

GRAFICANDO LA FÍSICA

**IV ESCUELA VENEZOLANA PARA LA ENSEÑANZA DE
LA FÍSICA**

**Prof. Juan Carlos Sánchez Reyes.
Universidad de Los Andes.
Facultad de Ciencias.
Departamento de Física.
Mérida.**

Del 22 al 28 de Octubre de 2006.

DEPOSITO LEGAL: LF23720065304348

Índice

Capítulo	Contenido	Página
1	Antecedentes Históricos, grafismos, era paleolítica	3
2	Repaso matemático de conceptos I.	4
3	El universo y la física. Fenómenos lineales y no lineales.	6
4	Colección de puntos, tablas y criterios.	7
5	Trazado de gráficas I. Lineales, sin dispersión.	8
6	Trazado de gráficas II. Lineales, con dispersión, centroide.	13
7	Repaso matemático de conceptos II.	17
8	Escalas, tipos y pautas.	22
9	Trazado de graficas III. No lineales	26
10	Errores, incertidumbre, corte y pendiente.	30
11	Bibliografía.	31

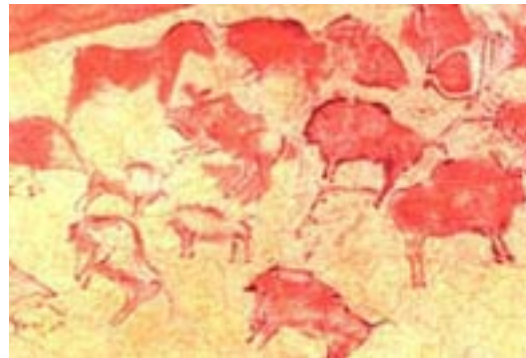
Capítulo 1. Antecedentes históricos.

Según el Diccionario Enciclopédico Usual Larouse, conseguimos las siguientes definiciones:

1. **Grafico, ca** adj. De la escritura || Representado por signos o dibujos || fig. Rico de imágenes sugerentes o metafóricas, expresivo. || - M . Representación por el dibujo o cualquier otro método análogo de los grados o estados de un fenómeno que se estudia y que sirve en estadística para esquematizar los datos y señalar sus relaciones esenciales.
2. **Grafismo m.** Manera de representar gráficamente una palabra || Manera de hacer un trazo considerada desde un punto de vista estético.

Cabe hacernos la siguiente pregunta, ¿Cuándo y donde aparecieron los primeros gráficos? Pueda que nos sorprenda la respuesta.

Sobre las paredes o el techo de las cuevas, los hombres prehistóricos dibujaban o pintaban los distintos animales que cazaban. También pintaban escenas de significado ritual o mágico como, por ejemplo, el rito de la fertilidad etc. Los materiales que se usaban eran el carbón de leña y diferentes tierras de colores aglutinados con agua o grasas de animales.



Los hombres prehistóricos atribuían un significado o una función mágica a las representaciones de sus pinturas. Creían que la representación de un bisonte era una forma de propiciar su caza o que la representación de una mujer con unos senos enormes aseguraba la fertilidad.

Las pinturas prehistóricas más conocidas son las de la Cueva de Altamira en Santillana de Mar (Cantabria), donde se hallan los famosos bisontes así como las de la Cueva de Lascaux en Francia.

En Teotihuacán , México, tanto las paredes interiores como las exteriores de los edificios se cubrían con una capa gruesa de estuco en la que se pintaban diseños decorativos o escenas narrativas. En Bonampak y Chichén Itzá, también en México, los mayas y los maya-toltecas pintaban el interior de los templos con frescos realistas en los que representaban hechos históricos. Entre las pinturas

murales descubiertas más recientemente están las de Cacaxtla, en Tlaxcala, con su impresionante descripción de las jerarquías divinas, sacerdotales y guerreras. Aunque las primeras pinturas murales se encontraron en Mesoamérica, también se han descubierto en el área intermedia diseños geométricos en tumbas subterráneas en Tierradentro, Colombia, y murales con representaciones mitológicas en Panamarca, Perú.

Las pirámides de Giza son localizadas en el sur de El Cairo actual contienen abundantes grafismos. Las tres pirámides fueron construidas durante la 4th dinastía de Egipto. Estas pirámides son Khufu (Cheops), Khafre (Chephren), y Menkure (Mycerinus). Fueron construidos hace más de 4,500 años y nos muestran el poder y la profusión del faraón en el reino viejo. Cada una tenía un templo de la morgue y calzada elevada. Sus paredes exhiben diversos dibujos con motivos religiosos fundamentalmente.



La ciencia y la tecnología también se fueron desarrollando paralelamente y necesitó al igual que el arte, una excelente herramienta gráfica para mostrar sus alcances, solo que rigen otras pautas que son muy claras y precisas y que a nivel de este curso las iremos develando.

Capítulo 2.

Repaso matemático de conceptos 1.

Ecuaciones de rectas

Una ecuación lineal en dos variables representa una recta. Si se tiene la ecuación, se puede encontrar las coordenadas de los puntos de la recta con las intersecciones x y y , además de la pendiente de la recta. Estudiemos ahora la manera de encontrar la ecuación de la recta, contando con parte de la información sobre ella.

Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados

Si disponemos de la ecuación de una recta y de un sistema de coordenadas cartesianas, es posible encontrar las coordenadas de dos de sus puntos para luego hallar la recta. Dado que dos puntos distintos determinan una recta única, entonces se puede encontrar la ecuación de una recta dados dos puntos de ella.

Supongamos que los dos puntos dados son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, Sea $P(x, y)$ un punto genérico de la recta, diferente de los puntos P_1 y P_2 , como se muestra en la figura #1.

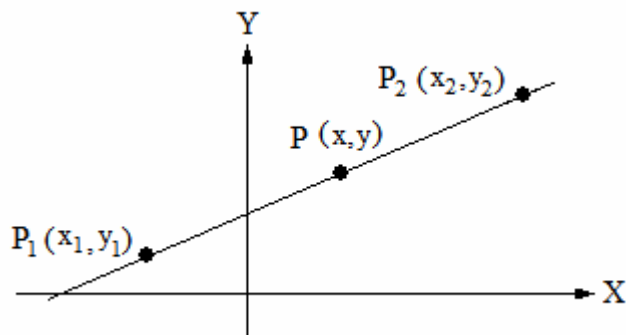


Figura # 1. Recta que pasa por los puntos.

La pendiente de la recta calculada con respecto a los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P(x, y)$ es

$$\frac{y - y_1}{x - x_1}$$

La pendiente de la recta calculada en relación con los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m, \quad x_2 \neq x_1$$

Puesto que la pendiente de una recta es la misma para todos sus puntos, tenemos

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

que es la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados. Podemos representarla mejor de esta manera:

$$y = mx + b$$

Consideraciones

1. Cuando $x_1 = x_2 = a$, la pendiente de la recta no está definida. La recta es vertical y su ecuación es $x = a$.
La ecuación del eje y es $x = 0$.
2. Cuando $y_2 = y_1 = b$, la recta es horizontal y su ecuación es $y = b$. La ecuación del eje x es $y = 0$.

Capítulo 3.

El universo y la física. Análisis de los fenómenos lineales y no lineales.

Desde la antigüedad las personas han tratado de comprender la naturaleza y los fenómenos que en ella se observan: el paso de las estaciones, el movimiento de los cuerpos y de los astros, etc. Las primeras explicaciones se basaron en consideraciones filosóficas y sin realizar verificaciones experimentales, concepto este inexistente en aquel entonces. Por tal motivo algunas interpretaciones falsas, como la hecha por Ptolomeo - "La Tierra está en el centro del Universo y alrededor de ella giran los astros" – perduraron cientos de años.

Se ha observado que la naturaleza obedece a leyes y esas leyes son lo que los científicos ansiamos descubrir. Todas las civilizaciones de una u otra forma han exhibido su arte. Unas veces muy elegante y sofisticado y otras veces, no tanto; pero por lo que los seres humanos han pagado precios muy altos ha sido por ejemplo, la Venus de Milo, el David de Miguel Ángel, el Pensador de Rodin, el Duomo Florentino... y no ha sido por casualidad.

Aunque hoy se escucha música sin orden, es dudoso que ninguna música supere a una cantata de Bach en belleza. El ser humano gusta del orden y la armonía. Los átomos y quarks de la naturaleza parece que se acompañan en un orden armónico en el cual surgen las estructuras complejas, como la música de Bach surge de la combinación de 12 notas individuales: Es la pitagórica música de las esferas que hemos descubierto de nuevo. La música de Bach, o el Pensador de Rodin, fueron obra de la conciencia de sus creadores, conciencia que surgió y surge todos los días del funcionamiento síncrono de miles de millones de unidades muy sencillas, las neuronas. Surge la conciencia, pero también surge el orden, es decir, la belleza, en las olas del mar, en las corrientes de electrones, en los cristales, en toda la naturaleza.

Cuando comenzamos a estudiar los fenómenos físicos, nos restringimos a los casos básicos y sencillos, de manera que la ley matemática que rige el fenómeno se limita al comportamiento de una línea recta, de manera que podemos entender y predecir su comportamiento para un tiempo determinado y su función matemática es lineal, por ejemplo, el movimiento rectilíneo uniforme M.R.U, cuya grafica desplazamiento vs tiempo y velocidad vs tiempo, es simplemente "una recta".

El problema se complica significativamente cuando la función matemática no es lineal, por ejemplo cuadrática, evidentemente la gráfica ya no será lineal.

Es altamente conocido el capricho de la naturaleza, donde predomina este tipo de comportamiento. Sin ir muy lejos, los sentidos de nuestro cuerpo, audición y visión, perciben un universo logarítmico, la intensidad de la iluminación o sonido que percibimos no es linealmente proporcional con la distancia, en la medida que nos alejamos del "foco" o "emisor", podemos pensar que la intensidad disminuye proporcionalmente con la distancia, pero realmente decrece rápidamente.

De manera similar la gran mayoría de fenómenos naturales no exhiben un comportamiento lineal.

El propósito de los siguientes capítulos es reconocer el comportamiento del fenómeno en estudio y darle el tratamiento matemático adecuado para trabajarlo convenientemente.

Capítulo 4. Colección de puntos, tablas, criterios.

Parte del trabajo experimental de las ciencias es experimental y cuantitativa. Se generan una cantidad de valores (medidas, cálculos o resultados), de la cual debemos ser muy cuidadosos en el manejo de dichas cantidades, para minimizar riesgos de equivocación y para ser presentados de forma ordenada. Para tal fin debemos cumplir con ciertos criterios que detallaremos en este capítulo.

Tablas.

Es necesario ordenar los valores y se ha escogido un arreglo en forma de columnas llamada "Tablas".

Toda tabla debe poseer un número o nombre para ser identificada.

Se deben ordenar los valores.

Las tablas deben contener las magnitudes con sus respectivas unidades.

Nos encontraremos con tres tipos de tablas,

1. Datos.
2. Cálculos.
3. Resultados.

La tabla debe exhibir claramente el error absoluto o apreciación del instrumento, según sea el caso (si se trata de una tabla de datos). Se puede ubicar en el encabezado de la columna, si el error es constante para todos los valores, u ordenados en una columna adicional, en el caso de que el error dependa de cada valor.

Para ilustrar lo dicho anteriormente, se presentan dos tablas modelo, ver tabla # 4.1 y 4.2.

Tabla de datos : "Estudio del M.U.A"

X (m)	$\Delta X(m)$	t(s) $\Delta t(s)=0,1s$
1,02	0,01	0,0
2,34	0,02	1,0
3,53	0,03	2,0
4,89	0,03	3,0
5,17	0,04	4,0

Tabla # 4.1

Tabla de resultados #1.

Parámetro	Magnitud	Valor	Error absoluto
Veloc sonido	V (m/s)	331,3	+/- 0,7
Calor espf	C(cal/g°C)	0,57	+/- 0,02
Densd abs	$\delta^{\wedge}(g/cm^3)$	0,989	+/- 0,003

Tabla 4.2.

Capítulo 5. Trazado de gráficas, lineales y sin dispersión.

En el siguiente capítulo vamos a concentrar nuestra atención en obtener una buena gráfica a partir de una tabla de datos. Se obviarán el tratamiento de los errores ya que serán tratados en los capítulos precedentes.

Establezcamos entonces, algunas normas de trabajo en gráficas que nos permitirán alcanzar un nivel de elegancia satisfactorio.

Antes que nada, “toda gráfica debe tener un título o número“ del cual se hace referencia en el texto de nuestro trabajo o informe.

Respecto a los ejes de coordenadas se puede acordar lo siguiente:

1. En los ejes debe aparecer claramente las magnitudes físicas (el símbolo) que en ellos se representan y sus unidades de medida correspondientes.
2. En los ejes sólo deben colocarse los valores más representativos de la escala escogida.
3. Es conveniente en general que el origen aparezca en el gráfico. Pero, no siempre es necesario que la intersección de los dos ejes corresponda al “punto cero“ y en este caso las escalas pueden desplazarse cuando los datos experimentales están en un intervalo que así lo requiera. Debe tenerse muy en cuenta al momento de buscar el corte de la recta trazada, con los ejes.
4. La variable independiente, cuyo valor lo asigna a conveniencia el experimentador, se representa sobre el eje horizontal (eje x o de las abscisas), y la variable que depende de ese valor asignado se coloca sobre el eje vertical (eje y o de las ordenadas).

Para las escalas debemos tener presente:

1. Conocer el máximo y mínimo valor de la tabla, para tener un estimado en la selección de la escala.
2. Hay que tener en cuenta que el papel es generalmente rectangular, pero podemos girarlo para adecuar la escala al número de divisiones del papel.
3. El factor de escala debe tener números que sean 1,2 y 5, o múltiplos, excluyendo los múltiplos de tres, por ejemplo 6, 15, 30, etc.
4. Los valores de la escala deben ser lo suficientemente esparcidos para facilitar su lectura, si es necesario, puede usar la notación científica.

A manera de ilustración de los tópicos mostrados anteriormente, tomemos los dos ejemplos.

En el ejemplo # 5.1, en la gráfica # 5.1.a, se observa que el origen de el papel se ha seleccionado sin tener en cuenta la relación entre el número de divisiones en función a los valores de la tabla. Eso trae como consecuencia que no se utilice la hoja de papel con la máxima eficiencia posible, entendiéndose como “eficiencia“ la mayor expansión de los puntos sobre el papel. Los cuadros oscuros indican la cantidad de papel inutilizado.

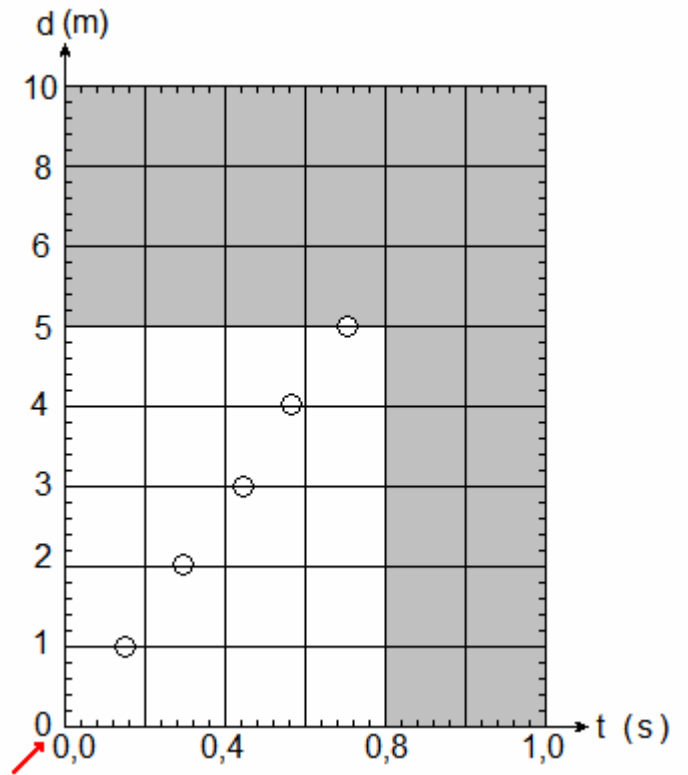
Para la gráfica # 5.1.b, la eficiencia es superior.

Ejemplo # 5.1.

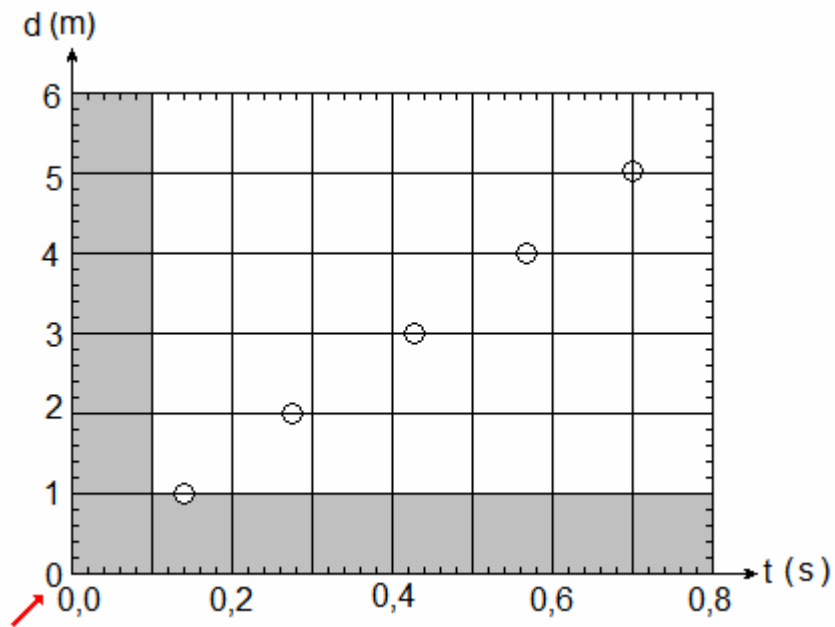
“Estudio del M.A.S”

d (m)	t (s)
1	0,14
2	0,28
3	0,42
4	0,56
5	0,70

Tabla # 5.1.



Grafica # 5.1.a. Escala poco útil.



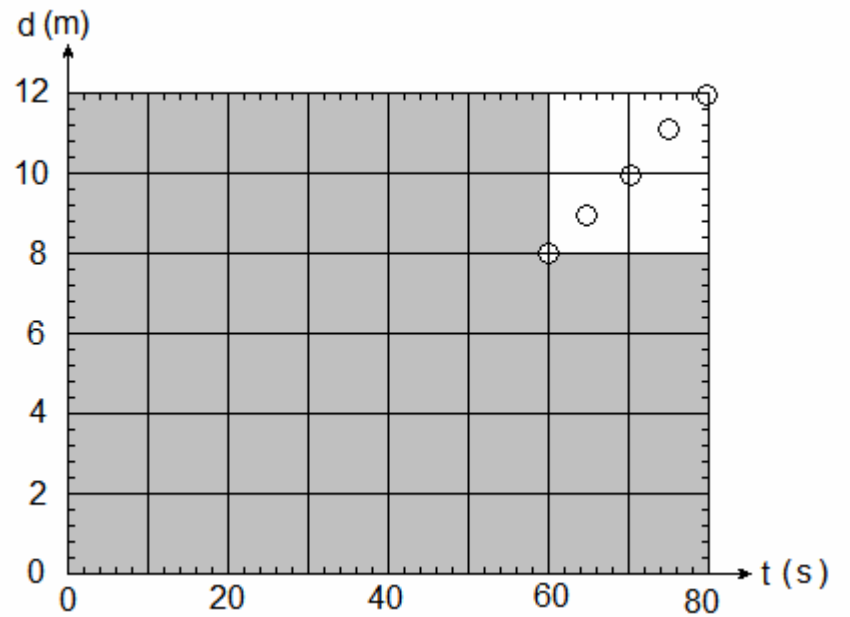
Grafica # 5.1.b. Escala útil.

Veamos ahora el ejemplo # 5.2.

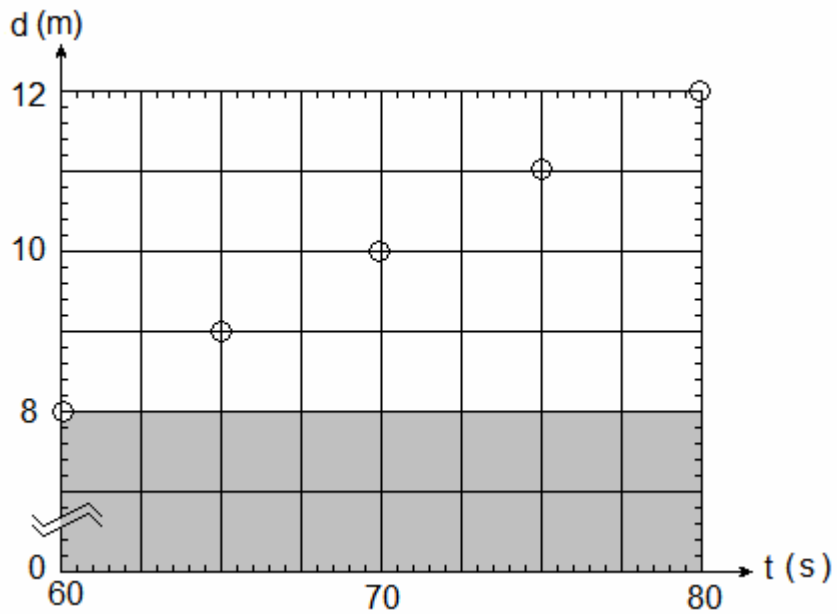
“Estudio del M.A.S”

d (m)	t (s)
8	60
9	65
10	70
11	75
12	80

Tabla # 5.2



Grafica # 5.2.a. Escala poco útil.



Grafica # 5.2.b. Escala útil.

Comentarios: Para la grafica # 5.2.a, como puede observarse en la tabla # 5.2, la variación de los datos, tanto de distancia como de tiempo, son muy pequeños respecto al origen, eso hace que éste esté muy alejado de los puntos de la gráfica, o que los puntos de la gráfica, se vean muy juntos y la escala sea poco útil.

Para la gráfica # 5.2.b, se ha suprimido el origen, para poder expandir la gráfica y apreciarla con mayor detalle: es decir, la escala ahora es más eficiente.

Retomemos ahora nuestra gráfica # 5.1.b con el propósito de trazar nuestra recta. Como se trata del caso más sencillo (sin dispersión) solo debemos unir todos los puntos con una regla, trazado justo desde el centro de cada punto, ya que todos ellas están alineados. Los puntos que están ubicados en la recta (punteada) antes del primer punto o después del último, los hemos diferenciado con el símbolo “□” se le llama puntos extrapolados. Los puntos contenidos entre los puntos tabulados, se han diferenciado con el símbolo “X” y se les llama puntos interpolados, (ver gráfico # 5.3).

Aclaratoria, la escogencia de la simbología “□ o X “ es empleada en este ejemplo solo para diferenciar los puntos tabulado de otros, en la realidad, no se acostumbra a cambiar la nomenclatura entre los puntos tabulados, interpolados y extrapolados.

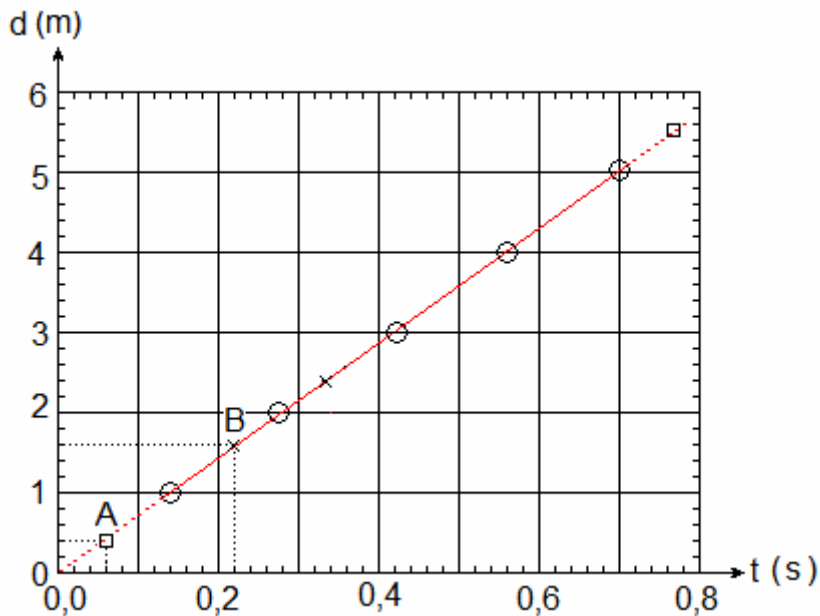


Gráfico # 5.3.

Analicemos en detalle el gráfico # 5.3.

Tal como se mencionaba anteriormente, se ha trazado una perfecta recta (ya que no hay dispersión) desde el primer punto hasta el último tabulado. Los puntos por fuera de estos valores, son los extrapolados, por ejemplo el punto “A” y los valores entre los tabulados, son los “interpolados” como por ejemplo, el punto “B”.

Ahora nos vamos a la tarea de conocer las coordenadas de ambos puntos, ya que no están tabulados.

Como primera opción, emplearemos el “método gráfico”. Consiste en proyectar los valores del punto de interés sobre sus ejes coordenados, en este caso eje “d” y eje “t” y

obtener esos valores, simplemente leyendo la escala. Por ejemplo las coordenadas del punto A será, A(0,06 ; 0,4), puede interpretarse también como 0,06 seg, 1,6 mts. Análogamente el punto B tendrá coordenadas B(0,22 ; 1,6).

Nuestra segunda opción es el “método analítico“, o en otros términos, es el método en el cual conociendo uno de los valores de un punto dado y la ecuación matemática que rige el fenómeno, podemos calcular el valor desconocido.

Dada la característica de linealidad de nuestra gráfica, pues es necesario conocer la ecuación de la recta característica (ver capítulo # 2), eso quiere decir, que necesitamos conocer la pendiente y el corte con el eje de las ordenadas cuando el valor de la abscisa es cero.

Poniendo los conocimientos en práctica para esta gráfica, podemos estar interesados en obtener la ecuación de la recta, que matemáticamente es, $Y = mx + b$, pero físicamente es

$$d = V * t + 0, \quad \text{siendo la pendiente } V = d_f - d_i / t_f - t_i.$$

Para calcular la pendiente, bastará con tomar dos valores de la tabla (vale solo si no hay dispersión), por ejemplo, el último valor menos el primero. En este caso, $V = 7,14 \text{ m/s}$.

El punto de corte solo lo obtendremos de la proyección de la recta sobre el eje de d, para $t = 0$, este valor es de $d = 0$. Finalmente resulta que la ecuación de nuestra recta queda de la manera siguiente: $d(t) = 7,14 t$. Ahora podemos obtener analíticamente los valores, por ejemplo, del tiempo para los puntos A y B, conocido los valores de “d”.

Verifiquemos, para el punto “A” $d(0,06) = 7,14 * 0,06$, $d(0,06) = 0,43\text{m}$. De forma análoga podemos trabajar con el punto B”, $d(0,22) = 7,14 * 0,22$, $d(0,22) = 1,57\text{m}$.

En la tabla # 4.3, se podrá comparar los valores obtenidos con el método gráfico vs el analítico.

Pto	t (s)	Grafico d(m)	Analitico d(m)
A	0,006	0,4	0,43
B	0,22	1,6	1,57

Tabla # 5.3.

Comparación de los valores gráficos y analíticos.

De esta manera, conociendo la ecuación que rige el fenómeno, conocido un valor del eje, podemos calcular el valor que tendrá en el eje desconocido, e inclusive, siendo un valor por extrapolación o interpolación.

Capítulo # 6.

Trazado de gráficas, lineales y con dispersión.

Igual que en el capítulo anterior, se seguirá aplicando las pautas establecidas y obviará el tratamiento de los errores ya que serán comentados en el capítulo # 8.

Ahora bien, una gráfica presenta dispersión cuando grafiquemos los puntos y éstos no se encuentren alineados, esto evidentemente dificultará el trazado de la recta.

La idea de este capítulo es establecer pautas para tener un criterio que nos servirá de ayuda en la labor de trazado.

Lo primero que debemos calcular son las coordenadas de un punto promedio llamado “centroide”

Los métodos estadísticos demuestran que, siempre que la dispersión de los puntos experimentales se deba a los errores casuales de medición, la mejor recta pasará por el centroide de los puntos experimentales, que es el punto con las coordenadas (\bar{X}, \bar{Y}) , en donde \bar{X} es el valor medio de las coordenadas X de todos los puntos y \bar{Y} es el promedio de todas las Y .

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \quad 6.1$$

El centroide se define como, $C = (\bar{X}, \bar{Y})$ 6.2

Al graficar el centroide, debemos diferenciarlo de los otros puntos de la gráfica, por lo que nos convendrá seleccionar un símbolo diferente y cuando tracemos la gráfica. La recta debe pasar justo por el centro del centroide.

Podemos encontrarnos con tres casos que trataremos en detalle a continuación.

- Baja dispersión.
- Moderada dispersión.
- Alta dispersión.

Para ilustrar los casos anteriores, se graficará una experiencia de desplazamiento vs tiempo y cada uno de los casos, con ciertas variaciones.

I Caso, baja dispersión.

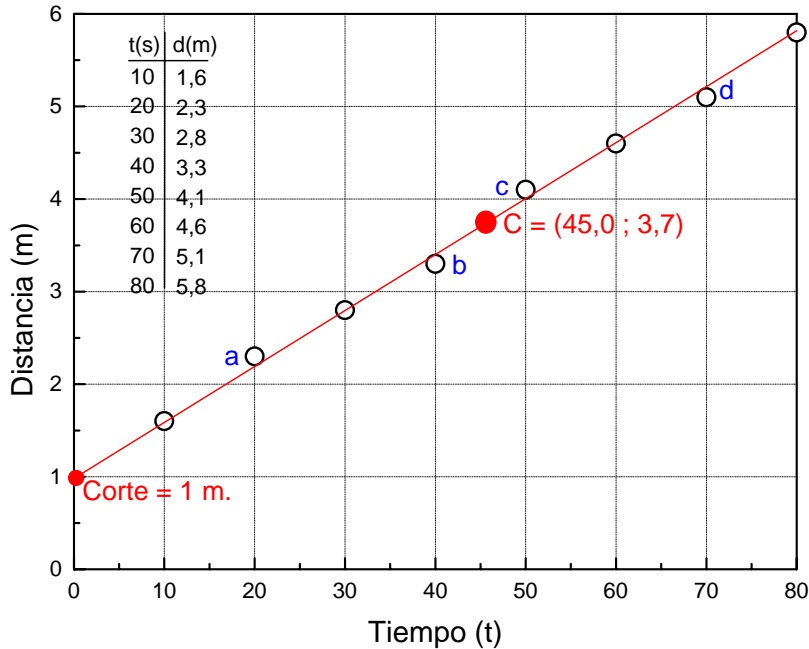
Analicemos la gráfica # 6.1.

Los pasos a seguir son los siguientes.

1. Grafique convenientemente los valores de la tabla de datos.
2. Calcule y ubique el centroide, verifique que el valor para este gráfico sea de $C=(45,5 ; 3,7)$, evaluando la expresión # 6.1.
3. Trace la recta.
4. Calcule el corte con el eje “d”, cuando $t=0$.
5. Calcule la pendiente.
6. Obtenga la ecuación que rige el fenómeno.
7. Verifique para alguno de los valores conocidos.

Para trazar la recta debemos utilizar una regla lo más transparente posible, para que nos permita mirar los puntos a través de ella. Ubicamos la regla justo por el centro del centroide y a partir de él, debemos inclinar la recta de manera que la recta toque la mayor cantidad de puntos justo en el centro, si hay puntos desviados del resto (puntos a, b, c y

d), generalmente son pocos y debemos intentar que toque a todos al menos de un lado, por encima y por debajo, para intentar de conseguir “igual peso”. Note que los puntos “a” y “c”, están por arriba de la recta y los puntos “b” y “d”, por debajo.



Gráfica # 6.1.

-Si proyectamos la recta, mas allá del primer punto, justo donde toca el eje de la distancia, cuando $t=0$, obtenemos el valor del corte. Verifique que sea $d_0 = 1,0$ m.

-Hay que ser muy estrictos al calcular la pendiente, de ello depende el éxito en la obtención de la ecuación de la recta y por ende, en los cálculos de los puntos de interés. Recuerde que la pendiente que vamos a calcular, es la pendiente de la recta que hemos dibujado y que toca muy bien la mayoría de los puntos, pero otros puntos solo son tocados de un lado, por lo que nos obliga a “no usar la tabla de valores para calcular la pendiente de la recta”. Debemos usar valores estrictamente obtenidos de la recta.

Para calcular la pendiente, solo se necesitan dos puntos (que estén contenidos en la recta), entonces, ¿Qué puntos mas representativos, que están contenidos en la recta y que ya usted ha calculado?, ¡Sin duda alguna que esos puntos son, el centroide y el corte !.

Veamos entonces lo siguiente. Tenemos como punto final, el centroide, de coordenadas, $C=(45,5 ; 3,7)$ y el punto inicial es el corte con coordenadas $b=(0 ; 1)$. Ahora restemos el punto final menos el inicial y obtendremos que la pendiente es $m=0,059$. Teniendo en cuenta que la pendiente es $\Delta d/\Delta t$ eso nos indica que la pendiente es “la velocidad”, de manera que $V=0,059$ m/s, además observamos que es lineal, es decir “constante” por lo que no hay aceleración, siendo consistente con nuestra experiencia de M.A.S.

-Ya estamos listos para escribir la ecuación que rige el fenómeno.

$$d(t) = 0,059 t + 1.$$

-Ahora verificamos la validez de la anterior ecuación. Para ello tomemos un par de puntos arbitrarios, pueden servir los tabulados. En este caso tomaremos el primero y el último y suponemos conocido el valor “t” y calcularemos el valor para “d”. Verifique que los valores correspondan con los expresados en la tabla # 6.1.

Pto	t (s)	Grafico d(m)	Analítico d(m)
I	10	1,6	1,59
II	80	5,8	5,72

Tabla # 6.1. Comparación de los valores gráficos y analíticos.

Podemos constatar, que los valores calculados coinciden bastante bien respecto a los valores tabulados y conociendo la ecuación que rige el fenómeno, podemos calcular cualquier valor de nuestro interés.

II Caso, moderada dispersión.

Se deben seguir las mismas pautas establecidas anteriormente.

Para trazar la recta debemos utilizar una regla lo mas transparente posible, para que nos permita mirar los puntos a través de ella. Ubicamos la recta justo por el centro del centroide y a partir de él, debemos inclinar la recta de manera que la recta toque la mayor cantidad de puntos, solo que esta vez habrán mas puntos dispersados o puntos con mayor valor de dispersión. De igual manera debo establecer una relación de compromiso, donde intentaremos ubicar por encima de la recta, una cantidad similar de puntos que por debajo, cuya separación a la recta sea casi la misma distancia. Como comprenderá, esta vez ya no será tan fácil, necesitará invertir un mayor tiempo antes de decidir el mejor trazo.

Tengamos como ejemplo el gráfico # 6.2.

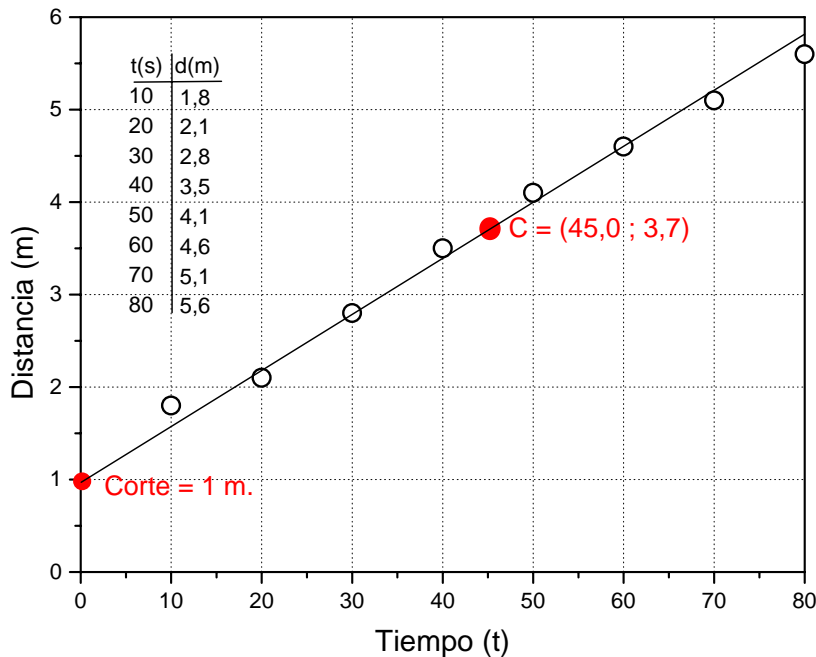


Gráfico # 6.2.

Como podemos apreciar, solo dos puntos y el centroide son tocados por la recta exactamente en el centro, cuatro puntos son tocados por el extremo y dos puntos no son tocados; pero se ha tenido muy en cuenta “el peso”, obsérvese con detenimiento como la misma cantidad de puntos que se encuentran por encima de la recta corresponde con los que se encuentran por debajo y con la misma separación.

Respecto al corte, pendiente y ecuación son las mismas que en el caso anterior y que en el siguiente, de manera que no se efectuaran los cálculos correspondientes.

III Caso, alta dispersión.

Estos casos, aunque poco frecuentes, debemos poner nuestro mejor cuidado en el trazado de la recta. Como se puede observar en el gráfico # 6.3, la recta trazada no toca ninguno de los puntos tabulados, en este caso, debe al menos, tocar el centroide y cuidar nuestro ya conocido “peso”.

Queda como tarea verificar los valores ya conocidos de centroide, corte y la ecuación de la recta.

Recuerde, si usted está interesado en estimar algún valor empleando la ecuación de la recta, lo mas probable que no coincida con alguno de los valores tabulados y es lógico, debido a que la ecuación solo nos dará los puntos contenidos en la recta trazada.

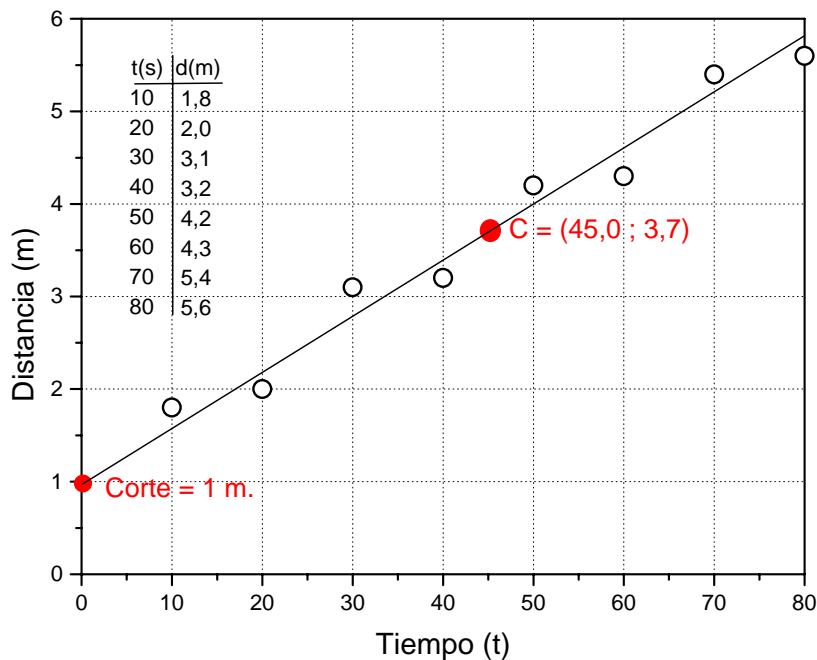


Gráfico # 6.3.

Capítulo 7.

Repaso matemático de conceptos 2. Funciones exponenciales y potenciales.

Función exponencial.

Una función de la forma $y = f(x) = w^x$, donde $w > 0$ y $w \neq 1$, es una función exponencial y “w” es la base.

De forma mas amplia, podemos expresar la función exponencial de la manera siguiente:

$$y = k a^{bx}. \quad 7.1$$

Donde k, a y b, son constantes.

En los gráficos # 7-1 se mostrarán algunos casos típicos.

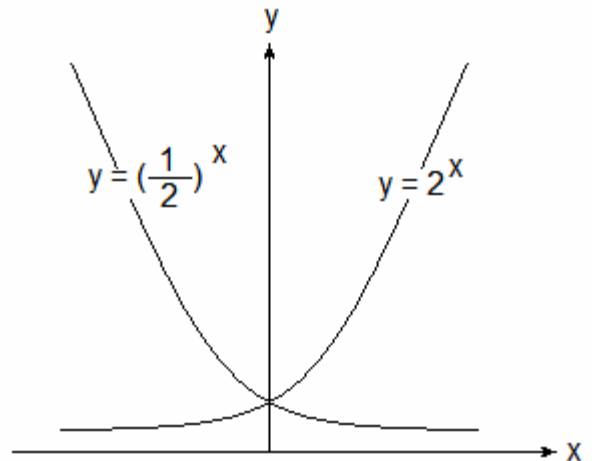
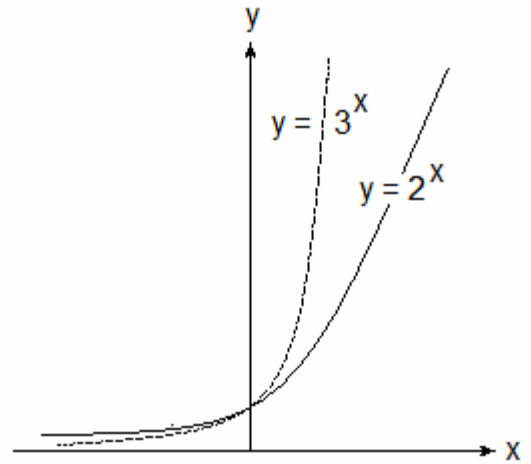


Grafico # 7.1.
Funciones exponenciales típicas.

Función potencial.

Una función de la forma $y = f(x) = x^w$, donde “w” es un número real. De forma más amplia, podemos expresar la función potencial de la manera siguiente:

$$y = b x^a. \quad 7.2$$

Donde k, a y b, son constantes. En los gráficos # 7-2 se mostrarán algunos casos típicos.

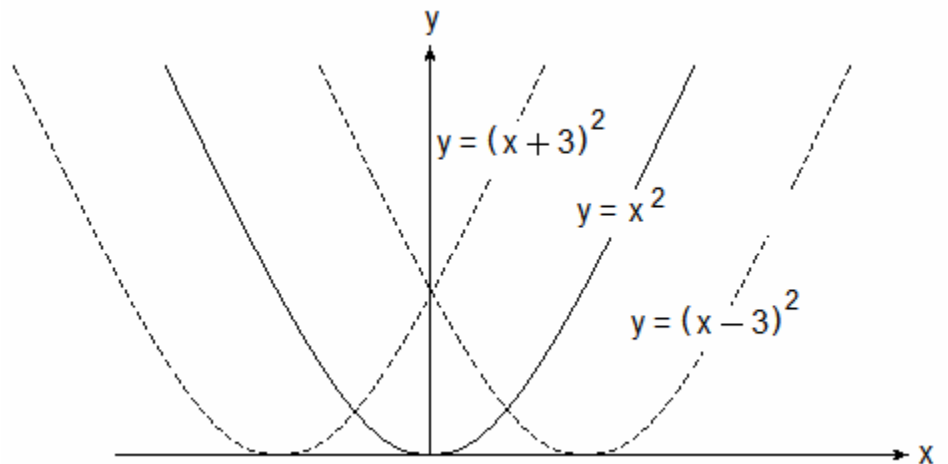
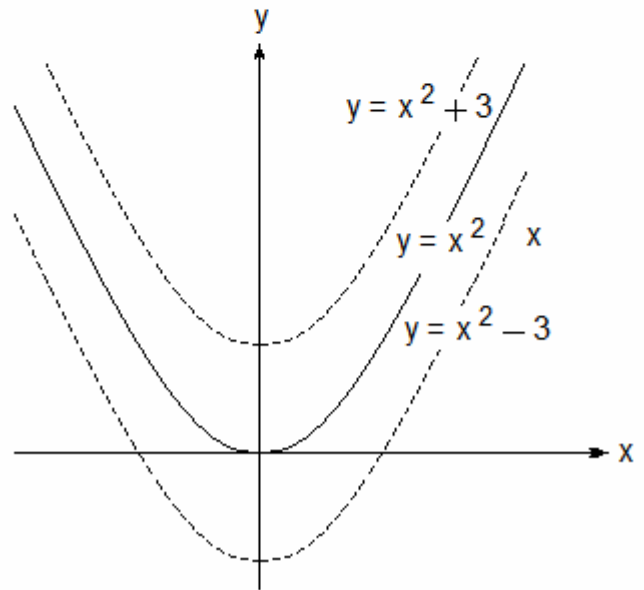
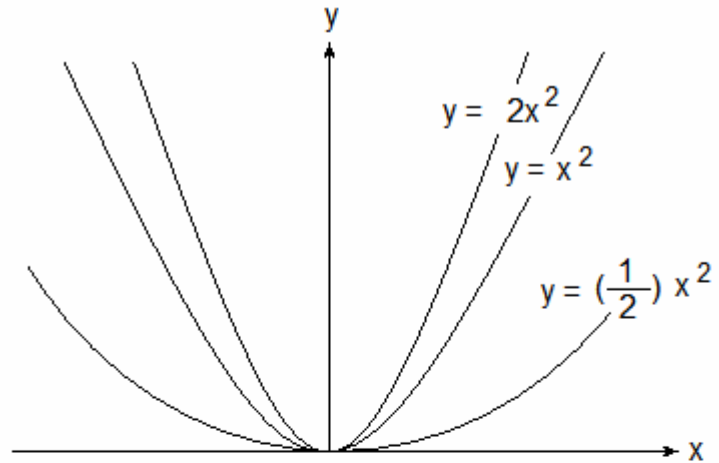


Grafico # 7.2.
Funciones potenciales
típicas.

Logaritmos.

Históricamente, los logaritmos se desarrollaron para simplificar los cálculos numéricos largos y complejos, sin embargo, la función logarítmica, en virtud de las propiedades logarítmicas que se mostrarán a continuación, conservan un papel importante en las matemáticas.

Para nuestro propósito, trabajaremos solo con los logaritmos naturales o de base diez.

Propiedades de los logaritmos.

Las siguientes propiedades suponen que b , u , v son positivos ($b \neq 1$)

1. $\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$. En palabras, el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.
2. $\log_b(u/v) = \log_b u - \log_b v$. En palabras, el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.
3. $\log_b(u^r) = r \log_b u$. En palabras, el logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo.
4. $\log_b b^x = x$.
5. $b^{\log_b x} = x$

Linealización de una función.

Es el proceso de pasar una función no lineal a la forma lineal.

Como se vio al principio de este curso, al graficar una función lineal podemos conseguir la ecuación de la recta que rige el fenómeno. Luego se puede estimar cualquier valor que nos interese, pero si la función es no lineal (exponencial, potencial, etc), ¿Cómo calculamos la función de la recta, pendiente, corte, etc, si no tenemos una recta?.

Veamos en detalle el tratamiento matemático que le daremos a las funciones exponenciales y potenciales.

Función exponencial.

Expresemos la función exponencial de la manera siguiente:

$$y = k a^{bx}. \quad \text{Para } k, a \text{ y } b, \text{ son constantes.}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, tendremos:

$$\begin{aligned} \log y &= \log k + \log a^{bx} \\ \log y &= \log k + bx \log a \end{aligned}$$

Reordenando los miembros, se tiene:

$$\log y = (b \log a) x + \log k$$

Note la similitud con la ecuación de la recta, $y = m x + c$. Podemos hacer cambios de variables de manera de manera que:

$$\begin{aligned} u &= \log y. \\ m &= b \log a \\ c &= \log k \end{aligned}$$

Entonces, mi nueva recta estará dada de la siguiente manera:

$$u = m x + c$$

Si graficásemos la ecuación # 7.1, obtendríamos la gráfica # 7.3.a para las variables y vs x en papel milimetrado, la gráfica 7.3.b para las variables $\log y$ vs x (u vs x) en papel milimetrado y 7.3.c para las variables y vs x , directamente en un papel semi-logarítmico ya que la variable “ y ” está afectada por el logaritmo y la variable “ x ” no.

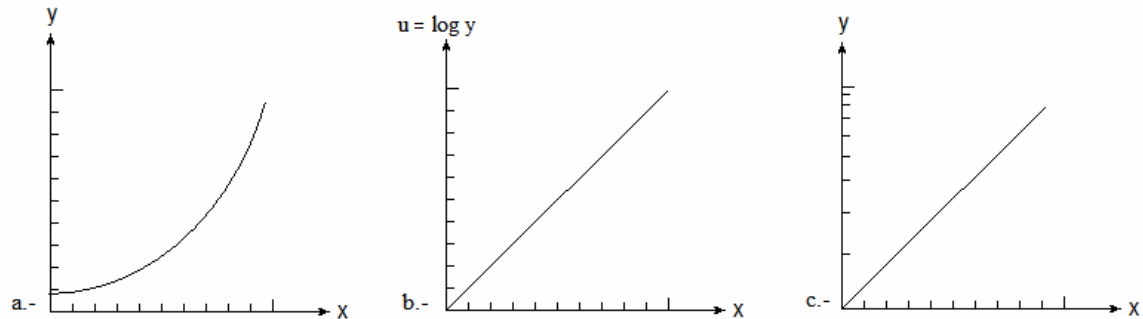


Figura # 7.3. Grafica de función exponencial en diferentes escalas.

Para evitar cálculos innecesarios, emplearemos el papel semi-logarítmico pero debemos tener presente que,

- Pendiente = $(\log y_2 - \log y_1) / x_2 - x_1$.
- Corte = $\log y$
- Centroide = \bar{x}, \bar{u} , para $\bar{u} = \text{antilog} [(\log y_1 + \log y_2 + \dots \log y_n) / n]$
 $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots x_n) / n$

Función potencial.

Expresemos la función potencial de la manera siguiente:

$$y = b x^a \quad \text{donde } k, a \text{ y } b, \text{ son constantes.}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, tendremos:

$$\begin{aligned} \log y &= \log b + \log x^a \\ \log y &= \log b + a \log x \end{aligned}$$

Reordenando los miembros, se tiene:

$$\log y = a \log x + \log b$$

Note la similitud con la ecuación de la recta, $y = m x + c$. Podemos hacer cambios de variables de manera de manera que:

$$v = \log y.$$

$$u = \log x$$

$$c = \log b$$

Entonces, mi nueva recta estará dada de la siguiente manera:

$$v = a u + c$$

Si graficásemos la ecuación # 7.2, obtendríamos la gráfica # 7.4.a para una las variables y vs x en papel milimetrado, la gráfica 7.4.b para las variables $\log y$ vs $\log x$ (v vs u) en papel milimetrado y 7.4.c para las variables y vs x , directamente en un papel log-log ya que las variables están afectada por el logaritmo.

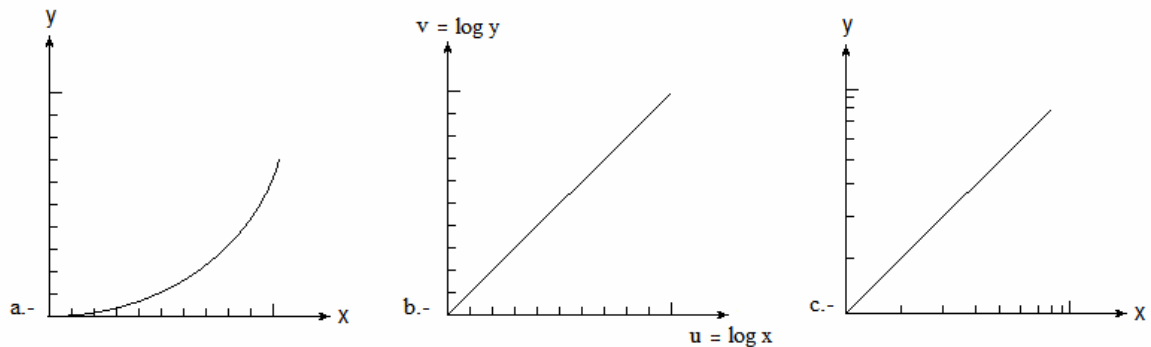


Grafico # 7.4. Función potencial en diferentes escalas.

Para evitar cálculos innecesarios, emplearemos el papel log-log pero debemos tener presente que,

- Pendiente = $(\log y_2 - \log y_1) / (\log x_2 - \log x_1)$.
- Corte = $\log y$
- Centroide = \bar{u}, \bar{v} , para $\bar{v} = \text{antilog} [(\log y_1 + \log y_2 + \dots \log y_n) / n]$;
 $\bar{u} = \text{antilog} [(\log x_1 + \log x_2 + \dots \log x_n) / n]$.

Como acabamos de ver en los ejemplos anteriores, el correcto uso de la escala y del papel, simplifican apreciablemente el trabajo. El estudiante debe ensayar con diferentes tipos de funciones para alcanzar la soltura requerida.

Capítulo 8. Escala.

En este capítulo trataremos todo lo relacionado con las escalas, factor de escala, pautas, estilo, escalas lineales, logarítmicas y mas.

Escala lineales.

Supongamos que tenemos una escala como se muestra en la figura # 8.1.

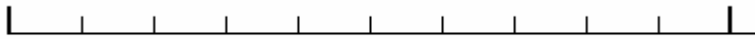


Fig. # 8.1. Escala lineal.

Supongamos que deseamos ubicar tres conjuntos de números utilizando la misma escala.

- 1; 5; 10 mts.
- 10; 50; 100 mts.
- 0,5; 0,7; 1,0 mts.

En la figura # 8.2, se muestran los puntos ubicados sobre la escala de la figura # 8.1, pero se ha aplicado un factor de escala apropiado para cada caso.

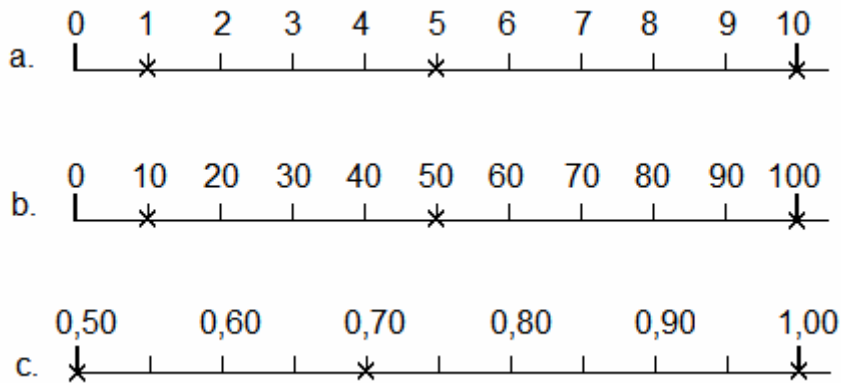


Figura # 8.2.

Comentemos cada caso por separado.

- a) Se tiene que una subdivisión del papel equivale a 1 mts, es decir, el factor de escala es “1”, ver figura # 8.2.a.
- b) Una subdivisión del papel equivale a 10 mts. Su factor de escala es “10” (figura 8.2.b)
- c) El factor de escala es 0,05 (figura 8.2.c).

Se puede mejorar la apariencia de la escala. Por ejemplo, en la figura # 8.2.b pudimos haber hecho dos cosas.

1. Colocar alternadamente los valores sobre la escala, tal como se muestra en la figura # 8.3.a. De esta manera se evita recargar de números de manera innecesaria.
2. Otra manera vendría a ser el uso de la notación científica. Es muy conveniente cuando se usan números muy pequeños o muy grandes (ver figura 8.3.b).
- 3.

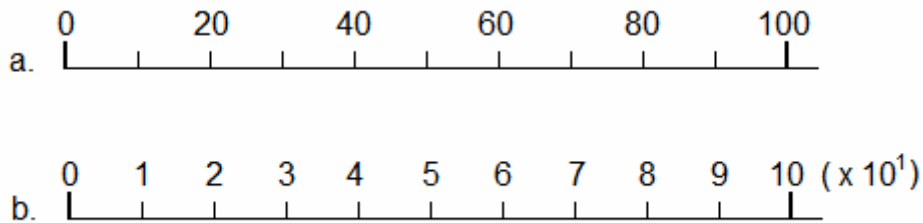


Figura #8.3.

Escalas logarítmicas.

Analicemos las diferencias entre una escala lineal y otra logarítmica. Fijemos la atención a la figura # 8.4 En el caso “a” vemos que la separación entre sus subdivisiones es constante, por esa razón se le llama “escala lineal” mientras que para el caso “b” el espaciado no es constante. Si observamos la parte derecha, el espaciado es mayor y a medida que nos trasladamos a la izquierda, el espaciado es menor. Se trata de una “escala logarítmica” que va creciendo de derecha a izquierda.



Figura # 8.4 .a) Escala lineal, b) Escala logarítmica.

Se debe tener muy en cuenta lo siguiente.

1. En el momento de ubicar los puntos sobre la escala, los valores más pequeños se ubican en la zona de mayor espaciamiento y los más grandes se ubican en la de menor espaciamiento.
2. En esta escala “nunca se colocará el cero”, recuerde que el logaritmo de cero es indefinido. Podemos ubicar valores tan cerca del cero como se desee.

3. A diferencia de la escala lineal, la variación de cada división es de un orden de magnitud y esto influye directamente en la variación de las subdivisiones.
4. La única zona lineal de la escala es entre las divisiones y se le llama “ciclo”.
5. Para mayor comodidad, es deseable trabajar con la notación científica.

La figura # 8.5. ilustra los detalles antes citados.

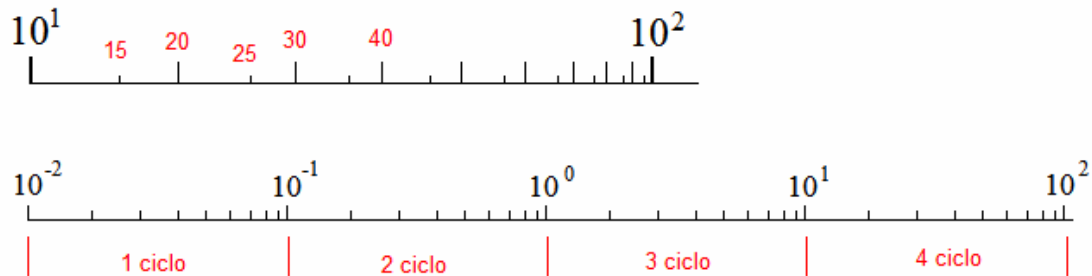


Figura # 8.5. Escalas logarítmicas y los ciclos.

Ahora bien, cuando se integran esas escalas para fabricar un papel, podemos encontrar al menos, tres tipos de ellos.

- Papel milimetrado.
- Papel semi-logarítmico.
- Papel doble logarítmico o log-log.

La figura # 8.6. muestra los diferentes tipos de papel más comúnmente utilizados.

Comenzamos por el común papel cuadrículado, ver figura # 8.6.a. Este puede ser de dos tipos, el que usa el sistema Británico de longitud “pulgadas”, o el que usa el sistema C.G.S, mejor conocido por “papel milimetrado”.

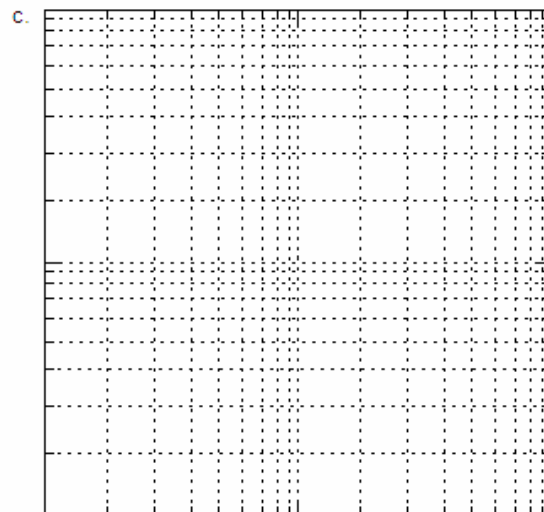
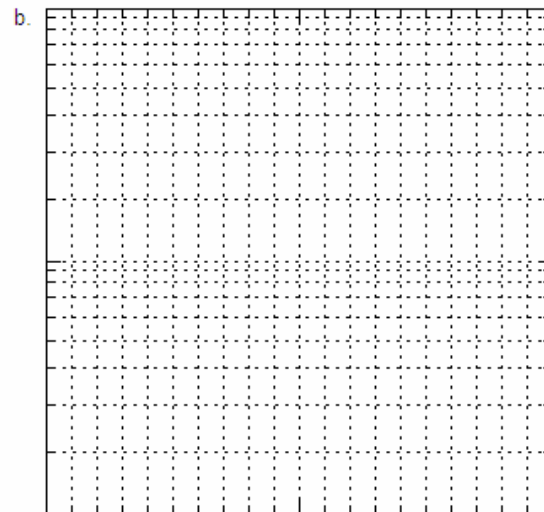
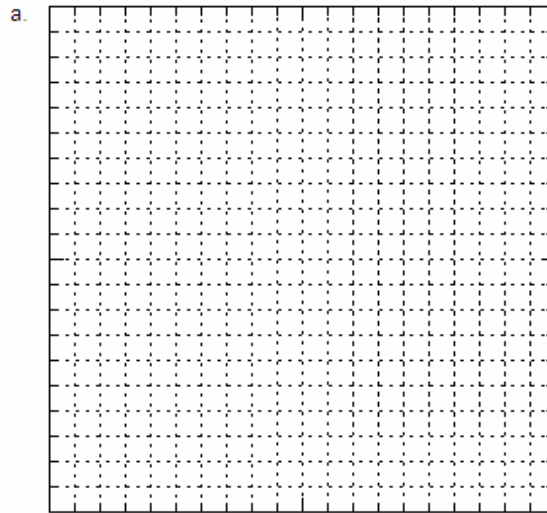
El segundo papel es el que tiene un eje en escala lineal y el otro eje en escala logarítmica, como se muestra en la figura # 8.6.b. Este papel se conoce como “papel semi-logarítmico”.

El tercer papel tiene los dos ejes logarítmicos, se le conoce por “papel log-log”. Este papel es mostrado en la figura # 8.6.c y éste en particular es de dos ciclos por dos ciclos, mejor conocido como “2x2”, pero existen papeles de 1x1, 1x2, 3x2, etc.

En el siguiente capítulo tratará sobre el uso de los papeles semi-logarítmico y log-log.

Figura # 8.6.
Diferentes tipos de papeles.

- a) Milimetrado.
- b) Semi-logarítmico.
- c) Log-log.



Capítulo 9.
Trazado de graficas no lineales.

En el siguiente capítulo se tratará de una manera sencilla, el trazado de gráficas exponenciales y potenciales.

Trazado de gráfica exponencial.

Ejemplo # 9.1. Grafiquemos primero la función siguiente,

$$y = 6(0,81)^x, \text{ para } x = 0, 2, 4 \text{ y } 6.$$

Primero debemos obtener una tabla de valores, evaluando la función, con los valores de “x” dados (ver tabla # 9.1)

Dada la forma de la función, sabemos que es de tipo exponencial y debemos graficarla en un papel semi-logarítmico.

Observe los valores de la columna “y”, el valor mínimo es 1,7 y el máximo 6,0, de manera que la variación entre ellos es de menos de un orden de magnitud, es decir, solo vamos a necesitar un ciclo de la escala logarítmica.

Seleccionemos adecuadamente el factor de escala para nuestro papel.

Con mucho cuidado, pasemos los valores de la tabla al papel, punto a punto, sin necesidad de calcular logaritmos y finalmente debemos obtener un gráfico como el mostrado el gráfico # 9.1.

x	y
0	6,0
2	3,9
4	2,6
6	1,7

Tabla # 9.1

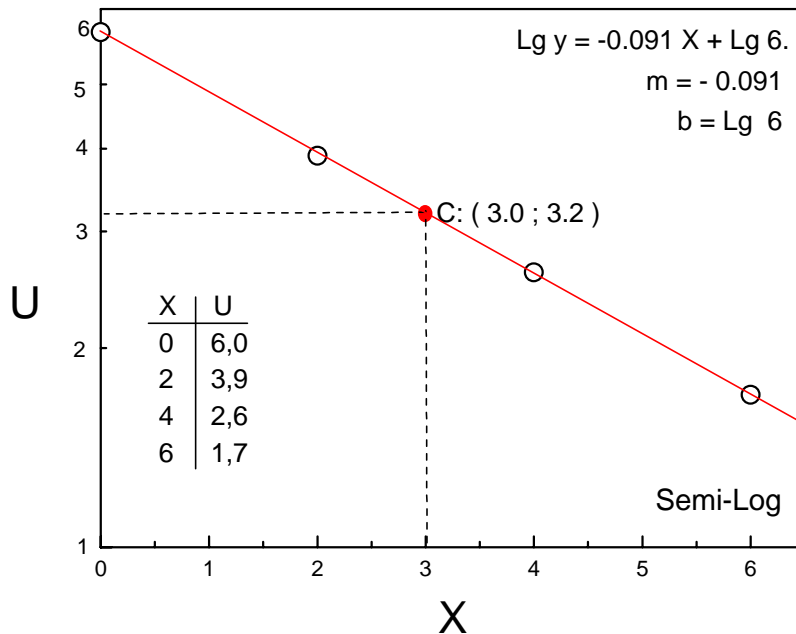


Grafico # 9.1.

Una vez ubicado los puntos, debemos trazar la recta pero con el apoyo del centroide que debemos calcular de inmediato, tal como se vio n el capítulo anterior.

- $\bar{x} = [0 + 2 + 4 + 6] / 4 = 3,0.$

- $\bar{u} = \text{antilog} \{ [\log 6,0 + \log 3,9 + \log 2,6 + \log 1,7] / 4 \} = 3,2$.

Trazando la recta se observa que tenemos una recta perfectamente definida.

De la proyección de la recta sobre el eje “y” para “x” = 0, se tiene que el corte vale log 6.

Ahora puedo escribir la ecuación de la recta, $\log y = -0,091x + \log y$.

Para quedar plenamente satisfecho, se verifica la ecuación para dos valores conocidos, por ejemplo:

- $x_1 = 2, \quad \log y_1 = -0,091(2) + 0,778, y = 10^{0,596}, y = 3,94$.
- $x_2 = 4, \quad \log y_1 = -0,091(4) + 0,778, y = 10^{0,414}, y = 2,59$.

Ejemplo # 9.2. Hagamos algo diferente ahora. Se tiene una función exponencial desconocida, debemos graficar la valores de la tabla de datos # 9.2 y a partir de la gráfica, se debe obtener la ecuación correspondiente con la función exponencial.

Analicemos los valores de la tabla para seleccionar acertadamente el factor de escala.

Como vemos, el menor valor del eje “y” es de 0,1 y el máximo valor es de 6,0, es decir, tenemos variación un poco menos de dos ordenes de magnitud. Necesitaremos un papel semi-logarítmico de dos ciclos.

Ya tenemos mas experiencia en los cálculos de manera que no mostraremos los detalles.

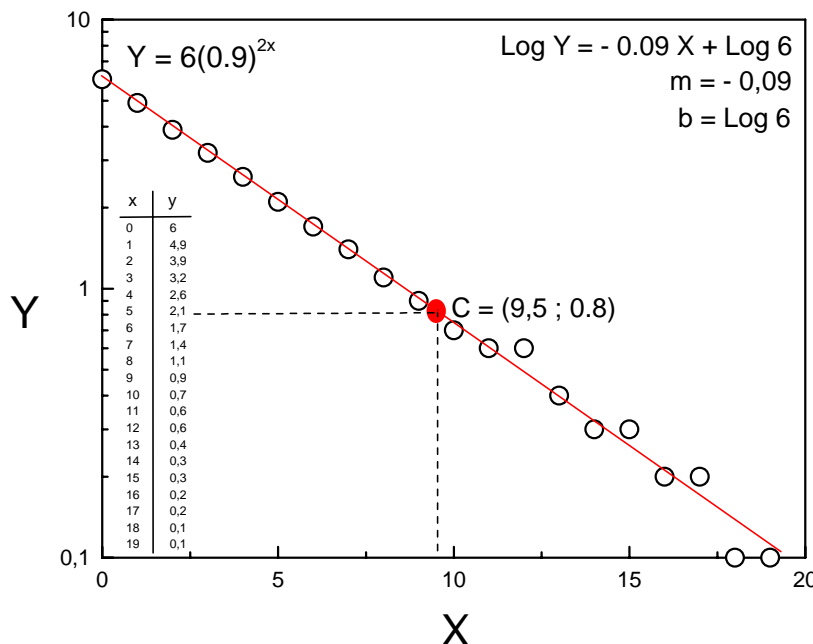
Debemos esperar los valores siguientes.

- Centroide = (9,5 ; 0,8).
- Corte = log 6.
- Pendiente = - 0,09.

Veamos los detalles en la gráfica # 9.2.

x	y
0	6,0
1	4,9
2	3,9
3	3,2
4	2,6
5	2,1
6	1,7
7	1,4
8	1,1
9	0,9
10	0,7
11	0,6
12	0,6
13	0,4
14	0,3
15	0,3
16	0,2
17	0,2
18	0,1
19	0,1

Tabla # 9.2



Gráfica # 9.2.

Dado que ya tenemos la ecuación de la recta $\log y = -0,09 x + \log 6$ y sabiendo que la función exponencial es de la forma $y = ka^{bx}$ podemos por analogía obtener la función buscada, $y = 6(0,9)^{2x}$.

Trazado de gráfica exponencial.

Ejemplo # 9.3. Grafiquemos la función siguiente, $y = 5x^2$, para $x = 2, 4, 6$ y 8 .

Lo primero que necesitaremos es elaborar la tabla # 9.3, para ello, evaluaremos la función dada con los valores de "x" para encontrar los valores de "y".

Ahora, recordemos que se trata de una función potencial, que ya la hemos estudiado en el anterior capítulo, por ello que debemos trabajar con un papel log-log.

Para adecuar el tipo de papel que necesitaremos, debemos mirar los valores máximos y mínimos de la tabla, con el objetivo de tener un factor de escala adecuado.

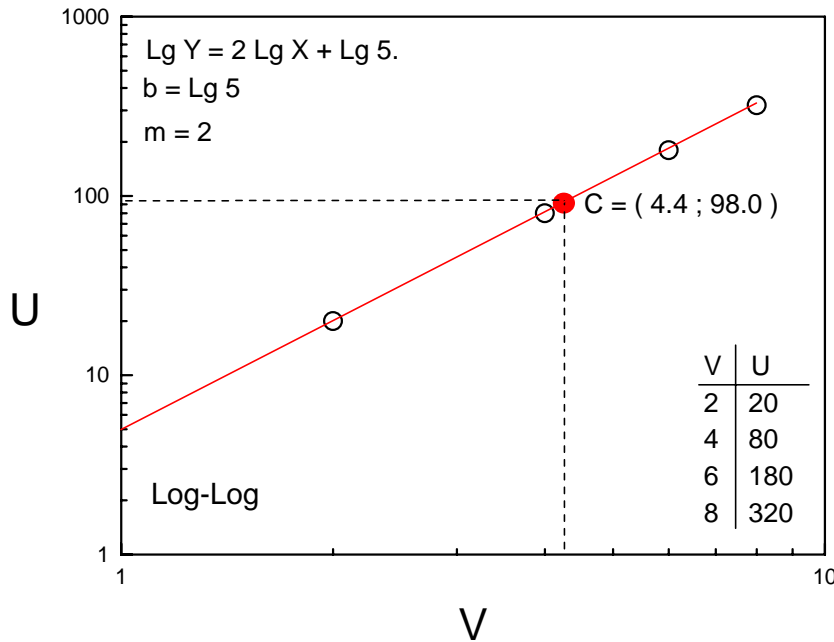
Debemos interesarnos por el corte de la recta con los ejes, pero no debemos olvidar que ahora nuestros dos ejes son logarítmicos, de manera que nos interesamos por el corte del eje log y cuando $\log(x = 1)$, recuerde que el $\log(1) = 0$.

De todo esto, podemos concluir que necesitaremos un papel log-log de 3 x 1 ciclos.

Acto seguido, con mucho cuidado, pasemos a graficar en nuestro papel y debemos tener algo parecido al grafico # 9.3.

x	y
2	20
4	80
6	180
8	320

Tabla # 9.3



Grafica # 9.3.

A partir del grafico, pruebe a tener los siguientes valores.

- Centroide = (4,4 ; 98,0)
- Corte = log 5.
- Pendiente = 2.

Con estos valores, tenemos finalmente nuestra ecuación de la recta, $\log y = 2 \log x + \log 5$.

Para estar seguro de que todos nuestros cálculos se efectuaron correctamente, tomemos dos valores “x” de la tabla y evaluemos la ecuación. Debemos esperar valores de “y” consistente con los valores tabulados.

- $x_1 = 2, \quad \log y_1 = 2 \log 2 + \log 5, \quad y_1 = 20.$
- $x_2 = 6, \quad \log y_2 = 2 \log 6 + \log 5, \quad y_2 = 180.$

Ejemplo # 9.4. Se tiene una función potencial desconocida, debemos graficar los valores de la tabla de datos # 9.4 y a partir de la gráfica, se debe obtener la ecuación correspondiente con la función potencial.

Verifiquemos los valores de la tabla (máximos y mínimos) para seleccionar el factor de escala y ciclos de nuestro papel log-log. Ahora pasemos a obtener nuestro grafico # 9.4.

x	y
2	1,25
4	0,31
6	0,14
8	0,08

Tabla # 9.4

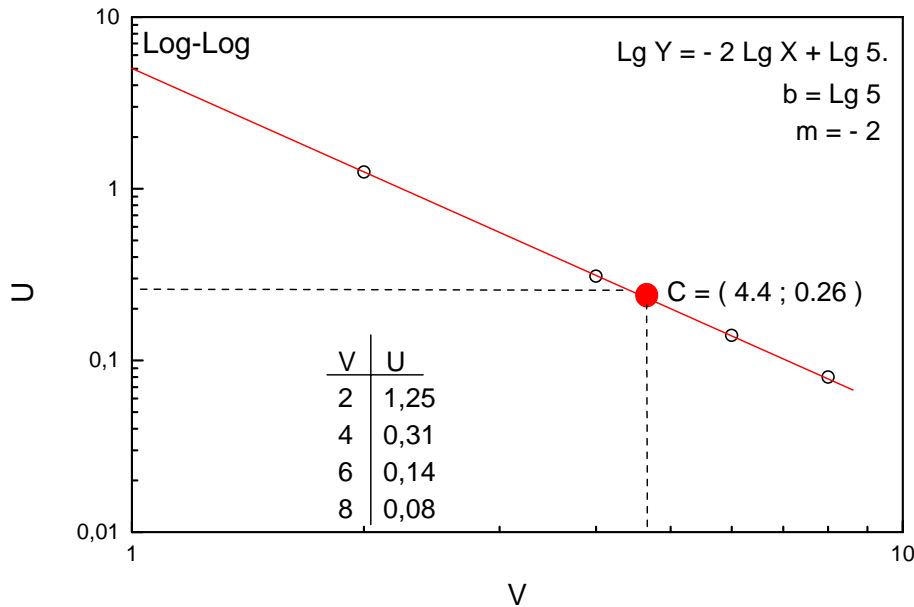


Grafico # 9.4.

Trabaje hasta obtener los siguientes valores:

- Centroide = (4,4 ; 0,26)
- Corte = $\log 5$.
- Pendiente = - 2.

Con esos valores, se puede escribir la ecuación de la recta, $\log y = -2 \log x + \log 5$.

Recordando que la función potencial es de tipo $y = b x^a$ y la ecuación de la recta es de tipo $v = a u + c$, para $\log y = a \log x + \log b$, podemos asociar termino a termino para obtener la función $y = 5 x^{-2}$.

10.-Errores.

En este capítulo se tratarán los errores en dos tipos de situaciones.

Caso I. Incertidumbre en el trazado de los puntos.

Después de haber realizado las medidas (o cálculos) de los datos, procederemos a graficarlos, pero cuando medimos (o calculamos), el valor obtenido no es exacto, siempre estará contenido dentro de un margen de incertidumbre equivalente a la apreciación del instrumento de medida (o del error absoluto).

Por ejemplo, se mide el diámetro de una esfera utilizando una regla ordinaria tendríamos algo como esto, diámetro = $(2,3 \pm 0,1)$ cm eso quiere decir que el verdadero valor está contenido en el intervalo (2,2 a 2,4) cm. Cuando trasladamos ese punto a un gráfico, también debemos reflejar dicha incertidumbre en el gráfico.

Para ilustrar mejor lo que se quiere lograr, miremos el gráfico # 10.1.

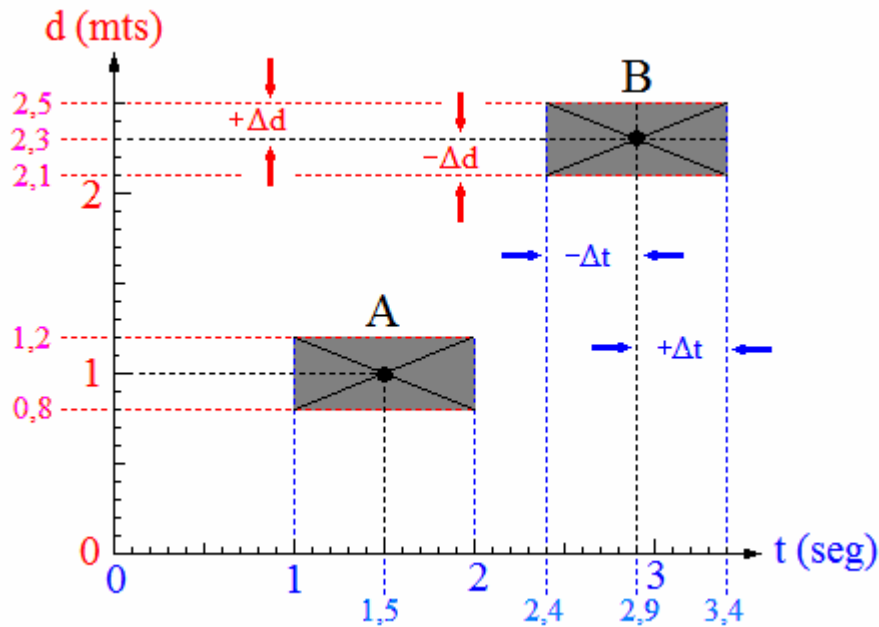


Gráfico # 10.1.

Tenemos una grafica de distancia vs tiempo. La distancia exhibe una incertidumbre de $\pm 0,2$ mts y el tiempo $\pm 0,5$ seg.

Entonces, cuando tracemos un punto, debemos dibujar también su incertidumbre y comprender que el valor de este punto puede estar ubicado en cualquier lado dentro del intervalo. Por esa razón, debemos encerrar el punto dentro de un símbolo que represente la incertidumbre de este, pudiéndose emplear círculo, equis o cuadrado si $\Delta x = \Delta y$; o rectángulo, óvalo, cruz, etc, si $\Delta x \neq \Delta y$.

Hay casos donde la incertidumbre es tan pequeña que no es posible graficarse en el papel, sin embargo es necesario dibujar el símbolo y citar que el símbolo no corresponde con la incertidumbre, en este caso el símbolo indicará que se trata de un punto experimental afectado por cierta incertidumbre, de manera que “siempre” se debe utilizar símbolos para representar los puntos experimentales.

Caso II. Incertidumbre en el trazado de la recta.

En la literatura conseguiremos diversos métodos para la incertidumbre en el corte y pendiente. Por ejemplo, el método de máxima y mínima pendiente que podemos encontrar en los libros, pero el método más empleado es el de “mínimos cuadrados” que lo podemos encontrar entre otros sitios, en la guía de laboratorio.

La manera más práctica es el empleo de software para graficar y estimar el error (que se basa en el método de mínimos cuadrados).

Software recomendado, Origin y Excel.

Capítulo 11.

Bibliografía.

1. Larouse, Diccionario Enciclopédico Usual. Ramón García Pelayo y Gross. Ediciones Larouse.
2. Guía de Laboratorio de Física. Miriam Chourio, Fulgencio Rueda y Vicente Sagredo. Editado por la Facultad de Ciencias, U.L.A.
3. Algebra y Trigonometría, con Geometría Analítica. Artur Goodman y Lewis Hirsch. Prentice Hall.
4. Fundamentos de Física, Tercera Edición. Frank J Blatt. Prentice Hall.
5. Física universitaria, Sexta Edición, Sears, Zemansky y Young. Addison Wesley
6. Americana.R.B. Laughlin: *A different universe*, 2005, Basic Books.
7. <http://es.wikipedia.org/wiki/Fisica>
8. <http://es.wikipedia.org/wiki/Fisica>
9. <http://recursos.cnice.mec.es/bancoimagenes2/buscador/imagen.php?idimagen=14319&zona=mat&nivel1=95&nivel2=54&nivel3=85&expresion=%22animal%22>