

Simetrías y cantidades conservadas en la formulación de Einsenhart de la mecánica clásica

(Geometrización de la Mecánica)

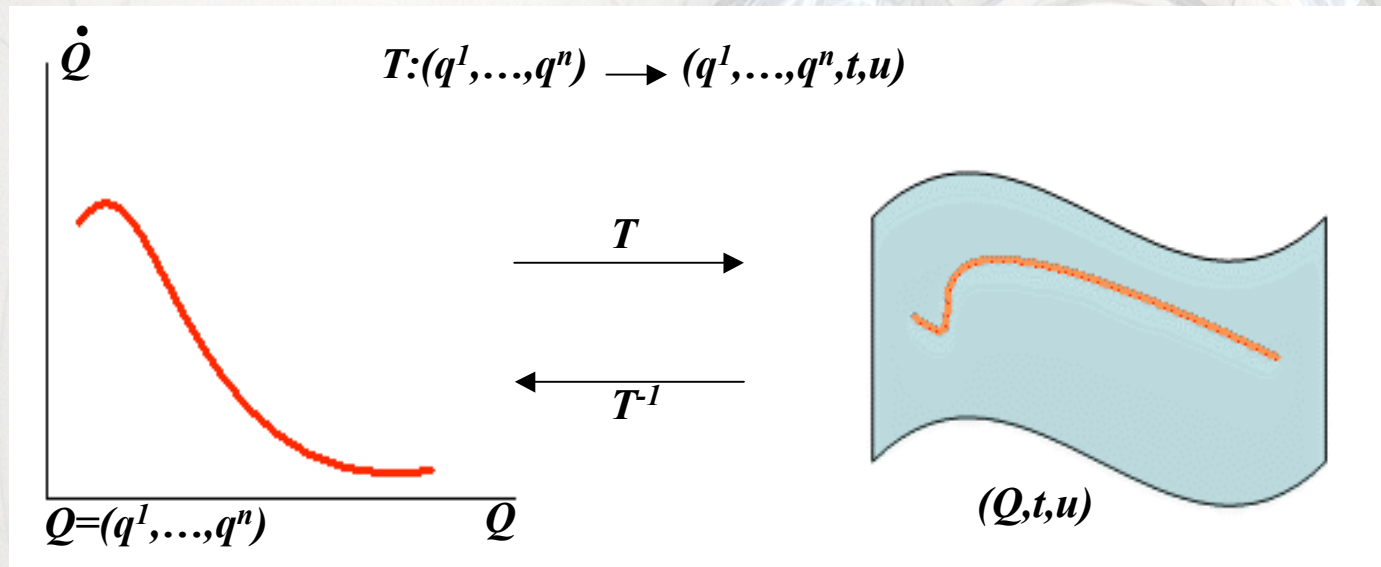
**L.A. Núñez, U. Percoco y M. Zambrano,
*Universidad de Los Andes,
Mérida Venezuela***

L.A. Núñez, U. Percoco y M. Zambrano,
*Universidad de Los Andes, Mérida
Venezuela*

Formulación de Einsenhart de la
Mecánica Clásica

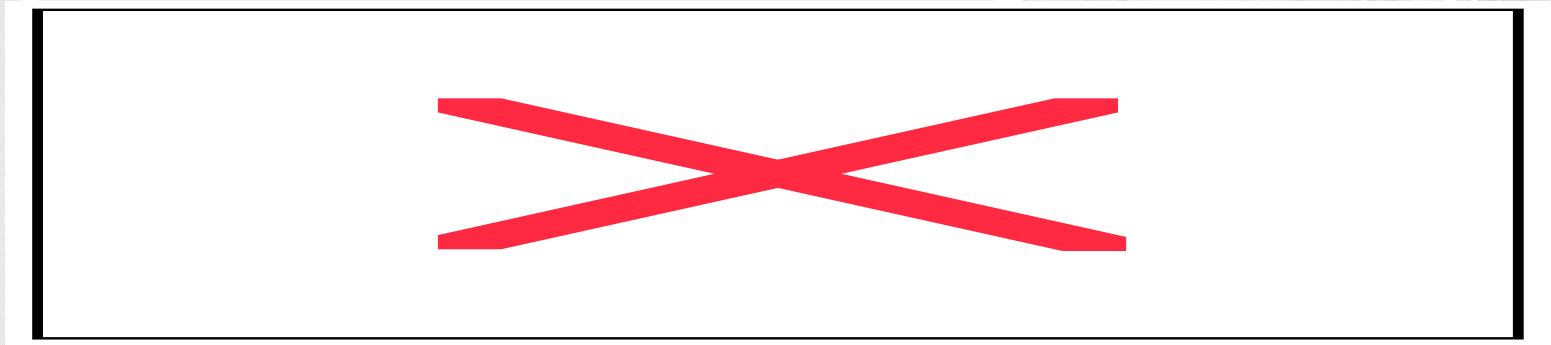
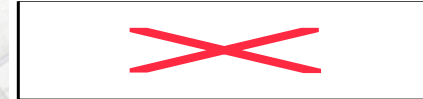
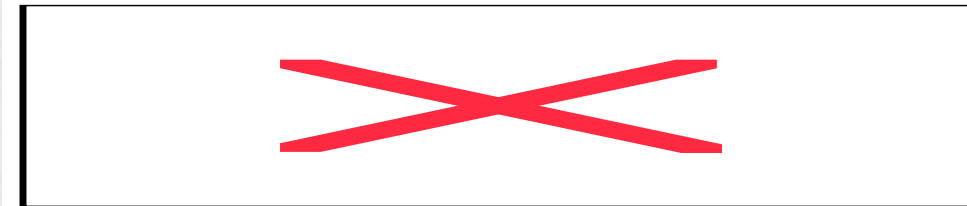
Trayectoria en el espacio de fase de sistemas mecánicos

Geodésica en el espacio de configuración extendido (espacio-tiempo de configuración)

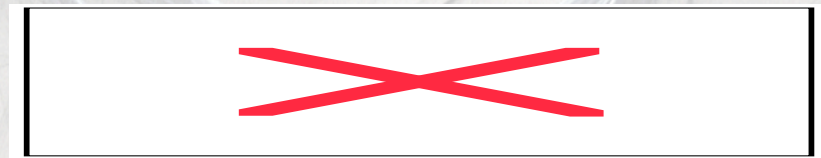


La formulación de Eisehart equivale a T y debe cumplir con ✧

✦ Las ecuaciones de las geodésicas son las ecuaciones de Lagrange del sistema mecánico para las primeras n dimensiones



Ecuaciones correspondientes
a las 2 dimensiones restantes
 (t, u)



Formulación de Einsenhart de la
Mecánica Clásica

Utilidad de la teoría de Einsenhart*

- Sistemas caóticos: Estabilidad de trayectorias en espacios de fases vs. estabilidad de geodésicas.
- Sistemas no caóticos: cantidades conservadas bajo formulación Lagrangeana o Hamiltoniana vs. cantidades conservadas sobre geodésicas en espacios extendidos : Cálculo de cantidades conservadas y búsqueda de simetrías a partir de objetos geométricos (geodésicas).

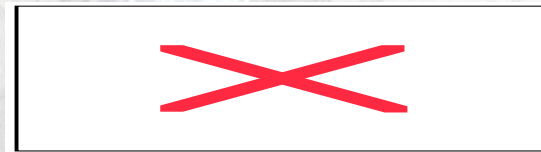
*L. Einsenhart, Ann. of Math. **30**, (1929),591

Formulación de Einsenhart de la
Mecánica Clásica

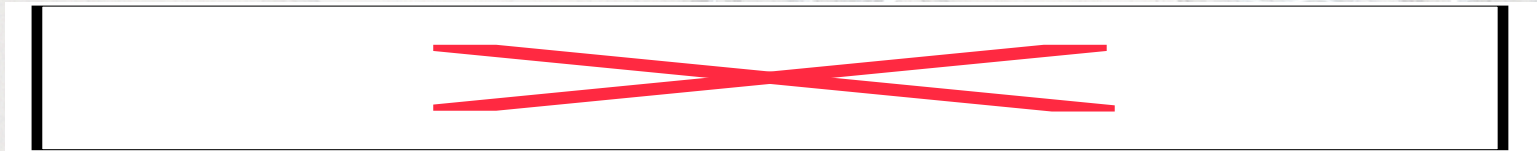
Aplicación de la teoría al oscilador bidimensional isótropo (búsqueda de cantidades conservadas)

- Establecimiento de la métrica

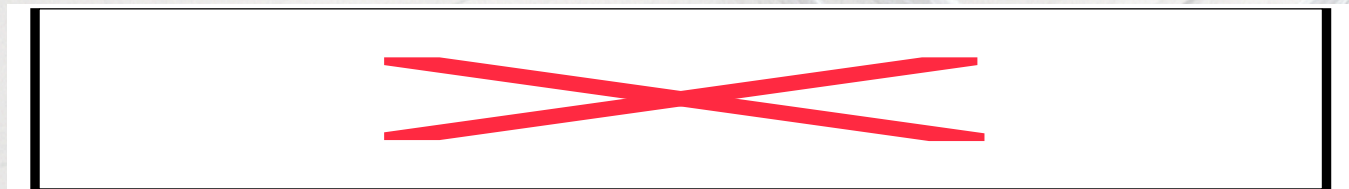
Energía potencial →



Energía cinética



Elemento de arco



Formulación de Einsenhart de la
Mecánica Clásica

donde \square \square \square
 \square

con ecuaciones de movimiento

\square

de solución general

\square

Para establecer el tensor métrico notamos que

\square

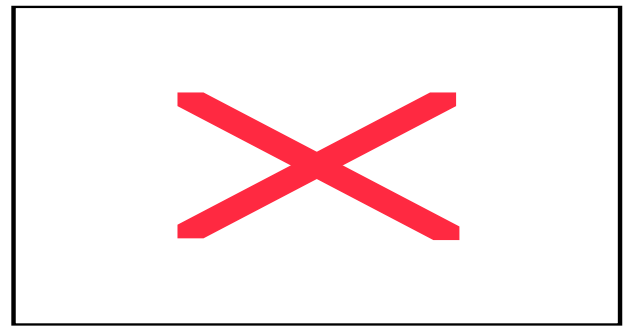
\square

\square

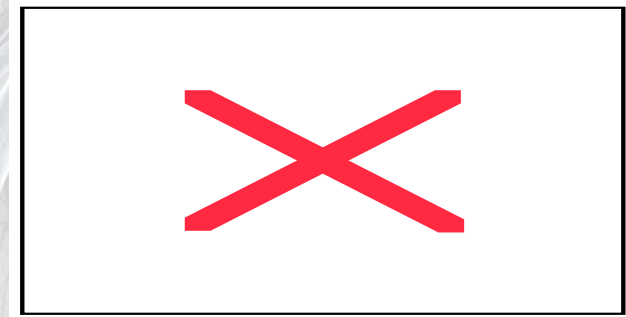
\square

Formulación de Eisenhart de la Mecánica Clásica

y tenemos que la métrica de la variedad extendida es:



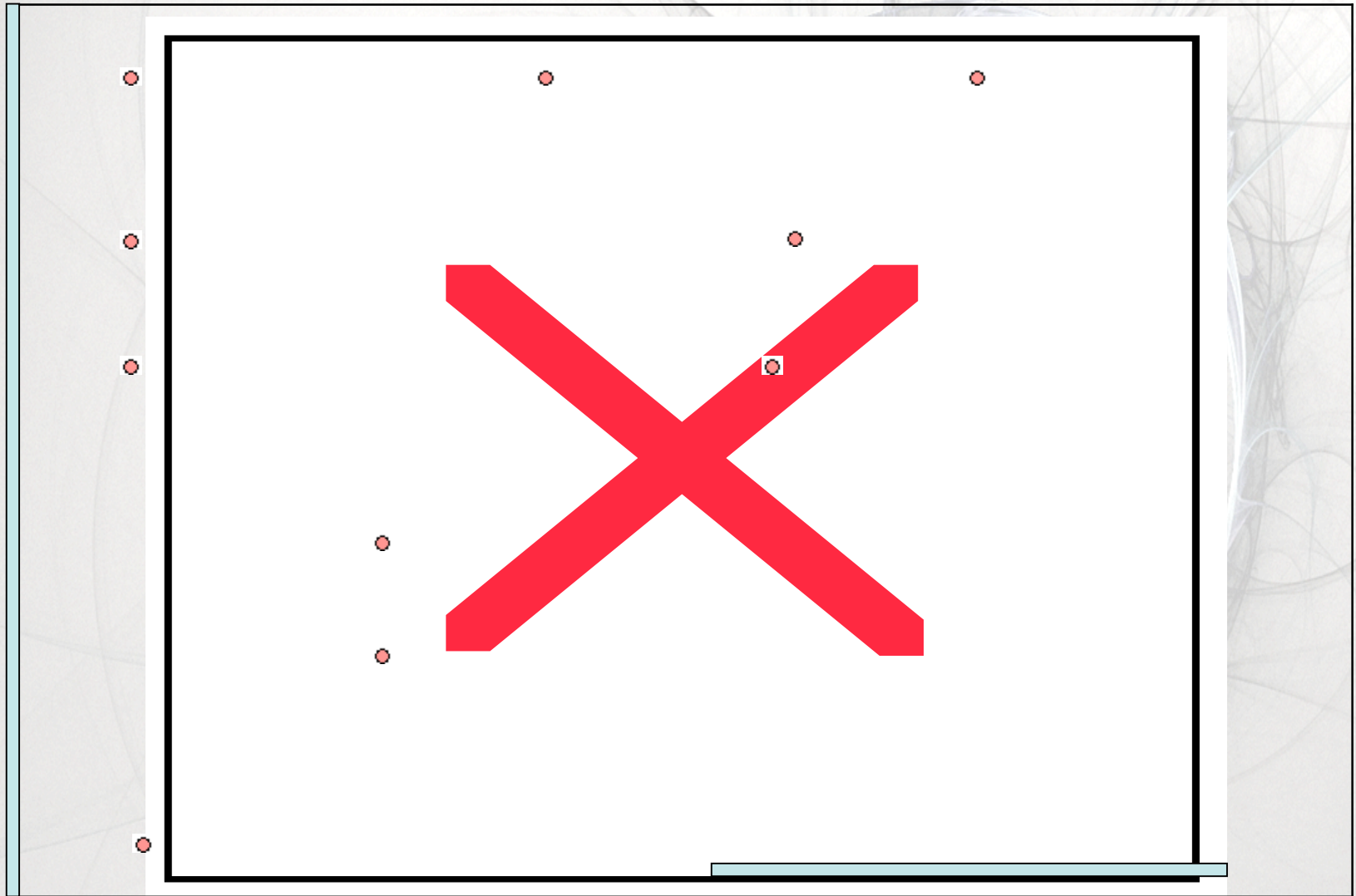
ó



- Cálculo de los Vectores de Killing

Luego de calcular conexiones (Christoffel de 1er y 2do tipo) y establecer el campo vectorial (de Killing) sobre el que se Lie-derivó, determinamos las (10) ecuaciones de Killing:

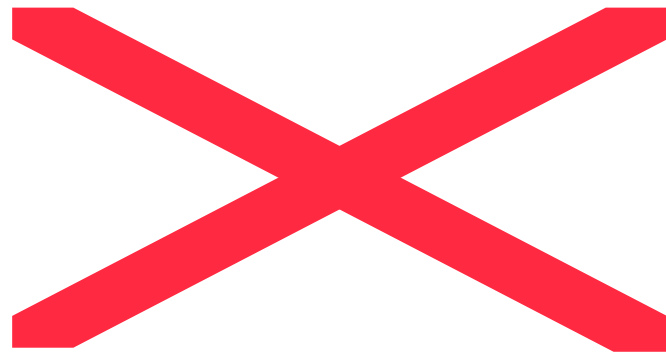
Formulación de Einsenhart de la
Mecánica Clásica



L.A. Núñez, U. Percoco y M. Zambrano,
Universidad de Los Andes, Mérida
Venezuela

Formulación de Einstein-Hilbert de la
Mecánica Clásica

cuya solución es:



Formulación de Einsenhart de la
Mecánica Clásica

L.A. Núñez, U. Percoco y M. Zambrano,
Universidad de Los Andes, Mérida
Venezuela

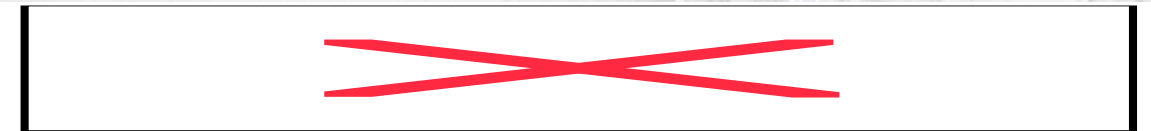
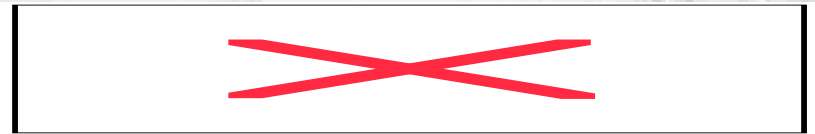
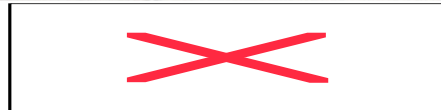
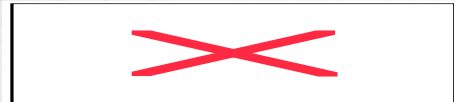
- Cálculo de Momentos

$$\xi_1 = C_1 q^2 + C_2 \text{sen}(\sqrt{k}t) + C_3 \text{cos}(\sqrt{k}t)$$

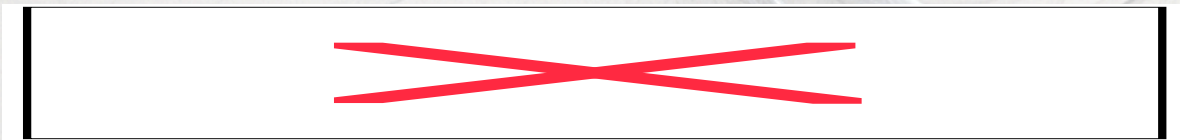
$$\xi_2 = -C_1 q^1 + C_4 \text{sen}(\sqrt{k}t) + C_5 \text{cos}(\sqrt{k}t)$$

$$\xi_3 = \sqrt{k} (C_2 q^1 + C_3 q^2) \text{sen}(\sqrt{k}t) - \sqrt{k} (C_4 q^1 + C_5 q^2) \text{cos}(\sqrt{k}t) - C_6 k ((q^1)^2 - (q^2)^2) + C_7$$

$$\xi_4 = C_8, \quad \xi_\mu = \xi_\mu(q^i, q^j, t, u)$$

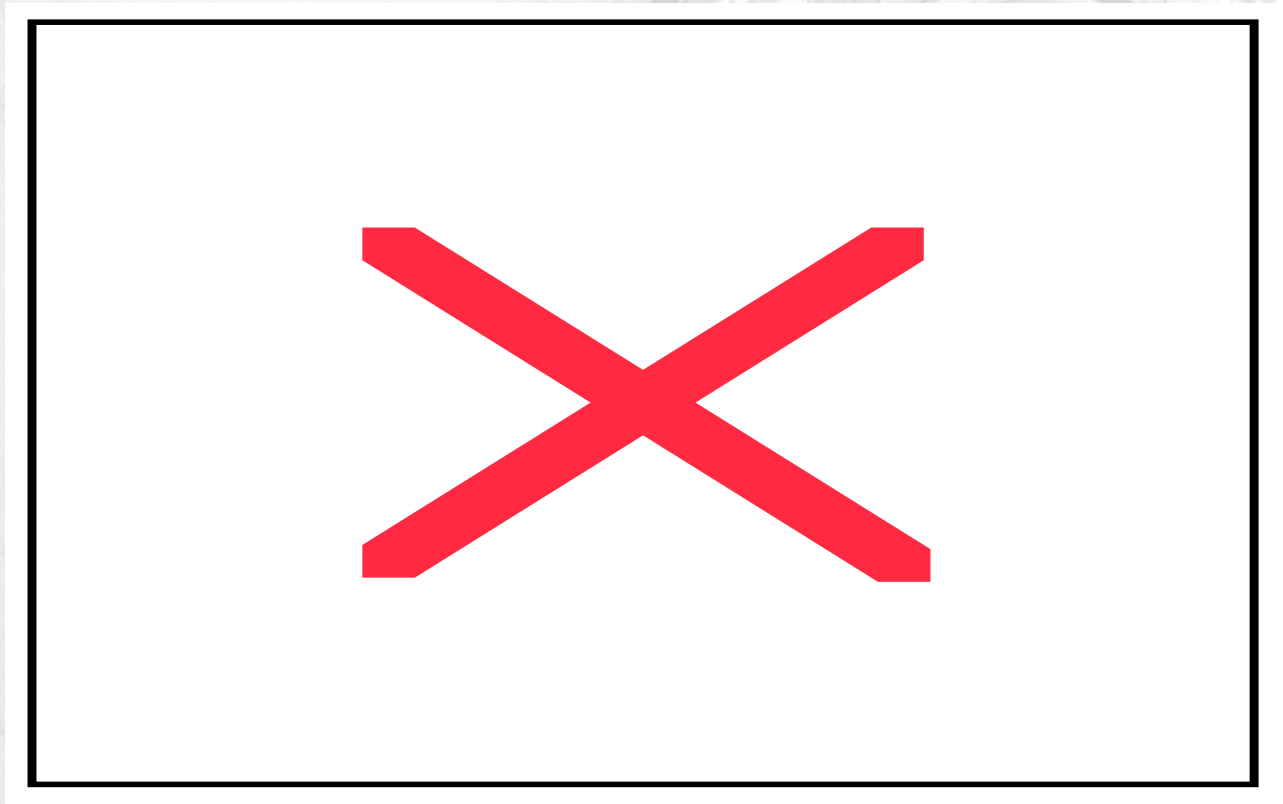


, donde



Formulación de Eindhoven de la Mecánica Clásica

Ahora tenemos todos los ingredientes para calcular la cantidad conservada en el espacio extendido y que denominaremos "Cantidad Einsenhardt" (J_E):



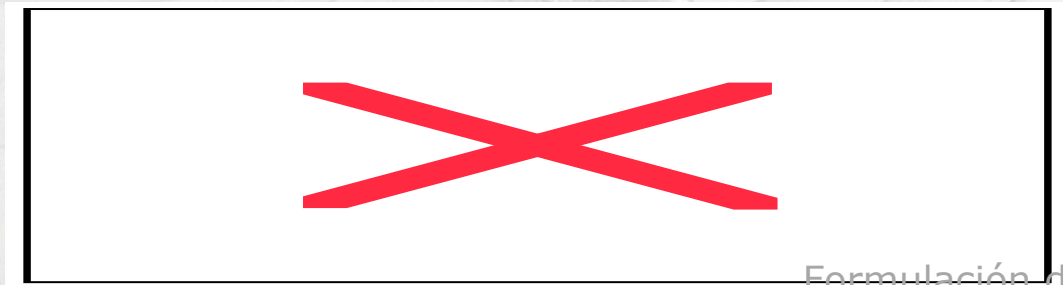
Cantidad de Movimiento no-Noetheriana "Tipo Hojman" Vs. Cantidad de Movimiento "Tipo Einsenhardt".

(En adelante $k=1$ y se usan desde el inicio la solución de las ecuaciones de movimiento)

Cantidad de Movimiento no-Noetheriana (S. Hojman and F. Zertuche. Nuevo Cimento Soc. Ital. Fis. B, **88**, 1 (1985):



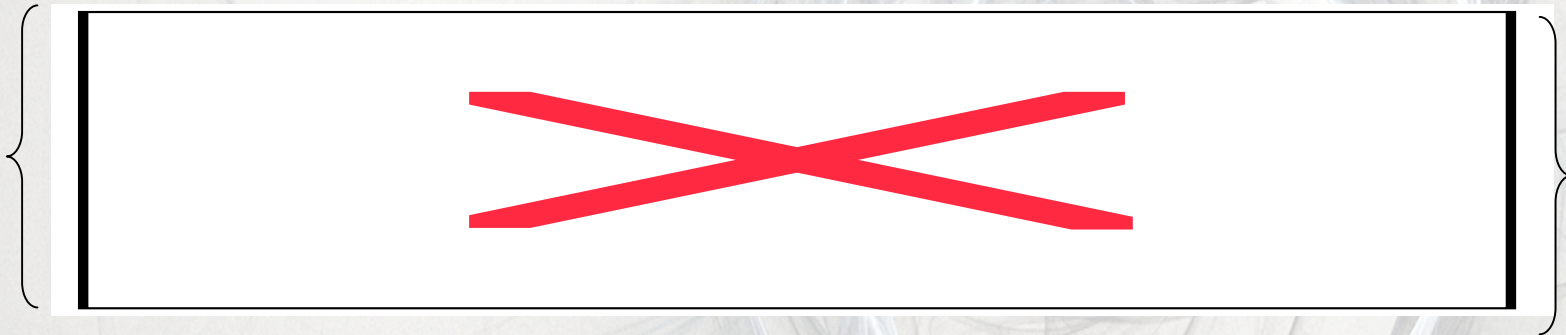
"Cantidad de Movimiento Einsenhardt":



Formulación de Einsenhardt de la
Mecánica Clásica

¿Será la "Cantidad Hojman" un caso particular de la "Cantidad Einsenhart"?

Lo es para el siguiente conjunto de condiciones:



Comentarios Finales

Ya que la “Cantidad Hojman” resultó caso particular “Einsenhart” se afianza la conjetura de que este enfoque geométrico puede ser el más general para estudiar simetrías y calcular cantidades conservadas en mecánica clásica.

Posteriormente extenderemos la formulación de Einsenhart al oscilador bidimensional *anisótropo* comparando resultados en el marco Lagrangeano-Hamiltoniano.

Formulación de Einsenhart de la
Mecánica Clásica

L.A. Núñez, U. Percoco y M. Zambrano,
Universidad de Los Andes, Mérida
Venezuela