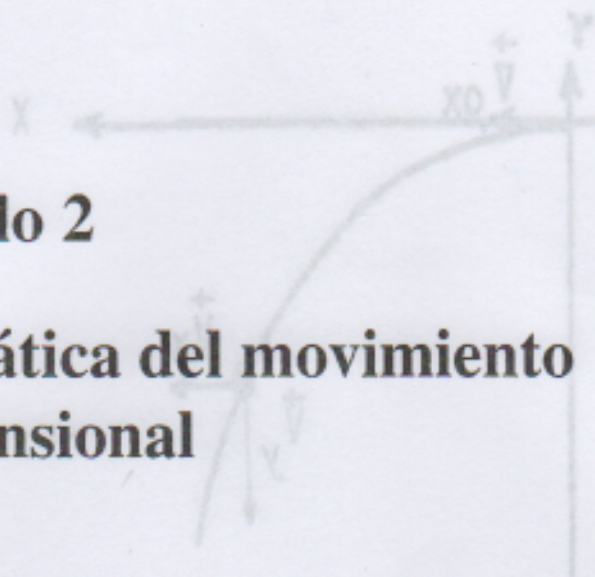


Parte II
Mecánica

Capítulo 2

Cinemática del movimiento bidimensional



2.1. Objetivos

1. Determinar la trayectoria que sigue un cuerpo disparado horizontalmente (trayectoria de un proyectil).
2. Comprobar la relación matemática que representa la trayectoria de dicho cuerpo.
3. Determinar la velocidad inicial de lanzamiento del cuerpo.

2.2. Equipo

- Rampa acanalada
- Esfera de acero
- Tabla y mesa
- Prensas para sujetar
- Cinta métrica
- Papel bond y papel carbón.

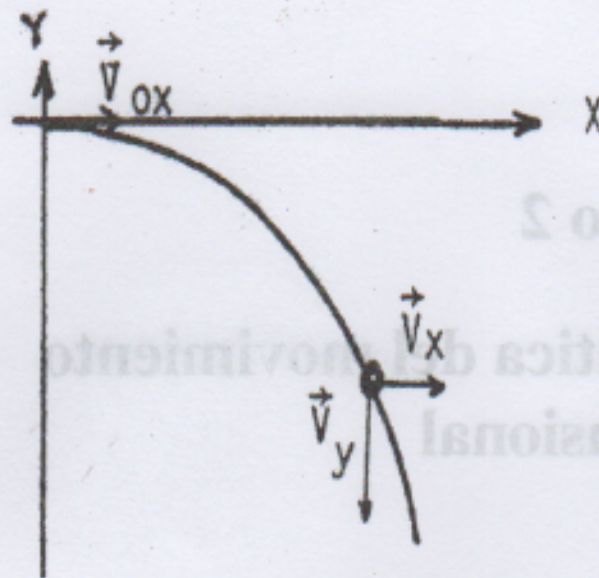


Figura 2.1: Trayectoria de una partícula lanzada horizontalmente

2.3. Teoría

El lanzamiento horizontal de un cuerpo corresponde a un movimiento bidimensional, en el cual la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la fuerza gravitacional que hemos llamado peso.

En el sistema de coordenadas de la fig. 2.1, la fuerza peso corresponde a $\vec{P} = -mg\hat{j}$, y si \vec{F} es la fuerza resultante sobre la partícula, entonces la segunda ley de Newton se escribe:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

Las componentes de la fuerza a lo largo de los ejes x, y son:

$$\vec{F}_y = m\vec{a}_y \quad (2.2)$$

$$\vec{F}_x = 0 \quad (2.3)$$

En la ecuación 2.2, $\vec{F}_y = \vec{P}$. Resolviendo esta ecuación se tiene,

$$\vec{V}_y = -gt\hat{j} \quad (2.4)$$

$$\vec{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{j} \quad (2.5)$$



Figura 2.2: Movimiento de la partícula en la rampa

Resolviendo la ecuación 2.3, se obtiene para el movimiento de la partícula en el eje x las ecuaciones cinemáticas siguientes:

$$\vec{V}_x = V_{0x} \hat{i} \quad (2.6)$$

$$\vec{x} = V_{0x} t \hat{i} \quad (2.7)$$

Las ecuaciones 2.5 y 2.7 corresponden a las ecuaciones paramétricas del movimiento en dos dimensiones.

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad ; \quad x = V_{0x}t$$

Eliminando el parámetro tiempo entre ellos, se tiene

$$y = -\frac{g}{2V_{0x}^2}x^2 \quad (2.8)$$

ecuación que representa la trayectoria seguida por el cuerpo.

Consideremos ahora el movimiento de un cuerpo sobre una rampa de lanzamiento, como se muestra en la fig. 2.2.

Suponiendo que éste es un sistema conservativo, la energía mecánica del cuerpo se conserva en todo el trayecto. Es decir,

$$mg(y_A - y_B) = \frac{1}{2}m(V_B^2 - V_A^2)$$

Considerando que el cuerpo parte del reposo, la velocidad en el punto B será:

$$V_B = \sqrt{2g(y_A - y_B)} \quad (2.9)$$

En el experimento a realizar el cuerpo es una esfera, la cual no puede ser considerada como una partícula sino más bien como un cuerpo rígido, puesto que además del movimiento de traslación posee un movimiento de rotación. Luego, la ecuación de conservación de energía mecánica es:

$$mg(y_A - y_B) = \frac{1}{2}mV_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2$$

donde I es el momento de inercia de la esfera alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y ω su velocidad angular de rotación.

Considerando que la esfera rota y se traslada sin deslizar, la condición de rodadura es $\omega = \frac{V}{R}$. Luego, la velocidad en el punto B, de la rampa, es

$$V_B = \sqrt{\frac{10}{7} g (y_A - y_B)} \quad (2.10)$$

Pero la ecuación anterior es válida sólo si la esfera rota teniendo un punto de contacto con la pista. En el experimento la esfera se mueve a lo largo de una canal, y por lo tanto posee dos puntos de contacto. Es por ello necesario hacer una corrección del radio usado en la condición de rodadura:

$$r = R \left(1 - \frac{a^2}{4R^2} \right)^{1/2}$$

donde a es el ancho de la canal y R el radio de la esfera.



Utilizando la nueva condición de rodadura, $\omega = V/r$, la expresión de la velocidad en el punto B vendrá dada por

$$V_B = \sqrt{\frac{10}{7} g (y_A - y_B) \left[\frac{1 - a^2/4R^2}{1 - 5a^2/28R^2} \right]^{1/2}} \quad (2.11)$$

2.4. Método

El sistema usado en el laboratorio consiste de una rampa acanalada orientada perpendicularmente a la mesa de soporte, y una tabla que actúa como pared donde se registran los impactos de la esfera de acero (ver fig 2.3).

Para estudiar la variación de las distancias y y x , la tabla, previamente cubierta con papel blanco y sobre éste papel carbón, se ubica a diferentes distancias del punto de salida y medidas sobre una línea trazada en el piso.

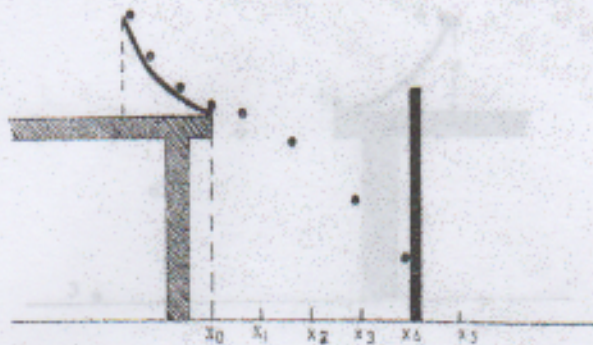


Figura 2.3: Registro de la trayectoria de la partícula

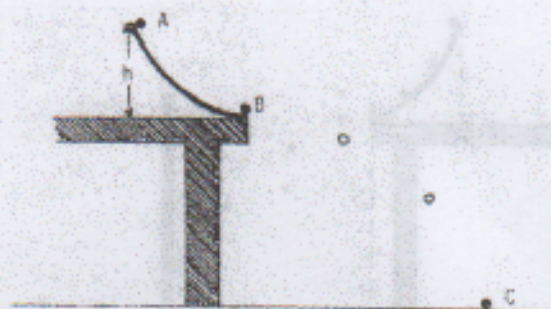
Para cada posición x de la tabla se deben realizar tres disparos, teniendo cuidado de *soltar la esfera desde la misma altura* (medirla) y de mantener estrictamente vertical la tabla. Recuerde que usted necesita marcar la posición $y = 0$ y $x = 0$ de su sistema de coordenadas.

2.5. Trabajo práctico

1. Realice las medidas según el método descrito antes.
2. Haga el gráfico de la posición y en función de la posición x y analice la curva obtenida.
3. Determine el valor de la velocidad inicial del cuerpo mediante el análisis de un gráfico adecuado de la relación 2.8.
4. Compare el valor obtenido gráficamente para la velocidad inicial con el valor de V_B que se obtiene de utilizar el *principio de conservación de la energía*, para el movimiento de la esfera en la rampa en los tres casos estudiados (ecuaciones 2.9, 2.10 y 2.11).

2.6. Cuestionario

1. ¿Influye el movimiento de rotación de la esfera en la trayectoria?



2. Una esfera de radio R y momento de inercia $I = \frac{2}{5}MR^2$ (respecto de un eje que pasa por su centro de masa) parte del reposo desde el punto A , como se muestra en la figura. Si la esfera rueda sin deslizar, entonces:
- ¿Cuál es la velocidad del centro de masa de la esfera cuando abandone la mesa?
 - ¿A qué distancia del pie de la mesa caerá la esfera?
 - ¿La distancia anterior sería igual si la esfera desliza en vez de rotar?
 - ¿Durante cuánto tiempo estará la esfera en el aire?
 - ¿Influye en el movimiento de la esfera, entre los puntos B y C , el hecho de que vaya rotando?
 - Si la esfera no rotara llegaría más lejos que lo calculado en (b).
 - ¿Qué momento de fuerza o torque experimenta dicha esfera?
 - Deduzca la ecuación de la trayectoria seguida por la esfera entre los puntos B y C , en función de los datos?

3. Enunciado del principio de Conservación de la energía.

2.6. Cuestionario

1. ¿Influye el movimiento de rotación de la esfera en la trayectoria?