

CAMPO EXTERIOR DE ESTRELLAS DE NEUTRONES RÁPIDAMENTE ROTANTES EN RELATIVIDAD GENERAL

Resultados recientes usando soluciones exactas

José David Sanabria–Gómez

Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación GIRG
Universidad Industrial de Santander

10 Aniversario del CFF-UCLA, Mérida – 2005

- 1 Introducción
- 2 SOLUCIONES INTERIORES
 - Modelo de estrellas de neutrones interiores
- 3 SOLUCIONES EXTERIORES
 - Soluciones estacionarias axialsimétricas
 - El método de Sibgatullin
- 4 Comparaciones numéricas
 - Comparación no invariante
 - Comparación invariante
- 5 Conclusiones

INTRODUCCIÓN

¿ Qué es una estrella de neutrones?

- Desde el exterior: Un objeto compacto, masivo, rotante, deformado y magnetizado.
- Desde el interior: Un objeto formado por materia a altísimas densidades y energías. Laboratorio de Física Nuclear.

Características básicas

Masa $\sim 1,4M_{\odot}$

Radio $\sim 10\text{Km}$

Periodo de rotación $\sim 10^{-3}\text{s}$

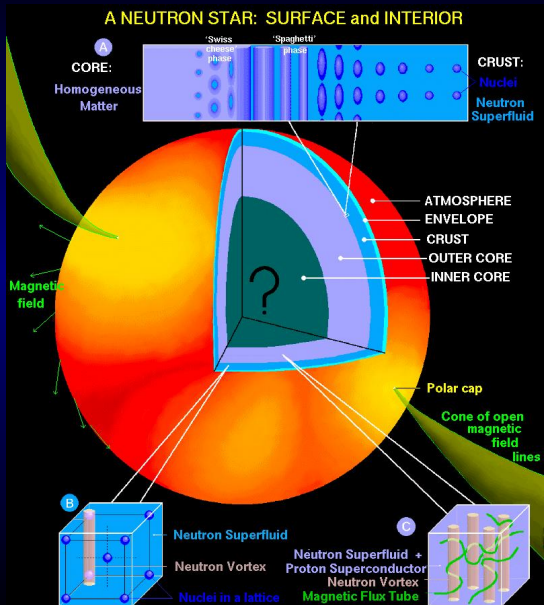
Densidad $\sim 10^{14}\text{g/cm}^3$

Campo magnético $\sim 10^{12}\text{Gauss}$

¿Por qué estudiar estrellas de neutrones?

- Son objetos muy abundantes en la naturaleza. La tasa de supernovas se estima en 1 cada 30 años y se cree que el colapso de supernova origina mayoritariamente como remanente una estrella de neutrones. Para la edad de formación de nuestra galaxia ($\sim 10,000$ millones de años) se esperaría contar con $10^8 - 10^9$ estrellas de neutrones formadas.
- Gravedad superficial es del orden de $10^{11}g$. Objetos relativistas.
- Fuentes intensas de radiación: Rayos X y Rayos Gamma (¿Gamma ray burst?)

- Poseen los campos magnéticos mas fuertes conocidos.
- Pueden crear discos de acrecimiento que emitan radiación.
- Pueden estar rodeados de partículas cargadas y se podría entonces hacer estudios de magnetohidrodinámica y plasma astrofísico.
- Las partículas que caen sobre su superficie podrían emitir ondas gravitacionales.
- Puede estudiarse caos en sus geodésicas.



SOLUCIONES INTERIORES

Un modelo de estrella de neutrones interior en equilibrio corresponde a:

La solución de las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

para una cierta métrica, generalmente

$$ds^2 = -e^{\gamma+\rho} dt^2 + e^{2\alpha} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + e^{\gamma-\rho} r^2 \sin^2 \theta (d\varphi - \omega dt)^2,$$

donde las funciones γ , ρ , α y ω solo dependen de r y θ

+

el tensor de energía–impulso del fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu}$$

+

las ecuaciones de equilibrio hidrostático

+

las ecuaciones del campo magnético

+

una ecuación de estado EOS.

Como es bien conocido, la solución de estos sistemas de ecuaciones solo puede realizarse mediante la utilización de métodos numéricos sofisticados. Se cuenta con bastante información de los trabajos en soluciones interiores:

Cook G, Shapiro S and Teukolsky S.

Rapidly rotating neutron stars in general relativity: Realistic equation of state. *Ap.J.* **424** 823 (1994)

Usaron el método de Komatsu–Eriguchi–Hachisu KEH para solucionar las ecuaciones de campo y 14 ecuaciones de estado para calcular parámetros de la estrella de neutrones:

- masa M ,
- momento angular J ,
- momento de inercia I ,
- densidad de energía central ϵ_c ,
- radio ecuatorial R_e ,
- altura de la órbita marginalmente estable h_{\pm} ,
- corrimiento al rojo Z_b, Z_f .

No. 2, 1994

ROTATING NEUTRON STARS

TABLE 2
EQUATIONS OF STATE

EOS	Description
A	Reid soft core, Pandharipande (1971 <i>a</i>)
B	Reid core with hyperons, Pandharipande (1971 <i>b</i>)
C	Bethe and Johnson (1974), model I
D	Bethe and Johnson (1974), model V
E	Moszkowski (1974)
F	Arponen (1972)
G	Canuto and Chitre (1974)
L	Mean field, Pandharipande and Smith (1975 <i>b</i>) (tabulated in Pandharipande et al. 1976)
M	Tensor interaction, Pandharipande and Smith (1975 <i>a</i>)
N*	Relativistic mean field, Serot (1979)
AU	AV14 + UVII, Wiringa, Fiks, and Fabrocini (1988)
UU	UV14 + UVII, Wiringa, Fiks, and Fabrocini (1988)
UT	UV14 + TNI, Wiringa, Fiks, and Fabrocini (1988)
FPS	UV14 + TNI, Lorenz, Ravenhall, and Pethick (1993)

Salgado M, Bonazzola S, Gourgoulhon E and Haensel P.
High precision rotating neutron star models. I. Analysis of neutron star properties. *A&A* **291** 155 (1994); II. Large sample of neutron star properties. *A&AS* **108** 455 (1994).

Usaron un código numérico diferente, basado en el método espectral, y 14 ecuaciones de estado (5 coinciden con las de CST) para calcular perfiles de densidad de energía ϵ_c y frecuencia de rotación Ω contra momento angular J , además de otra información.

Table 1. Comparison with the rotating M_{\max} models of Cook et al. (1994c) (denoted below by CST). For each EOS, the CST values are listed below ours and are taken from their Table 5, translating their solar masses into our unit $1 M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

EOS	$M [M_{\odot}]$	$\Omega_{\max} [10^4 \text{ s}^{-1}]$	$R_{\text{circ}} [\text{km}]$	$\frac{cJ}{GM^2}$
PandN	1.928	1.29	11.4	0.641
<i>CST: A</i>	1.939	1.32	11.2	0.665
BJI	2.146	1.07	13.4	0.626
<i>CST: C</i>	2.158	1.06	13.4	0.628
WFF1	2.527	1.32	12.2	0.722
<i>CST: AU</i>	2.536	1.34	12.1	0.734
WFF2	2.586	1.25	12.7	0.707
<i>CST: UU</i>	2.596	1.26	12.6	0.718
WFF3	2.172	1.14	12.8	0.662
<i>CST: UT</i>	2.170	1.16	12.7	0.669

Algunas Ecuaciones de Estado EOS

- **PandN:** Materia neutrónica pura. Interacción descrita por “Reid soft core potential”. El estado base se calcula usando método variacional (Pandharipande 1971).
- **BJI:** Materia bariónica compuesta de nucleones, hiperones y Δ 's en equilibrio beta con los leptones. Interacción barión–barión descrita por “Reid soft core potential” modificado.
- **WFF1:** Materia nucleónica en equilibrio beta con electrones y muones. Interacción descrita por el potencial de dos cuerpos AV_{14} de Argonne, combinada con la interacción fenomenológica de tres cuerpos UVII. Estado base de la materia calculado en una muy buena aproximación usando métodos variacionales sofisticados (Wiringa et. al. 1988).

- **WFF2:** Materia nucleónica en equilibrio beta con electrones y muones. Interacción descrita por el potencial de dos cuerpos AV_{14} de Urbana, combinada con la interacción fenomenológica de tres cuerpos UVII. Estado base de la materia calculado en una muy buena aproximación usando métodos variacionales sofisticados (Wiringa et. al. 1988).
- **WFF3:** Materia nucleónica en equilibrio beta con electrones y muones. Interacción descrita por el potencial de dos cuerpos AV_{14} de Urbana, combinada con la interacción fenomenológica de tres cuerpos TNI. Estado base de la materia calculado en una muy buena aproximación usando métodos variacionales sofisticados (Wiringa et. al. 1988).

Cook–Shapiro–Teukolski. *Ap.J.* 424 823 (1994)EOS A: 1.4 M_{\odot} NORMAL SEQUENCE ($M_0 = 1.5663 M_{\odot}$)

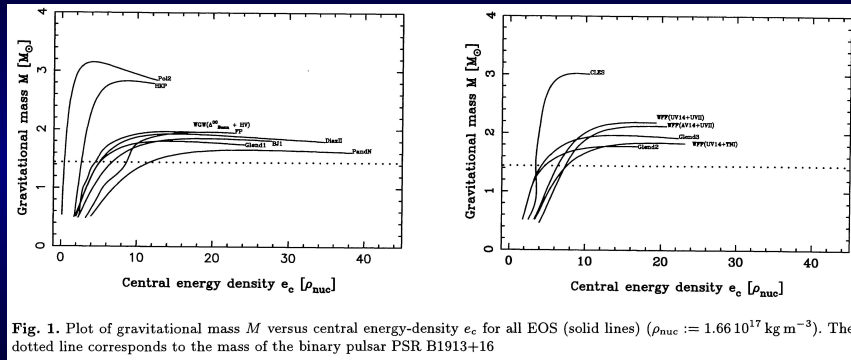
ϵ_c	Ω	I	M/M_{\odot}	T/W	R_e	e	ω_c/Ω_c	Z_p	Z_b	Z_f	h_+	h_-
1.8582	0.0000	0.9952	1.4000	0.000	9.586	0.000	0.550	0.326	0.326	0.326	2.824	2.824
1.8127	3.2441	1.0238	1.4030	0.010	9.763	0.252	0.548	0.329	0.519	0.148	1.575	4.114
1.7422	5.0189	1.0714	1.4077	0.026	10.06	0.395	0.545	0.333	0.638	0.049	0.897	4.854
1.6744	6.1366	1.1217	1.4123	0.041	10.38	0.491	0.542	0.336	0.722	-0.018	0.463	5.333
1.6093	6.9400	1.1749	1.4169	0.056	10.74	0.566	0.538	0.339	0.789	-0.070	0.129	5.678
1.5467	7.5448	1.2316	1.4214	0.071	11.14	0.628	0.534	0.341	0.846	-0.116	...	5.915
1.4939	7.9537	1.2843	1.4252	0.084	11.56	0.676	0.531	0.342	0.890	-0.153	...	6.031
1.4502	8.2364	1.3322	1.4285	0.094	12.00	0.715	0.528	0.343	0.926	-0.185	...	6.038
1.4146	8.4311	1.3743	1.4313	0.103	12.49	0.749	0.526	0.343	0.957	-0.214	...	5.911
1.3810	8.5906	1.4176	1.4340	0.112	13.72	0.805	0.523	0.343	1.009	-0.270	...	5.044

TABLE 10

EOS A: MAXIMUM-MASS NORMAL SEQUENCE ($M_0 = 1.9182 M_{\odot}$)

ϵ_c	Ω	I	M/M_{\odot}	T/W	R_e	e	ω_c/Ω_c	Z_p	Z_b	Z_f	h_+	h_-
4.1300	0.0000	1.0416	1.6551	0.000	8.368	0.000	0.772	0.551	0.551	0.551	6.303	6.303
3.4156	3.6610	1.1142	1.6592	0.008	8.753	0.204	0.736	0.521	0.777	0.285	4.651	7.333
3.0643	5.4420	1.1737	1.6650	0.019	9.056	0.319	0.716	0.511	0.902	0.162	3.745	7.892
2.7492	6.9489	1.2480	1.6728	0.034	9.433	0.426	0.698	0.504	1.021	0.057	2.888	8.406
2.4664	8.1644	1.3415	1.6823	0.053	9.910	0.526	0.680	0.499	1.128	-0.035	2.086	8.858
2.2736	8.8856	1.4265	1.6904	0.070	10.36	0.596	0.667	0.495	1.200	-0.098	1.514	9.135
2.1245	9.3542	1.5076	1.6976	0.084	10.81	0.651	0.657	0.491	1.253	-0.147	1.056	9.298
2.0123	9.6490	1.5806	1.7036	0.096	11.26	0.694	0.648	0.488	1.292	-0.187	0.673	9.356
1.9060	9.8796	1.6624	1.7098	0.109	11.88	0.740	0.640	0.484	1.329	-0.231	0.186	9.267
1.8296	10.011	1.7316	1.7148	0.119	13.07	0.799	0.633	0.481	1.376	-0.298	...	8.487

Salgado–Bonazzolla–Gourgoulhon–Haensel. *A&A* 291 155 (1994), *A&AS* 108 455 (1994).





Resultados numéricos

Berti E. and Stergioulas N. Approximate matching of analytical and numerical solutions for rapidly rotating neutron star. **MNRAS 350** 1416 (2004).

ϵ_c $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$	Ω 10^3 s^{-1}	I 10^{45} g cm^2	M M_\odot	T/W —	R_e km	h_+ km	h_- km	M_2 km^3	J km^2	S_3 km^4	b km
$M_B = 1.589M_\odot$											
1.8582	0.000	—	1.402	0.0000	9.570	2.841	2.841	0.000	0.0000	0.000	—
1.8127	3.205	1.023	1.405	0.0099	9.741	1.609	4.115	-1.001	0.8121	-0.727	—
1.7422	5.005	1.070	1.410	0.0257	10.04	0.924	4.866	-2.656	1.327	-3.158	—
1.6744	6.138	1.121	1.415	0.0411	10.36	0.485	5.354	-4.377	1.704	-6.694	-0.4777
1.6093	6.952	1.174	1.419	0.0563	10.71	0.151	5.706	-6.173	2.022	-11.23	-0.6302
1.5467	7.565	1.232	1.424	0.0712	11.12	—	5.951	-8.063	2.307	-16.77	-0.6738
1.4939	7.982	1.285	1.428	0.0840	11.53	—	6.073	-9.806	2.540	-22.50	-0.6701
1.4502	8.266	1.333	1.432	0.0948	11.97	—	6.083	-11.37	2.729	-28.10	-0.6486
1.4146	8.463	1.376	1.435	0.1038	12.46	—	5.961	-12.74	2.884	-33.35	-0.6214
1.4050	8.511	1.388	1.435	0.1062	12.64	—	5.883	-13.13	2.925	-34.88	-0.6128
$M_B = 1.948M_\odot$											
4.1300	0.000	—	1.658	0.0000	8.362	6.313	6.313	0.000	0.0000	0.000	—
3.4156	3.571	1.115	1.662	0.0734	8.740	4.701	7.315	-0.623	0.9857	-0.376	—
3.0643	5.410	1.174	1.668	0.0186	9.042	3.776	7.897	-1.657	1.573	-1.637	—
2.7492	6.942	1.249	1.676	0.0341	9.419	2.911	8.422	-3.237	2.147	-4.459	—
2.4664	8.172	1.343	1.686	0.0533	9.894	2.104	8.883	-5.434	2.717	-9.667	—
2.2736	8.893	1.427	1.694	0.0696	10.34	1.540	9.163	-7.529	3.143	-15.72	-0.2679
2.1245	9.371	1.509	1.701	0.0842	10.79	1.081	9.336	-9.619	3.501	-22.64	-0.4798
2.0123	9.595	1.576	1.708	0.0945	11.20	0.723	9.356	-11.31	3.746	-28.76	-0.5568
1.9060	9.852	1.660	1.714	0.1078	11.79	0.252	9.309	-13.52	4.051	-37.53	-0.5941
1.8500	10.00	1.715	1.719	0.1163	12.38	—	9.092	-15.03	4.247	-44.00	-0.5972

Bocquet–Bonazzola–Gourgoulhon–Novak. Rotating neutron star model with a magnetic field. *A&A* 301 757 (1995)

Table 1. Maximum mass (at fixed magnetic dipole moment) neutron stars in the non-rotating case. For each EOS, the last line is the maximum mass configuration among all static magnetized models. \mathcal{M} is the magnetic dipole moment, B_c and B_{pole} are respectively the values of the magnetic field at the centre and the north pole of the star, H_c is the central value of the log-enthalpy as defined by Eq. (13), e_c the central energy density ($1 \rho_{\text{nuc}} := 1.66 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$), $p_{\text{mg,c}}/p_{\text{n,c}}$ the ratio of the magnetic pressure to the fluid pressure at the star centre, M the gravitational mass, \mathcal{B} the baryon mass, E_{bind} the binding energy per baryon (with the convention $E_{\text{bind}} < 0$ for a bound configuration), R_{circ} the circumferential radius (length of the star's equator divided by 2π) and GRV2 and GRV3 the estimates of the global numerical relative error provided by the virial identities GRV2 and GRV3 (cf. text). We use $G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ and $1 M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

EOS	\mathcal{M} [10^{32} A m ²]	B_c [10^3 GT]	B_{pole} [10^3 GT]	H_c	e_c [$\rho_{\text{nuc}} c^2$]	$p_{\text{mg,c}}/p_{\text{n,c}}$	M [M_{\odot}]	\mathcal{B} [M_{\odot}]	E_{bind} [$m_{\text{B}} c^2$]	R_{circ} [km]	GRV2	GRV3
Pol2	0	0	0	0.491	4.17	0	3.158	3.470	-0.0897	21.77	1E-14	4E-12
	2.00	37.8	6.2	0.483	4.07	0.04	3.182	3.486	-0.0872	21.93	1E-06	2E-06
	11.22	90.0	45.7	0.225	1.42	1.36	4.062	4.279	-0.0507	26.45	1E-03	7E-04
DiazII	0	0	0	0.610	15.21	0	1.933	2.210	-0.1253	10.92	1E-04	1E-04
	0.50	73.8	14.1	0.600	14.85	0.03	1.940	2.212	-0.1229	11.00	2E-04	2E-04
	3.08	207.4	108.3	0.285	6.22	1.10	2.324	2.508	-0.0734	13.12	1E-04	9E-05
PandN	0	0	0	0.733	24.39	0	1.662	1.932	-0.1340	8.55	1E-04	2E-04
	0.20	64.7	11.9	0.727	24.13	0.01	1.663	1.931	-0.1384	8.57	1E-04	2E-04
	1.86	302.8	153.8	0.350	11.21	1.01	1.910	2.064	-0.0746	10.00	3E-04	2E-04
BJI	0	0	0	0.699	18.64	0	1.856	2.134	-0.1303	9.91	2E-06	3E-06
	0.30	61.5	11.0	0.692	18.40	0.01	1.858	2.132	-0.1288	9.94	2E-06	2E-06
	2.63	233.2	121.0	0.300	7.47	1.10	2.176	2.344	-0.0717	12.05	1E-04	5E-05
HKP	0	0	0	0.725	8.75	0	2.836	3.422	-0.1712	13.67	1E-04	8E-05
	0.80	56.0	12.4	0.714	8.57	0.02	2.840	3.417	-0.1689	13.75	1E-04	9E-05
	4.90	196.6	104.5	0.370	4.36	0.90	3.212	3.594	-0.1063	15.85	6E-04	3E-04

SOLUCIONES EXTERIORES

Una estrella de neutrones rotante es un objeto axialmente simétrico y su rotación induce deformación en la distribución de masa estelar. Esta deformación puede cuantificarse por su *momento cuadrupolar de masa* M_2 . Para el caso de rotación lenta

$$j := \frac{J}{M^2} = \frac{c}{G} \frac{J}{M^2} \sim 0,$$

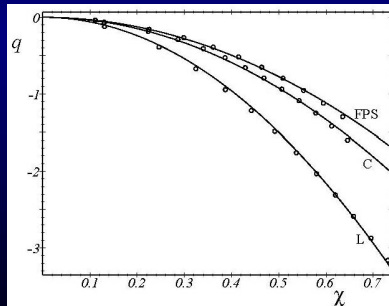
el campo exterior puede describirse de forma aproximada usando la solución de Kerr y particularmente la solución de Hartle–Thorne.

Para el caso de rotación rápida ($j \sim 1$) se debe acudir a otras soluciones debido, entre otros aspectos, al comportamiento del cuadrupolo de masa:

Dependencia del cuadrípolo de masa y el momento angular

Solución de Kerr: $M_2 = -\frac{J^2}{M}$.

Soluciones interiores ¹: $M_2 = -\kappa(M, EOS)\frac{J^2}{M}$.



¹Laarakkers WG and Poisson E. Quadrupole moments of rotating neutron stars. *Ap.J* 512 282 (1995)

Se requieren entonces soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, axialmente simétricas, estacionarias, asintóticamente planas y con simetría ecuatorial para describir correctamente el campo de este tipo de objetos astrofísicos. Además, deben poseer los siguientes parámetros arbitrarios:

- masa M ,
- momento angular J ,
- cuadripolo de masa M_2 y,
- momento dipolar magnético \mathcal{M} (para el caso de estrellas magnetizadas).

METODO DE SIBGATULLIN DE CONSTRUCCION DE SOLUCIONES EXACTAS

La métrica mas simple para describir un campo estacionario axialmente simétrico es la métrica de Papapetrou

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\varphi)^2 + f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2],$$

donde las funciones f , γ y ω solo dependen de las coordenadas ρ y z . Es bien conocido que al reemplazar esta métrica en las ecuaciones de Einstein y definir un nuevo potencial complejo \mathcal{E} , se obtiene la ecuación de Ernst²

$$(\text{Re } \mathcal{E}) \nabla^2 \mathcal{E} = \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E}$$

junto con las ecuaciones para la función γ .

²Ernst FJ. *Phys Rev* **167** 1175 (1968)

El método de Sibgatullin permite calcular el potencial \mathcal{E} para todo el espacio a partir de los datos sobre el eje de simetría

$$e(z) := \mathcal{E}(\rho = 0, z)$$

mediante la fórmula

$$\mathcal{E}(\rho, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e(\xi)\mu(\sigma)d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}$$

donde $\xi = z + i\rho\sigma$ y $\mu(\sigma)$ es una función sujeta a satisfacer ciertas condiciones integrales.

Una vez conocido \mathcal{E} se puede obtener f , ω y luego se puede calcular γ .

Las características físicas de la solución quedan determinadas completamente por los datos del potencial $e(z)$, de forma que este método permite construir soluciones con propiedades físicas predefinidas. Tomando ventaja de esta fortaleza del método se han encontrado diversas soluciones, entre otras:

- Generalización magnetizada asintóticamente plana de la solución de Schwarzschild,
- Generalización magnetizada asintóticamente plana de la solución de Kerr,
- Generalización deformada, cargada y magnetizada asintóticamente plana de la solución de Tomimatsu–Sato $\delta = 2$, con simetría ecuatorial,³

³Manko OV, Manko VS and Sanabria–Gómez JD. *Phys Rev D* **62** 04404 (2000); Manko VS, Mielke EW and Sanabria–Gómez JD. *Phys Rev D* **61** 08150R (2000)

- Generalización deformada de la solución de Kerr en seis solitones, asintóticamente plana y con simetría ecuatorial,⁴
- Solución que representa sistemas binarios que involucran un objeto extremo.⁵

Algunas de estas soluciones permiten el ajuste numérico con los datos de soluciones interiores. Se han realizado varios procedimientos, en seguida se presenta información resumida.

⁴Valenzuela C y Lora F. Trabajo de grado UIS (2005)

⁵Manko VS, Ruiz E and Sanabria-Gómez JD. *Class. Quantum Grav.* **17** 3881 (2000)

COMPARACIONES NUMERICAS

Stute M and Camenzind M. Towards a self-consistent relativistic model of the exterior gravitational field of rapidly rotating neutron stars. *MNRAS* **336** 831 (2002)

Utilizaron la generalización deformada de la métrica de Tomimatsu–Sato $\delta = 2$ calculada por Manko–Mielke–Sanabria–Gómez (PRD 2000) para realizar ajustes a través de los datos de corrimiento al rojo Z de Cook–Shapiro–Teukolsky.

Procedimiento:

- 1 Ajustaron M en la forma (ir a 33)

$$M(J) = m_0 + m_1 J^2 + m_2 J^4 + m_3 J^6.$$

- 2 Igualaron, en el plano ecuatorial, el corrimiento al rojo

$$Z_{\text{NUM}} = (1 + Z_b)(1 + Z_f), \quad \text{con} \quad Z_{\text{EXACT}} = \frac{1}{f(r, M, J, M_2)},$$

evaluando en $M = M(J)$, $r(J) = R_e(J)$ para encontrar $M_2 = M_2(M(J), J, b(J))$.

- 3 Como criterio de verificación independiente, compararon el radio de la órbita marginalmente estable

$$R_e + h_{\pm}$$

de la solución interior con el de la solución exterior ajustada numéricamente.

Comparación no invariante

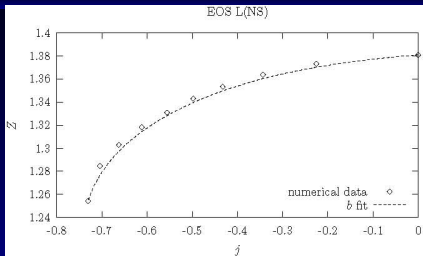


Figure 4. gravitational redshift Z vs. rotation parameter j for the normal sequence of EOS L

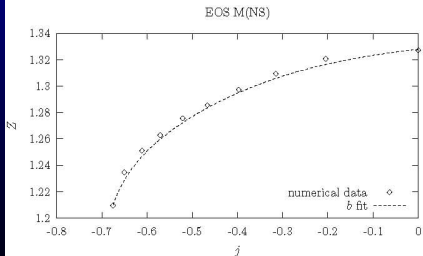


Figure 5. gravitational redshift Z vs. rotation parameter j for the normal sequence of EOS M

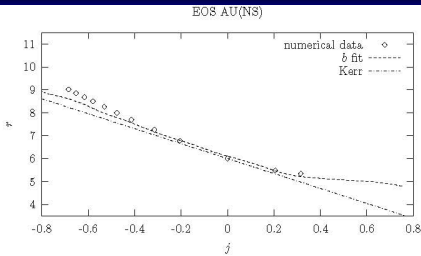


Figure 7. radius of the marginally-stable orbit (in units of m) vs. rotation parameter j for the normal sequence of EOS AU

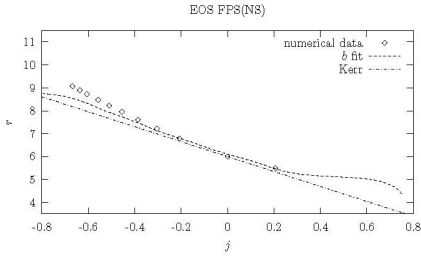


Figure 8. radius of the marginally-stable orbit (in units of m) vs. rotation parameter j for the normal sequence of EOS FPS

Sin embargo, posteriormente Berti–Stergioulas resaltaron dos dificultades en este trabajo:

- Un cambio de coordenadas incorrecto,
- El hecho de que la comparación por Z es un procedimiento dependiente de coordenadas (no invariante).

Berti E. and Stergioulas N. Approximate matching of analytical and numerical solutions for rapidly rotating neutron star. **MNRAS** 350 1416 (2004).

Utilizaron la misma solución (Manko–Mielke–Sanabria–Gómez (PRD 2000)) pero calcularon sus propios valores numéricos incluyendo dos parámetros adicionales: Cuadripolo de masa M_2 y octupolo de momento angular S_3 .

Realizaron la comparación a través de un procedimiento invariante.

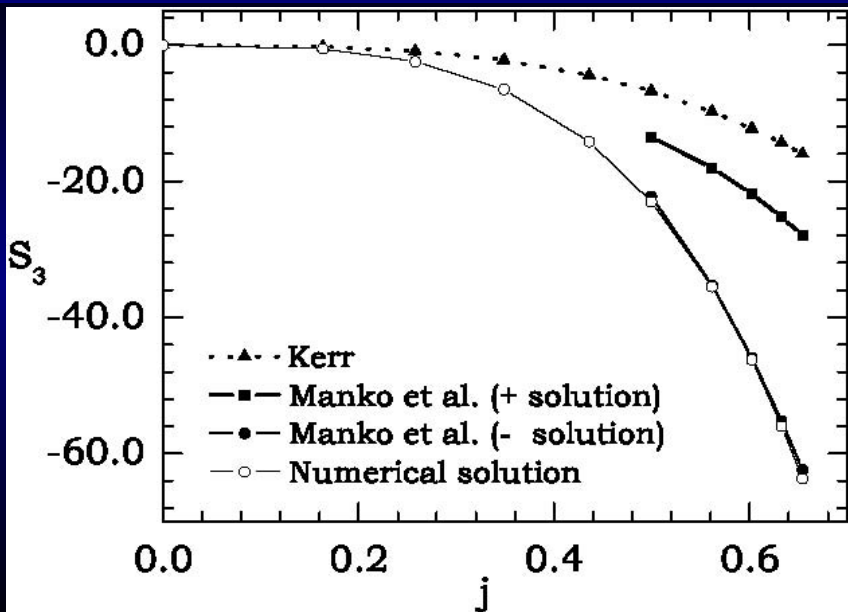
Procedimiento: (ir a 35)

- 1 Ajustaron los valores de los momentos multipolares de la solución exterior con los datos de la solución interior

$$M = M_{NUM}, \quad J = J_{NUM}, \quad M_2(M, J, \mathbf{b}) = M_{2NUM}.$$

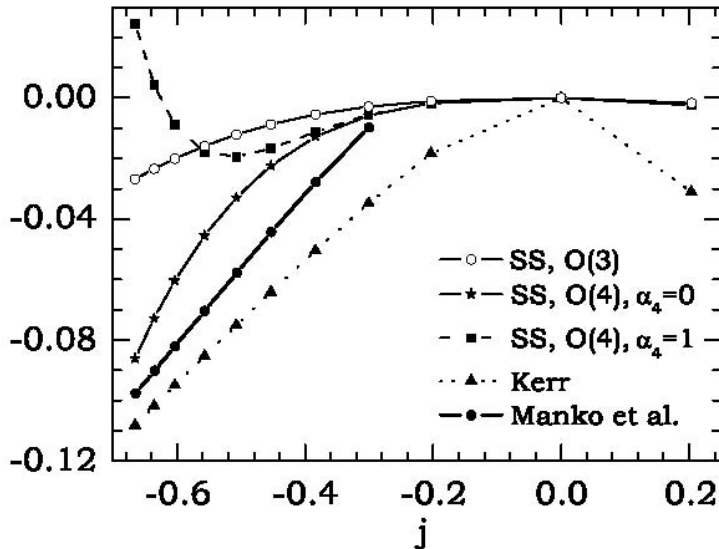
- 2 Realizaron una verificación independiente usando el radio de la órbita marginalmente estable y el octupolo de momento angular S_3 .

Comparación invariante



Comparación invariante

$$\Delta R_{\text{ISCO}}/R_{\text{ISCO}}$$



En los dos trabajos mencionados anteriormente se encontró que:

- 1 las soluciones exactas se ajustan de muy buena forma solo para algunas ecuaciones de estado,
- 2 los radios de las orbitas marginalmente estables en el caso co-rotante se ajustan bien pero en el caso contra-rotante no,
- 3 en algunos casos, la solución exacta se ajusta bien para una secuencia de masa de una ecuación de estado, pero no se ajusta adecuadamente para otra secuencia de masa de la misma ecuación de estado.

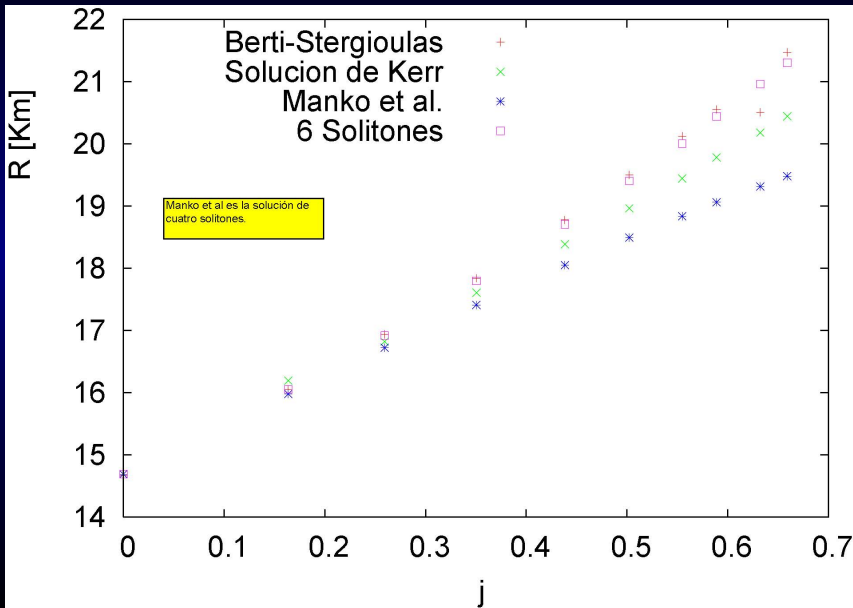
Pachón LA, Sanabria–Gómez JD y Valenzuela CA Modelo relativista para el campo exterior de estrellas de neutrones rotantes usando una nueva solución exacta. En preparación.

Han usado una generalización de cuatro solitones con simetría ecuatorial y asintóticamente plana de la solución de Kerr, deformada y con octupolo de momento angular, calculada por Manko–Martin–Ruiz (J Math Phys 1996). Se ha encontrado que:

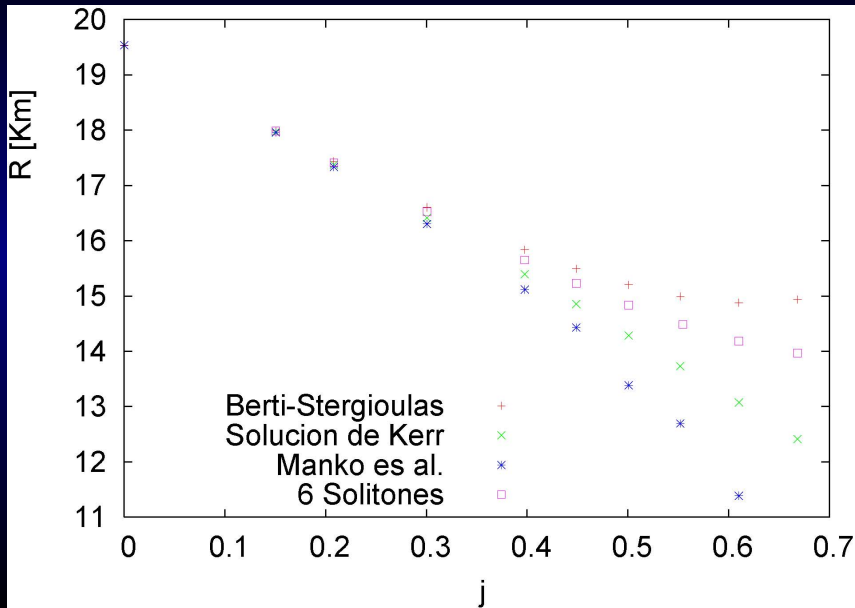
- 1 Al realizar el ajuste de la solución exacta usando solamente M , J y M_2 (S_3 NO ARBITRARIO) los resultados son muy parecidos a los que se logran cuando se ajustan perfectamente los cuatro multipolos, entonces se muestra que S_3 no es un parámetro determinante,
- 2 los resultados de este ajuste son PEORES que los de Berti–Stergioulas.

Entonces, calculan una **una nueva solución de seis solitones que generaliza a la solución de Kerr** con los parámetros de cuadripolo de masa y octupolo de momento angular arbitrarios, y que además es asintóticamente plana y con simetría ecuatorial. Por contar con cuatro parámetros libres, es posible ajustar perfectamente los momentos multipolares de los datos numéricos de Berti–Stergioulas. De nuevo, como criterio de comparación se usa el radio de la órbita marginalmente estable. **Los resultados son mejores que los obtenidos por Berti–Stergioulas para todas las ecuaciones de estado y secuencias de masa consideradas hasta ahora.**

Comparación invariante



Comparación invariante



CONCLUSIONES

- Es posible modelar el campo exterior de una estrella de neutrones rápidamente rotante usando soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein.
- No existe un criterio físico adecuado para determinar qué solución exterior se ajusta con una solución interior dada.
- Parece que los momentos multipolares determinantes en los ajustes son la masa, el momento angular y el cuadrípolo de masa.
- Los resultados son cada vez menos buenos cuando aumenta el momento angular.

TOPICOS PENDIENTES

- ¿Se debe buscar un modelo para el campo exterior con una solución que no generalice a Kerr?
- Si se cree que los momentos multipolares dominantes en una estrella de neutrones son la masa, el momento angular y el cuadripolo de masa, por qué $|S_3|$ es tan grande?
- ¿Existirá una solución simple, en dos o cuatro solitones, que tenga los momentos multipolares adecuados para modelar el campo de estos objetos?
- ¿Son correctos los resultados de las soluciones interiores?
¿O los de las soluciones exteriores?
- ¿De qué forma se pueden lograr ajustes con menos error?
Afectando la ecuación de estado de la estrella?
- ¿Existe algún otro criterio de comparación entre soluciones interiores y exteriores?

GRACIAS