexo se regresa al lote, la probabilidad de obtener una hembra siempre será  $P(A) = P(B) = 80/100 = 0,8$ . Pero supongamos que se decide que sí en la primera extracción el ratón es macho debe regresar al lote. En éste caso la probabilidad del segundo resultado dependerá del primer resultado. Así tenemos que la probabilidad de obtener una hembra en la primera extracción es  $P(A) = 0,8$ , pero la probabilidad de que ocurra el evento  $B$ , es decir que el segundo ratón también sea hembra dependerá de lo ocurrido en la primera extracción. Los resultados pueden ser los siguientes:

- a)  $P(B) = 80/100$  si  $A$  no ocurrió, es decir si el primer individuo extraído fue macho.
- b)  $P(B) = 79/99$  si  $A$  ocurrió, es decir si el primer individuo extraído fue hembra.

En otras palabras para poder calcular la  $P(B)$  debemos saber si  $A$  ocurrió o no ocurrió. Este tipo de probabilidad se llama condicional, se indica  $P(B/A)$  y se lee la probabilidad de  $B$  dado que ocurrió  $A$ . Se puede notar que se está calculando la probabilidad de  $B$  sobre un nuevo espacio muestral, el cual es mas reducido. Veamos otro ejemplo:

En familias de cuatro hijos ¿cuál es la probabilidad de que dos y sólo dos sean hembras si se sabe que la familia tiene dos o más hembras?.

El primer paso es establecer el espacio muestral del experimento:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} VVVV \\ VVVH, VVHV, VHVV, HVVV \\ VVHH, VHVH, HVVH, VHHV, HVHV, HHVV \\ VHHH, HVHH, HHVH, HHHV \\ HHHH \end{array} \right\}$$

El evento del cual se quiere conocer la probabilidad es:

$$A = \{ \text{dos y sólo dos hembras} \} = \{ VVHH, VHVH, HVVH, VHHV, HVHV, HHVV \}$$

La probabilidad de  $A$  sin ninguna condición es  $P(A) = 6/16 = 0,375$ . Sin embargo como ya se conoce que la familia seleccionada tiene dos o más hijas hembras, la información es mayor, puesto que ahora sabemos que en lugar de 16 resultados posibles ahora se tienen sólo 11 resultados posibles. Los cinco resultados no incluidos son ahora irrelevantes para calcular la probabilidad del evento  $A$ . El evento que ya ocurrió lo designaremos como  $B$  y los once resultados que lo integran son los siguientes:

$$B = \left\{ \begin{array}{l} VVHH, VHVH, HVVH, VHHV, HVHV, HHVV \\ VHHH, HVHH, HHVH, HHHV \\ HHHH \end{array} \right\}$$

De modo que la probabilidad de obtener dos y sólo dos hembras dado que se sabe que hay dos o más hembras, se obtiene dividiendo el número de elementos que conforman  $A$  entre el nuevo número de resultados posibles, que sabemos son once.

$$P(A/B) = 6/11 = 0,545$$

Si observamos detenidamente los dos eventos involucrados, nos podremos dar cuenta que los elementos de  $A$  están incluidos en  $B$ , y esto no es otra cosa que el conjunto  $A \cap B$ . De modo que la probabilidad condicionada se puede expresar en forma general como:

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) \quad \text{ó} \quad P(B/A) = P(A \cap B)/P(A)$$

### Ejemplo 1.14.

Si se lanzan dos dados ¿cuál es la probabilidad de que el primer número sea mayor que el segundo dado que la suma de los dos números es igual a 10?

a) Se define el espacio muestral:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) \\ (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) \\ (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) \\ (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) \\ (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) \\ (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) \end{array} \right\}$$

b) Como el espacio muestral es equiprobable:  $P(e_i) = 1/36$

c) El evento condicionado  $A$  es:

$$A = \{x, y / x > y\} = \left\{ \begin{array}{l} (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2) \\ (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5) \end{array} \right\}$$

El evento condicionante  $B$  es:

$$B = \{x, y / x + y = 10\} = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$$

d) El nuevo espacio muestral está formado por los tres resultados del evento  $B$ , y sólo uno de ellos cumple con lo establecido por  $A$ . En otras palabras el espacio muestral original de 36 resultados se redujo a tres resultados. De modo que:

$$P(A/B) = 1/3$$

El mismo resultado se tiene al aplicar directamente la fórmula:

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) \quad \text{ó} \quad P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$$

Calculemos las probabilidades de A, B y  $A \cap B$ .

$$P(A) = 15/36 \quad P(B) = 3/36 \quad P(A \cap B) = 1/36$$

La probabilidad condicional solicitada será:

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = (1/36) / (3/36) = 1/3$$

### Ejemplo 1.15.

Se lanzan dos dados simultáneamente. Si la suma de las dos caras superiores es 7 encontrar la probabilidad de que uno de los números sea 3.

a) Se define el espacio muestral:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) \\ (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) \\ (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) \\ (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) \\ (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) \\ (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) \end{array} \right\}$$

a) Como el espacio muestral es equiprobable:  $P(e_i) = 1/36$

c) Los eventos requeridos son:

$$A = \{x, y / x + y = 7\} = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$B = \{x, y / x = 3 \text{ ó } y = 3\} = \left\{ \begin{array}{l} (1,3), (2,3), (4,3), (5,3), (6,3) \\ (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6) \end{array} \right\}$$

$$A \cap B = \{(3,4), (4,3)\}$$

d) Las probabilidades solicitadas serán:

$$P(A) = 6/36 \quad P(A \cap B) = 2/36$$

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = (2/36) / (6/36) = 2/6 = 1/3$$

**Ejemplo 1.16.**

En cierta región se encontró que la frecuencia de aparición de los diferentes grupos sanguíneos y del factor Rh es la que se muestra en la tabla siguiente:

	A	B	AB	O	Total
$Rh^-$	30	21	19	10	80
$Rh^+$	78	54	43	25	200
Total	108	75	62	35	280

Se quiere conocer ¿Cuál es la probabilidad de obtener un individuo del grupo AB si se sabe que tiene el factor  $Rh^+$ ?

La probabilidad de ocurrencia de cada resultado se obtiene a partir de sus frecuencias relativas. Para el caso presente sólo nos interesan las siguientes:

$$P(Rh^+) = 200/280$$

$$P(AB \cap Rh^+) = 43/280$$

La probabilidad solicitada es:

$$P\left(\frac{AB}{Rh^+}\right) = \frac{P(AB \cap Rh^+)}{P(Rh^+)} = \frac{43/280}{200/280} = \frac{43}{200} = 0,215$$

Las probabilidades marginales resultan muy útiles, para calcular las probabilidades condicionales. Por ejemplo la probabilidad que estamos buscando, que un individuo pertenezca al grupo AB si se sabe que es  $Rh^+$ , se obtiene directamente dividiendo 43 (intersección de AB con  $Rh^+$ ) entre 200 (Total de  $Rh^+$ ), este es el mismo resultado obtenido con la ecuación para probabilidad condicional.

## 1.9 EVENTOS INDEPENDIENTES

---

Se dice que una serie de eventos que ocurren unidos o en secuencia son independientes si el resultado de uno no afecta al otro. Hay casos en los cuales se puede precisar fácilmente que dos eventos son independientes. Por ejemplo, si a los pacientes masculinos que acuden a un hospital se les pregunta si sufren de miopía y son estériles, podríamos asegurar que los resultados a las preguntas son eventos independientes porque ninguna de las dos patologías están relacionadas. Pero si a los mismos pacientes en lugar de preguntarles si son miopes se les pregunta si han sufrido parotiditis cuando adultos no es posible responder con certeza si los dos eventos son independientes, porque es muy posible que la frecuencia de adultos estériles sea alta entre los que han sufrido de parotiditis. Una manera objetiva de decidir si dos eventos son independientes es comparar las probabilidades de ocurrencia de uno de los eventos antes y

después que el otro evento ocurra. En términos formales dos eventos  $A$  y  $B$ , se dicen que son independientes si se cumple:

$$P(A/B) = P(A)$$

En palabras esto significa que dos eventos  $A$  y  $B$  son independientes si la probabilidad del evento  $A$  no cambia aún cuando haya ocurrido el evento  $B$ .

Si se explora con cuidado la relación anterior, se puede ver que el término  $P(A/B) = P(A)$  también puede expresarse como  $P(A \cap B)/P(B) = P(A)$  por lo tanto se deduce que la ocurrencia conjunta de dos eventos independientes es igual a  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ , lo que constituye otra manera de definir la independencia de dos eventos. La relación anterior es verdad siempre y cuando  $P(A)$  y  $P(B)$  sean mayores a cero.

### Ejemplo 1.17.

Supongamos que lanzamos un dado dos veces y se definen dos eventos:

$$A = \{\text{el primer dado muestra un número par}\}$$

$$B = \{\text{el segundo dado muestra un 5 o un 6}\}$$

Utilizando el espacio muestral utilizado en el ejemplo 1.15, encontraremos que las probabilidades de los eventos requeridos son las siguientes:

$$P(A) = 18/36 = 1/2 \quad P(B) = 12/36 = 1/3 \quad P(A \cap B) = 1/6$$

Si los dos eventos  $A$  y  $B$  son independientes se debe cumplir alguna de las condiciones siguientes:

$$\text{a) } P(A/B) = P(A) \quad \text{b) } P(B/A) = P(B) \quad \text{c) } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Verifiquemos cada una de estas igualdades:

$$\text{a) } P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = (1/6)/(1/3) = 1/2 = P(A)$$

$$\text{b) } P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = (1/6)/(1/2) = 1/3 = P(B)$$

$$\text{c) } P(A \cap B) = P(A)P(B) = (1/2)(1/3) = 1/6$$

Solo una de las tres comprobaciones anteriores es suficiente para demostrar que los eventos  $A$  y  $B$  son independientes.

### Ejemplo 1.18.

En un estudio sobre la calidad del agua de los ríos que conforman cierta cuenca hidrográfica, se encontró que el 28% de los ríos tienen una altitud superior a los 2500 m; un 20% tienen

temperatura del agua menor a  $12^{\circ}\text{C}$  y un 10% tiene ambas características. ¿Son independientes los eventos “ $\text{altitud} > 2500 \text{ m}$ ” y “ $\text{temperatura} < 12^{\circ}\text{C}$ ”?

Identifiquemos los eventos:

$$A = \{\text{"altitud} > 2500 \text{ m"}\} \quad B = \{\text{"temperatura} < 12^{\circ}\text{C"}\}$$

Los valores de probabilidad se asignan a partir de las frecuencias relativas:

$$P(A) = 0,28 \quad P(B) = 0,20 \quad P(A \cap B) = 0,10$$

La comprobación de la independencia o dependencia de los eventos  $A$  y  $B$ , se puede hacer a partir de la igualdad que establece que la probabilidad de ocurrencia conjunta de dos eventos independientes es igual al producto de sus probabilidades individuales:  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Por lo tanto se verifica si la igualdad anterior se cumple:

$$P(A \cap B) = 0,10 \quad \text{y} \quad P(A)P(B) = 0,20 \times 0,28 = 0,06$$

Al ser  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$  se concluye que los eventos  $A$  y  $B$  no son independientes. En términos prácticos, el hecho de que un río tenga una altitud superior a 2500 m aumenta la probabilidad de tener una temperatura menor a  $12^{\circ}\text{C}$ .

Es importante aclarar que la conclusión anterior sólo tiene validez si los datos de probabilidad obtenidos fuesen valores paramétricos, es decir valores únicos no modificables. Pero como ésta situación no es común en el mundo natural, puesto que la mayoría de las veces se trabaja con las frecuencias relativas obtenidas a partir de muestras extraídas de una población, no es posible utilizar el procedimiento anterior para comprobar independencia. Existen otros métodos alternativos como las Tablas de Contingencia que permiten someter a prueba la hipótesis de independencia a partir de muestras de datos.

### Ejemplo 1.19.

Un genetista ha determinado que los miembros de una población portan el par de genes  $A$  y  $a$ , los cuales controlan un determinado carácter. Además sabe que cada individuo tiene dos de estos genes de forma que en la población están presentes los genotipos  $AA$ ,  $Aa$  y  $aa$ . y que su frecuencia de ocurrencia es de  $1/4 AA$ ,  $1/2 Aa$  y  $1/4 aa$ . Si se sabe que los miembros de ésta población se aparean aleatoriamente e independientemente, determine cual es la probabilidad de que los genotipos  $AA$  ( $\sigma$ ) y  $Aa$  ( $\phi$ ) se crucen.

Puesto que los cruzamientos entre los diferentes genotipos son eventos independientes, la probabilidad de que los genotipos  $AA$  ( $\sigma$ ) y  $Aa$  ( $\phi$ ) se crucen es igual al producto de sus probabilidades:

$$P(AA \cap Aa) = P(AA)P(Aa) = 1/4 \times 1/2 = 1/8 = 0,125$$

Este concepto de eventos independientes fue el utilizado en el Ejemplo 1.13, al calcular la probabilidad de obtener un mosquito infectado en una serie de extracciones.

## 1.10 EJERCICIOS

---

1. Entre los ejemplos siguientes seleccione aquellos que se correspondan con un experimento aleatorio y represente el respectivo espacio muestral por extensión o comprensión.
  - a. Se lanza un dado y se observan los puntos que aparecen en la cara superior.
  - b. Se lanza un dado dos veces y se observan los puntos que aparecen en las caras superiores.
  - c. Se lanza simultáneamente un dado y una moneda y se registra el resultado en cada una de las caras
  - d. Se lanzan dos dados y se suman los puntos que aparecen en cada una de las caras superiores.
  - e. Se tira una moneda cuatro veces y se anotan los resultados.
  - f. De una caja con 10 monedas falsas y 10 honestas se extraen:
    - f1. Dos monedas sin reposición y se verifica la condición de la moneda.
    - f2. Dos monedas con reposición y se verifica la condición de la moneda.
  - g. Se tienen cuatro fichas numeradas del 1 al 4. Se comienzan a extraer las fichas y cada vez se registra el número y se descarta la ficha. El experimento se detiene cuando se extrae una ficha con un número par.
  - h. El mismo experimento anterior pero una vez registrado su número la ficha se repone al grupo.
  - i. Se tienen todas las cartas de trébol negro de un juego de barajas de poker. De este grupo de 13 cartas se extraen al azar, consecutivamente y sin reposición dos cartas y se anota el valor de las mismas.
  - j. El mismo experimento anterior pero con reposición.
  - k. De una población de *Anopheles nuneztovari* que habita en un área endémica con malaria se extrae un individuo y se determina si está infestado con parásitos que producen malaria.
  - l. Tres conejos son extraídos sucesivamente de un lote que contiene 100 machos y 100 hembras y se registra el sexo al que pertenece cada uno.
  - m. Se cuenta el número de hembras extraídas al repetir el experimento anterior.
  - n. En un lote de semillas hay tres lisas y siete rugosas. Cuántas semillas hay que extraer, si se elige una semilla después de otra sin regresarla al lote, para obtener todas las semillas rugosas.
  - o. Cuántos conejos hay que extraer, sin reponerlos, para lograr sacar todas las hembras de una población de tamaño  $N$ , en la cual hay  $r$  machos ( $r < N$ ).
  - p. Se repite el experimento anterior hasta obtener 10 hembras.
  - q. Se cuenta el número de murciélagos del género *Carollia* que habitan en la Selva Nublada de Monte Zerpa.

- r. Se cuenta el número de líneas de crecimiento en las escamas de un pez.
  - s. Se mide la distancia de cada punto del radio al centro de una circunferencia cuyo diámetro tiene una longitud de 2 cm.
  - t. Se registra la duración de la fase de huevo de una determinada especie de ave, anotando el tiempo transcurrido entre el momento de ser puesto y el momento de ocurrir la eclosión del huevo.
  - u. El tiempo de duración a partir del momento de leer estas líneas de la vida sobre la tierra.
  - v. El número de aminoácidos diferentes que pueden formar un polipéptido.
2. Represente por extensión o comprensión los eventos que a continuación se indican para los respectivos ejemplos anteriores.
- a. Sale un número par.
  - b. El segundo y sólo el segundo número es par.
  - c. Sale cara y un número par.
  - d. El resultado es un número mayor a tres y menor o igual a ocho.
  - e. Salen tres caras o menos.
    - e1. Salen una o menos caras.
    - e2. Salen dos y sólo dos sellos.
  - f. El primer número es igual a tres.
  - g. Se obtiene un solo número
  - h. Sale un As y un número par.
  - i. Las dos cartas son iguales.
  - j. Se obtiene un individuo positivo con parásitos maláricos.
  - k. Se obtiene más de una hembra.
  - l. No se obtienen machos.
  - m. Se extraen ocho o más semillas.
  - n. Un número de conejos menor al máximo valor.
  - o. Un número par de extracciones si  $r$  y  $N$  son números pares.
  - p. No existen individuos del género *Carrollia* en Monte Zerpa.
  - q. El número de líneas que corresponden al primer año de edad.
  - r. La duración de los huevos después que el 50% de ellos han eclosionado.
  - s. Más de un año
  - t. Más de tres años
  - u. El número de aminoácidos de un tetrapéptido.
3. Desde un puesto de observación se registró cuando cuatro murciélagos intentaron por primera vez capturar en pleno vuelo un insecto. El resultado anotado para cada murciélago fue éxito o falla.
- a. Describa el espacio muestral del experimento.
  - b. Señale los resultados que conforman los eventos siguientes:
    - b1. Evento A: a lo sumo uno de los murciélagos capturó una presa.
    - b2. Evento B: todos los murciélagos capturaron al menos una presa.
    - b3. Evento C: exactamente dos y sólo dos murciélagos capturaron una presa.
  - c. Hallar los elementos de los siguientes sucesos:

- c1. Evento complemento de B.  
c2.  $D = B \text{ ó } C$ .  
c3.  $E = A \text{ y } B$ .
4. Demuestre que al lanzar un dado la probabilidad de obtener un número divisible entre 3 es  $1/3$ .
  5. Se lanzan dos dados y se suma el número de puntos de la cara superior. Si se definen los eventos siguientes: a)  $A = \{x/x = 8\}$ ; b)  $B = \{x/6 < x < 9\}$ ; c)  $C = \{x/x > 7\}$ , calcule:
    - a.  $P(A)$
    - b.  $P(B)$
    - c.  $P(C)$
    - d.  $P(A \cup B)$
    - e.  $P(A \cap B)$
    - f.  $P(B \cap C)$
    - g.  $P(A/B)$
  6. Verifique que al lanzar dos dados la probabilidad de obtener un 7 o un 11 es  $2/9$ .
  7. ¿Es correcto afirmar que la probabilidad de no encontrar dobles al lanzar dos dados es  $5/6$ ?
  8. Se lanzan dos monedas. A es el evento “dos caras” y B es el evento “dos sellos”. Calcule la  $P(A \cup B)$  ¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Son complementarios?.
  9. En un juego de azar una persona gana un premio si cuando lanza tres monedas ocurren tres caras o tres sellos y lo pierde si salen una o dos caras. Encontrar la probabilidad que tiene la persona a) de ganar y b) de perder.
  10. Considere los sucesos A y B. Supóngase que  $P(A) = 0,4$ ;  $P(B) = p$  y  $P(A \cup B) = 0,7$ . ¿Para que valor de  $p$ , los eventos A y B son mutuamente excluyentes? ¿Para que valor de  $p$ , los eventos A y B son independientes?
  11. Se lanzan dos dados simultáneamente. Se desea calcular las probabilidades de los eventos siguientes: la suma de los resultados es par; la suma es igual a 8; los dos resultados son iguales.
  12. En una población de ratones, el 40% de la población tiene el pelo negro, el 25% tiene ojos rojos y el 15% tiene el pelo negro y ojos rojos. Se escoge un ratón al azar. a) Si tiene el pelo negro ¿Cual es la probabilidad que también tenga ojos rojos?. b) ¿Si tiene ojos rojos ¿Cual es la probabilidad de que no tenga pelo negro?

13. Un tonel contiene 10% de frijoles picados y se escogen al azar y con reposición tres semillas. ¿Será la probabilidad de tener al menos una picada igual a 0,271? ¿Cuál será la probabilidad que la segunda semilla esté picada?
14. Para una determinada especie de insecto la probabilidad de que un individuo al nacer sea hembra es  $\frac{3}{4}$ . Si se examinan 3 individuos nacidos de una hembra de esta especie, calcule la probabilidad de obtener: a) dos hembras, b) al menos una hembra., c) cómo máximo dos hembras y d) a lo sumo dos hembras dado que se obtuvo al menos una hembra.
15. La siguiente tabla muestra las probabilidades de sexo y ceguera para el color. Utilícela para calcular las probabilidades de que un individuo sea varón, dado que es ciego para el color y de que una persona sea ciega para el color dado que es hembra. ¿Es la ceguera para el color independiente del sexo?

	Normal	Ciego
Varón	0,475	0,025
Hembra	0,495	0,005

16. En la tabla siguiente se presentan los resultados del examen de 1000 individuos en relación al sexo y el uso de lentes. Utilícela para determinar: a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo sea varón dado que usa lentes?, b) ¿Cual es la probabilidad de que un individuo use lentes dado que es hembra? y c) ¿Es el uso de lentes independiente del sexo?

	Normal	Con lente	Total
Varón	440	160	600
Hembra	160	240	400
Total	600	400	1000

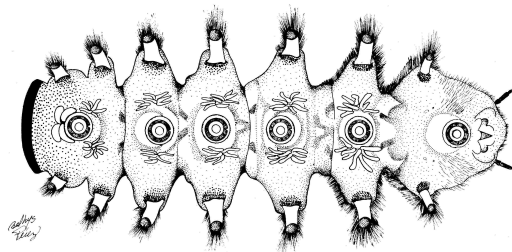
17. Dos abejas fueron entrenadas para diferenciar entre dos fuentes de alimento que sólo diferían en el color; una era de color blanco y la otra era de color rojo. Después de varios ensayos se determinó que el color no tiene ninguna influencia en la selección de la fuente y que la frecuencia relativa de visitas de cada abeja a las fuentes fue igual a 0,50. En base a estos resultados calcule la probabilidad que tienen las dos abejas de: a) elegir la misma fuente, y b) elegir la fuente de color rojo
18. Se conoce que en una colmena existen aproximadamente 100 zánganos y 500 obreras. Si se eligen 3 abejas sin reposición hallar la probabilidad que:
- Todas sean obreras
  - Las dos primeras sean zánganos y la tercera sea obrera
  - Por lo menos una sea obrera

19. En un estudio comparativo entre las comunidades de insectos de una sabana protegida del fuego y otra sometida a quema, se extrajo una muestra de 1000 insectos y se determino el Orden al cual pertenece cada insecto, encontrándose los resultados siguientes:

Orden	Sabana no protegida	Sabana protegida	Total
Hemiptera	150	80	230
Homoptera	200	100	300
Diptera	90	70	160
Orthoptera	70	60	130
Hymenoptera	60	50	110
Lepidoptera	30	40	70
Total	600	400	1000

Con base a ésta información, calcule la probabilidad de que un insecto elegido aleatoriamente:

- Sea de la sabana no protegida:
  - Pertenezca al orden Lepidoptera.
  - Pertenezca a los ordenes Homoptera, Hemiptera y Diptera:
  - Provenga de la sabana protegida o de la sabana no protegida y pertenezca al orden Hymenoptera:
  - Pertenezca la orden Diptera dado que proviene de la sabana protegida.
  - Provenga de la sabana protegida o de la sabana no protegida.
  - Si es extraído sin reemplazo pertenezca al orden Lepidoptera, después de haber extraído un primer insecto el cual también pertenece al orden Lepidoptera:
20. En un lote de semillas la probabilidad de que una semilla germine es de  $4/5$ . Si se escogen aleatoriamente 5 semillas y se siembran, calcule la probabilidad de que germinen:
- Tres semillas.
  - Al menos una semilla.
  - A lo sumo tres semillas.
  - Entre una y cuatro semillas.
  - Menos de dos ó más de tres semillas
  - Menos de cuatro semillas dado que germinaron dos o más semillas.



Larva de la Familia Blepharoceridae (Insecta: Díptera)