A. Paniagua
Física 20

Fluidos
Módulo 1

Estática de los Fluidos

Conceptos Básicos

Fluido

Se acostumbra a clasificar la materia desde un punto de vista macroscópico en sólidos y fluidos. Se entiende por fluido a una sustancia que puede fluir, por lo cual son fluidos los líquidos y los gases. Tenemos entonces que un fluido no es capaz por sí solo de mantener una forma determinada y toma la forma del recipiente que lo contiene. En el caso de un gas además no puede mantener su volumen a menos que se encuentre contenido en un recipiente cerrado.

Existen materiales que fluyen muy lentamente por lo cual se comportan como sólidos en los períodos de tiempo que trabajamos con ellos, ejemplo de esto son el vidrio, el asfalto. En catedrales antiguas se puede observar que el vidrio de los vitrales es mas grueso en la parte inferior de ellos.

Densidad

El estudio de la mecánica de los fluidos utiliza la densidad de una sustancia definida como su masa por unidad de volumen.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La densidad de una sustancia con respecto a la densidad del agua se denomina ***densidad relativa***.

Presión p

Un fluido en reposo no puede resistir fuerzas tangenciales, pues las capas del fluido resbalarían una sobre la otra cuando se aplica una fuerza en esa dirección. Precisamente esta incapacidad de resistir fuerzas tangenciales (esfuerzos de corte) es lo que le da la propiedad de cambiar de forma o sea fluir.

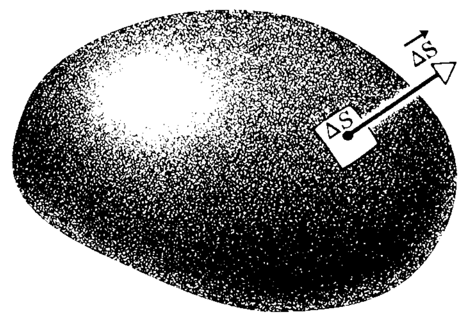
Por lo tanto sobre un ***fluido en reposo*** sólo pueden actuar fuerzas perpendiculares. Tenemos por lo tanto que las paredes del recipiente, que contienen a un fluido en reposo, actúan sobre éste con fuerzas perpendiculares a la superficie de contacto. De igual manera el fluido actúa sobre las paredes del recipiente con una fuerza de igual magnitud y de sentido contrario.

Para estudiar la fuerza que un fluido ejerce sobre la superficie en contacto con él se define la presión p como la magnitud de la ***fuerza normal*** por unidad de área de superficie.

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} \qquad (1T)$$

Consideremos una superficie cerrada que contiene un fluido.

Sea $\Delta\vec{S}$ un vector como el que se muestra en la fig. Este $\Delta\vec{S}$ es un vector tiene una magnitud que es el área del elemento ΔS, su dirección es perpendicular a la superficie y su sentido es saliente de una superficie cerrada. Podemos entonces escribir la fuerza con que el fluido actúa sobre ese elemento como $\Delta\vec{F} = p\Delta\vec{S}$



A partir de la expresión (1T) tenemos para la presión en un punto

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

Variaciones de presión en un fluido en reposo

Si un fluido se encuentra en reposo cada una de sus partes se encuentran en equilibrio. Para conocer como varía la presión en esta situación física, analicemos un elemento de ese fluido que tiene la forma que se muestra en la fig.a) y se encuentra ubicado como se muestra en la fig. b)

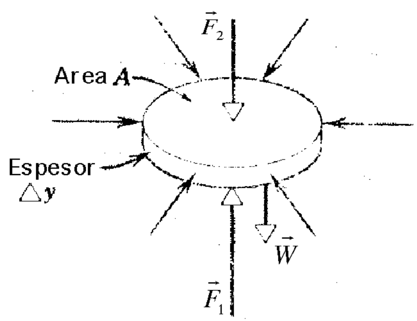


Fig. a)

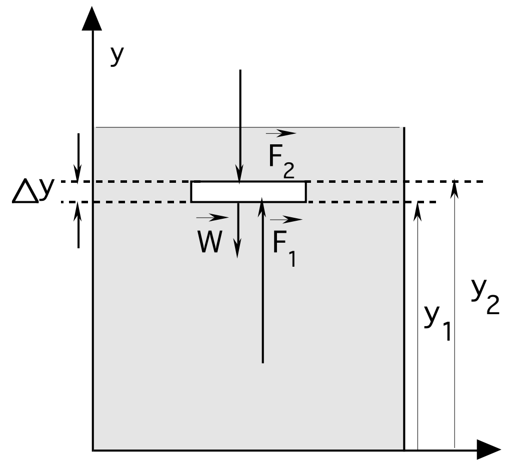


Fig. b)

Para que ese elemento se encuentre en reposo la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él debe ser nula. Por lo tanto

$$F_1 = F_2 + W \tag{2T}$$

donde W es el peso de ese elemento de fluido que tiene un área A

$$W = \rho V g = \rho g A(y_2 - y_1) \tag{3T}$$

Considerando que

$$F = pA$$

Tenemos de (2T) que

$$p_1 - p_2 = \rho g(y_2 - y_1) \tag{4T}$$

lo que podemos escribir como

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \tag{5T}$$

$$\Delta p = -\rho g \Delta y$$

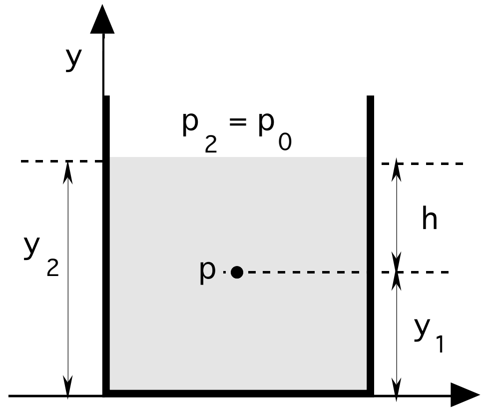
escribiendo esta expresión en forma diferencial tenemos

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \tag{6T}$$

El signo menos indica que a medida que crece y la presión decrece.

La cantidad ρg se llama a menudo *peso específico del fluido*.

Consideremos un líquido contenido en una vasija como se muestra en la fig.



Puesto que la presión ejercida en la superficie del líquido es la presión atmosférica tenemos $p_2 = p_0$, si llamamos p a la presión en el punto que tiene como coordenada y_1 podemos escribir la expresión (5T) como

$$p_0 - p = -\rho g h$$

de donde obtenemos para la presión en el líquido

$$p = p_0 + \rho g h \qquad (7T)$$

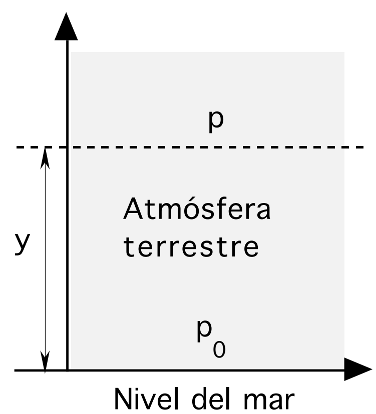
A partir de (7T) podemos observar que la presión es la misma en todos los puntos que se encuentran a la misma profundidad.

Para los gases la densidad ρ es relativamente pequeña y por lo tanto se puede considerar que la presión es la misma para todos el gas contenido en un envase. Pero no es así si h es grande, en este caso la presión del aire varía continuamente cuando nos elevamos a grandes alturas.

Variación de la presión con la altitud en la atmósfera terrestre

Para encontrar la variación de la presión en función de la altura utilizaremos la expresión

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \qquad 6T)$$



En este desarrollo vamos a considerar la variación de g con la altura insignificante y la densidad ρ del aire en la atmósfera proporcional a la presión $\rho \approx p$.

Tenemos entonces que

$$\rho = cte\ p \qquad \rho_0 = cte\ p_0$$

por lo tanto

$$\rho = \rho_o \frac{p}{p_o} \qquad (8T)$$

reemplazando (8T) en (6T) y haciendo separación de variables tenemos

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_o}{p_o} dy$$

Integramos esta expresión desde el valor p_0 en $y = 0$ hasta el valor p en y

$$\ln\frac{p}{p_o} = -\frac{g\rho_o}{p_o} y \qquad \frac{p}{p_o} = e^{-g(\rho_0/p_0)y} \qquad p = p_o e^{-g(\rho_0/p_0)y} \qquad (9T)$$

Considerando

$g = 9.80\ m/s^2$ $\quad \rho_0 = 1.20\ kg/m^3$ a $20°\ C$ $\quad p_0 = 1.01\times10^5 N/m^2$

Podemos escribir (9T) como

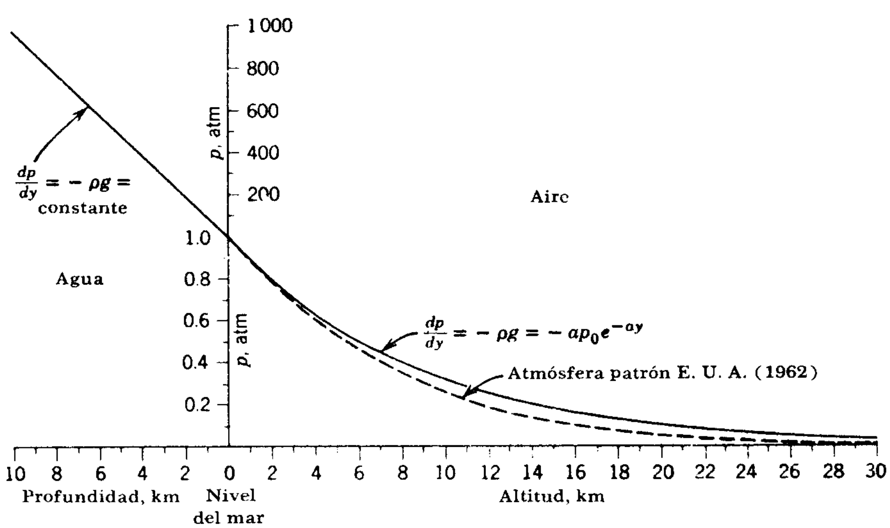
$$p = p_o e^{-ay} \qquad (10T) \qquad \text{con } a = 0.116\ km^{-1}$$

En el siguiente gráfico podemos ver:

a) la variación de la presión con la altura, en el aire

b) la variación de la presión con la profundidad en el agua.

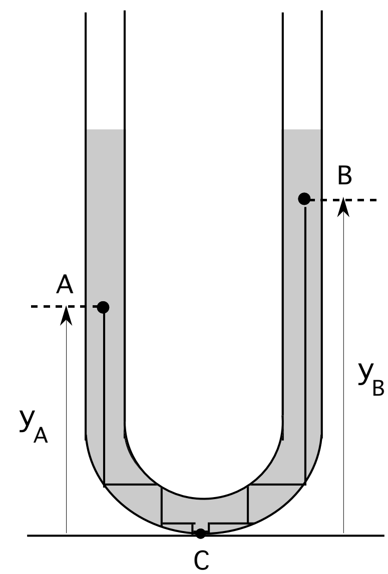
Se supone que $p = 1\ atm$ exactamente al nivel del mar.



Presión en vasos comunicantes

Los dos tubos unidos que aparecen en la fig. reciben el nombre de vasos comunicantes. Ellos contienen un líquido homogéneo.

Deseamos comparar la presión en los puntos A y B de dichos vasos, para lo cual aplicaremos la ecuación (5T) a los puntos A y C, y también a los puntos C y B. Dividimos la trayectoria entre esos puntos en tramos horizontales y verticales, los tramos horizontales no contribuyen pues corresponden a puntos de igual presión, por lo tanto tenemos a partir de la expresión (5T)



$$p_C - p_A = \rho g(y_A - y_C)$$

$$p_B - p_C = \rho g(y_C - y_B)$$

Sumando estas expresiones tenemos

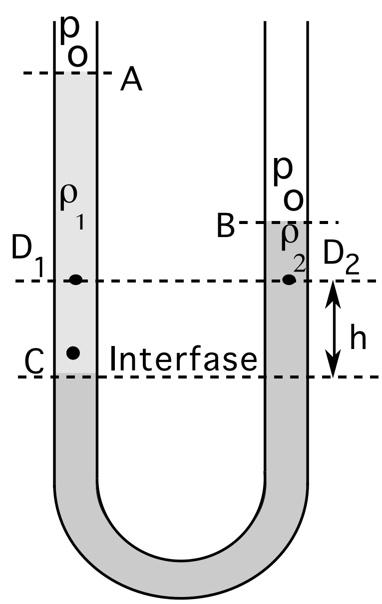
$$p_B - p_A = \rho g(y_A - y_B)$$

Por lo tanto la diferencia de presión entre dos puntos de un líquido homógeneo depende solamente de la diferencia de elevación entre esos puntos. Esta afirmación es válida independiente de la forma del depósito que lo contenga.

Analicemos los mismos vasos comunicantes conteniendo dos líquidos inmiscible de distinta densidad.

Ahora el nivel en ambos vasos no es el mismo, esta más alto en el lado que contenga el líquido de menor densidad, en este caso el lado izquierdo como muestra la fig.

Como los vasos están abiertos sobre la superficie de los líquidos en cada uno de los tubos actúa la presión atmosférica p_0



Puesto que los líquidos se encuentran en reposo la presión a la altura C es la misma en ambos vasos.

Consideremos dos puntos D_1 y D_2 ubicados a la misma altura como se muestra en la fig. tenemos entonces para estos puntos que

$$p_{D1} = p_C - \rho_1 g h \qquad\qquad p_{D2} = p_C - \rho_2 g h$$

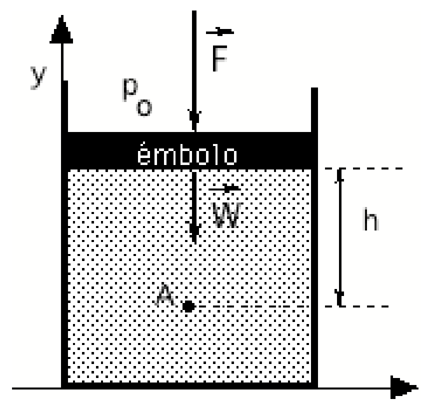
Puesto que $\rho_1 < \rho_2$ tenemos entonces que $p_{D1} > p_{D2}$

Tenemos por lo tanto que la presión disminuye más lentamente de C a D_1 que de C a D_2 puesto que la columna $C \to D_1$ de la izquierda pesa menos que la columna $C \to D_2$ de la derecha debido a la diferencia de densidades de los líquidos.

Principio de Pascal

Consideremos un líquido confinado en un envase y encerrado en su parte superior por un émbolo sobre el cual actúa una fuerza $\vec{F}$. Tenemos que en este caso la presión externa p_{ext} en la superficie superior del líquido está dada por

$$p_{ext} = p_0 + p_F + p_W$$



Tenemos entonces que en esta situación podemos escribir a partir de la expresión (7T) la presión p para un punto A ubicado a una profundidad h de la superficie del líquido como

$$p = p_{ext} + \rho g h \qquad (8T)$$

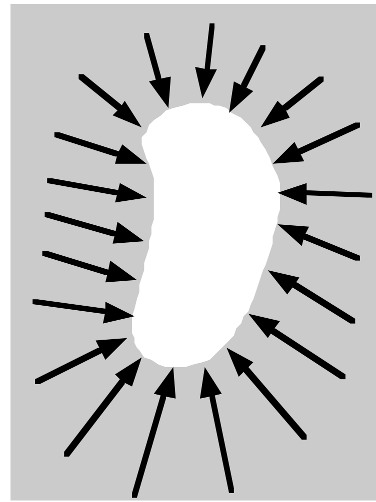
Considerando que los líquidos son casi incomprensibles podemos ver de la expresión (8T) que cualquier variación de la presión externa Δp_{ext} produce una variación de la presión Δp en el punto A

Este resultado fue enunciado por Blaise Pascal (1623-1662) y se conoce como el principio de Pascal:

" Toda presión aplicada a un líquido confinado se transmite sin reducción a todos lo puntos del líquido y a las paredes del depósito que lo contiene ".

En este principio se basa la prensa hidráulica.

Principio de Arquímedes



El principio de Arquímedes es también una consecuencia de las Leyes de la estática de los fluidos.

Tenemos que cuando un cuerpo está sumergido parcial o totalmente en un fluido (ya sea líquido o gas) en reposo, el fluido ejerce una presión sobre todas las partes de la superficie del cuerpo en contacto con el fluido. La presión es mayor en la partes sumergidas a mayor profundidad por lo cual el cuerpo experimentará una fuerza resultante ascendente llamada " fuerza de empuje".

La presión en cada parte de la superficie del cuerpo no depende del material de que está hecho el cuerpo, por lo tanto podemos imaginariamente reemplazar el cuerpo por el mismo fluido que lo está rodeando, esta porción de fluido experimentará las mismas presiones que el cuerpo que estaba en ese espacio y estará en reposo. Por lo tanto la fuerza de empuje que actúa sobre esa porción de fluido será igual a su peso y actuará hacia arriba pasando por su centro de gravedad.

De aquí se deduce el principio de Arquímedes: "un cuerpo total o parcialmente sumergido experimenta un empuje ascendente igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo".

Comentario.

Arquímedes, un matemático, físico e ingeniero griego, fue quizás el más grande científico de la antigüedad. De acuerdo con la leyenda, el rey Hierón pidió a Arquímedes que determinara si su corona estaba hecha de oro puro o si se había utilizado otro metal en aleación con el oro. La tarea tenía que efectuarse sin dañar la corona. Se cuenta que Arquímedes encontró la solución mientras se bañaba, cuando advirtió una pérdida parcial de peso después de sumergir sus brazos y piernas en el agua. Como cuenta la historia, fue tanta su emoción con su descubrimiento que corrió desnudo por las calles de Siracusa gritando ¡Eureka ! que es la palabra griega que significa ¡Lo encontré!

Pregunta: Explique como Arquímedes determinó si la corona había sido hecha sólo de oro o de alguna aleación.

Medida de la presión

Torricelli ideo un método para medir la presión atmosférica el inventar el barómetro de mercurio en 1643.

Aplicando a la situación representada en la fig. la ecuación

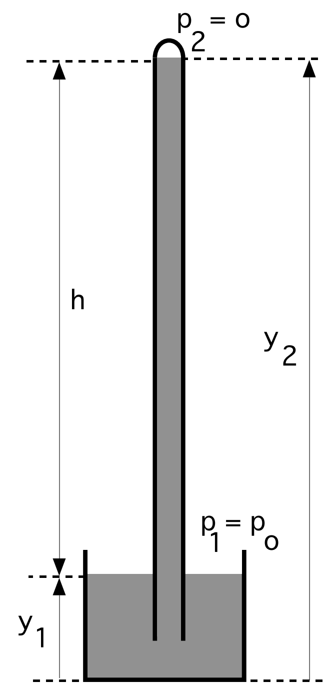
$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \qquad (5T)$$

tenemos que

$$p_0 = \rho g h$$

donde h es la altura de la columna de mercurio (76 cm).

La mayoría de los aparatos que miden presiones utilizan la presión atmosférica como nivel de referencia.



Se define como ***presión manométrica*** a la diferencia entre la presión real y la atmosférica.

$$p_m = p - p_0$$

La presión real se denomina ***presión absoluta***.

Unidades de presión

En la práctica la presión se mide en milímetros de mercurio llamados también Torr en honor del Físico Torricelli. Otra unidad común de presión es la atmósfera (atm) que es la presión del aire al nivel del mar y el Pascal (Pa) donde 1 $Pa = 1$ N/m^2.

1 atm = 760 mm Hg = 760 Torr = 1.013 x $10^5 N/m^2$ = 1.013 x 10^5 Pa

1 bar = 10^3 milibar = 10^5 N/m^2 = 10^5 Pa

Manómetro

Es un dispositivo que se utiliza para medir la presión manométrica.

Aplicando al manómetro de la fig. la ecuación (5T) $p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$ y considerando que

$$p_1 = p \qquad \text{y} \qquad p_2 = p_0$$

tenemos

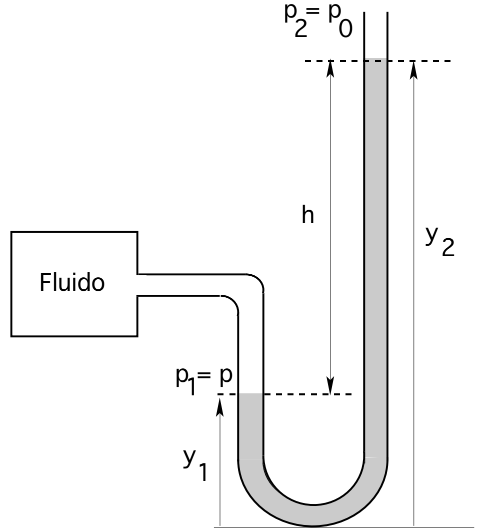
$p - p_0 = \rho g h$

ya que

$p - p_0 = p_{manométrica}$

Tenemos entonces que

$p_{manométrica} = \rho g h$



Problemas

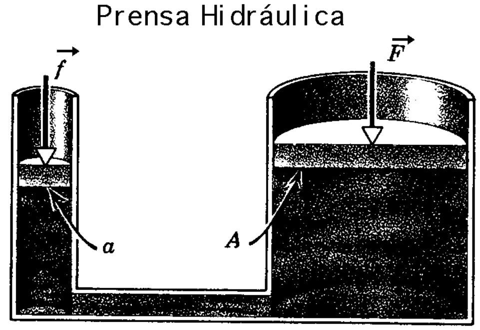
Problema 1, H-17-11, N 19

En la prensa hidráulica de la figura, se usa un émbolo de pequeña sección transversal "a" para ejercer una pequeña fuerza f en el líquido encerrado. Un tubo de conexión conduce a un émbolo más grande de sección transversal "A".

a) ¿Qué fuerza $\vec{F}$ podrá sostener el émbolo mayor?

b) Si el émbolo menor tiene un diámetro de 1.5 pulg. y el émbolo grande un diámetro de 21 pulg, ¿qué peso colocado en el émbolo pequeño podrá sostener un peso de 2.0 toneladas en el émbolo grande?

Prensa Hidráulica



Datos

$d = 1.5\ p\text{ulg}$ $\qquad D = 21\ p\text{ulg}$

$P = 2.0\ ton = 4000\ lb$ $\qquad 1\ lb = 4.448\ Nt$

Solución

a) Las presiones en ambos émbolos son iguales (principio de Pascal) por lo tanto

$$\frac{f}{a} = \frac{F}{A}$$

de donde tenemos

$$F = f\,\frac{A}{a} \qquad \text{(1-P1)}$$

b) De la expresión (1-P1) tenemos

$$f = F\,\frac{a}{A} = F\,\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \qquad \text{(2-P1)}$$

considerando que $r = d/2$ $R = D/2$

Tenemos $f = F\left(\frac{d}{D}\right)^2$ reemplazando en esta expresión los valores numéricos se tiene

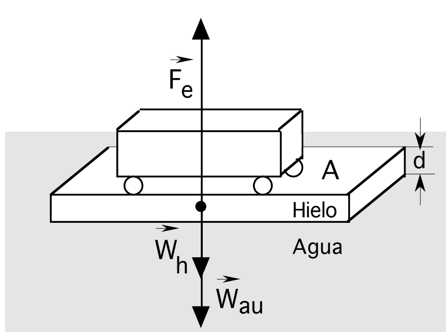
$$f = 4000\ lb\left(\frac{1.5\text{ pulg}}{21\text{ pulg}}\right)^2 = 20.41\ lb$$

$$f = 90.73\ N$$

Problema 2, H-17-12, N 21

¿Cuál es la mínima área de un bloque de hielo de 0.305 m de espesor que flotando en el agua podrá sostener un automóvil que pese 11100N? ¿Tiene alguna importancia el sitio del bloque de hielo en donde se coloque el automóvil?

Solución



Datos

$W_{au} = 11100\ N$

$d = 0.305\ m$

$\rho_h = 0.92\ x\ 10^3\ kg/m^3$

$\rho_a = 1.00\ x\ 10^3\ kg/m^3$

Para que el auto que está sobre el trozo de hielo flote, se debe cumplir

$$W_{au} + W_h = F_e \qquad \text{(1-P2)}$$

W_{au} corresponde al peso del auto

W_h corresponde al peso del trozo de hielo

F_e corresponde a la fuerza de empuje

Tenemos que el peso del hielo está dado por

$$W_h = \rho_h \; V_h \; g \qquad \text{(2-P2)}$$

y la fuerza de empuje esá dada por

$$F_e = \rho_a \; V_h \; g \qquad \text{(3-P2)}$$

reemplazando (2-P2) y (3-P2) en (1-P2) se tiene

$$W_{au} + \rho_h \; V_h \; g = \rho_a \; V_h \; g$$

Considerando que $V_h = A\, d$ tenemos

$$A = \frac{W_{au}}{(\rho_a - \rho_h)\; d\; g}$$

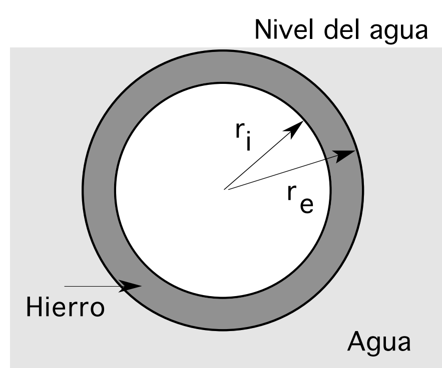
Reemplazando los valores numéricos tenemos

$$A = \frac{11100\ N}{(1x10^3\, kg/m^3 - 0.92x10^3\, kg/m^3)(0.305\ m)\left(9.8\ m/s^2\right)} = 46.42\ m^2$$

Sí, tiene importancia la ubicación del auto en el bloque de hielo.

Problema 3, H-17-14, N 26

Un cascarón esférico hueco de hierro flota casi completamente sumergido en el agua. Si el diámetro exterior es de 0.61 m y la densidad relativa del hierro es de 7.8, encontrar el diámetro interior.



Datos

$d_e = 0.61\, m$

$d_i = ?$

$\rho_{rH} = 7.8$

Para que el casquete esférico hueco flote es necesario que

$$W_{ce} = F_e \tag{1-P3}$$

W_{ce} peso del casquete esférico

F_e fuerza de empuje

De (1-P3) tenemos entonces

$$\rho_H V_{ce} g = \rho_a V_e g \tag{2-P3}$$

donde los volúmenes del cascarón esférico V_{ce} y de la esfera V_e están dados por

$$V_{ce} = \frac{4}{3}\pi(r_e^{\,3} - r_i^{\,3}) \qquad\qquad V_e = \frac{4}{3}\pi r_e^{\,3}$$

Considerando que $r = d/2$ tenemos

$$V_{ce} = \frac{\pi}{6}(d_e^{\,3} - d_i^{\,3}) \tag{3-P3}$$

$$V_e = \frac{\pi}{6} d_e^{\,3} \tag{4-P3}$$

Reemplazando (3-P3) y (4-P3) en (2-P3) tenemos:

$$\rho_H (d_e^{\,3} - d_i^{\,3}) = \rho_a d_e^{\,3}$$

$$\frac{\rho_H}{\rho_a} d_e^{\,3} - \frac{\rho_H}{\rho_a} d_i^{\,3} = d_e^{\,3} \qquad\qquad d_e^{\,3}(\rho_{rH} - 1) = \rho_{rH} d_i^{\,3}$$

$$d_i = d_e \left(\frac{\rho_{rH} - 1}{\rho_{rH}} \right)^{1/3}$$

$$d_i = 0.61\ m \left(\frac{7.8 - 1}{7.8} \right)^{1/3} = 0.58\ m$$

Problema 4, H-17-17, N 28

Un cubo que está flotando en mercurio tiene sumergida la cuarta parte de su volumen. Si se agrega agua suficiente para cubrir el cubo, ¿qué fracción de su volumen quedará sumergida en el mercurio? ¿La respuesta depende de la forma del cuerpo?

Considere la densidad relativa del mercurio 13.6

Solución

En primer lugar representemos gráficamente las dos situaciones físicas planteadas en el enunciado del problema.

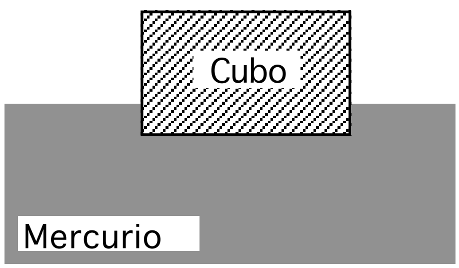


fig. 1

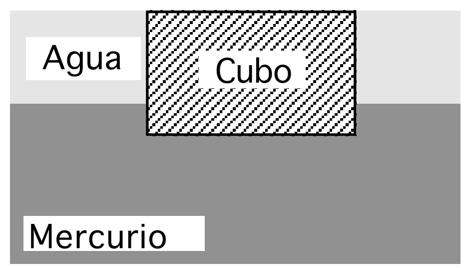


fig. 2

Tenemos que en ambas situaciones, para que el cubo flote, se debe cumplir que

$$W_c = F_e \tag{1-P4}$$

* Analicemos ahora la situación planteada en la fig. 1, tenemos que en este caso la fuerza de empuje está

$$F_e = \rho_{Hg} \frac{V_c}{4} g \tag{2-P4}$$

Donde V_c es el volumen del cubo

Reemplazando (2-P4) en (1-P4) tenemos que el peso del cubo está dado por la siguiente expresión

$$W_c = \rho_{Hg} \frac{V_c}{4} g \qquad (3\text{-P4})$$

* Analicemos ahora la situación planteada en la fig. 2, tenemos que en este caso la fuerza de empuje está dada por

$$F_e = \rho_{Hg} V_{cHg} g + \rho_a V_{ca} g \qquad (4\text{-P4})$$

Donde

V_{cHg} es el volumen del cubo sumergido en mercurio

V_{ca} es el volumen del cubo sumergido en agua

Reemplazando (3-P4) y (4-P4) en (1-P4) tenemos:

$$\rho_{Hg} \frac{V_c}{4} = \rho_{Hg} V_{cHg} + \rho_a V_{ca} \qquad (5\text{-P4})$$

El volumen del cubo V_c , el volumen del cubo sumergido en mercurio V_{cHg} y el volumen del cubo sumergido en agua V_{ca} los podemos relacionar como

$$V_c = V_{cHg} + V_{ca} \qquad (6\text{-P4})$$

Si consideramos un $x < 1$ podemos escribir el volumen del cubo sumergido en mercurio como

$$V_{cHg} = x V_c \qquad (7\text{-P4})$$

Tenemos entonces para el volumen del cubo sumergido en agua

$$V_{ca} = V_c - x V_c = V_c (1 - x) \qquad (8\text{-P4})$$

Reemplazando (7-P4) y (8-P4) en (5-P4) tenemos

$$\frac{\rho_{Hg}}{4} = \rho_{Hg} x + \rho_a (1 - x)$$

De donde podemos despejar x

$$x = \frac{\rho_{Hg} - 4\rho_a}{4(\rho_{Hg} - \rho_a)} = \frac{(\rho_{rHg} - 4)}{4(\rho_{rHg} - 1)}$$

$$x = \frac{13.6 - 4}{4(13.6 - 1)} = 0.19$$

Este valor no depende de la forma del cuerpo.

Bibliografía

Halliday D. y Resnick R. -	Física	Parte I
Tipler P. A.	Física	Tomo I
Serway R. A. y Beichner R. J.	Física	Tomo I
Wilson J. D.	Física	
Hewitt P. G.	Conceptos de Física	
Máximo A. y Alvarenga B.	Física General.	
Tippens P. E.	Física. Conceptos y Aplicaciones	