

# NUEVOS RESULTADOS DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO PARA SISTEMAS BINARIOS CON UN OBJETO EXTREMO

Rueda J.A.\*, Sanabria-Gómez J.D.\* y Manko V.S.\*\*

\*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

\*\*Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México DF, México

3 de junio de 2005

## Resumen

Se prueba la existencia de estados de equilibrio en sistemas extremo-subextremo (ES) y extremo-hiperextremo (EH) en el caso de vacío. Para ello, se utiliza una solución exacta de las ecuaciones de Einstein construida mediante el método de Sibgatullin. Los estados de equilibrio satisfacen la condición de existencia del eje de simetría, de planitud elemental, de planitud asintótica y sólo tienen constituyentes con masas de Komar positivas en el caso EH, mientras que en el caso ES alguno de los constituyentes tiene masa negativa originando singularidades de anillo.

## 1. Introducción

El problema de equilibrio en sistemas binarios ha sido estudiado desde hace varios años, y especialmente en la famosa solución Doble Kerr de Kramer y Neugebauer [1]. Dicho sistema permite describir sistemas binarios constituidos sólo por combinaciones entre objetos subextremos e hiperextremos. Los estados de equilibrio de la solución Doble Kerr se conocen de manera analítica gracias a la solución extendida Doble Kerr calculada por Manko y Ruíz [2].

El estudio de estados de equilibrio se ha realizado para sistemas de muchos cuerpos tanto en el caso de vacío como en el caso de electrovacío, pero los objetos constituyentes de estos sistemas nunca han sido combinaciones entre objetos extremos y no extremos (subextremos e hiperextremos), pues casi ningún método de generación de soluciones permite construir sistemas formados por combinaciones de objetos. En el trabajo de Azuma y Koikawa [3], estudian el problema de equilibrio para una solución con  $n$  objetos cargados alineados sobre el eje de simetría y concluyen que para que la atracción gravitacional sea compensada por la fuerza de repulsión coulombiana, los objetos deben estar extremadamente cargados; esto es,  $M_i = |Q_i|$ , siendo  $M_i$  y  $Q_i$  la masa y la carga del  $i$ -ésimo objeto. Este hecho aislaba la posibilidad de equilibrio entre combinaciones de objetos extremos y no extremos en el caso electrostático. Sin embargo, Bretón, Manko y Aguilar Sánchez [4] encontraron que sí es posible el equilibrio en el caso electrostático sin la presencia

de singularidades cónicas sobre el eje de simetría, y dan un ejemplo particular de un sistema binario subextremo-hiperextremo en equilibrio.

Un primer intento de solucionar el problema de equilibrio para sistemas extremo-subextremo (ES) y extremo-hiperextremo (EH) fue hecho por Manko, Ruíz y Sanabria-Gómez [5], pero no se obtuvo ningún estado de equilibrio para tales configuraciones. Lo anterior respaldaba la imposibilidad de encontrar balance entre la fuerza de repulsión spín-spín y/o la fuerza de repulsión coulombiana y la fuerza de atracción gravitacional en este tipo de sistemas binarios. Sin embargo, hasta ese momento no se habían dado pruebas contundentes de la ausencia de equilibrio en este tipo de configuraciones, lo cual nos llevó a seguir el estudio de este problema. En el presente trabajo se muestran ejemplos de sistemas binarios ES y EH en equilibrio, es decir, su eje de simetría se comporta de forma regular, ya que no posee singularidades cónicas.

## 2. Métrica para Sistemas Binarios con un objeto extremo

La métrica más simple que representa un espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico es la métrica de Papapetrou

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (1)$$

donde  $(\rho, z, \phi)$  son las coordenadas cilíndricas de Weyl y  $f, \omega, \gamma$  son funciones de  $\rho, z$ .

Es bien sabido que las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

para la métrica de Papapetrou (1), es decir, para un espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico, se pueden reformular con la inclusión de un potencial complejo  $\mathcal{E}$  llamado Potencial de Ernst de la forma [6]

$$(\text{Re}\mathcal{E})\nabla^2\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E})^2, \quad (2a)$$

$$f = \text{Re}(\mathcal{E}), \quad (2b)$$

$$\omega_{,\rho} = -\rho f^{-2} \text{Im}(\mathcal{E}_{,z}), \quad \omega_{,z} = \rho f^{-2} \text{Im}(\mathcal{E}_{,\rho}), \quad (2c)$$

$$\gamma_{,\rho} = \frac{\rho (\mathcal{E}_{,\rho} \mathcal{E}_{,\rho}^* - \mathcal{E}_{,z} \mathcal{E}_{,z}^*)}{4(\text{Re}\mathcal{E})^2}, \quad \gamma_{,z} = \frac{\rho \text{Re}(\mathcal{E}_{,\rho} \mathcal{E}_{,z}^*)}{2(\text{Re}\mathcal{E})^2}, \quad (2d)$$

donde la primera de las ecuaciones es denominada la ecuación de Ernst.

Es claro de las ecuaciones (2) que conociendo el potencial de Ernst, es posible en principio calcular las funciones métricas  $f, \omega$  y  $\gamma$ . El método de Sibgatullin [7] permite construir el potencial de Ernst sobre todo el plano complejo  $(z, i\rho)$  a partir de un comportamiento dado del mismo sobre el eje de simetría (eje  $z$ ).

La elección del potencial de Ernst sobre el eje de simetría no es arbitraria, pues está restringida a la ecuación de Sibgatullin

$$e(z) + e^*(z) = 0, \quad (3)$$

pues cada par de raíces (solitón) de la ecuación anterior conforma un objeto del sistema. En la ecuación anterior \* indica conjugación compleja.

Una elección posible del potencial de Ernst sobre el eje de simetría es

$$\mathcal{E}(0, z) = e(z) = 1 + \sum_{i=1}^2 \frac{e_i}{z - \beta_i}, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

donde  $e_i$  y  $\beta_i$  son parámetros complejos arbitrarios. Esto implica que la ecuación de Sibgatullin (3) tenga cuatro raíces, las cuales se eligen de tal forma que dan lugar a los sistemas binarios extremo-subextremo y extremo-hiperextremo como se muestra a continuación. En la figura 1 se puede ver que la raíz  $\alpha_1$  es real y de multiplicidad 2 debido a la existencia del objeto extremo en el sistema, además, si las cuatro raíces son reales, el sistema binario es extremo-subextremo (a), y si son 2 reales y un par de complejas conjugadas ( $\alpha_2 = \alpha_3^*$ ), el sistema es extremo-hiperextremo (b)

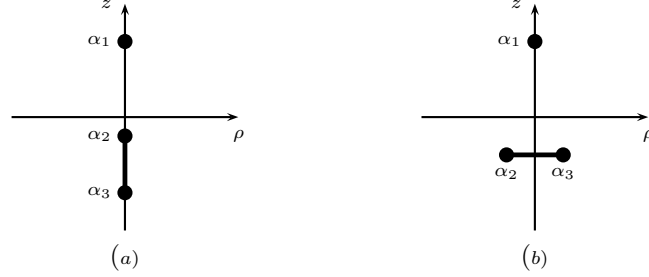


Figura 1: Sistemas Binarios ES y EH

Mediante la ecuación de Sibgatullin (3), los parámetros de la solución se relacionan a través de las ecuaciones

$$e_j = \frac{2(\beta_j - \alpha_1)^2(\beta_j - \alpha_2)(\beta_j - \alpha_3)}{\prod_{\substack{k=1 \\ j \neq k}} (\beta_j - \beta_k)(\beta_j - \beta_k^*)}, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

El potencial de Ernst sobre el plano complejo se obtiene por medio de la fórmula integral

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)e(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma, \quad (6)$$

donde la función desconocida  $\mu_1(\sigma)$  que debe satisfacer las condiciones

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = \pi, \quad (7a)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)[e(\xi) + \tilde{e}(\eta)]}{(\xi - \eta)\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = 0. \quad (7b)$$

En las ecuaciones anteriores se ha utilizado  $\xi = z + i\rho\sigma$ ,  $\eta = z + i\rho\tau$ , y  $\sigma, \tau \in [-1, 1]$ . La función  $e(\xi)$  es una continuación analítica local de la función  $e(z)$  sobre el plano complejo  $(\rho, z)$ . Por convención se emplea  $\tilde{e}(\eta) \equiv [e(\eta^*)]^*$ .

Empleando la ecuación (6), la expresión final del potencial de Ernst sobre todo el plano complejo  $(z, i\rho)$  es

$$\mathcal{E} = \frac{\Lambda + \Gamma}{\Lambda - \Gamma}, \quad (8)$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & P_1^{(1)} \\ 0 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_1} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \\ 0 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_2} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_2)^2} \\ 0 & \frac{e_1^*}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_2 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_3 - \beta_1^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_1^*) r_1} \right] r_1^2 \\ 0 & \frac{e_2^*}{\alpha_1 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_2 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_3 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*) r_1} \right] r_1^2 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & P_1^{(1)} \\ 1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_1} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \\ 1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_2} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_2)^2} \\ 0 & \frac{e_1^*}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_2 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_3 - \beta_1^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_1^*) r_1} \right] r_1^2 \\ 0 & \frac{e_2^*}{\alpha_1 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_2 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_3 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*) r_1} \right] r_1^2 \end{vmatrix},$$

donde  $r_n = \sqrt{\rho^2 + (z - \alpha_n)^2}$ ,  $n = 1, 2, 3$ , y  $P_1^{(1)} = (z - \alpha_1)/r_1$ .

Conocido el potencial de Ernst, el método de Sibgatullin provee ecuaciones necesarias para el cálculo de las funciones  $f$  y  $\omega$ , y la función  $\gamma$  se calcula integrando el último para de ecuaciones del sistema (2). Las expresiones finales para las funciones métricas son

$$f = \frac{\Lambda \Lambda^* - \Gamma \Gamma^*}{(\Lambda - \Gamma)(\Lambda^* - \Gamma^*)}, \quad \omega = \frac{\text{Im}[\Psi(\Lambda^* - \Gamma^*) - \Upsilon^*(\Lambda - \Gamma)]}{\Lambda \Lambda^* - \Gamma \Gamma^*}, \quad e^{2\gamma} = \frac{\Lambda \Lambda^* - \Gamma \Gamma^*}{r_1^4 r_2 r_3 K_0 K_0^*}, \quad (9)$$

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 & g(\alpha_1) & g(\alpha_2) & g(\alpha_3) & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{g(\alpha_1)}{r_1} \right] r_1^2 \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_1} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_2} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_2)^2} \\ 0 & \frac{e_1^*}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_2 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_3 - \beta_1^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_1^*) r_1} \right] r_1^2 \\ 0 & \frac{e_2^*}{\alpha_1 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_2 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_3 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*) r_1} \right] r_1^2 \end{vmatrix}, \quad K_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_3 - \beta_1} & -\frac{1}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \\ \frac{1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_3 - \beta_2} & -\frac{1}{(\alpha_1 - \beta_2)^2} \\ \frac{e_1^*}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_2 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_3 - \beta_1^*} & -\frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_1^*)^2} \\ \frac{e_2^*}{\alpha_1 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_2 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_3 - \beta_2^*} & -\frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)^2} \end{vmatrix},$$

$$\Upsilon = \begin{vmatrix} z & 1 & 1 & 1 & P_1^{(1)} \\ -\beta_1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_1} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \\ -\beta_2 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_2} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_2)^2} \\ e_1^* & \frac{e_1^*}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_2 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_3 - \beta_1^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_1^*) r_1} \right] r_1^2 \\ e_2^* & \frac{e_2^*}{\alpha_1 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_2 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_3 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*) r_1} \right] r_1^2 \end{vmatrix},$$

con  $g(\alpha_n) = r_n - (z - \alpha_n)$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

### 3. Estados de Equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio del sistema están dadas por requerimientos de buen comportamiento del eje de simetría (eje  $z$ ). Las órbitas del vector de Killing azimutal  $\xi_\phi^\alpha = \delta_\phi^\alpha$  deben ser círculos centrados en el eje  $z$ , entonces, éste debe anularse en puntos sobre el eje  $z$ . Esta condición sólo se cumple si la función métrica  $\omega$  es igual a cero en puntos sobre el eje de simetría. El eje de simetría debe ser localmente euclidiano; esto es, la métrica debe comportarse localmente sobre el eje de simetría como la métrica de Minkowski, ésta condición llamada condición de planitud elemental se cumple si la función métrica  $\gamma$  es igual a cero y si se cumple la condición de existencia del eje de simetría. La condición de planitud elemental impone también la condición de que la función métrica  $f$  sea mayor que cero sobre el eje de simetría.

Resumiendo, las ecuaciones de equilibrio son

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega(\rho, z) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma(\rho, z) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho, z) > 0. \quad (10)$$

Las ecuaciones anteriores representan las condiciones de balance de los objetos. Este resultado se obtiene del hecho de que la fuerza resultante entre los dos objetos, dada por Israel en [8] tiene la forma

$$F = \frac{1}{4} \lim_{\rho \rightarrow 0} (e^\gamma - 1), \quad \text{si} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \omega(\rho, z) = 0. \quad (11)$$

Si no se cumplen las ecuaciones de equilibrio, aparece una singularidad de strut en la región intermedia de los objetos. Esta singularidad es vital para mantener los objetos separados en caso de que la atracción gravitacional no sea balanceada por repulsiones bien sean coulombianas o del tipo spín-spín.

Una solución físicamente relevante para un sistema de objetos compactos debe ser asintóticamente plana, es decir, la métrica de Papapetrou (1) debe tender a la métrica de Minkowski en el infinito. Es bien sabido que un espacio-tiempo es asintóticamente plano si el monopolo de momento angular más conocido como parámetro de NUT o parámetro gravomagnético

$$J_0 = \text{NUT} = -\frac{1}{2} \text{Im}(e_1 + e_2) \quad (12)$$

es igual a cero. Debido a esto, los estados de equilibrio se estudian resolviendo las ecuaciones de equilibrio junto con la condición de que el parámetro de NUT de la solución sea nulo.

Definiendo los determinantes  $\mathcal{B}_{ij}$  y  $\mathcal{C}_i$

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_i - \beta_1^*} & \frac{1}{\alpha_j - \beta_1^*} \\ \frac{1}{\alpha_i - \beta_2^*} & \frac{1}{\alpha_j - \beta_2^*} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{C}_i = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_i - \beta_1} & \frac{1}{(\alpha_i - \beta_1)^2} \\ \frac{1}{\alpha_i - \beta_2} & \frac{1}{(\alpha_i - \beta_2)^2} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

las ecuaciones de equilibrio, junto con la condición de anulación el parámetro de NUT, se pueden escribir de la forma

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \infty}} [z^{-7} \text{Im}(\Upsilon^* \Lambda^*)] = 0, \quad \text{Im}(e_1 + e_2) = 0, \quad \begin{cases} \text{Re}(\mathcal{B}_{32}\mathcal{C}_1) = 0 & \text{si } \alpha_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3 \\ \text{Im}(\mathcal{B}_{32}\mathcal{C}_1) = 0 & \text{si } \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_3 = \alpha_2^* \end{cases} \quad (14)$$

donde los  $e_i$  están dados por las relaciones (5).

La solución de las ecuaciones de equilibrio anteriores son dadas por medio de los parámetros de la solución, esto es, de  $\alpha_n$ ,  $\beta_i$  y  $e_i$ . Con los valores de estos parámetros es posible calcular las características físicas del sistema como sigue.

La masa y el momento angular total del sistema pueden ser calculados con los momentos multipolares de Geroch-Hansen [10, 11] por medio del procedimiento de Fodor *et al*[12], del cual se obtienen las siguientes expresiones

$$M_t = -\frac{1}{2}\text{Re}(e_1 + e_2), \quad (15a)$$

$$J_t = \frac{1}{2} \left[ \text{Im}(e_1 b_1^* + e_2 b_2^*) + 2 \sum_{i=1}^2 \text{Re}(\beta_i) \text{Im}(e_i) + 4M_T J_0 \right]. \quad (15b)$$

Las masas y los momentos angulares de Komar del objeto que no es extremo, esto es, subextremo o hiperextremo, se pueden calcular por medio de las fórmulas de Tomimatsu [9]

$$M_i = \frac{1}{4} \left\{ \int_{z_d}^{z_u} \lim_{\rho \rightarrow \rho_0} [\rho(\ln f)_{,\rho} - \omega\Omega_{,z}] dz + \int_0^{\rho_0} \lim_{z \rightarrow z_u} [\rho(\ln f)_{,z} - \omega\Omega_{,\rho}] d\rho - \int_0^{\rho_0} \lim_{z \rightarrow z_d} [\rho(\ln f)_{,z} - \omega\Omega_{,\rho}] d\rho \right\}, \quad (16a)$$

$$J_i = -\frac{1}{8} \left\{ \int_{z_d}^{z_u} \lim_{\rho \rightarrow \rho_0} [2\omega - 2\rho\omega(\ln f)_{,\rho} + (\rho^2 f^{-2} + \omega^2)\Omega_{,z}] dz - \int_0^{\rho_0} \lim_{z \rightarrow z_u} [2\rho\omega(\ln f)_{,z} + (\rho^2 f^{-2} + \omega^2)\Omega_{,\rho}] d\rho + \int_0^{\rho_0} \lim_{z \rightarrow z_d} [2\rho\omega(\ln f)_{,z} + (\rho^2 f^{-2} + \omega^2)\Omega_{,\rho}] d\rho \right\}, \quad (16b)$$

donde los límites de integración son : en caso de objeto subextremo  $\rho_0 = |\text{Im}(\alpha_2)| + \delta\rho$ ,  $z_d = \text{Re}(\alpha_3) - \delta z$ ,  $z_u = \text{Re}(\alpha_2) + \delta z$  y en caso de objeto hiperextremo  $\rho_0 = |\text{Im}(\alpha_2)| + \delta\rho$ ,  $z_d = \text{Re}(\alpha_2) - \delta z$ ,  $z_u = \text{Re}(\alpha_2) + \delta z$ , donde  $\delta a$  es un pequeño valor positivo de la coordenada  $a$ .

Conocida la masa total, el momento angular total, y la masa y el momento angular del objeto que no es extremo, es posible calcular la masa y el momento angular del objeto extremo con las simples fórmulas

$$M_e = M_t - M_i, \quad J_e = J_t - J_i, \quad (17)$$

donde  $M_t$  y  $J_t$  son la masa y el momento angular total del sistema binario.

Los siguientes son ejemplos de estados de equilibrio en el caso extremo-subextremo, los valores numéricos se dan con tres cifras decimales.

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_1$	$\beta_2$
1.800	-0.200	-0.900	0,600 - 1,200i	1,904 + 0,104i
2.100	-0.500	-1.500	0,010 + 1,176i	2,566 + 0,448i
2.900	-0.200	-1.400	0,070 - 0,138i	4,496 + 1,372i

Tabla 1: Estados de equilibrio extremo-subextremo

Entonces, empleando las fórmulas anteriores, los estados de equilibrio dados por la tabla 1 tienen las siguientes características físicas

$M_t$	$J_t$	$m_s$	$J_s$	$m_e$	$J_e$
-1.254	1.249	-1.145	-1,255	-0,109	2,504
-1.476	-1.068	-1.055	0,939	-0,421	-2,007
-2.466	-0.603	-1.295	-0,731	-1,171	0,128

Tabla 2: Características físicas dadas por los datos de la tabla 1

A continuación, se dibujan las superficies de corrimiento al rojo infinito de los sistemas ES en equilibrio de la tabla 1 con características físicas dadas por la tabla 2, las singularidades de anillo (puntos en la figura 2) aparecen debido a la presencia de objetos con masas negativas.

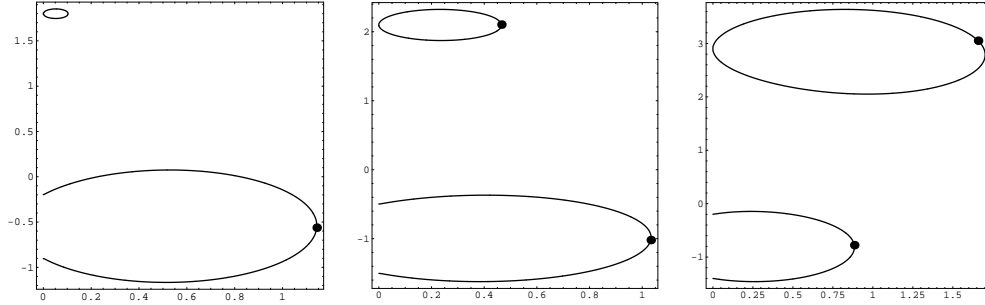


Figura 2: Superficies de corrimiento al rojo infinito para los sistemas de la tabla 2

Los siguientes son ejemplos de estados de equilibrio en el caso extremo-hiperextremo.

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_1$	$\beta_2$
3.800	$-6,250i$	$6,250i$	$-3,500 + 7,300i$	$3,518 + 0,283i$
4.100	$-0,800 - 6,700i$	$-0,800 + 6,700i$	$-3,800 + 7,900i$	$2,680 + 1,420i$
3.900	$-1,900 - 6,450i$	$-1,900 + 6,450i$	$-3,700 + 7,600i$	$0,312 + 3,588i$

Tabla 3: Estados de equilibrio extremo-hiperextremo

Los sistemas extremo-hiperextremo en equilibrio dados por la tabla 3 poseen las siguientes características físicas

$M_t$	$J_t$	$m_h$	$J_h$	$m_e$	$J_e$
3.783	26.618	3.490	-26,460	0,293	53,078
4.420	29.976	2.824	-26,324	1,596	56,300
5.388	33.014	1.184	-13,247	4,204	46,261

Tabla 4: Características físicas dadas por los datos de la tabla 3

Las superficies de corrimiento al rojo infinito se muestran en la figura 3.

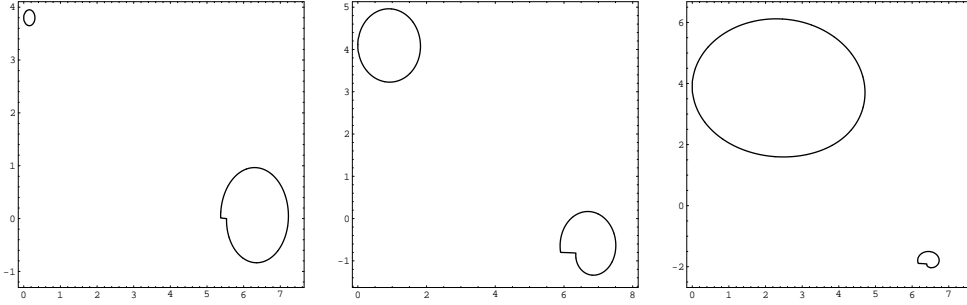


Figura 3: Superficies de corrimiento al rojo infinito para los sistemas de la tabla 4

## 4. Conclusiones

En el presente trabajo se prueba que no es necesario la aparición de singularidades de strut para mantener apartados los objetos de sistemas binarios con un objeto extremo; es decir, se prueba la existencia de estados de equilibrio en sistemas extremo-subextremo y extremo-hiperextremo, ambos en el caso de vacío. En los resultados obtenidos se concluye lo siguiente:

- *Conjetura* : Es imposible encontrar estados de equilibrio con masas de Komar positivas entre un objeto extremo y uno subextremo en el caso de vacío , lo cual lleva a la aparición de singularidades de anillo.
- La fuerza de repulsión spín-spín entre un objeto extremo y un hiperextremo puede equilibrar la atracción gravitacional entre los mismos, evitando la aparición de singularidades cónicas sobre el eje de simetría en la región intermedia entre los objetos.
- *Conjetura* : Todos los sistemas binarios con un objeto extremo en equilibrio son contrarrotantes; es decir, los objetos que los consituyen giran en direcciones opuestas.

## Referencias

- [1] Kramer D y Neugebauer G., *Phys. Lett. A* **75** 259 (1980)
- [2] Manko V. S. y Ruiz E., *Class. Quantum Grav.* **18** L11-L15 (2001)
- [3] Azuma T. y Koikawa T., *Prog. Theor. Phys.* **92** 6 (1994)
- [4] Bretón N., Manko V.S. y Aguilar Sánchez J., *Class. Quantum Grav.* **15** 3071-3083 (1998)
- [5] Manko V. S., Ruiz E., Sanabria-Gómez J.D., *Class. Quantum Grav.* **17** 3881 (2000)
- [6] Ernst F. J., *Phys. Rev.* **167** 1175 (1968)  
Ernst F. J., *Phys. Rev.* **168** 1415 (1968)

- [7] Manko V. S. y Sibgatullin N. R., *Class. Quantum Grav.* **10** 1383 (1993)
- [8] Israel W., *Phys. Rev. D* **15** 935 (1977)
- [9] Tomimatsu A., *Prog. Theor. Phys.* **70** 385 (1983)
- [10] Geroch R. , *J. Math. Phys.* **11** 2580 (1970)
- [11] Hansen R. O. , *Prog. Theor. Phys.* **15** 46 (1974)
- [12] Fodor G., Hoenselaers C. y Perjés Z. , *J. Math. Phys.* **30** 2252 (1989)