6

PRUEBA DE HIPÓTESIS

6.1 INTRODUCCIÓN

Los métodos de estimación estudiados en el capítulo anterior usan la información proporcionada por los estadísticos muestrales para estimar con cierta probabilidad el valor de un parámetro poblacional. En éste capítulo se introducirá la prueba de hipótesis que es un enfoque diferente. En éste caso, se supone *a priori* el valor del parámetro y sobre la base de la información obtenida en una muestra se somete a prueba la suposición, para luego tomar con cierta probabilidad, la decisión de rechazar o no rechazar la hipótesis. En éste punto es importante señalar que la expresión "no rechazar" pudiera ser sustituida por "aceptar", sin embargo antes de hacerlo es necesario atender cuidadosamente algunas explicaciones que se darán más adelante. La prueba de hipótesis también conocida como docimasia o contrastación de hipótesis es uno de los métodos estadísticos más usados en las ciencias naturales por ser un procedimiento que le proporciona al investigador un criterio objetivo para tomar decisiones con base a un número limitado de observaciones. Frecuentemente el biólogo tiene que decidir: a) al comparar magnitudes de propiedades físicas, químicas o biológicas en dos o más condiciones o categorías, como es el caso de confrontar el valor medio de la presión arterial en personas pertenecientes a dos grupos etarios, b) al valorar los efectos de diferentes niveles de algún factor ambiental como la temperatura, la humedad, el contenido de oxígeno sobre algún proceso, característica o propiedad de un organismo, y c) al relacionar dos o más variables, como la intensidad lumínica y la tasa fotosintética. En éste capítulo y en los siguientes se trataran varios procedimientos para probar hipótesis que dan respuesta a este tipo de problemas o a otros similares.

6.2 LA PRUEBA DE HIPÓTESIS: UN PROCEDIMIENTO DE DECISIÓN

Antes de estudiar las distintas etapas y casos de las que consta el procedimiento para la prueba de hipótesis, consideraremos un ejemplo que servirá para mostrar los fundamentos del proceso de docimasia y la toma de decisiones.

Ejemplo 6.1

Con el propósito de determinar el efecto de una nueva dieta sobre el desarrollo de ratones de laboratorio un investigador necesita formar varios grupos de ratones recién nacidos todos con un mismo peso. De manera que conforma varios lotes de 36 ratones con un peso aproximado a los 30 g. Para verificar si los grupos son homogéneos en cuanto al peso, vuelve a pesar cuidadosamente los 36 ratones de cada grupo y le calcula el valor promedio y la desviación estándar. El investigador sabe que al ser el peso una variable aleatoria y por estar trabajando con una muestra es difícil que cada grupo tenga un peso promedio exactamente igual a 30 g, aunque si bastante aproximado a éste valor. Sin embargo el investigador se encuentra ante una disyuntiva: a) si el valor promedio de peso para cada grupo se considera como una simple desviación fortuita de los 30 g dada la variabilidad característica de las muestras aleatorias, no hay necesidad de reorganizar el grupo, y b) si el valor medido esta verdaderamente desviado del valor esperado de 30 g es necesario reorganizar el grupo sustituyendo los ratones causantes de la desviación.

A fin de tener un criterio objetivo que le ayude a tomar la mejor decisión, el investigador establece como premisa que el peso promedio μ de la población de donde provienen los pesos de los ratones es de 30 g. Si es cierto que μ = 30 es de esperar que el valor promedio $\bar{x}$ del grupo o muestra sea muy cercano a dicho valor y su probabilidad de ocurrencia sea alta. Si esto sucede se acepta la hipótesis y se considera que la desviación del peso promedio de la muestra con respecto a la media esperada, $\bar{x} - \mu$, es producto de la naturaleza aleatoria de la variable peso, siendo innecesario reorganizar el grupo de ratones. Pero aún siendo cierto que μ = 30, es posible, aunque poco probable, que los 36 ratones tengan un peso promedio alejado del peso esperado de 30 g. En éste caso, el investigador puede aceptar que μ = 30 y considerar que ocurrió un hecho poco probable o alternativamente decidir que en lugar de haber sucedido algo improbable considerar que el valor de la media poblacional es menor a 30 (μ < 30).

Ilustremos la situación anterior en forma real y supongamos que el investigador encontró que uno de los grupos dió como resultado un promedio de 29,3 g con una desviación de 2 g. De acuerdo a lo dicho anteriormente, para poder tomar la decisión de reorganizar o no el grupo de ratones, se debe proceder a determinar si 29,3 ocurre con una probabilidad alta o baja teniendo como hipótesis que μ = 30. Como el peso promedio observado es menor a 30 se debe proceder a hallar la P($\bar{X} \leq 30$). Para tal fin tenemos que conocer la distribución que sigue la media muestral. Aunque desconocemos la distribución de la variable peso promedio, como el tamaño de la muestra es grande (n = 36) se puede afirmar, de acuerdo al Teorema del Límite Central, que dicha variable se distribuye normalmente con media igual a 30 y desviación igual a $S_{\bar{x}} = 2/\sqrt{36} = 0{,}33$. Por lo tanto la probabilidad buscada será:

$$P(\bar{X} \leq 29{,}3) = P(Z \leq z) = P(Z \leq \frac{29{,}3 - 30}{2/\sqrt{36}} = P(Z \leq -2{,}1) = 0{,}0179$$

Esta probabilidad tan baja (Figura 6.1), tiene dos explicaciones: a) Es cierta la hipótesis ($\mu = 30$) y ocurrió un hecho casi imposible como el de obtener un peso promedio igual a 29,3 que está muy alejado del valor esperado de 30 g, y b) No es cierta la hipótesis anterior y el valor esperado es mucho menor a 30. La explicación b resulta obviamente más razonable.

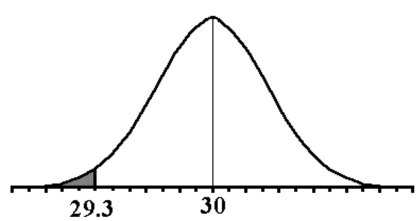


Figura 6.1.

Si el valor de la media muestral hubiese sido más próximo a 30, por ejemplo 29,9 la probabilidad de ocurrencia sería:

$$P(\bar{X} \leq 29{,}9) = P(Z \leq (29{,}9 - 30)/(2/\sqrt{36}) = P(Z \leq -0{,}3) = 0{,}382$$

Esta es una probabilidad de ocurrencia alta (Figura 6.2), siempre y cuando $\mu = 30$. Por lo tanto resulta razonable aceptar la presunción de que el peso promedio del grupo todavía es igual a 30 g.

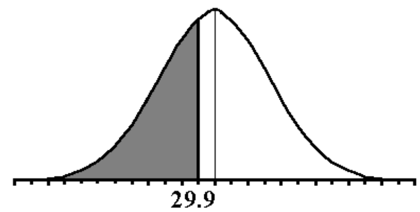


Figura 6.2

Pero si la media muestral no hubiese estado ni tan próxima ni tan alejada de 30 la decisión no sería tan clara. Por ejemplo si el valor de la media muestral hubiese sido 29,5 ¿Cuál sería la decisión?.

$$P(\overline{X} \leq 29{,}6) = P(Z \leq \frac{29{,}6 - 30}{2/\sqrt{36}} = P(Z \leq -1{,}2) = 0{,}1151$$

En este caso la probabilidad no es tan baja (Figura 6.3) para rechazar de inmediato que $\mu = 30$ y tampoco es tan alta para aceptar sin mayores consideraciones que $\mu = 30$. Esta situación de incertidumbre siempre estará presente para cualquier valor con probabilidades moderadas de ocurrencia.

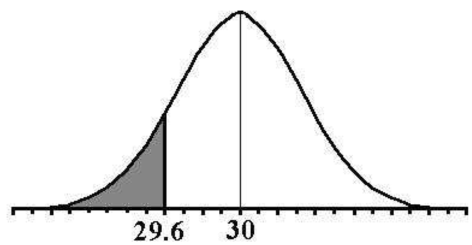


Figura 6.3

La mejor manera de resolver el problema es estableciendo previamente un valor límite para aceptar o rechazar la hipótesis y así poder tomar una decisión inmediata. Este valor límite debe excluir los valores que ocurren con menor probabilidad. Por lo general se excluyen aquellos valores cuya probabilidad de ocurrencia es igual o menor a 0,05. También se pueden utilizar otros criterios como aquellos que establecen una probabilidad de ocurrencia igual o menor a 0.01 ó 0,001. Más adelante serán discutidas las razones que fundamentan la escogencia de un valor límite de probabilidad como criterio para rechazar o no una hipótesis. Por ahora es necesario concentrarse en comprender el proceso de encontrar este valor crítico. Una vez que se elige el valor de probabilidad que sirve de criterio para tomar una decisión, se pueden conocer cuáles valores de la variable cumplen con ésta decisión. Si decidimos que el valor de probabilidad crítico es 0.05, todos los valores que rechazan la hipótesis establecida son aquellos cuya $P(\overline{X} \leq \overline{x}) = 0{,}05$. A partir de ésta expresión se puede encontrar cuál es valor de $\overline{X}$ a partir del cual la probabilidad de ocurrencia es menor a 0,05. Sabemos que $P(\overline{X} \leq \overline{x}) = 0{,}05$ es equivalente a $P(Z \leq z) = 0{,}05$, siendo z igual a:

$$z = (\overline{x} - \mu_X) \Big/ \left(S_X / \sqrt{n} \right)$$

El valor de Z a la izquierda del cual se encuentra el 0,05% del área de la distribución de probabilidades de la media muestral es -1,64, por lo tanto, si se despeja $\overline{x}$ de la expresión anterior se tiene la ecuación siguiente:

$$\overline{x} = \mu_X + z_{(0{,}05)} \left(S_X / \sqrt{n} \right) = 30 + (-1{,}64)(2/\sqrt{36}) = 30 - 0{,}5412 = 29{,}46$$

Este valor es ahora nuestro límite para tomar la decisión de aceptar o rechazar la presunción de que μ = 30. Si la media del grupo de ratones es menor a 29,46 se rechaza la premisa y si es mayor se acepta (Figura 6.4). Ahora sabemos que 0,54 es la máxima desviación que se puede aceptar para concluir que la diferencia entre la media observada y la esperada es simplemente aleatoria.

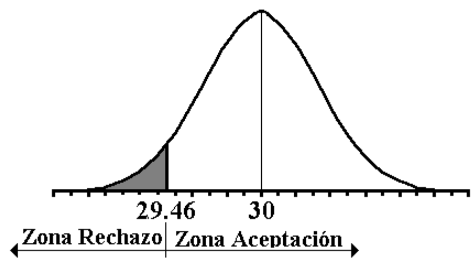


Figura 6.4

Volviendo al caso de los ratones, el investigador ahora conociendo el peso promedio de cada grupo puede tomar rápidamente una decisión para mantener o reorganizar el grupo, simplemente comparando la media obtenida con el valor crítico de 29,46 g.

6.3 PROCEDIMIENTO GENERAL PARA LA PRUEBA DE HIPÓTESIS

En el procedimiento usado para resolver el problema del Ejemplo 6.1 se pueden identificar varias etapas fundamentales, las cuales se pueden reordenar e identificar en la forma siguiente:

1. Hipótesis
2. Nivel de significación.
3. Estadístico de prueba
4. Zona de aceptación para Ho.
5. Cómputos necesarios.
6. Decisión.
7. Conclusión

En lo que sigue nos permitiremos dos concesiones: supondremos que todas las variables usadas siguen una distribución normal y la mayoría de las veces usaremos la media poblacional μ como ejemplo del parámetro a docimar.

6.3.1 Hipótesis

Por lo general toda investigación en el campo de las ciencias naturales se inicia a partir de una hipótesis la cual es una explicación tentativa que se da a un hecho observado. La misma puede surgir a partir de una teoría general que explica cierta realidad a la cual pertenece el fenómeno observado, o por la experiencia propia o de otros investigadores, o por simple intuición. Ahora bien, en la formulación de cualquier hipótesis está implícita una hipótesis alternativa. Por ejemplo, se puede plantear como hipótesis de investigación que *el ejercicio constante disminuye el nivel de colesterol en el plasma sanguíneo*, pero asociada a esta hipótesis existe otra premisa alterna que se opone, en éste caso la alternativa sería que *el ejercicio constante no disminuye el nivel de colesterol en el plasma sanguíneo*. Estas hipótesis de investigación para poderse someter a prueba deben concretarse en términos cuantitativos, transformándose en hipótesis estadísticas. Para el ejemplo anterior, se puede proponer como hipótesis estadística que bajo cierto programa de ejercicio *la tasa promedio de disminución de la concentración del colesterol será mayor a 30 unidades*. Consecuentemente existe una

hipótesis estadística alternativa que en este caso plantea que con el ejercicio *la tasa promedio de disminución del colesterol será igual a 30 unidades*. De manera que las hipótesis de investigación se derivan de las teorías que se están probando y las hipótesis estadísticas hacen factible su contrastación.
En forma general las hipótesis estadísticas son afirmaciones que involucran una propiedad de la distribución probabilística de la variable aleatoria que se está estudiando, propiedades como son la media (μ), la varianza (σ^2), un valor de proporción (π) o la forma de la distribución. De modo que el primer paso en un proceso de decisión es formular las hipótesis estadística, las cuales reciben el nombre de hipótesis nula (H_0) e hipótesis alternativa (H_1). La hipótesis nula se dice que es una hipótesis simple, porque es una afirmación de igualdad con un valor específico, mientras que la hipótesis alternativa se dice que es compuesta porque puede asumir diferentes valores.
Si se representa un parámetro poblacional por letra griega θ y con θ_0 un valor cualquiera del parámetro, la forma genérica de la hipótesis nula sería una igualdad entre el parámetro y un valor específico del mismo:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

Por su parte la hipótesis alternativa se puede representar con una de las tres posibilidades siguientes:

$$H_1 : \begin{cases} \theta > \theta_0 \\ \theta < \theta_0 \\ \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

La expresión $\theta > \theta_0$ se interpreta como que el parámetro θ puede asumir cualquier valor mayor a θ_0 y se dice que la prueba de hipótesis es de una cola a la derecha. Por su parte $\theta < \theta_0$ indica que el parámetro θ puede ser cualquier valor menor a θ_0 y la prueba de hipótesis se llama de una cola a la izquierda. Finalmente $\theta \neq \theta_0$ representa la posibilidad que el parámetro θ asuma cualquier valor diferente (mayor o menor) al valor θ_0 y la prueba de hipótesis se denomina de dos colas. Más adelante, cuando se trate lo referente al establecimiento de la zona de decisión, se aclarará la razón de esta nomenclatura.

Para el caso del ejemplo del programa de ejercicios y la disminución del nivel de colesterol en la sangre, las hipótesis se pueden plantear de la manera siguiente:

Hipótesis nula $H_0 : \mu = 30$
Hipótesis alternativa: $H_1 : \mu > 30$

La hipótesis nula establece que un parámetro como la tasa media de disminución de la concentración de colesterol es igual al valor de 30, mientras que la hipótesis alternativa predice que su valor será mayor a 30.
Aquí podemos darnos cuenta que la proposición que el investigador quiere probar, como es que la disminución promedio de colesterol será mayor a 30 unidades, está recogida por la hipótesis alternativa, mientras que la hipótesis nula asume la proposición que se quiere negar.

La utilidad de plantear las hipótesis de ésta manera se explica porque el rechazo de H_0 es un veredicto mucho más robusto que su no rechazo, puesto que es necesario acumular evidencia científica muy fuerte para poder rechazar una hipótesis nula. Por lo tanto la consecuencia de rechazar una hipótesis nula es un gran apoyo a la hipótesis alternativa. Ilustremos esta situación con la analogía siguiente: en los procesos judiciales donde hay alguien acusado de un delito, hay dos hipótesis: inocente (H_0) y culpable (H_1). El fiscal público tiene interés en probar que el acusado es culpable. Para poder llegar a una decisión de culpable es necesario presentar suficientes evidencias que garanticen que la decisión es correcta. De no tenerse evidencias fuertes la hipótesis nula de inocencia no puede ser rechazada, pero esto no significa que se comprobó la inocencia del acusado, sino que no se logró acumular suficientes elementos para rechazar H_0. De hecho es posible que con nuevas investigaciones se determine la culpabilidad del acusado. Por el contrario habiéndose obtenido fuertes evidencias de culpabilidad, se acepta la hipótesis alternativa, decisión que es mucho más difícil revertir. En otras palabras la probabilidad de cometer un error es mucho menor al rechazar H_0 que al no rechazarla. En la práctica jurídica, si la evidencia es débil es preferible equivocarse declarando inocente a alguien culpable que condenando a un inocente. Un razonamiento similar a éste es el que usan los investigadores cuando plantean como hipótesis alternativa el evento que se quiere probar. Si los datos usados para probar las hipótesis proporcionan suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula, como consecuencia inmediata la hipótesis alternativa recibe un respaldo muy fuerte. Pero si el investigador hubiese planteado el mismo evento como hipótesis nula, su no rechazo no demuestra que el evento de interés sea verdad, sino que los datos no proporcionaron evidencia para rechazarla, dejando abierta la posibilidad de poder ser refutada con otro conjunto de datos o que otra hipótesis sea la verdadera. Por esta razón, es que la sustitución del término *no rechazar* H_0 por el término *aceptar* H_0, no es muy conveniente y de hacerlo se debe estar consciente que la aceptación de H_0 es sólo temporal. Veamos un ejemplo biológico: durante mucho tiempo los taxónomos, al describir los mamíferos le asignaban como una característica única el hecho de ser vivíparos, es decir que los individuos se desarrollaban en el vientre de la madre y cuando nacían ya habían completado en gran parte su desarrollo, lo cual los diferenciaba de los animales ovíparos y ovovivíparos cuyo desarrollo se completa dentro de un huevo. Esta era una hipótesis que había recibido mucho respaldo, puesto que cada vez que aparecía una nueva especie de mamífero recibía apoyo la hipótesis. Pero esto fue así hasta finales del siglo XVIII cuando fueron descubiertos los ornitorrincos, mamíferos que viven en Oceanía que junto con los equidna, descubiertos posteriormente, son los únicos mamíferos ovíparos porque sus crías se desarrollan dentro de huevos fuera del cuerpo de la madre. Es decir que la hipótesis de la viviparidad que parecía un hecho fuertemente comprobado se vino abajo cuando apareció la primera evidencia contradictoria. En otras palabras la hipótesis alternativa implícita que era que no todos los mamíferos eran vivíparos, quedó definitivamente comprobada al negarse la hipótesis nula. Esto demuestra lo conveniente de probar un hecho no por el aporte directo de evidencias sino por el rechazo de un hecho opuesto.

Volviendo al ejemplo del colesterol, si se refuta $H_0 : \mu = 30$, es porque los datos obtenidos en la muestra fueron concluyentes, por lo cual la hipótesis alternativa $H_1 > 30_1$ recibe un apoyo muy fuerte. Por el contrario si no se rechaza H_0 las implicaciones de este hecho no son concluyentes. El no rechazo no significa que necesariamente $\mu = 30$, porque se hubiese llegado a la misma conclusión con cualquier otro valor de μ menor a 30, lo cual deja muchas dudas con relación al verdadero valor de μ. También el no rechazo de H_0 solo indica que la

proposición es aceptada temporalmente dado que puede ser revertida con un nuevo conjunto de datos. El ejemplo que sigue puede aclarar la temporalidad de una “aceptación” de H_0. Suponga que alguien afirma que todos los granos de fríjol que hay en un saco son de color verde. Para probarlo toma un puñado de granos y observa su color. Si todos los frijoles del puñado son verdes, no significa que probó su premisa, solamente le dio apoyo. Puede repetir el ensayo muchas veces con el mismo resultado, pero mientras existan granos de fríjol en el saco su hipótesis no está probada, porque si en alguno de los ensayos encuentra un solo grano de otro color, la hipótesis nula queda definitivamente negada y por el contrario la hipótesis alternativa implícita de que no todos los granos de fríjol del saco son verdes queda plenamente confirmada.
Como vimos existen tres formas distintas de planteamiento para la hipótesis alternativa. La selección de una de ellas depende de la naturaleza del problema que se quiere docimar. Algunos ejemplos pueden ayudar a entender la lógica para seleccionar una hipótesis alternativa.

Ejemplo 6.2
Un biólogo sospecha que debido a la escasez de alimento, la talla promedio de las truchas adultas que viven en un río no alcanza el tamaño mínimo de pesca permitido que es de 25 cm. Si se comprueba la sospecha del investigador la pesca de truchas en ese río será vedada, de lo contrario no se tomará ninguna medida.

Puesto que el planteamiento que quiere probar el biólogo es que la talla promedio de las truchas es menor al valor mínimo permitido, las hipótesis a probar deben ser las siguientes:

$$H_0 : \mu = 25$$
$$H_1 : \mu < 25$$

Ejemplo 6.3
Se quiere saber si una nueva droga es eficaz como tratamiento del SIDA. Para lo cual a un grupo de paciente se le aplica un tratamiento con la droga.

La eficacia de la droga implica que la mayoría de los pacientes, es decir que más de la mitad de los pacientes a los cuales se les aplicó el tratamiento con la droga, respondieron positivamente a la enfermedad. Si se considera que π es la proporción de la población de pacientes para los cuales la droga es eficaz, las hipótesis que se deben someter a prueba serán las siguientes:

$$H_0 : \pi = 0{,}5$$
$$H_1 : \pi > 0{,}5$$

Ejemplo 6.4
Un especialista en nutrición sospecha que el contenido de proteína total en la sangre de pacientes que están sometidos a cierto régimen de alimentación no es el mismo que el registrado en otro grupo de pacientes sometidos a otro tratamiento, para el cual se sabe que el contenido de proteína total tiene un valor promedio igual a 7.0 unidades.

El especialista sospecha que el contenido de proteína total no es el mismo en los dos grupos de pacientes, lo cual implica que el valor de esta variable para el grupo problema puede ser mayor, menor o igual al grupo de referencia, por lo tanto las hipótesis a probar deben ser las siguientes:

$$H_0 : \mu = 7,0$$
$$H_1 : \mu \neq 7,0$$

La formulación de hipótesis no siempre es una tarea fácil debido a que no todas las situaciones son tan obvias como las planteadas en los ejemplos anteriores. Al no existir normas ni procedimientos que se puedan aplicar para plantear correctamente las hipótesis estadísticas, el investigador debe apelar a la experiencia y a su conocimiento del sistema bajo estudio. Muchas veces, se plantean las hipótesis con base a los resultados obtenidos en una muestra. Pero esto no es correcto, porque de hacerlo, se estaría usando la información que proporciona la muestra con el doble propósito de formular y docimar las hipótesis. Esta manera de proceder puede llevar a cometer errores graves. Ilustremos esta situación con el caso del Ejemplo 6.4 donde se planteó una hipótesis alternativa de diferencia, lo cual conduce a una prueba de hipótesis de dos colas. Supóngase que la hipótesis nula ($\mu = 7,0$) es cierta. Si la formulación de hipótesis se hubiese hecho después de obtener los datos de una muestra, en lugar de plantearse una hipótesis alternativa de dos colas, necesariamente se hubiese tenido que plantear una hipótesis de una sola cola, hacia la derecha o la izquierda, porque difícilmente una muestra hubiese dado un valor promedio igual a 7,0. Las consecuencias de este proceder es que aumenta la posibilidad de rechazar la hipótesis nula cuando de hecho es verdadera. Esto quedará más claro cuando se traten los problemas que se derivan de la toma de decisiones estadísticas.

6.3.2 Nivel de significación.

El proceso de prueba de hipótesis se basa fundamentalmente en determinar si la diferencia que existe entre el valor del estadístico muestral y el valor del parámetro poblacional $(\hat{\theta} - \theta)$ es lo suficientemente grande que no pueda atribuirse simplemente al azar, sino a la falsedad de la hipótesis nula. En este caso se dice que la diferencia es significativa para tomar la decisión de rechazar la hipótesis nula. A fin de determinar el tamaño que debe tener esta diferencia para que sea significativa se establece un criterio o límite de significación. Cualquier valor del estadístico que supere este límite se dice que alcanzó una diferencia significativa con respecto al valor del parámetro. El límite se establece de forma que sólo alcanzan la significación aquellos valores que ocurren con una probabilidad igual o menor a 0,05. También se pueden utilizar otros criterios como aquellos que establecen una probabilidad de ocurrencia igual o 0,10 o 0,01. Por esta razón cuando un estadístico ocurre con una probabilidad menor a 0,05 $(P \leq 0,05)$ o cualquier otro valor como 0,10 o 0,01, se dice que existe diferencia significativa entre el valor del estadístico y del parámetro.

El establecimiento del límite de significación define de inmediato dos zonas en la distribución de valores del estadístico: a) una zona de aceptación de H_0, dentro del a cual las diferencias entre el estadístico y el parámetro no son significativas, y b) una zona de rechazo de H_0 dentro de la cual las diferencias entre el estadístico y el parámetro son significativas.

6.3.2.1 Errores de tipos I y II

Cualquier decisión dentro del proceso de prueba de hipótesis lleva asociado cierto riesgo de fallar. Es decir que siempre existe la posibilidad de tomar una decisión equivocada, sólo que en este tipo de prueba se tiene la ventaja de conocer de antemano la probabilidad de equivocarse. En la Tabla 6.1 se muestran las posibles consecuencias de tomar una decisión con relación a la hipótesis nula.

Tabla 6.1. Situaciones derivadas de una decisión estadística

	DECISIÓN	
CONDICIÓN REAL	Rechazar Ho	No Rechazar Ho
H_0 cierta	***Error (Tipo I)***	***Acierto***
H_0 falsa	***Acierto***	***Error (Tipo II)***

El razonamiento básico del proceso de prueba de hipótesis supone que si el planteamiento de la hipótesis nula es cierto, por ejemplo que $H_0 = \theta$, la mayoría de las muestras proporcionarán valores del estadístico muestral $\hat{\theta}$ muy próximos al parámetro θ, y por lo tanto caerán dentro de la zona de aceptación (Figura 6.5).

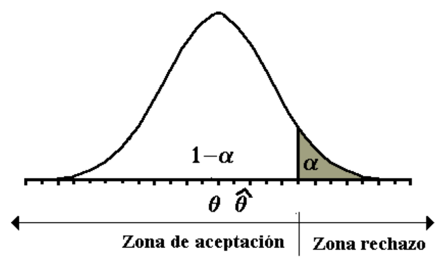


Figura 6.5

Pero también una minoría de observaciones puede no caer en la zona de aceptación a pesar que H_0 sea cierta, provocando que se tome una decisión errada, aunque se tiene a favor que se conoce la magnitud de ese error. Por ejemplo cuando se define una zona de aceptación donde se espera caigan el 95% de las observaciones si H_0 es cierta, también se está determinando que en un 5% de los casos se puede cometer una equivocación al rechazar H_0 cuando de hecho es cierta. Es decir que la probabilidad de cometer una falla es igual a 0,05. Este tipo de error se llama Error Tipo I (Tabla 6.1) y su probabilidad se identifica con la letra α (Figura 6.6).

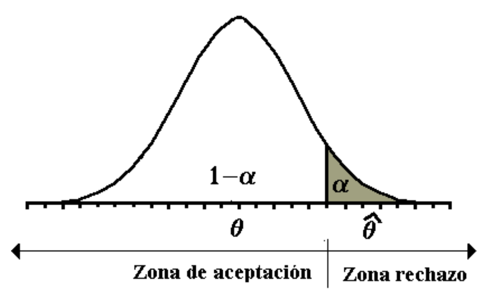


Figura 6.

También se puede cometer un error si se acepta H_0 cuando de hecho es falsa. Esto sucede cuando una observación cae dentro de la zona de aceptación de H_0, siendo otra hipótesis H_1 la verdadera (Figura 6.6b). En este caso la observación muestral $\hat{\theta}$ queda dentro de la zona de aceptación de H_0, pero siendo verdadera H_1. Este tipo de error se conoce como Error Tipo II (Tabla 6.1) y su probabilidad se identifica con la letra β (Figura 6.7)

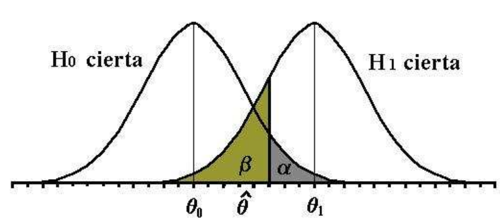


Figura 6.7

En términos de probabilidad los dos tipos de errores se expresan de la forma siguiente:

$$P(Error\ Tipo\ I) = P\left(\hat{\theta} \in\ \ Zona\ de\ rechazo/H_0\ cierta\right) = \alpha$$

$$P(Error\ Tipo\ II) = P\left(\hat{\theta} \in\ \ Zona\ de\ aceptación/H_1\ cierta\right) = \beta$$

Como se puede notar tanto α como β son probabilidades condicionadas. Los valores de ambos errores no pueden calcularse en un sentido absoluto. Para calcular α es necesario asumir que H_0 es cierta y para calcular β se asume que H_1 es cierta.

En cualquier prueba de hipótesis lo más conveniente será que ambos tipos de errores sean lo más pequeño posible, pero esto no es fácil de lograr porque al intentar disminuir uno el otro aumenta proporcionalmente (Figura 6.8).

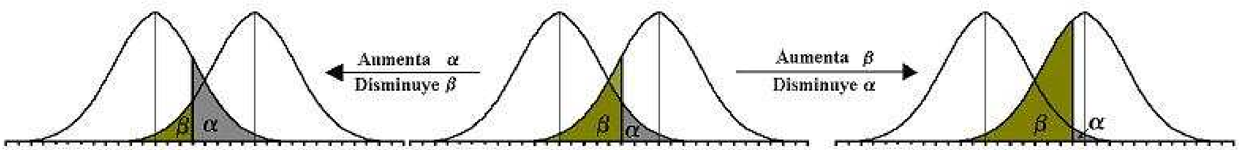


Figura 6.8

Afortunadamente al incrementar el tamaño de la muestra disminuye la probabilidad de cometer el Error Tipo II, y se mantiene constante la probabilidad de cometer el Error Tipo I. En la Figura 6.9 se muestra como al aumentar el tamaño de la muestra se reduce la varianza de las distribuciones e igualmente el valor de β, mientras que el valor de α se mantiene en 0,05.

Figura 6.9

De acuerdo a lo visto hasta ahora, sería lógico concluir que es necesario conocer la magnitud con la cual ambos errores operan en una prueba de hipótesis. Lamentablemente, esto sólo es posible para el Error Tipo I. Debido a la naturaleza del procedimiento, al formular una hipótesis nula no sólo se supone el valor de un parámetro, sino que se presume la ubicación de la distribución de probabilidades del estadístico de prueba. La consecuencia de esto es que puede fijarse un valor de α y establecerse la respectiva región de rechazo de H_0. Esto no es posible para el caso del Error Tipo II. Aun cuando se rehace H_0 se desconoce el valor de la hipótesis alternativa y por lo tanto la ubicación de la distribución probabilística del estadístico de prueba, no pudiéndose fijar el valor de β.

Por tales razones en toda prueba de hipótesis una vez que se han formulado la hipótesis se fija el valor de α con el cual se cuantifica el riesgo que se está dispuesto a correr al rechazar una hipótesis nula cierta. El valor de α se conoce como nivel de significación, término con el cual se quiere destacar que cualquier estadístico cuya probabilidad de ocurrencia sea igual o menor al valor de α, mantiene una diferencia tan grande con el valor del parámetro supuesto que se puede concluir que no pertenece a la distribución con la cual se está trabajando y por lo tanto asegurar que H_0 es falsa y otra hipótesis es la verdadera.

Comúnmente los niveles de significación α usados son 0,05, 0,01 y 0,001. El grado de importancia de la significación se califica de distintas formas dependiendo de donde se ubique el valor de probabilidad del estadístico.

- Si $\left[0{,}01 < P(\hat{\theta}) < 0{,}05\right]$ se dice que la prueba de hipótesis es significativa (*).
- Si $\left[0{,}001 < P(\hat{\theta}) < 0{,}01\right]$ se dice que la prueba de hipótesis es muy significativa (**).
- Si $\left[P(\hat{\theta}) < 0{,}001\right]$ se dice que la prueba de hipótesis es altamente significativa (***).

El número de asteriscos es una forma de indicar en un texto o en una tabla de resultados el grado de significación de los estadísticos de prueba. Tomemos como ejemplo los resultados que se presenta en la tabla siguiente:

Tabla 6.2. Coeficiente de Correlación de Pearson (r_p) entre el ancho cefálico de ninfas maduras de cuatro géneros de Ephemeroptera (Insecta) con la altitud en ríos andinos.

Género	Altitud
Baetodes	$0{,}53^{***}$
Leptohyphes	$0{,}48^{**}$
Americabaetis	$0{,}38^{*}$
Andesiops	$0{,}21^{ns}$

* = diferencias significativas (P < 0,05) entre el valor del estadístico r_p y el valor cero de no correlación.
** = diferencias muy significativas (P < 0,01) entre el valor del estadístico r_p y el valor cero de no correlación
*** = diferencias altamente significativas (P < 0,001) entre el valor del estadístico r_p y el valor cero de no correlación
ns = diferencias no significativas (P > 0,05) entre el valor del estadístico r_p y el valor cero de no correlación

También dentro de los textos científicos se suele presentar el resultado de una prueba estadística indicando el nivel de significación α o el rango de probabilidad dentro del cual se ubica el estadístico de prueba, Ejemplo: “*... la densidad de insectos no mostró relación con los valores acumulados de precipitación* $(r_p = 0{,}14;\ p < 0{,}05)$. . .”.

6.3.3 Estadístico de prueba.

Para poder someter a prueba las hipótesis formuladas, es necesario usar alguna propiedad o estadístico de las muestras que esté relacionado con el parámetro objeto de la inferencia. Estas propiedades muestrales reciben el nombre genérico de estadísticos de prueba. En la Tabla 6.3 se muestran algunos parámetros y sus estadísticos de prueba correspondiente.

Tabla 6.3. Parámetros y estadísticos de prueba más comunes

Parámetro	**Estadístico de prueba**
Media (μ)	$\overline{x}$
Diferencia de Medias (μ_2-μ_1)	$\overline{x}_2 - \overline{x}_1$
Varianza (σ^2)	S^2
Proporción (π)	p
Coeficiente de correlación (ρ)	r

Sin embargo, por razones prácticas, muchas veces los estadísticos de prueba no se usan en su forma original sino con otras formas equivalentes o derivadas (Tabla 6.4)

Tabla 6.4. Estadísticos de prueba para algunos parámetros poblacionales.

Parámetro	**Estadístico de prueba**	**Estadísticos de prueba derivados**
Media (μ)	$\overline{x}$	$z = (\overline{x} - \mu) \big/ (\sigma / \sqrt{n})$ $z = (\overline{x} - \mu) \big/ (s / \sqrt{n})$ $t = (\overline{x} - \mu) \big/ (s / \sqrt{n})$
Diferencia de medias ($\mu_2 - \mu_1$)	$\overline{x}_2 - \overline{x}_1$	$Z = (\overline{x}_2 - \overline{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}$ $Z = (\overline{x}_2 - \overline{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Big/ \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2} + \frac{s_1^2}{n_1}}$ $T = (\overline{x}_2 - \overline{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Big/ \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2} + \frac{s_1^2}{n_1}}$
Varianza	S^2	$\chi^2 = (n-1)S^2 \big/ \sigma_0^2$
Razón de varianzas	$S_2^2 \big/ S_1^2$	$F = (s_2^2 \sigma_2^2) \big/ (s_1^2 \sigma_1^2)$

La utilidad de estos y otros estadísticos de prueba se verá cuando se traten particularmente las pruebas de hipótesis para algunos parámetros.

6.3.4 Zona de aceptación.

Una vez conocido el estadístico de prueba a utilizar, así como su distribución, es necesario definir en la distribución del estadístico muestral una zona de aceptación y una zona de rechazo de la hipótesis nula. La zona de aceptación de H_0 está formada por todos los valores del estadístico de prueba que ocurren con una probabilidad mayor a la establecida en el nivel de significación. Por el contrario la zona de rechazo está formada por todos los valores del estadístico de prueba cuya probabilidad de ocurrencia es igual o menor al valor establecido en el nivel de significación. La zona de rechazo a diferencia de la zona de aceptación y dependiendo de la hipótesis alternativa planteada puede estar orientada en diferentes direcciones a lo largo del eje de valores de la variable aleatoria.

Zona de rechazo a la derecha

Está formada por todos los valores del estadístico de prueba $\hat{\theta}$ ubicados a la derecha del parámetro θ cuya probabilidad de ocurrencia es menor a la del nivel de significación. Esta zona se especifica cuando $H_1 : \theta > \theta_0$ y la docimasia se llama prueba de una cola a la derecha (Figura 6.10A)

Zona de rechazo a la izquierda

Está formada por todos los valores del estadístico de prueba $\hat{\theta}$ ubicados a la izquierda del parámetro θ cuya probabilidad de ocurrencia es menor a la del nivel de significación. Esta zona se especifica cuando $H_1 : \theta < \theta_0$ y la docimasia se llama prueba de una cola a la izquierda (Figura 6.10B)

Zona de rechazo doble

La zona de rechazo puede ser dividida en dos partes iguales ubicadas a cada lado del parámetro. Las zonas de la derecha y de la izquierda están formadas por todos los valores del estadístico de prueba $\hat{\theta}$ cuya probabilidad de ocurrencia es menor a la mitad de la probabilidad del nivel de significación α. Esta zona se especifica cuando $H_1 : \theta \neq \theta_0$ y la docimasia se llama prueba de dos colas (Figura 6.10C).

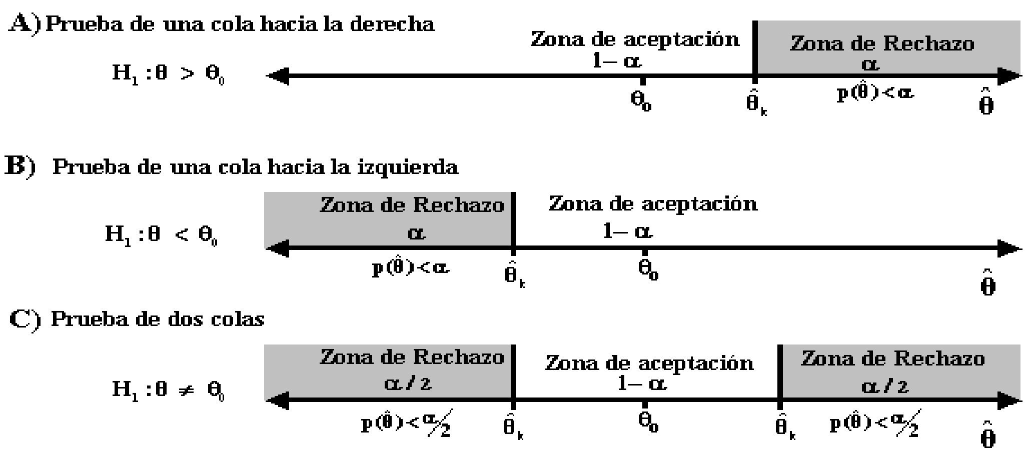


Figura 6.10: Posible ubicación de la zona de rechazo de H_0. A) A la derecha, B) A la izquierda, y C) Ambos lados. (*θ = parámetro*, *θ_o = valor del parámetro*, *$\hat{\theta}$ = estadístico*, *$\hat{\theta}_k$ = valor crítico).*

Para concretar una decisión, es necesario encontrar un valor crítico ($\hat{\theta}_k$), que como se ve en la Figura 6.10 es el valor del estadístico de prueba que separa la región de aceptación de la región de rechazo. Esto explica la importancia de conocer la distribución del estadístico de prueba. Este valor crítico por lo general se expresa en términos de los estadísticos de prueba derivados debido a la facilidad de encontrar el valor requerido usando las tablas de probabilidad acumulada de las distribuciones de probabilidad que estos estadísticos siguen.

Como se observa en la Figura 6.10 y la Tabla 6.5 la cuantía del valor crítico depende, además de la distribución de probabilidad, del valor de α.

Tabla 6.5: Algunos valores críticos de Z y T usados en las pruebas de hipótesis

$\alpha = 0{,}100$	$\pm z_{(0{,}900)} = 1{,}29$	$\pm t_{(0{,}90;\ 10)} = 1{,}372$
$\alpha = 0{,}050$	$\pm z_{(0{,}950)} = 1{,}65$	$\pm t_{(0{,}95;\ 10)} = 1{,}812$
$\alpha = 0{,}025$	$\pm z_{(0{,}975)} = 1{,}96$	$\pm t_{(0{,}975;\ 10)} = 2{,}228$
$\alpha = 0{,}010$	$\pm z_{(0{,}990)} = 2{,}33$	$\pm t_{(0{,}99;\ 10)} = 2{,}764$

El valor crítico del estadístico de prueba marca el punto de separación de las zonas de aceptación y de rechazo de la hipótesis nula. En la Figura 6.11 se muestra algunos de estos valores cuando se somete a prueba la hipótesis nula $\mu = \mu_0$. Se seleccionó como estadístico de prueba a *Z* y el nivel de confianza especificado fue $\alpha = 0{,}05$.

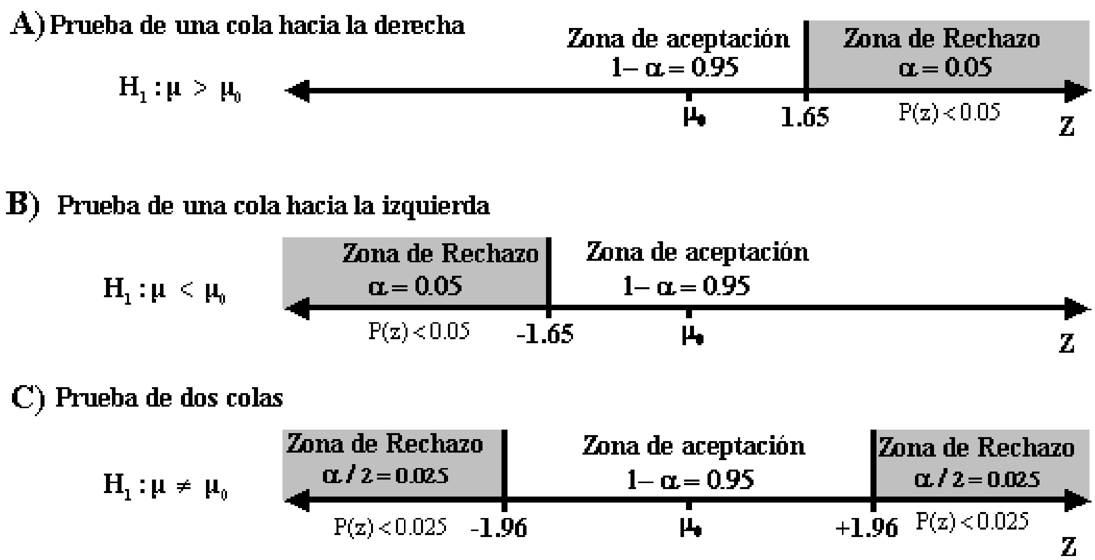


Figura 6.11

6.3.5 Cómputos.
Con los datos proporcionados por una muestra de tamaño n se calcula el estadístico de prueba. La mayoría de las veces no se usa el estadístico de prueba directamente sino alguna de sus formas equivalentes (Tabla 6.4), algunas de las cuales requieren para su uso que también se calcule la desviación estándar (s). La otra cantidad que hay que cuantificar es el valor crítico el cual depende del nivel de significación especificado y de la distribución probabilística que siga el estadístico de prueba.

6.3.6 Decisión.
En la última etapa en el procedimiento de prueba de hipótesis se debe tomar la decisión de rechazar o no la hipótesis nula. Si el estadístico de prueba cae dentro de la región de rechazo, se considera que la diferencia entre el parámetro que se está docimando y el estadístico de

prueba es “significativa” y que la misma no puede atribuirse únicamente a las variaciones aleatorias de las muestras, por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y se declara como falsa. Si por el contrario el estadístico de prueba se ubica en la zona de aceptación se considera que la diferencia entre el parámetro que se está docimando y el estadístico de prueba es “no significativa” y que dicha diferencia es simplemente aleatoria, en consecuencia se puede “aceptar” la hipótesis nula planteada. Aquí es necesario recordar que la decisión de aceptar H_0 es una forma corta de decir que no existe suficiente evidencia para rechazarla y que en modo alguno se está concluyendo que la hipótesis nula es verdadera. Sólo se está aceptando temporalmente, hasta que se pruebe lo contrario.

Un aspecto importante, para la toma de una decisión esta relacionada con la escogencia del nivel de significación. Como hemos visto, los valores de α son fijados previamente al cálculo del estadístico de prueba y usualmente los valores escogidos son 0,05 y 0,01. De modo que el rechazo o la aceptación de H_0 dependen de que el estadístico de prueba se ubique o no dentro de la región de rechazo previamente definida. Sin embargo, un investigador puede tomar una decisión diferente. Por ejemplo, si la probabilidad de ocurrencia de un estadístico de prueba es muy cercana a la región de rechazo, digamos que la $P(\hat{\theta}) = 0{,}0614$, se debe aceptar H_0 con un $\alpha = 0{,}05$ si se actúa estrictamente. Pero el investigador puede decidir rechazar H_0 puesto que la probabilidad de cometer un error tipo I no aumento mucho, siempre y cuando quede explicito en el informe de investigación el valor del nivel de significación usado. Actualmente, esta forma de proceder es muy usada debido a la facilidad que ofrecen los paquetes estadísticos y otros programas de aplicación de calcular los valores de P para cualquier estadístico de prueba. Por esta razón es común ver dentro de un texto científico afirmaciones parecidas a las siguientes: “*se encontró que el nivel promedio de calcio en los huesos del grupo de personas enfermas con osteoporosis fue significativamente menor al del grupo de personas sanas* $(P < 0{,}08)$”.

6.3.7 Conclusión.

En los inicios de éste capítulo se dijo que la resolución de todo problema científico comenzaba con la formulación de las hipótesis de investigación, que luego eran transformadas en hipótesis estadísticas, que como hemos visto son las premisas sometidas al proceso de docimasia. De modo que para cerrar el ciclo del proceso, es necesario que las conclusiones estadísticas se transformen en conclusiones de investigación. Si regresamos al ejemplo del programa de ejercicios y la disminución del nivel de colesterol en la sangre las hipótesis de investigación que se formularon fueron las siguientes:

H_0: *El ejercicio constante no disminuye el nivel de colesterol en el plasma sanguíneo.*
H_1: *El ejercicio constante disminuye el nivel de colesterol en el plasma sanguíneo.*

Las hipótesis estadísticas fueron las siguientes:

$H_0 : \mu = 30$ (La tasa media de disminución de colesterol es igual a 30 unidades).
$H_1 : \mu > 30$ (La tasa media de disminución de colesterol es mayor a 30 unidades).

Si después de efectuar todo el proceso de prueba de hipótesis se tomo la decisión de rechazar $H_0 : \mu = 30$, la conclusión del investigador en relación con el problema de investigación planteado es que los datos de la muestra proporcionaron evidencia concluyente para apoyar la suposición que el ejercicio físico disminuye el nivel de colesterol en la sangre. La diferencia entre ambas es que la conclusión estadística esta particularizada a un aspecto de la situación, en esta caso al valor de 30, mientras que la conclusión de investigación es generalizada a una parte o todos los valores de la variable estudiada.

Finalmente es importante enfatizar que las decisiones de un investigador no tienen que ser siempre consecuentes con las decisiones estadísticas. Los métodos estadísticos sólo proporcionan elementos de juicios objetivos y poderosos, que deben ser tomados en cuenta por el investigador al momento de decidir, pero no son los únicos, hay otros elementos de juicio de naturaleza no estadística que el científico puede considerar para tomar una decisión. En otras palabras decidir entre dos o más alternativas siempre queda a juicio del investigador.

6.4 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA UNA MEDIA POBLACIONAL.

En la investigación biológica es frecuente que se desee conocer si la media poblacional de una variable aumentó, disminuyó o no cambió con relación a una situación anterior. Se puede querer saber si el contenido de proteínas totales en la sangre de los animales de una población silvestre aumentó al finalizar un período en el cual la oferta de alimentos fue abundante; o si el tratamiento con una solución clorada disminuyó el número promedio de bacterias en el agua usada para el consumo humano en cierta región; o verificar si la aplicación de una droga altera el valor promedio de la presión arterial de los conejos usados en pruebas de laboratorio. La respuesta a cada una de estas situaciones se puede lograr poniendo a prueba la hipótesis nula de que la media poblacional es igual a un valor determinado, $\mu = \mu_0$. Sin embargo el proceso de docimasia de hipótesis para una media poblacional, al igual que en el caso de la estimación de μ, depende de varios aspectos: i) de la distribución probabilística que siga la variable estudiada, ii) del conocimiento de la varianza poblacional, y iii) del tamaño de la muestra. A continuación estudiaremos mediante ejemplos las distintas situaciones o casos que se pueden presentar en la prueba de hipótesis sobre una media poblacional.

6.4.1 Prueba de hipótesis para una media poblacional cuando la muestra proviene de una población distribuida normalmente y con varianza conocida.

Ejemplo 6.5

Un médico traumatólogo afirma que el contenido de calcio en los huesos de mujeres que padecen osteoporosis después de aplicársele cierto tratamiento es mayor al valor promedio observado para la población femenina que padece está enfermedad, el cual se sabe es igual a 270 mg/g con una desviación de 120 mg/g. Para probar su premisa el investigador determinó el contenido de calcio en los huesos de 36 individuos que fueron sometidos al tratamiento y pudo determinar que dicha muestra arroja un valor promedio de calcio igual a 310 mg/g. La concentración de calcio es una variable que se distribuye normalmente.

Las hipótesis de investigación son las siguientes:

Ho : El tratamiento para la osteoporosis no tiene ningún efecto
H_1 *: El tratamiento para la osteoporosis aumenta los niveles de calcio en los huesos*.

Prueba de las hipótesis estadísticas

a. Formulación de hipótesis

$$Ho : \mu = 270$$
$$H_1 : \mu > 270$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación.
Ante la ausencia de una especificación particular, se puede escoger como nivel de significación un valor de $\alpha = 0,05$.

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Puesto que el parámetro involucrado en la docimasia es la media poblacional μ, y la variable se distribuye normalmente con varianza conocida lo más conveniente es usar como estadístico de prueba la media muestral en su forma derivada *Z*.

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

d. Establecer una zona de aceptación para H_0.
Como $H_1 : \mu > \mu_0$ μo se trata de una prueba de una cola hacia la derecha, siendo la zona de aceptación la siguiente:

$$ZA = \left\{ Z \,/\, Z \le z_{(1-\alpha)} \right\}$$

e. Cómputos necesarios.

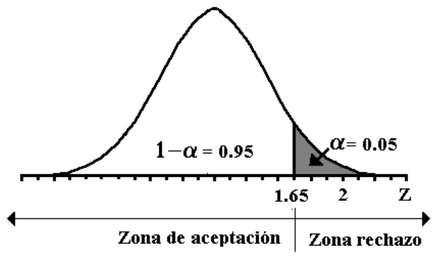
e.1) Estadístico de prueba:

$$Z = (\overline{x} - \mu) \Big/ (\sigma / \sqrt{n}) = (310 - 270) \Big/ (120 / \sqrt{36}) = 40/20 = 2$$

e.2) Zona de aceptación:

$$ZA = \left\{ Z \,/\, Z \le z_{(0,95)} \right\} = \left\{ Z \,/\, Z \le 1,65 \right\}$$

f. Decisión.
Como $Z = 2,0 > z_{(0,95)} = 1,65$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo. Por lo tanto se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar Ho.



La información obtenida de la muestra permite afirmar que se tiene un 95% de confianza que el tratamiento aplicado a los pacientes enfermos de osteoporosis aumenta el nivel de calcio en los tejidos óseos.

6.4.2 Prueba de hipótesis para una media poblacional cuando la muestra proviene de una población distribuida normalmente, con varianza desconocida y tamaño de muestra grande (n 30).

Ejemplo 6.6

Un entomólogo sospecha que en cierta zona endémica para el dengue el valor de la tasa neta reproductiva (R_0) de una población del mosquito *Aedes aegypti* vector de dicha enfermedad, ha cambiado en relación con el valor determinado hace 5 años el cual era igual a 205 individuos. Con tal propósito determinó el valor de R_0 a 40 hembras criadas en el laboratorio y pertenecientes a una cepa desarrollada a partir de mosquitos capturados en la zona estudiada. Los resultados fueron los siguientes:

N°	R_o	*N°*	R_o	*N°*	R_o	*N°*	R_o
1	228	11	201	21	141	31	144
2	173	12	212	22	169	32	226
3	182	13	162	23	163	33	228
4	197	14	282	24	159	34	192
5	205	15	216	25	192	35	205
6	260	16	181	26	231	36	237
7	233	17	249	27	257	37	223
8	289	18	174	28	174	38	226
9	158	19	196	29	206	39	182
10	199	20	220	30	149	40	195

El investigador sabe que la variable se distribuye normalmente y quiere someter a prueba su hipótesis no queriendo equivocarse en más del 5% de las veces.

<u>Las hipótesis de investigación son las siguientes:</u>

Ho : La tasa neta de reproducción no ha cambiado

H_1 *: La tasa neta de reproducción se modificó después de cinco años.*

Prueba de las hipótesis estadísticas

a. Formulación de hipótesis

$$H_0 : \mu = 205$$
$$H_1 : \mu \neq 205$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $1-\alpha = 0,95$

c. Elección del estadístico muestral y su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Puesto que el parámetro involucrado en la docimasia es la media poblacional μ, y la variable se distribuye normalmente con varianza desconocida y tamaño de muestra grande lo más conveniente es usar como estadístico de prueba la media muestral en su forma derivada Z. El valor de la desviación de la muestra se usa para estimar el valor de σ.

$$Z = (\bar{x} - \mu) / (s / \sqrt{n})$$

d. Establecer una zona de aceptación para H_0.
Como $H_1 : \mu \neq \mu_0$ se trata de una prueba de dos colas, siendo la zona de aceptación la siguiente:

$$ZR = \{Z / -z_{(1-\alpha/2)} < Z < z_{(1-\alpha/2)}\}$$

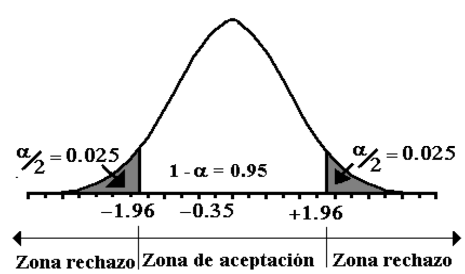
e. Cómputos necesarios.
e.1) Media: $\bar{x} = 202,9$
e.2) Desviación estándar: $s = 36,17$
e.3) Estadístico de prueba:

$$Z = (\bar{x} - \mu) / (s / \sqrt{n}) = (202,9 - 205) / (36,17 / \sqrt{40}) = -2,1 / 5,719 = -\ 0,37$$

e.4) Zona de aceptación:

$$ZA = \{Z / -z_{(0,975)} < Z < z_{(0,975)}\} = \{Z / -1,96 < Z < +\ 1,96\}$$

f. Decisión.
Como $z = 0,37$, el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de aceptación de Ho. Por lo tanto se concluye que los datos no proporcionan suficiente evidencia para rechazar Ho.



La sospecha del investigador que la tasa de reproducción de la población de mosquito se había modificado fue rechazada con un 95% de confianza a la luz de la información proporcionada por la muestra.

6.4.3 Prueba de hipótesis para una media poblacional cuando la muestra proviene de una población distribuida normalmente, con varianza desconocida y tamaño de muestra pequeño (*n* < *30*).

Ejemplo 6.7
Un fisiólogo vegetal desea verificar si el contenido de nitrógeno en las hojas jóvenes de la especie *Rhizophora mangle*, es menor en las plantas que viven en una zona ambientalmente protegida con relación al de plantas que viven en una zona que está siendo afectada por la contaminación con fertilizantes y cuyo valor promedio se cuantificó en 14,6 mg/g de nitrógeno. El análisis de 25 hojas jóvenes provenientes de la zona protegida produjo los resultados siguientes:

N°	N_2	N°	N_2	N°	N_2	N°	N_2	N°	N_2
1	10,5	6	13,1	11	14,2	16	9,5	21	8,9
2	15,0	7	11,6	12	13,8	17	11,1	22	10,8
3	12,4	8	8,2	13	15,1	18	10,3	23	9,8
4	6,8	9	9,5	14	6,9	19	10,2	24	7,8
5	7,9	10	11,7	15	8,9	20	9,9	25	8,1

Si la concentración de nitrógeno se distribuye normalmente, ¿Apoya la evidencia proporcionada por la muestra la presunción que las plantas de la zona protegida contienen menos nitrógeno?. El error tipo I no debe ser mayor al 1%.

Las hipótesis de investigación son las siguientes:

Ho: La concentración de N_2 en las hojas jóvenes de R. mangle en ambas regiones es la misma
H1: La concentración de N_2 en las hojas jóvenes de R. mangle es menor en la región protegida

Prueba de las hipótesis estadísticas

a. Formulación de hipótesis

$$H_0 : \mu = 14,6$$
$$H_1 : \mu < 14,6$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $1-\alpha = 0,99$

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución.

   Puesto que el parámetro involucrado en la docimasia es la media poblacional μ, y la variable se distribuye normalmente con varianza desconocida y el tamaño de la muestra es pequeño lo más conveniente es usar como estadístico de prueba la media muestral en su forma derivada T. El valor de la desviación de la muestra se usa para estimar el valor de σ.

$$T = (\bar{x} - \mu)\big/(s/\sqrt{n})$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.

Como $H_1 : \mu < \mu_0$ se trata de una prueba de una cola hacia la izquierda, siendo la zona de aceptación la siguiente:

$$ZA = \left\{ T \,/\, T \geq -t_{(1-\alpha;n-1)} \right\}$$

e. Cómputos necesarios.

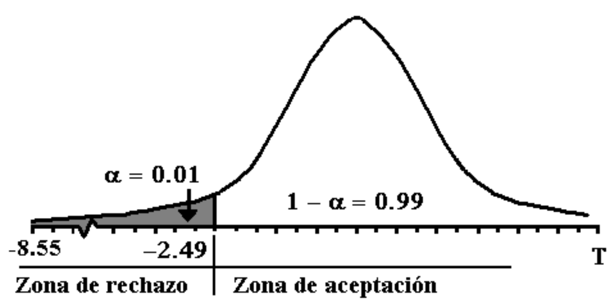
e.$_1$) Media: $\bar{x} = 10{,}48$
e.$_2$) Desviación estándar: $s = 2{,}41$
e.$_3$) Estadístico de prueba:

$$T = (\bar{x} - \mu) \big/ (s / \sqrt{n}) = (10{,}48 - 14{,}6) \big/ (2{,}41 / \sqrt{25}) = -4{,}12 / 0{,}482 = -\ 8{,}55$$

e.$_4$) Zona de aceptación:

$$ZA = \{ T \,/\, T > -t_{(1-\alpha;n-1)} \} = \{ T \,/\, T > -t_{(0{,}99;\ 24)} \} = \{ T \,/\, T > -2{,}492 \}$$

f. Decisión.
Como $t = -8{,}55 << -t_{(0{,}99;24)} = -2{,}492$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo de Ho. Por lo tanto se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar Ho



De acuerdo a la información obtenida de la muestra se puede afirmar con un 99% de confianza que la concentración de nitrógeno en las hojas jóvenes de *Rhizophora mangle* en ambas regiones es diferente

6.4.4 Prueba de hipótesis para una media poblacional cuando la muestra proviene de una población con distribución no normal y tamaño de muestra grande ($n \quad 30$).

Cuando la muestra proviene de una población con distribución no normal pero el tamaño de la muestra es grande se puede aplicar el Teorema del Límite Central y considerar que la media muestral se distribuye normalmente. Si la desviación poblacional es conocida se usa $Z = (\bar{x} - \mu) \big/ (\sigma / \sqrt{n})$ como estadístico de prueba. En caso de no conocerse la desviación poblacional se utiliza la desviación de la muestra y $Z = (\overline{x} - \mu) \big/ (s / \sqrt{n})$ será el estadístico de prueba usado.

Ejemplo 6.8
En cierto nervio del cuerpo humano, los impulsos eléctricos viajan a una velocidad promedio de 4,3 m/seg con una desviación igual a 1,2 m/seg. Un fisiólogo observó que la velocidad promedio de conducción del impulso eléctrico en 45 individuos con una distrofia fue de 3,7 m/seg. Basado en estos resultados el investigador presume que con relación a los individuos sanos en los individuos con distrofia el impulso eléctrico viaja a menor velocidad en el nervio estudiado. ¿Soportan ésta hipótesis los resultados obtenidos?. ¿Cuál debe ser el menor valor de $\overline{x}$ que permite rechazar H_0?

Las hipótesis de investigación son:

Ho: La velocidad del impulso nervioso es igual en los individuos con distrofia y en los individuos normales.
H_1: La velocidad del impulso nervioso es menor en los individuos con distrofia que en los individuos normales.

Prueba de las hipótesis estadísticas.

a. Formulación de hipótesis

$$H_0 : \mu = 4{,}3$$
$$H_0 : \mu < 4{,}3$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación.

Como no se especificó el nivel de significación se puede seleccionar $1 - \alpha = 0{,}95$

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Aunque no se conoce la distribución de la variable, como el tamaño de la muestra es grande se aplica el Teorema del Límite Central. Por lo tanto se puede considerar que la media muestral se distribuye normalmente y lo más conveniente es usar Z como estadístico de prueba.

$$Z = (\overline{x} - \mu) \big/ (\sigma / \sqrt{n})$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.

Como $H_1 : \mu < \mu_0$ se trata de una prueba de una cola hacia la izquierda, siendo la zona de rechazo la siguiente:

$$ZA = \left\{ Z \;/\; Z > -z_{(1-\alpha)} \right\}$$

e. Cómputos necesarios.

e.1) Estadístico de prueba:

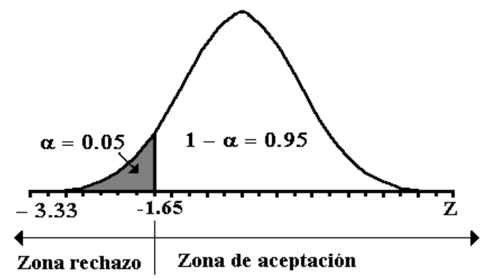
$$Z = (\bar{x} - \mu) / (\sigma / \sqrt{n}) = (3,7 - 4,3) / (1,2 / \sqrt{45}) = -0,6 / 0,18 = -3,354$$

e.2) Zona de aceptación:

$$ZA = \{Z \,/\, Z \geq -z_{(1-\alpha)}\} = \{Z \,/\, Z \geq -z_{(0,95)}\} = \{Z \,/\, Z \geq -1,65\}$$

f. Decisión.

Como $z = -3,354 < -z_{(0,95)} = -1,65$, el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo de Ho. Por lo tanto se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar Ho



Los datos soportan la suposición del investigador que en los individuos con distrofia la velocidad de transmisión del impulso nervioso es menor a la observada en individuos normales.

Para responder la segunda pregunta: ¿Cuál debe ser el menor valor de $\bar{x}$ que permite rechazar Ho?, sencillamente se encuentra el valor de $\bar{x}$ equivalente a $-z_{(0,95)}$, a partir de la ecuación del estadístico de prueba: $Z = (\bar{x} - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$

$$\bar{x} = \mu - z_{(1-\alpha)}(\sigma / \sqrt{n}) = 4,3 - 1,65(1,2 / \sqrt{45}) = 4,00$$

Cualquier valor menor a 4 m/seg se considera significativamente menor a 4,3, y permite rechazar H_0.

Ejemplo 6.9

Una compañía productora de leche pasteurizada tiene como norma no aceptar leche cruda con un contenido de grasa superior a los 34 g/100g. Una muestra de 36 litros de leche obtenidos de otras tantas vacas pertenecientes a una misma finca, dio un valor medio del contenido de grasa en la leche de 35,2 g/100g con una desviación de 4,1 g/100g. ¿Puede ser aceptada la leche por la pasteurizadora? La compañía admite un nivel de error del 1%.

<u>Las hipótesis de investigación son:</u>

Ho: El valor promedio de grasa en la leche es igual al máximo permitido para su procesamiento.

H_1: El valor promedio de grasa en la leche es mayor al máximo permitido para su procesamiento.

Prueba de las hipótesis estadísticas.

a. Formulación de hipótesis

$$H_0 : \mu = 34$$
$$H_1 : \mu > 34$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $1-\alpha = 0{,}99$

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Aunque no se conoce la distribución de la variable, como el tamaño de la muestra es grande se aplica el Teorema del Límite Central. Por lo tanto se puede considerar que la media muestral se distribuye normalmente y lo más conveniente es usar Z como estadístico de prueba y a la desviación muestral (s) como estimador de σ.

$$Z = (\bar{x} - \mu) \big/ (s/\sqrt{n})$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.
Como $H_1 : \mu > \mu_0$ se trata de una prueba de una cola hacia la derecha, siendo la zona de aceptación la siguiente:

$$ZA = \left\{ Z \,/\, Z \le z_{(1-\alpha)} \right\}$$

e. Cómputos necesarios.

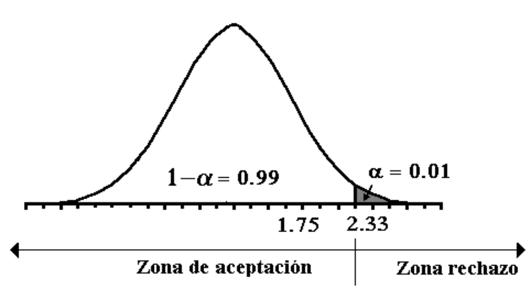
e.1) Estadístico de prueba:

$$Z = (\bar{x} - \mu) \big/ (s/\sqrt{n}) = (35{,}2 - 34) \big/ (4{,}1/\sqrt{36}) = 1{,}2/0{,}68 = 1{,}76$$

e.2) Zona de aceptación:

$$ZA = \left\{ Z \,/\, Z \le z_{(1-\alpha)} \right\} = \left\{ Z \,/\, Z \le z_{(0{,}99)} \right\} = \left\{ Z \,/\, Z \le 2{,}33 \right\}$$

f. Decisión.
Como $z = 1{,}76 < z_{(0{,}99)} = 2{,}33$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de aceptación de H_0. Por lo tanto se concluye que los datos no proporcionan suficiente evidencia para rechazar H_0.



Se puede concluir que el contenido promedio de grasa en la leche de la finca tiene un valor igual al valor máximo permitido para su procesamiento.

6.5 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA DOS MEDIAS POBLACIONALES.

Posiblemente la situación más frecuente de investigación en el campo de las ciencias naturales sea la de decidir entre dos alternativas. Por lo general cuando se requiere escoger entre dos métodos, determinar si un tratamiento fue más efectivo que otro o decidir si existen diferencias para una misma variable entre dos grupos de individuos, se recurre a una prueba de hipótesis para dos medias poblacionales. Esta prueba consiste básicamente en determinar si dos muestras estiman la misma media poblacional, ya sea porque se supone que las muestras provienen de una misma población o de poblaciones diferentes con la misma media. El procedimiento de docimasia a seguir depende del conocimiento que se tenga de varios aspectos como son: la distribución de probabilidades de la variable estudiada, las varianzas poblacionales y el tamaño de las muestras. Las diferentes situaciones y procedimientos se mostraran a través de algunos ejemplos.

6.5.1 Prueba de hipótesis para dos medias poblacionales cuando las muestras provienen de poblaciones distribuidas normalmente y con varianzas conocidas.

Ejemplo 6.10
De acuerdo a los estudios efectuados sobre el contenido de estroncio en los seres humanos se sabe que ésta variable se distribuye normalmente con varianza $\sigma^2 = 144$. Los mismos estudios indican que el contenido de este elemento en los huesos disminuye con la edad de las personas. En una investigación relacionada con éste problema, un químico determinó mediante la espectrofotometría de absorción atómica, el contenido de estroncio en muestras de huesos fracturados de pacientes femeninos pertenecientes a dos grupos etáreos diferentes. Los resultados fueron los siguientes:

Niveles de estroncio μg/g	
35-44 años	45-54 años
40,45	48,21
55,15	23,37
67,59	25,42
80,58	41,94
78,09	40,65
68,09	44,75
72,06	51,69

¿Esto resultados apoyan la hipótesis de la disminución de los niveles de estroncio en el tejido óseo al incrementar la edad de las personas? Use $\alpha = 0{,}03$.

Las hipótesis de investigación son:

Ho : El contenido de estroncio en los huesos no se modifica con la edad de las personas.
H_1 : El contenido de estroncio en los huesos disminuye con la edad de las personas.

Prueba de las hipótesis estadísticas.

a. Formulación de hipótesis: si se considera que la población de edades entre 35 y 44 años tiene una media μ_1 y que la población con edades entre 45 y 54 años tiene una media μ_2, las hipótesis estadísticas a probar son las siguientes:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad ó \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_0 : \mu_1 > \mu_2 \quad ó \quad \mu_1 - \mu_2 > 0$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $\alpha = 0{,}03$

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Puesto que la variable concentración de estroncio se distribuye normalmente con varianza conocida y como se trata de una prueba de hipótesis sobre la diferencia de dos medias poblacionales se puede usar el estadístico de prueba Z.

$$Z = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.
Como $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ se trata de una prueba de una cola hacia la derecha, siendo la zona de aceptación la siguiente:

$$ZA = \left\{ Z \,/\, Z \le z_{(1-\alpha)} \right\}$$

e. Cómputos necesarios.

e.1) Medias de las muestras: $\bar{x}_1 = 66{,}0$; $\bar{x}_2 = 39{,}43$

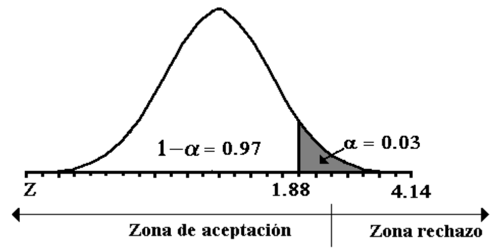
e.2) Estadístico de prueba:

$$Z = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} = (66{,}0 - 39{,}43) \Big/ \sqrt{\frac{144}{7} + \frac{144}{7}} = 26{,}57/6{,}41 = 4{,}14$$

e.3) Zona de aceptación:

$$ZA = \left\{ Z \,/\, Z \le z_{(1-\alpha)} \right\} = \left\{ Z \,/\, Z \le z_{(0{,}970)} \right\} = \left\{ Z \,/\, Z \le 1{,}88 \right\}$$

f. Decisión.
Como $z = 4{,}14 >> z_{(0{,}970)} = 1{,}88$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo de Ho. Por lo tanto se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar Ho.



Se puede concluir con un 97% de confianza que la evidencia aportada por la muestra apoya la hipótesis de la disminución del nivel de estroncio en los huesos de las personas con la edad.

6.5.2 Prueba de hipótesis para dos medias poblacionales cuando las muestras provienen de poblaciones distribuidas normalmente, con varianzas desconocidas y tamaño de muestras grandes ($n_1, n_2 \geq 30$).

Ejemplo 6.11
En el Departamento de Toxicología del Ministerio de Salud se necesita saber si el contenido de nicotina en dos marcas de cigarrillos importados es la misma. Con el propósito de resolver la situación se le determina el contenido de nicotina a un lote de cigarrillos de cada marca, encontrándose los resultados siguientes:

	Contenido de nicotina (mg)	
	Marca "*Kill me softly*"	Marca "*Little life*"
n	49	36
Media	24,0	25,2
Desviación estándar	2,30	2,90

Si se sabe que la cantidad de nicotina se distribuye normalmente, determine con un nivel de confianza del 10% si las dos marcas tienen la misma cantidad de nicotina.

Las hipótesis de investigación son:

Ho : La cantidad de nicotina en los cigarrillos de las dos marcas es la misma.
H_1 *: La cantidad de nicotina en los cigarrillos de las dos marcas es diferente.*

Prueba de las hipótesis estadísticas.

a. Formulación de hipótesis: si se considera a μ_1 y μ_2 como el valor promedio del contenido de nicotina en los cigarrillos "*Kill me softly*" y "*Little life*" respectivamente, las hipótesis estadísticas a probar son las siguientes:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad ó \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_0 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad ó \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $\alpha = 0,10$

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Puesto que el parámetro involucrado en la docimasia es la diferencia de medias poblacionales $\mu_1 - \mu_2$, y como la variable se distribuye normalmente con varianza desconocida y tamaño de la muestra grande lo más conveniente es usar como estadístico de prueba la diferencia de medias muestrales en su forma derivada Z. El valor de la varianzas s_1^2 y s_2^2 de las muestras se usa para estimar el valor de σ_1^2 y σ_2^2.

$$Z = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Big/ \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.
Como $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ se trata de una prueba de dos colas, siendo la zona de aceptación la siguiente:

$$ZA = \left\{ Z \,/\, -z_{(1-\alpha/2)} \leq Z \leq z_{(1-\alpha/2)} \right\}$$

e. Cómputos necesarios.

e.2) Varianzas:

$$s_1^2 = (2,3)^2 = 5,29 \qquad s_2^2 = (2,9)^2 = 8,41$$

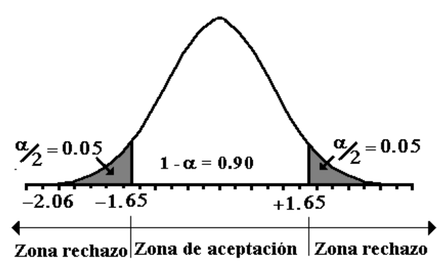
e.2) Estadístico de prueba:

$$Z = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Big/ \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2} + \frac{s_1^2}{n_1}} = \left[(24,0 - 25,2) - 0 \right] \Big/ \sqrt{\frac{5,29}{49} + \frac{8,41}{36}} = -2,06$$

e.3) Zona de aceptación:

$$ZA = \left\{ Z \,/\, -z_{(1-\alpha/2)} \leq Z \leq z_{(1-\alpha/2)} \right\} = \left\{ Z \,/\, -z_{(0,95} \leq Z \leq z_{(0,95} \right\} = \left\{ Z \,/\, -1,65 \leq Z \leq 1,65 \right\}$$

f. Decisión.
Como $z = -2,06 < z_{(0,95)} = -1,65$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo de Ho. Por lo tanto se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar Ho



Se puede concluir que la evidencia aportada por la muestra apoya como hipótesis que el contenido de nicotina en las dos marcas es diferente.

6.5.3 Prueba de hipótesis para dos medias poblacionales cuando las muestras provienen de poblaciones distribuidas normalmente, con varianzas desconocidas y tamaño de muestras pequeñas ($n_1, n_2 < 30$).

Cuando se presenta una situación de éste tipo, es necesario considerar adicionalmente si las dos varianzas poblacionales, aunque desconocidas, son iguales o diferentes. Si se supone que las varianzas son iguales se debe utilizar como estadístico de prueba a:

$$T = \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\dfrac{s_p^2}{n_2} + \dfrac{s_p^2}{n_1}}} \ ,$$

Donde:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\ s_1^2 + (n_2 - 1)\ s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Si se presume que las varianzas son diferentes, y si la prueba de hipótesis para la diferencia de medias es de dos colas, se debe usar como estadístico de prueba a:

$$T = \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\dfrac{s_2^2}{n_2} + \dfrac{s_1^2}{n_1}}}$$

y se usa t* como valor crítico para la zona de rechazo.

$$t^*_{(1-\alpha/2)} = \frac{w_1\ t_{(1\text{-}\alpha/2;n_1-1)} + w_2\ t_{(1\text{-}\alpha/2;n_2-1)}}{w_1 + w_2}$$

Donde: $w_1 = \left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)$ y $w_2 = \left(\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)$

Ejemplo 6.12
En un estudio sobre la condición ecológica de los ríos altiandinos, se determinó la temperatura del agua en ríos de páramo y de selva nublada, obteniéndose los resultados siguientes:

Temperatura del agua (°C)

Ríos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Páramo	10,5	15,0	14,5	8,5	7,5	13,5	15,0	11,5	17,0	13,0	13,5	14,5	13,5	15,0	10,5	10,0
Selva	19,5	17,0	13,5	9,0	12,0	16,5	16,5	18,0	18,0	18,0	12,0	16,0	12,0	14,5	16,5	17,0

Conociendo que la temperatura del agua es una variable que se distribuye normalmente, se quiere poner a prueba la hipótesis que predice que la temperatura promedio de los ríos de selva nublada supera en tres grados o más la temperatura de los ríos de páramo.

Las hipótesis de investigación son:

Ho : La temperatura del agua en los ríos es la misma en las dos unidades ecológicas
H_1 *: La temperatura del agua es mayor en los ríosde la zona de selva*.

Prueba de las hipótesis estadísticas.

a. Formulación de hipótesis: si se considera a μ_1 y μ_2 como el valor promedio de la temperatura del agua en los ríos de páramo y de selva nublada respectivamente, las hipótesis estadísticas a probar son las siguientes:

$$H_0: \quad \mu_2 - \mu_1 = 3,0$$
$$H_1: \quad \mu_2 - \mu_1 > 3,0$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $\alpha = 0,05$

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Puesto que el parámetro involucrado en la docimasia es la diferencia de medias poblacionales $\mu_2 - \mu_1$, y como la variable se distribuye normalmente con varianzas desconocidas y el tamaño de la muestra es pequeño, para poder seleccionar el estadístico de prueba a usar, se debe en primer lugar determinar si las varianzas poblacionales se pueden considerar iguales o diferentes. Para esto se puede hacer uso de las reglas prácticas para la comparación de varianzas (Capítulo 5: sección 5.3.2).
Como $\alpha = 0,05$ y $RV = s_2^2 / s_1^2 = (2,9)^2/(2,66)^2 = 1,19$ es menor a 2.5 se acepta que las dos varianzas son iguales. Por lo tanto se debe usar como estadístico de prueba a:

$$T = \frac{(\overline{x}_2 - \overline{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\dfrac{s_p^2}{n_2} + \dfrac{s_p^2}{n_1}}}$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.
Como $H_1: \mu_2 - \mu_1 > \mu_0$ se trata de una prueba de una cola hacia la derecha, siendo la zona de aceptación la siguiente:

$$ZA = \left\{ T \,/\, T \le t_{(1-\alpha; n_1+n_2-2)} \right\}$$

e. Cómputos necesarios.

e.1) Medias: $\overline{x}_1 = 12{,}688$ y $\overline{x}_2 = 15{,}375$

e.2) Desviaciones: $s_1 = 2{,}658$ y $s_2 = 2{,}901$

e.3) Varianzas ponderada s_p^2

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\ s_1^2 + (n_2-1)\ s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(16-1)(2{,}658)^2 + (16-1)(2{,}901)^2}{16+16-2} = 7{,}74$$

e.4) Estadístico de prueba:

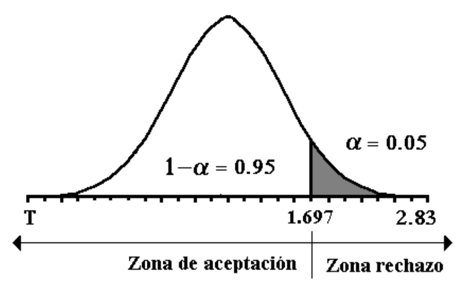
$$T = \frac{(\overline{x}_2 - \overline{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_2} + \frac{s_p^2}{n_1}}} = \frac{(15{,}38 - 12{,}69) - 0}{\sqrt{\frac{7{,}74}{16} + \frac{7{,}74}{16}}} = \frac{2{,}69}{0{,}9836} = 2{,}73$$

e.3) Zona de aceptación:

$$ZA = \{T\ /\ T < t_{(1-\alpha;n_1+n_2-2)}\} = \{T\ /\ T < t_{(0{,}95;30)}\} = \{T\ /\ T < 1{,}697\}$$

f. Decisión.

Como $t = 2{,}73 > t_{(0{,}95;30)} = 1{,}697$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo de Ho. Por lo tanto se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar Ho.



Se puede concluir que se tiene un 95% de confianza que la temperatura del agua es mayor en los ríos de selva nublada, en al menos tres grados centígrados, que en los ríos de páramo.

Ejemplo 6.1.3

Un investigador que trabaja sobre la interacción insecto/planta piensa que las plantas cianogénicas, es decir las que producen HCN, tienden a ser rechazadas por los insectos herbívoros no especializados. Para poner a prueba ésta hipótesis se efectuó un experimento en el cual se le ofreció a las larvas de un insecto generalista hojas de una planta cianogénica como la parchita (*Passiflora capsularis*) y hojas de una planta no cianogénica como la espinaca (*Spinacia olerácea*). Como una medida de la aceptación o rechazo del alimento ofrecido se determinó el peso de tejido foliar consumido por las larvas de la polilla *Spodoptera frugiperda*. Los resultados fueron los siguientes:

	Peso consumido (mg/larva)		
Especie Vegetal	**n**	$\overline{x}$	**s**
Passiflora capsularis	5	74,70	20,13
Spinacia olerácea	5	124,44	8,28

Sabiendo que la variable peso de hoja consumida se distribuye normalmente se quiere determinar si la sospecha del investigador es cierta para un $\alpha = 0{,}01$

<u>Las hipótesis de investigación son:</u>

Ho : La presencia de sustancias cianogénicas no interfiere el consumo de tejido vegetal por los insectos herbívoros no especialistas.

H_1 *: La presencia de sustancias cianogénicas disminuye el consumo de tejido vegetal por los insectos herbívoros no especialistas*.

<u>Prueba de las hipótesis estadísticas.</u>

a. Formulación de hipótesis: si se considera a μ_1 y μ_2 como el peso promedio de hojas de parchita y espinaca que respectivamente consumen las larvas del insecto, las hipótesis estadísticas a probar son las siguientes:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad ó \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 < \mu_2 \quad ó \quad \mu_1 - \mu_2 < 0$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $\alpha = 0{,}10$

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Puesto que el parámetro involucrado en la docimasia es la diferencia de medias poblacionales $\mu_1 - \mu_2$, como la variable se distribuye normalmente con varianzas desconocidas y el tamaño de la muestra es pequeño, para poder seleccionar el estadístico de prueba a usar, se debe determinar, en primer lugar, si las varianzas poblacionales se pueden considerar iguales o diferentes. Para esto se hace uso de las reglas prácticas para la comparación de varianzas (Capítulo 5: sección 5.3.2).

Como $\alpha = 0{,}01$ y $RV = s_1^2 / s_2^2 = (20{,}13)^2 / (8{,}28)^2 = 5{,}9$ es mayor a 3,5 se acepta que las dos varianzas son diferentes. Por lo tanto se debe usar como estadístico de prueba a:

$$T = (\overline{x}_2 - \overline{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Bigg/ \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2} + \frac{s_1^2}{n_1}}$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.
Como $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ se trata de una prueba de una cola hacia la izquierda. Además por ser $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ se debe usar $t^*_{(1-\alpha)}$ como valor crítico de la zona de aceptación.

$$ZA = \{T / T > -t^*_{(1-\alpha)}\} = \{T / T > -t^*_{(0,90)}\}$$

e. Cómputos necesarios.

e.1) Estadístico de prueba:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(74{,}70 - 124{,}44) - 0}{\sqrt{\frac{(20{,}13)^2}{5} + \frac{(8{,}28)^2}{5}}} = \frac{-49{,}74}{9{,}73} = -5{,}11$$

e.2) Zona de aceptación:

El valor crítico $t^*_{(1-\alpha)}$ se obtiene de la fórmula siguiente:

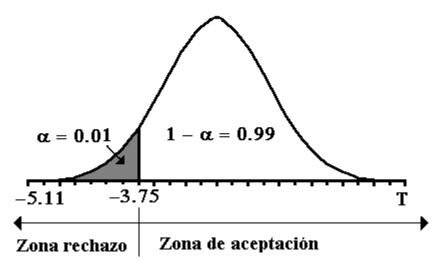
$$t^*_{(1-\alpha)} = \frac{w_1\ t_{(1-\alpha;n_1-1)} + w_2\ t_{(1-\alpha;n_2-1)}}{w_1 + w_2}$$

$$w_1 = \left(\frac{s_1^2}{n_1}\right) = \left(\frac{(20{,}13)^2}{5}\right) = 81{,}04 \qquad w_2 = \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right) = \left(\frac{(8{,}28)^2}{5}\right) = 13{,}71$$

$$t^*_{(0,90)} = \frac{w_1\ t_{(0,90;4)} + w_2\ t_{(0,90;4)}}{w_1 + w_2} = \frac{81{,}04(1{,}533) + 13{,}71(1{,}533)}{81{,}04 + 13{,}71} = \frac{145{,}25}{94{,}75} = 1{,}53$$

$$ZA = \{T / T > -t^*_{(1-\alpha)}\} = \{T / T > -t^*_{(0,90)}\} = \{T / T > -1{,}53\}$$

f. Decisión.
Como $t = -5{,}11 < t^*_{(0,99)} = -1{,}53$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo de Ho. Por lo tanto se afirma que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar Ho.



Se puede concluir que se tiene un 90% de confianza que las larvas de *Spodoptera frugiperda* tienden a rechazar los tejidos de plantas cianogénicas.

6.5.4 Prueba de hipótesis para dos medias poblacionales cuando las muestras provienen de poblaciones con distribución no normal y tamaño de muestras grandes ($n_1, n_2 \geq 30$).

Cuando las muestras provienen de dos poblaciones con distribución no normal pero el tamaño de las muestras es grande se puede aplicar el Teorema del Límite Central y considerar que la diferencia de medias muestrales, $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$, se distribuye normalmente. Si las varianzas poblacionales se conocen el estadístico de prueba a usar es:

$$Z = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}$$

En caso de no conocerse las varianzas poblacionales, estas se sustituyen por las varianzas de las muestras y el estadístico de prueba a usar es:

$$Z = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Big/ \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2} + \frac{s_1^2}{n_1}}$$

Ejemplo 6.14
Se sabe que el contenido de calcio en los huesos de los animales de cierta especie se distribuye normalmente con una varianza σ_1^2 = 57,6 para las hembras y una varianza σ_2^2 = 51,2 para los machos. Con el propósito de determinar si existen diferencias en el contenido de calcio entre machos y hembras se le determinó a 31 hembras y 33 machos el contenido de calcio en el tejido óseo encontrándose que para la muestra de hembras el valor promedio fue de 400,45 μg/g y para la muestra de machos fue de 395,24 μg/g. ¿Cuál debe ser la respuesta?. Use $\alpha = 0{,}05$.

<u>Las hipótesis de investigación son:</u>

Ho : El contenido de calcio en los huesos de los animales de los dos sexos es el mismo.
H_1 : El contenido de calcio en los huesos de los animales de ambos sexos es diferente.

<u>Prueba de las hipótesis estadísticas.</u>

a. Formulación de hipótesis: si se considera que la concentración de calcio en las hembras tiene una media μ_1 y en los machos una media μ_2, las hipótesis estadísticas a probar son las siguientes:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad ó \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad ó \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $\alpha = 0{,}05$

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Aunque no se conoce la distribución de la variable, como el tamaño de la muestra es grande se aplica el Teorema del Límite Central. Por lo tanto se puede considerar que la diferencia de medias muestrales se distribuye normalmente y lo más conveniente es usar Z como estadístico de prueba.

$$Z = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}$$

d. Establecer una zona de aceptación para H_0.

Como $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ se trata de una prueba de dos colas, siendo la zona de aceptación la siguiente:

$$ZA = \{Z \,/\, -z_{(1-\alpha/2)} < Z < z_{(1-\alpha/2)}\}$$

e. Cómputos necesarios.

e.$_1$) Estadístico de prueba:

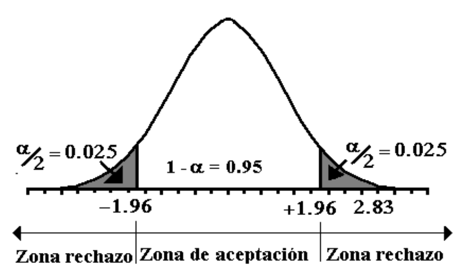
$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(400{,}45 - 395{,}24) - 0}{\sqrt{\frac{57{,}6}{31} + \frac{51{,}2}{33}}} = \frac{5{,}21}{1{,}84} = 2{,}83$$

e.$_2$) Zona de aceptación:

$$ZA = \{Z \,/\, -z_{(1-\alpha/2)} < Z < z_{(1-\alpha/2)}\} = \{Z \,/\, -z_{(0{,}975)} < Z < z_{0{,}975}\} = \{Z \,/\, -1{,}96 < Z < 1{,}96\}$$

f. Decisión.

Como $z = 2{,}83 > z_{(0{,}975)} = 1{,}96$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo de Ho. Por lo tanto se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar Ho.



Se puede afirmar con un 95% de confianza que el nivel de calcio en los huesos de los animales de los dos sexos es diferente.

Ejemplo 6.15
En una investigación sobre el papel que juega el marsupial *Marmosa robinsoni* sobre la dispersión de semillas de dos especies de cactus, se piensa que este animal prefiere las semillas de uno de los dos tipos de cactus que hay en la zona de estudio. Para averiguar si esto es cierto, se determinó bajo condiciones de laboratorio la cantidad (grs) de pulpa del fruto de las dos especies de cactus que fue consumida por el marsupial. Los resultados encontrados fueron los siguientes:

Especie de cactus	n	$\overline{x}$	s
Stenocereus griseus	32	19,99	2,37
Subpilocereus repandus	38	21,20	1,47

Si se acepta un 1% como máxima probabilidad de equivocarse ¿cuál de las dos especies es preferida por la marmosa?

Las hipótesis de investigación son:

Ho : La marmosa no tiene preferencia por ninguno de los dos tipos de frutos
H_1 : La marmosa prefiere uno de los dos tipos de frutos

Prueba de las hipótesis estadísticas.

a. Formulación de hipótesis: si se considera que la cantidad de pulpa consumida de la especie *Stenocereus griseus* tiene una media μ_1 y que la cantidad de pulpa consumida de la especie *Subpilocereus repandus* tiene una media μ_2, las hipótesis estadísticas a probar son las siguientes:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad ó \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad ó \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $\alpha = 0{,}01$

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Aunque no se conoce la distribución de la variable, como el tamaño de la muestra es grande se aplica el Teorema del Límite Central. Por lo tanto se puede considerar que la diferencia de medias muestrales se distribuye normalmente. Se puede usar Z como estadístico de prueba y estimar las varianzas poblacionales a partir de las desviaciones de las muestras.

$$Z = (\overline{x}_2 - \overline{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1) \Big/ \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.

Como H$_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$ se trata de una prueba de dos colas, siendo la zona de aceptación la siguiente:

$$ZA=\{\ Z\ \ /\ -z_{(1-\alpha/2)} < Z < z_{(1-\alpha/2)}\ \}\ ZA = \{Z\ /\ -z_{(1-\alpha/2)} < Z < z_{(1-\alpha/2)}\}$$

e. Cómputos necesarios.

e.$_1$) Estadístico de prueba:

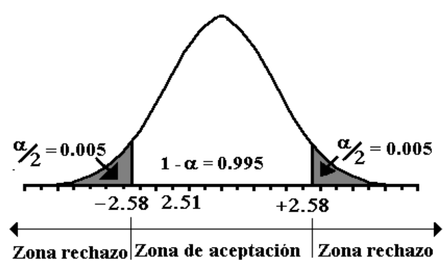
$$Z = \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(19,99 - 21,20) - 0}{\sqrt{\frac{(2,37)^2}{32} + \frac{(1,47)^2}{38}}} = \frac{-1,21}{0,482} = -2,51$$

e.$_2$) Zona de aceptación:

$$ZA = \{Z\ /\ -z_{(1-\ \alpha/2)} < Z < z_{(1-\ \alpha/2)}\ \} = \{Z\ /-z_{(\ 0,995)} < Z < z_{0,995}\ \} = \{Z\ /\ -2,58 < Z < 2,58\}$$

f. Decisión.

Como el valor del estadístico de prueba $z = -2,51$ se encuentra dentro de la zona de aceptación, se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para aceptar H_0.



Se puede afirmar con un 99% de confianza que la marmosa no tiene preferencia por ninguno de los dos frutos.

6.5.5 Prueba de hipótesis para dos medias poblacionales usando observaciones apareadas.

La efectividad con la cual las pruebas de hipótesis pueden detectar diferencias entre dos medias poblacionales, depende de que las dos muestras sean independientes, es decir que los valores obtenidos en cada unidad de muestra no afecten los valores de la otra muestra. Un factor que afecta la potencia de esta prueba de hipótesis, es la variación dentro de las muestras, que puede llegar a ser tan grande e impedir la detección de eventuales diferencias entre las medias. Si se pone atención a las ecuaciones de los estadísticos de prueba usados para comparar dos medias poblacionales, es fácil deducir la importancia de la variación dentro de las muestras. Cualquier aumento de la variación dentro de las muestras disminuye el valor del estadístico de prueba, lográndose anular cualquier pequeña diferencia que pudiera existir entre las medias muestrales, diferencia que eventualmente permitiría rechazar H_0. Por ejemplo, cuando se obtienen dos muestras pequeñas de poblaciones normales con las mismas varianzas, el estadístico usado es:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$$

Este estadístico disminuirá a medida que incrementa el valor de s_p^2, aumentando la probabilidad de caer en la zona de aceptación de H_0 y por lo tanto de rechazar la hipótesis alternativa de diferencia entre las medias.
Esta variabilidad dentro de cada muestra está compuesta por la variación aleatoria debido a los métodos de medición, el ambiente y las diferencias naturales entre los individuos. Igualmente, la variabilidad entre las muestras tiene estos mismos componentes de variación más la variación añadida o controlada por el investigador. Si esta última variación se diferencia significativamente de la variación dentro de las muestras, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula aumenta considerablemente. Pero en muchas ocasiones están presentes factores extraños al experimento que aumentan la variabilidad dentro y entre las muestras que llegan a ocultar cualquier pequeña diferencia entre las medias muestrales que pudiera haber conducido a rechazar la hipótesis nula.

El ejemplo siguiente puede ilustrar la influencia de estos factores extraños en ocultar diferencias existentes entre dos medias poblacionales o por el contrario mostrar diferencias donde no existen.

Se sembraron dos parcelas con fríjol para comprobar cuál de dos fertilizantes es mejor, Al suelo de una parcela se le añade el fertilizante A y al de la otra parcela el fertilizante B (Figura 6.10). Una prueba de hipótesis puede determinar que la producción promedio de las dos parcelas es diferente y concluirse que uno de los fertilizantes es mejor, sin embargo la diferencia puede deberse a la acción de los factores ambientales que no son controlados.

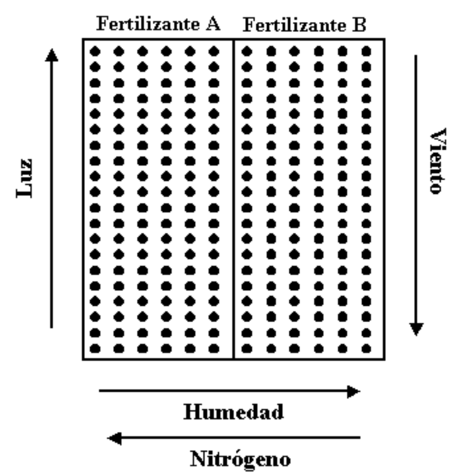


Figura 6.10

Por ejemplo, el gradiente natural de humedad en el suelo es un factor que está contribuyendo a que se produzca un crecimiento mayor en una de las parcelas, y su efecto se confunde con el crecimiento producido por las diferentes dosis del fertilizante. Por lo tanto, es posible que si el fertilizante no afecta significativamente el crecimiento, la diferencia detectada sea debido a la humedad.

Otro resultado posible es que se acepte la hipótesis nula de no diferencia entre los fertilizantes, cuando realmente si hay diferencia y la misma quedó encubierta por la variabilidad originada

por los factores extraños. En el caso del ejemplo, la luz y el viento pueden ser factores que aumentan la variabilidad dentro de los dos tratamientos, hasta el punto que quede oculta cualquier diferencia entre las parcelas debido a la acción de los fertilizantes.
Una manera de superar estas dificultades es apareando las observaciones de las muestras. Esto significa que las unidades muestrales donde se quiere medir el efecto de las variables controladas por el investigador sean lo más parecida posibles. En el ejemplo de los fertilizantes, tendrían que ubicarse los cultivos en parcelas muy parecidas en cuanto a las condiciones ambientales. Otras maneras de aparear es usando un mismo individuo y medir la respuesta antes y después de aplicársele un tratamiento. Si no es posible usar el mismo sujeto se buscan pares de individuos muy parecidos en cuanto a edad, sexo, peso, raza, estatura, etc. También se puede dividir un mismo material en dos partes y efectuar las experiencias que interesan, como probar la eficiencia de dos métodos de medición.
Una vez que se tienen las muestras emparejadas, en lugar de trabajar individualmente con cada una, es mejor usar la diferencia entre las respuestas, $d_i = x_{i1} - x_{i2}$.
Los diferentes valores de d_i se diferencias entre sí principalmente por los efectos del factor controlado por el investigador, puesto que la sustracción del valor de una observación al valor de la otra observación, elimina la mayor parte de la variación debido a los factores extraños.
Si las muestras provienen de poblaciones distribuidas normalmente la media $\overline{D}$, de las diferencias $d_i = x_{i1} - x_{i2}$, es una variable aleatoria que se distribuye normalmente alrededor de una media μ_d con una desviación $s_{\overline{d}} = s_d / \sqrt{n}$.

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} - x_{12} = d_1 \\ x_{21} - x_{22} = d_2 \\ x_{21} - x_{32} = d_3 \\ \quad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \\ x_{n1} - x_{n2} = d_n \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \qquad\qquad s_d = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Bajo esta nueva situación, la hipótesis nula a contrastar sería $\mu_d = 0$, lo que equivale a contrastar la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$. Por lo tanto, cuando las observaciones son pareadas, las hipótesis a plantear son:

$$H_0 : \mu_d = 0$$
$$H_1 : \mu_d \neq 0$$

El estadístico de prueba a usar es: $T = (\overline{d} - \mu_d) / (s_d / \sqrt{n})$ y la zona de aceptación es:

$$ZA = \{ T \ / \ -t_{(1-\alpha/2;n-1)} < \ T \ < \ t_{(1-\alpha/2;n-1)} \}$$

Ejemplo 6.16
La β-dimetil digoxina es una droga que afecta el ritmo cardíaco. En un estudio efectuado para determinar los efectos agudos de esta droga se le determinó la frecuencia cardiaca a 10 acures

(*Cavia porcellus*) antes y después de la administración de la droga. En la tabla siguiente se muestran los resultados.

Acure N°	Frecuencia inicial (lat/min)	Frecuencia final (lat/min)	d_i
1	260	230	30
2	390	350	40
3	350	290	60
4	400	420	-20
5	380	330	50
6	240	190	50
7	360	370	-10
8	270	240	30
9	410	350	60
10	270	260	10

Sabiendo que la frecuencia cardiaca de los acures se distribuye normalmente, determine con un nivel de significación igual 0,05 si la droga altera dicha variable.

<u>Prueba de las hipótesis estadísticas</u>

a. Formulación de hipótesis

$$H_0 : \mu_d = 0$$
$$H_1 : \mu_d \neq 0$$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $\alpha = 0,05$

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Puesto que se trata de la comparación de muestras apareadas el estadístico de prueba es:

$$T = (\bar{d} - \mu_d) \big/ (s_d / \sqrt{n})$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.

$$ZA = \{ T \ / \ -t_{(1-\alpha/2;n-1)} < T < t_{(1-\alpha/2;n-1)} \}$$

e. Cómputos necesarios.

e.$_1$) Media: $\bar{d}$ = 30

e.$_2$) Desviación estándar: $s_d = 28,28$

e.$_3$) Estadístico de prueba:

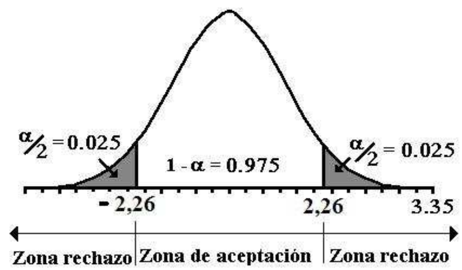
$$T = (\bar{d} - \mu_d) \big/ (s_d / \sqrt{n}) = (30 - 0) \big/ (28,28 / \sqrt{10}) = 30/8,94 = 3,35$$

e.$_4$) Zona de aceptación:

$$ZA=\{T/-t_{(1-\alpha/2;n-1)} < T < t_{(1-\alpha/2;n-1)}\} = \{T/-t_{(0,975;9)} < T < t_{(0,975;9)}\} = \{T/-2,26 < T < 2,26\}$$

f. Decisión.

Como $t = 3,35 > t_{(0,975;9)} = 2,26$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo de Ho. Por lo tanto se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar Ho.



De acuerdo a la información obtenida de la muestra se puede afirmar con un 95% de confianza que la droga altera la frecuencia cardiaca de los acures.

Utilice estos mismos datos y haga una prueba de hipótesis para dos medias considerando las muestras en forma independiente (sin aparear) y compare los resultados. Observe los cambios que se producen en la desviación de los estadísticos de prueba usados en los dos procedimientos.

6.6 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA DOS VARIANZAS POBLACIONALES.

En la Sección 6.5.3 vimos que para efectuar algunas comparaciones de medias poblacionales se debe averiguar si las muestras proceden de poblaciones con la misma varianza. Sin embargo este conocimiento también es importante para otro tipo de situación. Por ejemplo, al comparar la precisión de dos métodos, o al confrontar la variabilidad característica presente en dos individuos, dos taxa, dos poblaciones, dos procesos, etc. De modo que es muy valioso disponer de un método estadístico que con mayor formalidad que las reglas prácticas dadas en la sección 5.3.2, precise si dos varianzas son o no homogéneas. Una forma de hacerlo es comparar mediante una prueba de hipótesis las varianzas poblacionales. Para esto es necesario, además de plantear las hipótesis, disponer de un estadístico de prueba y del modelo de distribución de probabilidad que este estadístico sigue. Afortunadamente, ambas cosas se conocen. Veamos entonces el procedimiento de contrastación de hipótesis para las varianzas de dos poblaciones. Esta docimasia tiene como condición que las muestras sean independientes y las dos poblaciones estén distribuidas normalmente.

<u>Hipótesis</u>

El planteamiento de las hipótesis sobre las varianzas es algo particular por el hecho de que las varianzas no son aditivas y el planteamiento de igualdad entre varianzas de la hipótesis nula no se puede hacer como una ecuación de diferencia igualada a cero $\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 = 0\right)$, sino como de igualdad entre las varianzas $\left(\sigma_2^2 = \sigma_1^2\right)$ o igualando a uno la razón entre las dos varianzas $\left(\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 1\right)$. En términos generales el planteamiento de las hipótesis sería el siguiente:

Hipótesis nula:

$$H_0: \ \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \ \text{ ó } \ \sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 1$$

$$H_1: \begin{cases} \sigma_2^2 \neq \sigma_1^2 & \text{ó} \quad \sigma_2^1 / \sigma_1^2 \neq 1 \\ \sigma_2^2 > \sigma_1^2 & \text{ó} \quad \sigma_2^1 / \sigma_1^2 > 1 \\ \sigma_2^2 < \sigma_1^2 & \text{ó} \quad \sigma_2^1 / \sigma_1^2 < 1 \end{cases}$$

Como estadístico de pruebas se usa la razón de las varianzas muestrales, $F_0 = s_2^2 / s_1^2$. Es conveniente por razones prácticas que veremos más adelante, que las hipótesis se establezca de forma que la varianza mayor siempre este en el numerador. Si las muestras provienen de dos poblaciones con la misma varianza o de una misma población, la distribución de probabilidades de la razón de varianzas sigue el modelo probabilístico conocido como distribución F de Snedecor, cuya función de probabilidad es la siguiente:

$$h(f) = \frac{\Gamma[(\nu_1 + \nu_2)/2]}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} (\nu_1 / \nu_2)^{\nu_1/2} f^{(\nu_1/2)-1} [1 + (\nu_1/\nu_2) f]^{-(1/2)(\nu_1+\nu_2)}; \quad f > 0$$

Donde: ν_1 y ν_2 = grados de libertad, Γ = función gama. Los valores de ν_1 y ν_2 son estimados a partir del tamaño de las muestras menos uno: $\nu_1 = n_1 - 1$ y $\nu_2 = n_2 - 1$.

En realidad la distribución de F es una familia de distribuciones, existiendo una distinta para cada combinación de ν_1 y ν_2. La mayoría de las distribuciones son asimétricas positivas con una giba, como se ve en la Figura 6.11.

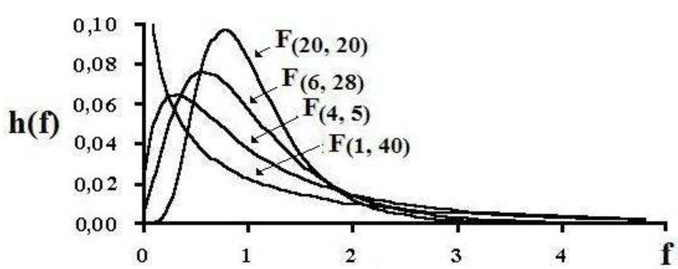


Figura 6.11. Distribuciones de F con diferentes valores para ν_1 y ν_2.

Dada la utilidad de la distribución de F para muchos métodos estadísticos, se han elaborado tablas de la función acumulada ($\Phi_{(f)}$) para diferentes valores de ν_1 y ν_2 (Tabla 6.7).

Tabla 6.7. Percentiles de la distribución de F.

(ν_1 = grados de libertad del numerador; ν_2 = grados de libertad del denominador; α = proporción de área a la izquierda de f)

		ν_1												
ν_2	1 - α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
12	0.900	3.2	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1
	0.950	4.7	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.9	2.8	2.8	2.8	2.7	2.7	2.7
	0.975	6.6	5.1	4.5	4.1	3.9	3.7	3.6	3.5	3.4	3.4	3.3	3.3	3.2
	0.990	9.3	6.9	6.0	5.4	5.1	4.8	4.6	4.5	4.4	4.3	4.2	4.2	4.1
	0.995	11.8	8.5	7.2	6.5	6.1	5.8	5.5	5.3	5.2	5.1	5.0	4.9	4.8
	0.999	18.6	13.0	10.8	9.6	8.9	8.4	8.0	7.7	7.5	7.3	7.1	7.0	6.9
13	0.900	3.1	2.8	2.6	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	[illegible]	2.1
	0.950	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.6	2.6
	0.975	6.4	5.0	4.3	4.0	3.8	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	3.2	3.2	3.1
	0.990	9.1	6.7	5.7	5.2	4.9	4.6	4.4	4.3	4.2	4.1	4.0	4.0	3.9
	0.995	11.4	8.2	6.9	6.2	5.8	5.5	5.3	5.1	4.9	4.8	4.7	4.6	4.6
	0.999	17.8	12.3	10.2	9.1	8.4	7.9	7.5	7.2	7.0	6.8	6.6	6.5	6.4
14	0.900	3.1	2.7	2.5	2.4	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.1	2.1	2.0
	0.950	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.8	2.8	2.7	2.6	2.6	2.6	2.6	2.5
	0.975	6.3	4.9	4.2	3.9	3.7	3.5	3.4	3.3	3.2	3.1	3.1	3.1	3.0
	0.990	8.9	6.5	5.6	5.0	4.7	4.5	4.3	4.1	4.0	3.9	3.9	3.8	3.7
	0.995	11.1	7.9	6.7	6.0	5.6	5.3	5.0	4.9	4.7	4.6	4.5	4.4	4.4
	0.999	17.1	11.8	9.7	8.6	7.9	7.4	7.1	6.8	6.6	6.4	6.3	6.1	6.0
15	0.900	3.1	2.7	2.5	2.4	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0
	0.950	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5	2.4
	0.975	6.2	4.8	4.2	3.8	3.6	3.4	3.3	3.2	3.1	3.1	3.0	3.0	2.9
	0.990	8.7	6.4	5.4	4.9	4.6	4.3	4.1	4.0	3.9	3.8	3.7	3.7	3.6
	0.995	10.8	7.7	6.5	5.8	5.4	5.1	4.8	4.7	4.5	4.4	4.3	4.2	4.2
	0.999	16.6	11.3	9.3	8.3	7.6	7.1	6.7	6.5	6.3	6.1	5.9	5.8	5.7

La tabla tiene dos entradas: los grados de libertad del numerador (ν_1) que identifican las columnas y los grados de libertad del denominador (ν_2) que identifican las filas. Cada fila está subdividida en hileras que corresponden a seis diferentes niveles de significación (1-α).

Los valores que se encuentran en la intersección de una hilera con una columna corresponden a un percentil, es decir a un valor de f a la izquierda del cual se encuentra una proporción $1-\alpha$ del área. Por ejemplo si se tiene que $\nu_1 = 12$ y $\nu_2 = 13$, entonces un 0,95 del área bajo la curva de F se encuentra a la izquierda del percentil f = 2,6 (Tabla 6.7 y Figura 6.12).

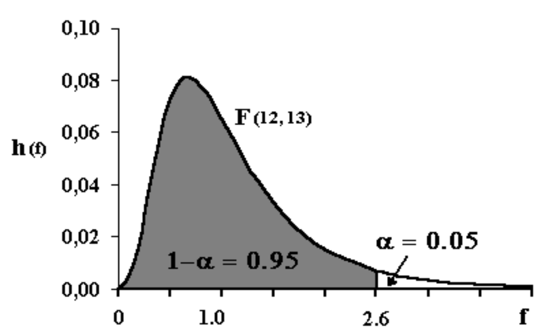


Figura 6.12

Suponiendo que la razón de varianzas de dos muestras es menor al valor límite 2,6, eso significa que su probabilidad de ocurrencia es mayor a 0,05. En éste caso se considera que las diferencias entre las dos varianzas muestrales son aleatorias. Pero si la razón de varianza es mayor a 2.6, es porque su probabilidad de ocurrencia es menor a 0,05, de lo que se deduce que las diferencias entre las dos varianzas muestrales no son simplemente fortuitas y por tanto las varianzas son diferentes. En términos generales se puede decir que cuando se trata de una prueba con una cola a la derecha el valor $f_{(1-\alpha;\, \nu_1/\nu_2)}$ define el límite entre las zonas de aceptación y rechazo de la hipótesis nula ($H_0 : \sigma_2^2 = \sigma_1^2$).

Cuando la prueba de hipótesis es de dos colas, debido a la asimetría de la distribución de F, la zona de rechazo de H_0 es diferente para ambos lados de la distribución. El valor $f_{(1-\alpha/2;\, \nu_1/\nu_2)}$ sería el límite de la derecha y el valor $f_{(\alpha/2;\, \nu_1/\nu_2)}$ el límite de la izquierda (Figura 6.13). Aquí surge un pequeño inconveniente, porque las tablas de la función acumulada sólo presentan valores de f para la cola derecha.

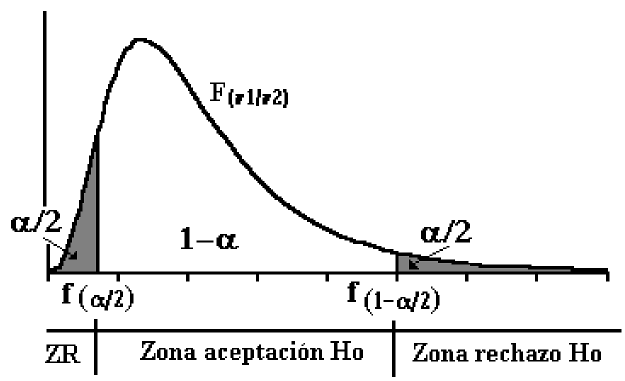


Figura 6.13

Esta situación se puede solventar de dos maneras. La forma más fácil es plantear las hipótesis de modo que la varianza muestral mayor siempre quede en el numerador. La otra solución es calcular el valor crítico de la cola izquierda mediante la expresión siguiente:

$$f_{(\alpha/2\;;\, \upsilon_1/\upsilon_2)} = \frac{1}{f_{(1-\alpha/2)\,;\, \upsilon_2/\upsilon_1)}}$$

Por ejemplo, $f_{(0{,}975\;;\,8/12)} = 3{,}5$ es el límite crítico para la cola de la derecha, sin embargo en las tablas no se encuentra el valor de $f_{(0.025\;;\,8/12)}$ que sería el límite crítico de la cola de la izquierda, pero se puede calcular usando la relación anterior. En primer lugar se encuentra el valor $f_{(0{,}975;\,12/8)} = 4{,}2$ (observe que los grados de libertad se intercambiaron), luego se obtiene el inverso de 4,2, siendo entonces $f_{(0{,}025\;;\,8/12)} = 0{,}238$. Este mismo procedimiento se debe usar para calcular el valor crítico de la zona de rechazo cuando la prueba de hipótesis es de una cola a la izquierda.

Ejemplo 6.17
En un estudio taxonómico sobre una especie de insecto se quiere usar una característica morfológica del cuerpo para estimar el tamaño de los adultos. Se escogerá como característica aquella que tenga la menor variabilidad. Con éste propósito se midieron en 10 individuos la longitud del ala anterior y la longitud total del cuerpo. Con base a los resultados que se presentan a continuación y sabiendo que las dos variables se distribuyen normalmente, escoja la que mejor estima el tamaño de los insectos?

Nº de Individuo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Alas anteriores (mm)	17,1	17	17,1	16,3	16,9	15,9	16,2	17,2	17,1	16,8
Tamaño del cuerpo (mm)	17,6	16,5	15,5	16,9	17,1	15,2	16,7	17,7	16,9	15,1

<u>Prueba de las hipótesis estadísticas</u>

a. Formulación de hipótesis

Hipótesis nula: $H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1$

Hipótesis alternativa: $H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación: $\alpha = 0,05$.

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Puesto que se trata de la comparación de dos varianzas el estadístico de prueba es:

$$F_o = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.

$$ZA = \{ F \;/\; f_{(\alpha/2 \;;\; n_2-1/n_1-1)} < F < f_{(1-\alpha/2 \;;\; n_2-1/n_1-1)} \}$$

e. Cómputos necesarios.

e.1) Varianzas muestrales: $s_1^2 = 0,2093$ y $s_2^2 = 0,8907$

e.$_2$) Grados de libertad:

$$\nu_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$\nu_1 = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$$

e.$_3$) Estadístico de prueba:

$$F_o = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{0,8907}{0,2093} = 4,26$$

e.$_4$) Zona de rechazo:

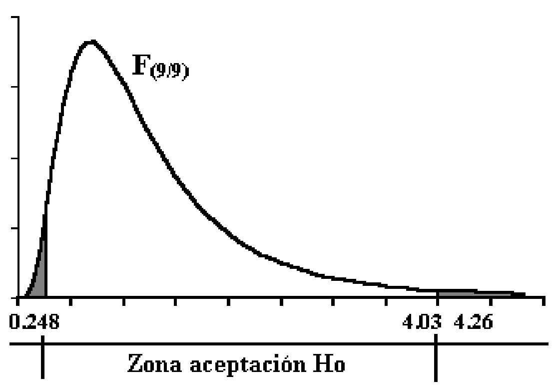
$$ZA = \{ F \ / \ f_{(\alpha/2;\ n_2-1/n_1-1)} < F < f_{(1-\alpha/2\ ;\ n_2-1/n_1-1)} \} = \{F/f_{(0,025;\ 9/9)} < F < f_{(0,975;9/9)} \}$$

$$f_{(0.025;9/9)} = \frac{1}{f_{(0,975;9/9)}} = \frac{1}{4,03} = 0,248$$

$$ZA = \{F/\ 0,248 < F < 4,03\}$$

f. Decisión.

Como $F_0 = 4,26 > f_{(0,975;9/9)} = 4,03$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo de H_0. Por lo tanto se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar H_0. Entonces, de acuerdo a la información obtenida de la muestra se puede afirmar con un 95% de confianza que las varianzas de las dos variables morfométricas son diferentes, siendo la longitud de las alas una variable más homogénea.



Ejemplo 6.18
Un ecólogo afirma que la temperatura del agua en los ríos de páramo es más homogénea que la temperatura del agua en los ríos de selva nublada, para lo cual determinó la temperatura máxima diaria en ríos de ambas zonas.¿Apoyan los resultados la hipótesis del investigador?. Se sabe que la temperatura tiene una distribución normal y se dispone de la información siguiente:

	Páramo	Selva nublada
Nº ríos	17,0	26,0
Media	11,9	16,5
Desviación	1,39	2,28

a. Formulación de hipótesis
Si se considera que σ_1^2 y σ_2^2 son las varianzas de la temperatura del agua en los ríos de páramo y selva nublada respectivamente, y además que la temperatura del agua en los ríos de páramo es menos variable, entonces las hipótesis a plantear son las siguientes:

Hipótesis nula: $H_0 : \sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 1$
Hipótesis alternativa: $H_1 : \sigma_2^2 / \sigma_1^2 > 1$

b. Especificación de un valor de probabilidad crítico o nivel de significación:

c. Elección de un estadístico de la muestra y de su distribución para someter a prueba las hipótesis.

Puesto que se trata de la comparación de dos varianzas el estadístico de prueba es:

$$F_o = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

d. Establecer una zona de aceptación para Ho.

$$ZA = \{ F / F < f_{(1-\alpha \,;\, n_2-1/n_1-1)} \}$$

e. Cómputos necesarios.

e.1) Varianzas muestrales: $s_1^2 = (s_1)^2 = (1{,}39)^2 = 1{,}93$ y $s_2^2 = (s_2)^2 = (2{,}28)^2 = 5{,}2$

e.2) Grados de libertad:

$$\nu_2 = n_2 - 1 = 17 - 1 = 16$$

$$\nu_1 = n_1 - 1 = 26 - 1 = 25$$

e.$_3$) Estadístico de prueba:

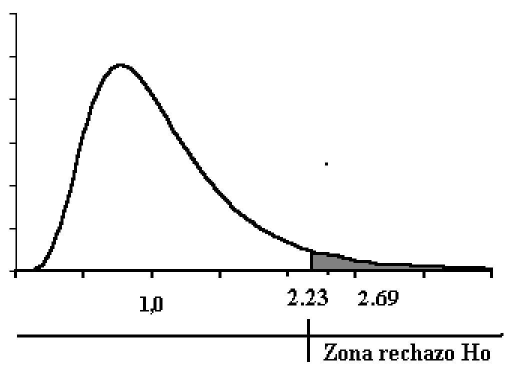
$$F_o = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{5,2}{1,93} = 2,69$$

e.$_4$) Zona de rechazo:

$$ZA = \{F \,/\, F < f_{(1-\alpha\,;\, n_2-1/n_1-1)}\} = \{F \,/\, F < f_{(0,95;25/16)}\} = \{F \,/\, F < 2,23\}$$

f. Decisión

Como $F_0 = 2,69 > f_{(0,95;\ 25/16)} = 2,23$ el valor del estadístico de prueba se encuentra dentro de la zona de rechazo de H_0. Por lo tanto se concluye que los datos proporcionan suficiente evidencia para rechazar H_0. Entonces, de acuerdo a la información obtenida de la muestra se puede afirmar con un 95% de confianza que las varianzas de la temperatura del agua en los ríos de selva nublada es mayor que la de los ríos de páramo.



6.7 EJERCICIOS

1. Compruebe la hipótesis nula $H_0: \mu = 22$ frente a la alternativa $H_1: \mu > 22$ con un nivel de significación $\alpha = 0,05$ en base a la siguiente información suministrada por una muestra: $\overline{x} = 23,5$; $s = 1,2$ y $n = 230$.

2. Un investigador cree que la concentración de glucósidos en las larvas de una especie de Mariposa es de 0,15 unidades. Para poner a prueba tal hipótesis, examinó 75 larvas del insecto y encontró los siguientes valores: $\overline{x} = 0,2$ y $s^2 = 0,012$. Use un $\alpha = 0,05$.

3. El Profesor de Métodos Estadísticos supone que el Coeficiente Intelectual (CI) de los alumnos del curso actual es superior al promedio de los cursos anteriores que ha sido igual a 100 con una desviación igual a 10. Para poner a prueba tal suposición le midió el CI a los 25 alumnos del curso presente y encontró que el CI fue de 104. ¿Tiene razón el profesor?. Use un $\alpha = 0{,}04$.

4. Después de haberse realizado una campaña publicitaria sobre los efectos dañinos del cigarrillo sobre la salud de las personas, el Ministerio de Sanidad, quiere comprobar si la misma tuvo efecto y si como consecuencia de la misma disminuyó el consumo medio de cigarrillos por adulto, valor que al inicio de la campaña era de 10 cigarrillos/dia con una desviación de 1,5 cigarrillos/dia. Para tal fin eligieron aleatoriamente 144 individuos y encontraron que la media muestral fue de 8,5 cigarrillos/dia. ¿tuvo la campaña algún efecto benéfico a un nivel de significación de 0,01.

5. Veinticinco estudiantes varones universitarios, observados en forma aleatoria, presentan un peso promedio de 74 kg. con una desviación de 5 kg. ¿Son estas observaciones consistentes con el supuesto de que el peso medio de todos los estudiantes de la Universidad para el momento de la medición era de de 71 kg.

6. La distancia recorrida por dos sustancias orgánicas en 13 corridas cromatográficas fueron las siguientes:

Corrida n°	Distancia recorrida (cm) Sustancia 1	Distancia recorrida (cm) Sustancia 2
1	5,8	4,0
2	6,6	6,1
3	7,3	4,5
4	6,3	4,9
5	5,9	5,2
6	6,5	5,1
7	6,0	5,2
8	6,9	5,2
9	5,6	5,4
10	5,7	5,6
11	6,2	3,8
12	5,6	4,3
13	6,2	5,7

a. ¿Se podría afirmar que la distancia recorrida por la primera sustancia es mayor a 5,85 cm?. Use $\alpha = 0{,}05$

b. ¿Se podría afirmar que la distancia promedio recorrida por la segunda sustancia es igual a 5,3 cm?. $\alpha = 0{,}05$

7. La producción media de una variedad de hongos bajo cierto régimen de cuidado ha sido de 31 Kg. en un período estándar. Se introdujo un nuevo sistema, que aunque mas

costoso, si la producción es mayor a 45 kg. daría bastantes beneficios. Para decidir si se adopta el nuevo sistema, el Productor siembra 40 parcelas, que atendidas con el nuevo sistema dan una producción media de 48 kg. y una desviación de 4,5 kg.. El productor acepta como máximo un 10% de error. ¿Que decisión debe tomar el Productor?

8. En el caso del problema 6,7.2 sobre cromatografía ¿Se podría afirmar que la distancia promedio recorrida por cada sustancia es distinta?

9. El coeficiente de inteligencia de 16 estudiantes del curso de estadística de 1990 dió una media de 112 con una desviación típica de 8, mientras que el C.I. de 14 estudiantes del curso de 1992 dio una media de 107 con una desviación típica de 10 ¿Hay diferencias significativas entre los dos grupos a un nivel de confianza de 0,01 y de 0,05.

10. Para averiguar si un nuevo fertilizante para la producción de trigo es mas efectivo que el antiguo, se dividió un terreno en 100 parcelas de iguales dimensiones. Se aplicó el nuevo fertilizante en 50 parcelas y el antiguo en las otras 50 parcelas. El promedio de trigo cosechado en cada parcela con el nuevo fertilizante fue de 25,5 kg. con una varianza de 22. En las parcelas donde se utilizó el viejo fertilizante el promedio de producción fue de 24,6 kg. con una varianza de 19. ¿Es el nuevo fertilizante mas eficiente que el antiguo?

11. Se desea comparar la duración de una enfermedad según que el enfermo presente o no un acceso de fiebre al principio de la enfermedad. La duración observada de la enfermedad ha sido por término medio de 11 días para 5 enfermos no febriles y de 17 días para enfermos febriles. La estimación común de la varianza de la duración de la enfermedad es $s^2 = 20$ ¿Que conclusión se puede sacar?. Use $\alpha = 0{,}01$.

12. Un químico metalúrgico ha hecho cuatro determinaciones del punto de fusión del manganeso: 1269 °C, 1271 °C, 1263 °C y 1265 °C. ¿Si la variable Punto de fusión (°C) se distribuye normalmente, están esos datos de acuerdo con el valor publicado de 1260 °C, aceptándose un error de 5%.?

13. Una muestra de 10 mediciones del diámetro de la cápsula cefálica de un insecto da una media de 4,08 mm y una desviación de 0,05 mm. ¿Es esta información consistente con el hecho de que la población tiene una media $\mu = 4\ mm$,?. $\alpha = 0{,}05$.

14. El Club Atlético *"Ese Gordito"* asegura en su publicidad que las personas que sigan por dos días una dieta y su programa de ejercicios perderán peso en forma significativa. A fin de comprobar la veracidad de ésta publicidad, la Oficina Nacional de Control de Calidad, seleccionó aleatoriamente 33 personas inscritas en el programa y determinó que las mismas perdieron en dos días un promedio de 0,37 kg con una desviación de 0,98 kg. Compruebe con un nivel de significación del 95% si la aseveración de la propaganda es correcta.

15. El contenido máximo de estaño que se considera inocuo en los tejidos de cierto vegetal comestible es de 50 μg/g . La valoración de 8 porciones del mismo vegetal cultivado cerca de un yacimiento de estaño proporcionó un valor medio igual a 55,89 μg/g con una

desviación de 8,8 μg/g ¿Estará contaminado el vegetal?. Suponga que la concentración de estaño se distribuye normalmente. La probabilidad de cometer el error tipo I no debe ser mayor a 0,01.

16. El requerimiento humano de sal es de 220 mg/día. Si una muestra de 38 raciones iguales de un cereal para el desayuno tiene un contenido promedio de NaCl de 196 mg con una desviación de 24,5 mg, ¿se podría afirmar que una ración de este cereal satisface el requerimiento diario de cloruro de sodio? Se sabe que la concentración de esta sustancia en el cereal se distribuye normalmente. Use $\alpha = 0,05$.

17. Un investigador sospecha que el contenido de albúmina en la sangre de ciertos animales es mayor al valor promedio de 40 g/l que se señala en la literatura. Con el fin de confirmar su sospecha examinó el contenido de albúmina en la sangre de 32 animales y encontró que su valor promedio fue de 42,8 g/l con una desviación de 10 g/l. ¿Cuál es la conclusión del investigador?.

18. Una surtidora automática es utilizada para llenar envases con 16 ml de un medicamento. El volumen servido se puede considerar como una variable aleatoria que se distribuye normalmente. El Departamento de Control de Medicamentos del Ministerio de Sanidad sospecha que el volumen de llenado es menor que lo estipulado. Para comprobar esto a 10 frascos seleccionados aleatoriamente se les mide el volumen envasado, encontrándose los resultados siguientes:

    16,00; 15,60; 15,97; 16,04; 16,05; 15,98; 15,96; 16,02; 16,05; 16,02

    a. ¿Es correcta la apreciación del Departamento de Control?
    b. ¿A que se debe la variación en las medidas?

19. A fin de determinar la eficiencia de un nuevo método para medir mercurio, se hicieron varias mediciones de la cantidad de este elemento en una solución patrón que contiene un 40% de mercurio. El resultado de 9 mediciones produjo un valor promedio de 37,8% y una desviación de 1,9%. Suponiendo que la variable se distribuye normalmente ¿Se puede afirmar que el método está fallando?. Use $\alpha = 0,01$.

20. Un entomólogo esta probando el efecto de un nuevo insecticida sobre las larvas de una especie de mariposa. Para efectuar el experimento necesita un grupo de larvas cuyo tamaño promedio debe ser al menos de 5,0 cm. Si el tamaño promedio es significativamente menor a 5 cm el investigador elimina el grupo de larvas y busca otro. A fin de concretar el primer ensayo el investigador seleccionó aleatoriamente 16 individuos y midió su longitud obteniendo un valor promedio de 4,90 cm y una desviación de 0,02 cm. ¿Cual debe ser la decisión del entomólogo? La variable talla se distribuye normalmente. La probabilidad máxima de cometer el error tipo I es igual a 0,01.

21. Un químico esta tratando de determinar si dos materiales orgánicos de distinta procedencia tiene el mismo contenido de fósforo. Para tal fin seleccionó dos muestras de 25 porciones

del mismo peso de cada material y utilizando la misma metodología midió el contenido de fósforo en ambas muestras, encontrando que en el material A el contenido medio del elemento fue de 37,75 μg con una desviación de 4,71 μg y en el material B el contenido medio fue de 35,00 μg con una desviación del 3,89 μg. Suponiendo que el contenido de fósforo es una variable que se distribuye normalmente ¿Cuál debe ser la conclusión del investigador?

22. Un país con una carencia crítica de alimentos recibe como ayuda internacional un cargamento de varias toneladas de yuca, la cual se contaminó en el viaje con una toxina que afecta el sistema nervioso. Estudios de la Organización Mundial de la Salud han demostrado que alimentos que contengan concentraciones iguales o menores a 40 ppm de la toxina pueden ser ingeridos sin mayor riesgo. Las autoridades sanitarias del país en cuestión determinan la presencia de la toxina en 100 muestras tomadas al azar del cargamento (el costo y el tiempo requerido del análisis no permite hacer más determinaciones) y obtienen una concentración promedio de la toxina de 37,8 ppm. con una desviación típica de 10 ppm. A Ud. se le consulta para decidir si el cargamento debe utilizarse o destruirse. En base a la información suministrada y teniendo en cuenta que lo siguiente:

   a. ¿Cual nivel de significación escogería para probar la hipótesis? ¿Por qué? Recuerde que están en juego la salud y/o vida de miles de personas.
   b. ¿Haga los cálculos correspondientes y formule su decisión estadística?
   c. ¿Que recomendaría hacer con el cargamento de yuca?. Tenga presente que su decisión puede implicar a) impedir que miles de personas mueran de inanición o b) envenenarlas con la toxina.

23. Se examinó el oxigeno (ppm) disuelto en el agua de un río a dos altitudes diferentes, en 25 ocasiones. Los resultados fueron los siguientes:

	1000 m.s.n.m.	2.700 m.s.n.m.
Media	6,5	8,4
Desviación	1,11	1,65

   a. ¿Existen diferencias en el contenido de oxígeno con la altitud?

24. Una muestra de 16 hojas de una determinada variedad de tomate presentó los siguientes valores de longitud:

Longitud (cm)

3,00	5,20	8,00	2,30
4,50	3,25	2,80	3,22
9,24	2,75	1,08	4,83
2,49	9,00	5,00	2,10

   a. ¿Será la media poblacional igual a 6 cm? La probabilidad de cometer el error tipo I no debe ser mayor a 1%. La variable longitud se distribuye normalmente.

25. Se sabe que la maquinaria para llenar un medicamento en polvo lo vierte en frascos de un determinado tamaño con una desviación estándar de 0,6 g. A fin de mantener ajustada la maquina, diariamente se verifican los pesos netos de las cajas. Dos muestras tomadas en dos días presentan la información siguiente:

	Muestra 1	Muestra 2
Media	18,7 g	21,9 g
n	30	35

a. ¿Está la maquinaria ajustada para servir 20 g, en el primer día?
b. ¿Está ajustada la máquina para servir 20 g, en el segundo día?
c. ¿ Se verificó algún cambio en el ajuste de la máquina entre los dos días?.

26. En un estudio sobre el ciclo de vida de un insecto, se desea determinar si existen diferencias en cuanto a la duración entre las fases de huevo y de larva. A una muestra de 10 huevos y a otra muestra de 10 larvas se les determina el tiempo de duración, los cuales resultan ser los siguientes:

Huevos (horas)	Larvas (horas)
31	26
34	24
29	28
26	29
38	32
34	26
30	31
29	29
32	32
31	28

a1. ¿Cuál es la conclusión? Si se sabe que la variable tiempo de duración se distribuye normalmente. La probabilidad de cometer el error tipo I no debe ser mayor 0,05%.

27. Se seleccionaron 85 estudiantes de Biología: 49 hembras y 36 varones. A cada estudiante se le solicitó medir el largo de la concha de una tortuga de la especie *Pasitus lentus.* El valor promedio obtenido por las hembras fue de 72,1 mm con una desviación igual a 6 mm. Los varones obtuvieron un valor promedio igual a 75,2 mm con una desviación igual a 8. Si se sabe que la variable largo de la caparazón se distribuye normalmente, determine si existen diferencias significativas entre el valor promedio de medición de todos los estudiantes varones de Biología μ_{v} y el valor promedio de medición de todas las estudiantes hembras de Biología μ_{h}. Use $\alpha = 0{,}05$

28. Los datos que siguen corresponden al número de individuos / litro de dos especies de invertebrados que se hallaron en una laguna en seis profundidades diferentes.

	Número de individuos / litro	
Profundidad (m)	Especie A	Especie B
1	35	28
2	37	31
3	32	32
4	27	30
5	29	28
6	30	27

Utilizando $\alpha = 0,05$ y suponiendo que el número de individuos se distribuye normalmente, responda:

a. ¿Es la abundancia de la especie B igual a 28 individuos/litro?
b. ¿Es la abundancia promedio de las dos especies es distinta?
c. ¿Es la abundancia de la especie A mayor a 27 individuoa/litro, si se sabe que $\sigma_A = 6$?

29. Use la tabla de la distribución de F, para encontrar el valor crítico de F en cada uno de los siguientes casos:

a. El área a la derecha de F, es de 0,25 siendo $\nu_1 = 4$ y $\nu_2 = 10$
b. El área a la izquierda de F, es de 0,95 siendo $\nu_1 = 14$ y $\nu_2 = 8$
c. El área a la derecha de F es de 0,95 siendo $\nu_1 = 20$ y $\nu_2 = 30$
d. El área a la izquierda de F, es de 0.10 siendo $\nu_1 = 6$ y $\nu_2 = 13$

30. Se está investigando el efecto de la concentración inicial de un fertilizante sobre el tamaño de las plantas de un determinado cultivo. Para tal fin se fertilizaron dos parcelas de terreno con dos concentraciones del producto (800 y 200 mg/l). Después de seis semanas, se midió la altura en cinco plantas elegidas aleatoriamente dentro de cada parcela encontrándose los valores siguientes:

	Altura de las plantas (cm)	
Planta N°	800 mg/l	200 mg/l
1	58,2	52,9
2	57,2	49,9
3	58,4	50,0
4	55,8	51,7
5	54,5	56,3

a. Determine si las varianzas poblacionales de donde provienen las dos muestras son iguales?
b. ¿Tiene la concentración inicial del fertilizante algún efecto sobre el tamaño promedio de las plantas?.

31. Dos métodos de recuperación de nitrógeno se utilizaron para analizar 36 porciones de un material orgánico. Los resultados fueron los siguientes:

	Método A	Método B
Media	75,8%	76,0%
Desviación	3,10%	2,50%

a. ¿Es el método B mejor que el A en cuanto a eficiencia y precisión?

32. El oxígeno consumido (ml) durante la incubación de dos suspensiones de células, una en un buffer y la otra no, fue el siguiente:

Suspensión con buffer	Suspensión sin buffer
13,0	6,7
13,2	7,2
15,0	9,1
14,1	7,8
12,1	6,9
13,4	6,8
13,5	8,5
14,7	7,5
12,9	7,5
15,0	
13,9	

a. ¿Existen diferencias en el consumo de oxígeno entre los dos grupos de células?. El error tipo I debe ser igual o menor a 0,01%.

33. Se quiere determinar si dos métodos para detectar Ca en tejidos vegetales tienen la misma eficiencia y precisión. Para tal fin se eligieron 10 tomates de la misma variedad. Cada tomate se dividió en dos partes iguales. A una de las partes se le determinó el Ca por uno de los métodos y a la otra parte se le determinó el Ca por el otro método. Los resultados fueron los siguientes: Use $\alpha = 0,001$

Método A	Método B
31.90	31.51
31.88	31.30
32,14	31,50
32,85	31,81
31,82	31,66
32,11	31,65
31,63	31,57
31,79	31,42
31,05	31,76
31,86	31,71

a. ¿Se puede admitir que los métodos son igualmente eficientes?
b. ¿Son igualmente precisos?

34. Diez hamster (Rodentia: Cricetidae) fueron sometidos a condiciones que simulaban una enfermedad. Se registró el número de latidos cardíacos por minuto antes y después del experimento. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

	Latidos por minutos	
Animal N°	Antes	Después
1	370	375
2	384	391
3	388	397
4	410	422
5	405	406
6	400	397
7	410	418
8	367	375
9	379	392
10	386	383

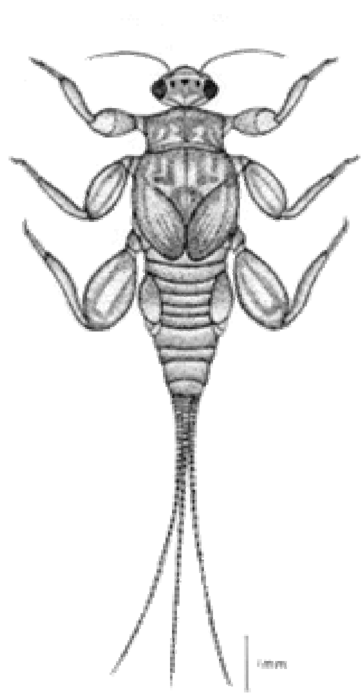
a. Efectúe una prueba estadística que permita determinar si la condición experimental produjo un cambio en el número de latidos del corazón por minuto. Se sabe que la variable frecuencia cardiaca se distribuye normalmente. El error tipo I no debe ser mayor a 0,05.

35. Una muestra representativa de una especie de ratón es colectada al inicio de la época de sequía, cuando todavía el alimento es abundante, se pesan, se marcan y después de marcarlos se liberan. Al final del período de sequía (cuando el alimento es escaso) se capturan sólo los animales marcados y se pesan nuevamente. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Animal N°	Peso al inicio del periodo seco	Peso al final del periodo seco
1	80.6	72.8
2	88.4	35.8
3	90.6	100.4
4	103.8	65.4
5	84.9	80.1
6	117.4	100.6
7	72.3	47.7
8	96.8	86.6
9	81.7	77.3
10	99.7	89.1

36. Efectúe una prueba estadística que permita determinar que efectivamente se produjo un cambio en el peso de los animales, sabiendo que la variable peso se distribuye normalmente. El error tipo I no debe ser mayor a 0.05.

37. A Ud. como profesional de la oficina de Servicio Ambiental le corresponde investigar la denuncia de un grupo de cultivadores de ajo de cierta comunidad quienes afirman que los efluvios de una planta industrial instalada en los alrededores de los plantíos y que son vertidos en un canal de aguas servidas, están disminuyendo el tamaño de los ajos que cultivan. Como primer paso Ud. hace analizar muestras de las aguas residuales de la planta y en repetidos intentos no logra detectar ninguna sustancia que se pueda suponer afecte a los ajos. Como segundo paso decide verificar si hay evidencias de que los ajos sembrados en las riberas del canal son de menor peso que los de otras zonas de los cultivos. Para ello toma una muestra de 51 cabezas de ajos de plantas situadas en la ribera del canal de desagüe y otra muestra de igual tamaño y tomada con un procedimiento análogo de una zona de los cultivos fuera de la influencia del canal y procedió a pesar las cabezas. Los resultados del pesaje fueron los siguientes: para las plantas fuera de la influencia del canal el promedio de la muestra fue de 29,9 g con una desviación de 2,44 g, para las plantas en la zona de influencia la muestra proporcionó una media de 28,7 g con una desviación de 2,89 g. ¿Se podría afirmar, que existen diferencias en el peso promedio de los ajos cultivados en ambas zonas?. Para responder la pregunta anterior use el nivel de significación que le parezca más adecuado y explique las razones de esta selección.



Ninfa de Ephemeroptera (Insecta)