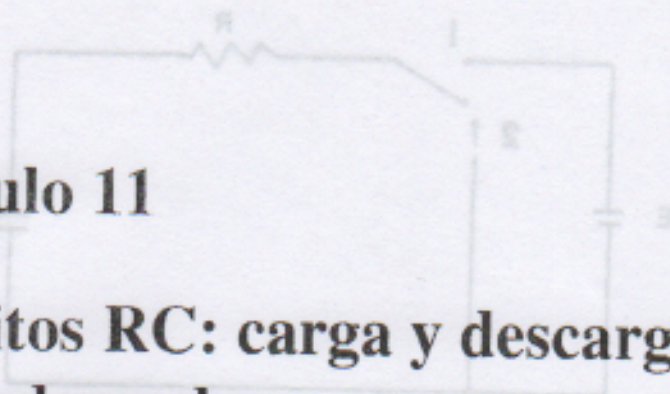




## Capítulo 11

# Circuitos RC: carga y descarga de un condensador

Figura 11.1: Circuito RC

### 11.1. Objetivos

1. Conocer el funcionamiento de un registrador y las limitaciones de dicho instrumento.
2. Conocer y verificar las leyes que rigen el proceso de carga y descarga de un condensador.
3. Verificar relaciones energéticas en sistemas estacionarios simples.
4. Verificar la ley de la conservación de la energía.

### 11.2. Equipo

1. Registrador
2. Fuente de corriente continua
3. Condensador
4. Caja decádica de resistencias
5. Papel cuadriculado
6. Interruptor de dos polos.

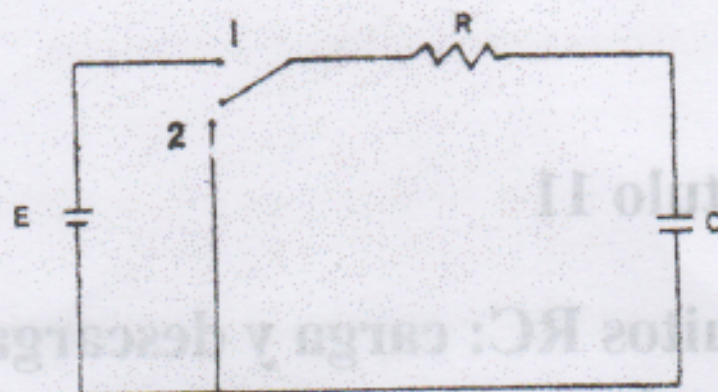


Figura 11.1: Circuito RC

7. Cables.

## 11.3. Teoría

### 11.3.1. Circuitos RC

Son circuitos que además de tener resistencias tienen condensadores como elementos del mismo. El estudio de estos circuitos nos conducirá a conocer corrientes que varían con el tiempo.

#### Carga de un condensador

Si el interruptor se encuentra en la posición 1 y aplicamos la ley de la conservación de la energía al circuito obtenemos:

$$\varepsilon dq = i^2 R dt + \frac{q}{C} dq \quad (11.1)$$

esto expresa que el trabajo hecho por la batería en el tiempo  $dt$  para mover la carga  $dq$ ,  $\varepsilon dq$ , es igual a la energía disipada en  $R$ , es decir  $i^2 R dt$ , más la energía almacenada en el condensador  $[(q/C) dq]$  en el tiempo  $dt$ . Dividiendo la ecuación 11.1 por  $dt$  y sabiendo que  $dq/dt = i$  obtenemos:

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad (11.2)$$

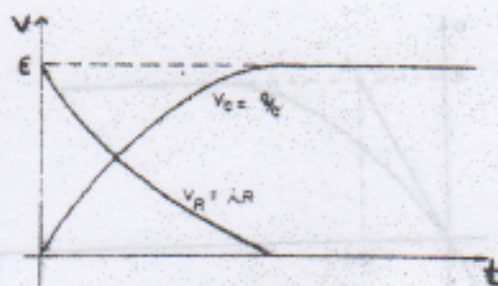


Figura 11.2: Curvas características de  $V_C$  y  $V_R$  en el proceso de carga del condensador.

que es la expresión de la segunda ley de Kirchhoff. Como  $i = \frac{dq}{dt}$  se obtiene:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{\varepsilon}{R} \quad (11.3)$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) \quad (11.4)$$

para el caso de que  $q(0) = 0$ .

La expresión para la corriente que pasa por el circuito es:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \quad (11.5)$$

las diferencias de potencial en  $C$  y en  $R$  estarán dadas por,

$$V_C = \frac{q}{C} = \varepsilon(1 - e^{-t/RC}) \quad (11.6)$$

$$V_R = iR = \varepsilon e^{-t/RC} \quad (11.7)$$

se ve fácilmente que, en cada instante

$$V_C + V_R = \varepsilon$$

(en estas deducciones hemos supuesto que la resistencia interna de la fuente de alimentación es cero).

La figura 11.2 es una gráfica característica para los voltajes en función del tiempo:

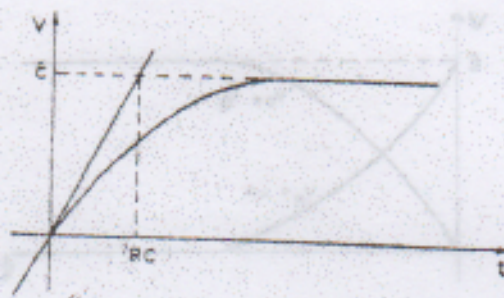


Figura 11.3: Determinación de la capacidad del condensador (Método de la pendiente).

De la figura 11.2 se ve que, a medida que el tiempo pasa, el condensador es cargado cada vez más lentamente (la corriente de carga disminuye). Esto debe ser así, ya que a medida que aumenta la carga en el condensador su diferencia de potencial se hace mayor.

La cantidad  $\tau_C = RC$  tiene la dimensión de tiempo y se llama *constante de tiempo capacitiva*. Esta cantidad es una medida de la rapidez con se carga el condensador; para el tiempo  $t = RC$  el voltaje del condensador será:

$$V_C = \varepsilon(1 - e^{-1}) = 0,63 \varepsilon$$

o sea que, para ese tiempo el voltaje del condensador alcanzó el 63 % de su valor final.

Si derivamos a  $V_C$  con respecto al tiempo, obtenemos:

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{\varepsilon}{RC} e^{-t/RC}$$

Para  $t = 0$ , obtenemos:

$$(dV_C/dt)_{t=0} = \varepsilon/RC$$

esto quiere decir que, en el punto  $t = 0$ , la tangente a la curva tiene una pendiente igual a  $\varepsilon/RC$ .

Podemos ver que, si el proceso fuese lineal, el tiempo que tardaría en cargarse el condensador sería justamente  $RC$ . Esto nos da la posibilidad de medir  $RC$ , utilizando el método de la pendiente.

Otra cantidad que se usa para caracterizar al circuito  $RC$  es el tiempo ( $T_{1/2}$ ) que transcurre hasta que el voltaje del condensador haya alcanzado el valor  $\varepsilon/2$ . La relación entre  $T_{1/2}$  y  $\tau_C$  se obtiene de la siguiente manera:

$$V_C = \varepsilon(1 - e^{-t/\tau_C}) \quad \text{y} \quad V_C(T_{1/2}) = \varepsilon/2$$

por lo que:

$$\varepsilon/2 = \varepsilon(1 - e^{-T_{1/2}/\tau_C})$$

de aquí se obtiene:

$$1/2 = e^{-T_{1/2}/\tau_C}$$

de aquí:

$$\ln(1/2) = -T_{1/2}/\tau_C$$

lo que nos da:

$$\tau_C \times \ln 2 = T_{1/2} \quad (11.8)$$

con  $\tau_C = RC$ .

Si se mide a  $T_{1/2}$  para diferentes valores de  $R$  y se hace una gráfica de  $T_{1/2}$  en función de  $R$  se obtendrá una recta, de cuya pendiente se puede determinar a  $C$ .

### Descarga de un condensador

Después de haber cargado el condensador  $t \gg RC$ , se pasa el interruptor a la posición 2 (ver figura 11.1). En esta posición podemos observar que la fuente de poder queda aislada del circuito, por lo tanto no habrá una *f.e.m.* y la segunda ley de Kirchhoff se reduce a:

$$iR + (q/C) = 0 \quad (11.9)$$

con

$$i = dq/dt$$

se obtiene por integración:

$$q = q_0 e^{-t/RC} \quad (11.10)$$

donde:

$$q_0 = \varepsilon C$$

es la carga final del condensador al ser cargado. La corriente se obtiene derivando la ecuación 11.10.

$$i = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \quad (11.11)$$

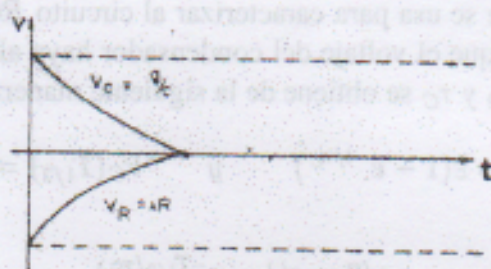


Figura 11.4: Curvas características de  $V_C$  y  $V_R$  en el proceso de descarga del condensador.

el signo negativo indica que el condensador se está descargando.

Para  $V_R$  y  $V_C$  se obtiene:

$$(11.11) \quad V_R = iR = -\varepsilon e^{-t/RC} \quad (11.12)$$

$$V_C = q/C = \varepsilon e^{-t/RC} \quad (11.13)$$

Se ve fácilmente que en cada instante

$$V_R + V_C = 0$$

En la gráfica de la figura 11.4 podemos ver la variación de ambos voltajes con el tiempo. El voltaje en el condensador disminuye con el tiempo, ya que va perdiendo carga. Así mismo puede observarse que, a medida que el tiempo pasa, el condensador se descarga cada vez más lentamente.

Vemos entonces que en el proceso de descarga, el significado de  $RC$  y  $T_{1/2}$  es el mismo que para el proceso de carga y la relación entre estas dos cantidades es la misma. Por lo tanto, también podemos determinar a  $C$  estudiando la descarga de un condensador.

### Balance de energía

Sabemos que la energía que proporciona la batería en el tiempo  $dt$  es  $\varepsilon dq$ , ecuación 11.1, pero sabemos adicionalmente que:

$$dq = i dt$$

por lo tanto la energía proporcionada por la batería en el tiempo  $dt$  será:

$$(11.14) \quad dE_B = \varepsilon i dt$$

ahora bien, la energía proporcionada por la batería en el proceso de carga viene dada por la siguiente expresión,

$$E_B = \int dE_B = \int_0^\infty \varepsilon i dt = \varepsilon \int_0^\infty i dt \quad (11.14)$$

ya que:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

es la carga que llega por unidad de tiempo al condensador, el valor de la integral,

$$\int i dt$$

será la carga final del condensador. Tenemos pues que,

$$q_0 = \int_0^\infty i dt \quad (11.15)$$

por lo que podemos escribir,

$$E_B = \varepsilon q_0. \quad (11.16)$$

El valor de la ecuación 11.15 se puede determinar de una gráfica, como la de la figura 11.2, de la siguiente manera:

Se toma el valor máximo de  $V_C$  (que debe ser  $\varepsilon$ ) y multiplicando por  $C$ .

$$q_0 = \varepsilon C$$

o calculando el área debajo de la curva  $V_R$  versus  $t$ , esto es evaluar  $\int V_R dt$ , ya que

$$q_0 = \int_0^\infty i dt = \frac{1}{R} \int_0^\infty V_R dt \quad (11.17)$$

La energía almacenada en el condensador en este proceso estará dada por:

$$E_C = \int_0^\infty \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2} \varepsilon q_0 \quad (11.18)$$

$\varepsilon$  y  $q_0$  se pueden determinar como en el caso anterior.

Por la ley de la conservación de la energía, la energía disipada en la resistencia  $R$  debe ser,

$$E_R = E_B - E_C = \frac{1}{2} \varepsilon q_0. \quad (11.19)$$

Esto se comprueba de la siguiente manera,

$$E_R = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} V_R^2 dt = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \epsilon^2 e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} \epsilon^2 C = \frac{1}{2} \epsilon q_0. \quad (11.20)$$

Por otra parte, de una gráfica como la figura 11.2, podemos evaluar a:

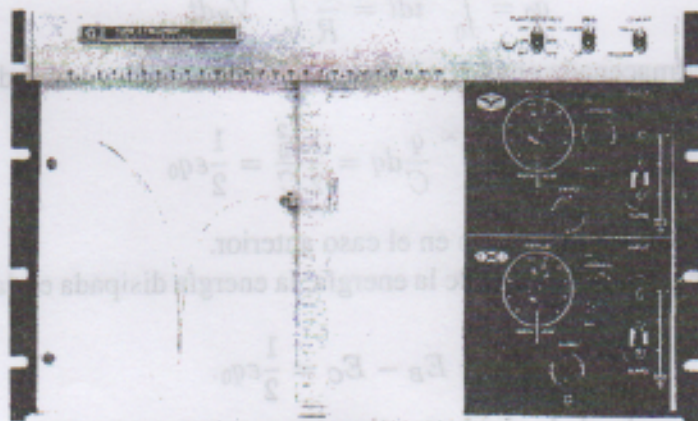
$$\int_0^{\infty} V_R^2 dt$$

para ello elevamos al cuadrado el potencial  $V_R$  y graficamos  $V_R^2$  en función del tiempo  $t$ , luego, hallamos el área de esta nueva curva.

Para el caso de la descarga del condensador se puede demostrar que la energía almacenada en el condensador es disipada completamente en la resistencia. Esto también se puede comprobar experimentalmente evaluando, como arriba, gráficos del tipo de la figura 11.4.

## 11.4. Método

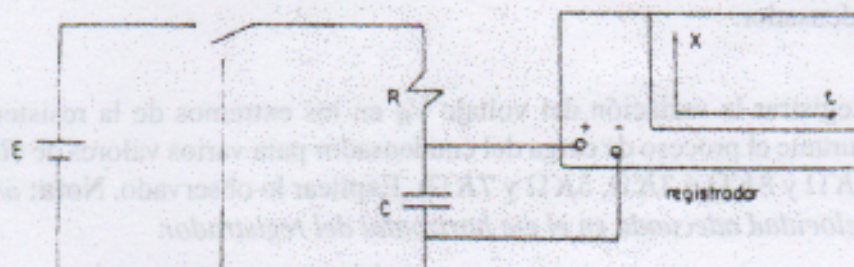
En esta práctica se utilizará un *registrador x - t* par obtener las gráficas o registros de las variaciones del voltaje en el proceso de carga y descarga de un condensador ( esto es: registrar curvas como las de las figuras 11.2, 11.4, y 11.5). En la práctica 10.3.2 se explica el funcionamiento del registrador. También se menciona que la velocidad de respuesta del registrador es relativamente baja, lo que implica que las señales que varían rápidamente con el tiempo no pueden ser registradas (o no serán registradas con exactitud).



Así por ejemplo, es problemático registrar el voltaje en la resistencia  $R$  ( $V_R$  en la figura 11.2) al cargar el condensador. La pluma del registrador necesita un cierto tiempo para ir de cero a la posición correspondiente al voltaje  $\varepsilon$  (que es el voltaje inicial en  $R$ ), si la velocidad de barrido es muy grande el voltaje  $\varepsilon$  no corresponderá al voltaje registrado para  $t = 0s$ . Por otra parte, como la respuesta del registrador es lenta, cuando la aguja logre subir hasta cierta altura, ya el voltaje en  $R$  será menor (ha comenzado a disminuir) así que la aguja no alcanzará a llegar al valor  $\varepsilon$ .

## 11.5. Trabajo práctico

Montar el siguiente circuito:



1. En esta parte:

- Registrar la variación de voltaje del condensador en función del tiempo, para cinco (5) valores diferentes de la resistencia  $R$  del orden de los kilo-ohmios (hasta un máximo de  $10 K\Omega$ ), durante el proceso de carga
- A partir del registro anterior, obtener los datos necesarios y graficar  $T_{1/2}$  en función de  $R$  y obtener la capacidad  $C$  del condensador.

2. En esta parte:

- Registrar la variación del voltaje en el condensador  $V_C$  en función del tiempo  $t$ , para una resistencia de  $3 K\Omega$  durante los procesos de carga y descarga del condensador. Determinar por el método de la pendiente la capacidad del condensador y comparar con la obtenida en la parte 1. Comparar  $T_{1/2}$  para los procesos de carga y descarga del condensador.

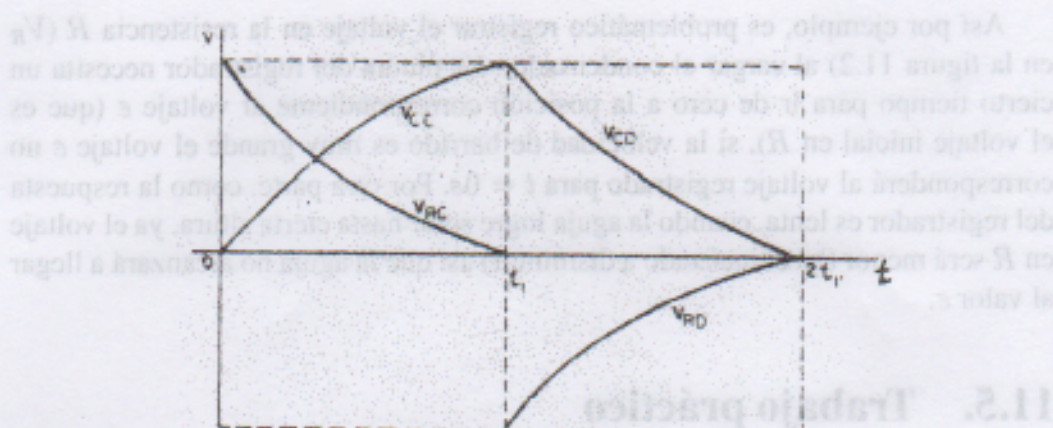


Figura 11.5: Curvas características de  $V_C$  y  $V_R$  en los procesos de carga y descarga del condensador.

3. Registrar la variación del voltaje  $V_R$  en los extremos de la resistencia  $R$ , durante el proceso de carga del condensador para varios valores de  $R$  ( $2K\Omega$ ,  $5K\Omega$  y  $8K\Omega$  ó  $3K\Omega$ ,  $5K\Omega$  y  $7K\Omega$ ). Explicar lo observado. **Nota:** usar una velocidad adecuada en el eje horizontal del registrador.
4. Hacer un registro de  $V_C$  y  $V_R$  en función del tiempo  $t$  (ambos registros superpuestos), con los siguientes datos,  $R = 7K\Omega$  ó  $R = 6K\Omega$ . De esta gráfica:
  - a) Evaluar gráficamente,  $q_0 = \int_0^\infty i_R dt$ .
  - b) Comprobar si este valor de  $q_0$  concuerda con el valor de  $q_0$  que se puede obtener del registro de  $V_C$  en función del tiempo  $t$  ( $q_0 = V_0 C$ ).
  - c) Con el valor de  $q_0$  calcule  $E_B$  y  $E_C$ .
  - d) Elevar al cuadrado la curva  $V_R(t)$  (al menos 8 puntos) y hacer una gráfica  $V_R(t)$  en función de  $t$ . Evaluar la energía disipada en  $R$ .
  - e) Con lo obtenido en los puntos (c) y (d) comprobar la ley de la conservación de la energía.
5. Verificar las siguientes gráficas teóricas (figura 11.5) realizando el experimento respectivo:

- Disminuya el voltaje de la fuente de  $5V$  a  $2,5V$  o cambie la escala vertical del registrador de  $1V/In$  a  $0,5V/In$  y coloque el nivel cero en la mitad del papel.
- Explicar las posibles diferencias que se presentan entre la teoría y lo obtenido experimentalmente.
- En el intervalo  $(0, t_1)$ , para varios tiempos, evaluar la relación:

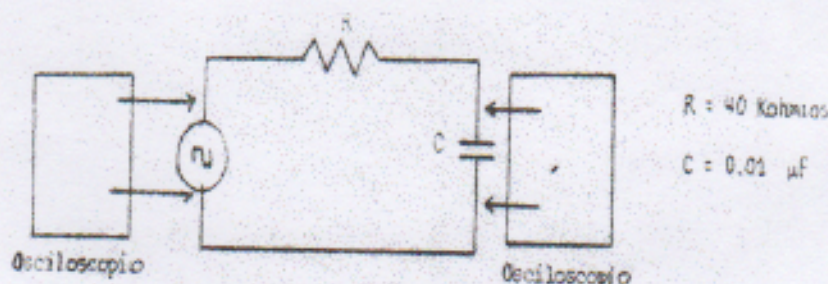
$$V_{CC} + V_{RC} = \varepsilon$$

donde  $\varepsilon$  es el voltaje de la fuente.

- En el intervalo  $(t_1, 2t_1)$ , para varios tiempos evaluar la relación:

$$V_{CD} + V_{RD} = 0$$

- Instalar el circuito:



- Escoger una frecuencia en el generador y una posición del selector (base de tiempo), de tal forma, que se observe solamente un período de la señal, en la pantalla del osciloscopio.
  - Comparar la señal de entrada con la de salida. Dibujarlas.
  - Medir el valor  $T_{1/2}$  en la pantalla del osciloscopio y determinar la capacidad del condensador. Compararla con el valor usado.
  - Observar la salida en  $R$  y compararla con la de  $C$ .
  - Para el valor de  $R$  fijo varíe  $C$  en un rango bastante amplio. Observar y explicar. Repetir este procedimiento fijando  $C$  y variando  $R$ .

## 11.6. Cuestionario

1. Demostrar que, en la descarga del condensador, la energía que estaba almacenada en el condensador es disipada completamente en la resistencia.
2. ¿El tiempo que se necesita para cargar un condensador depende de la f.e.m. de la fuente de poder?. Explicar.

