
GEOMETRIA y FISICA en ESPACIO-TIEMPOS AXISIMÉTRICOS

Jaume Carot,
Grup de Relativitat i Cosmologia
Dep. Física, Universitat Illes Balears
Campus UIB, Cra Valldemossa pk 7.5
E-07122 Palma de Mallorca (Espanya)

Tel.: +34-971-173225
Fax: +34-971-173426
jcarot@uib.es

Centro de Física Fundamental
10^o Aniversario
Universidad de los Andes (ULA)
Mérida (Venezuela)
Junio de 2005

Índice general

1. Tópicos Avanzados.	3
1.1. Variedades, coordenadas y tensores:	
Un resumen operativo.	3
1.1.1. Variedades y coordenadas: Resumen.	3
1.1.2. Vectores y campos de vectores.	4
1.1.3. Tensores de orden superior.	8
1.1.4. Variedades con métrica.	10
1.2. La aplicación exponencial y las coordenadas normales.	14
1.3. La Relatividad General como teoría geométrica.	17
1.4. Transformaciones generadas por un campo vectorial.	19
1.5. Transformaciones inducidas sobre vectores y tensores.	20
1.5.1. Vectores Covariantes y Pull-back.	22
1.5.2. Tensores arbitrarios y Pull-Back.	22
1.6. La derivada de Lie formal e informalmente.	24
1.6.1. La derivada de Lie en coordenadas adaptadas.	26
1.6.2. La derivada de Lie y el pull-back de un tensor cualquiera.	27
1.7. Simetría de un tensor.	28
1.8. Isometrías.	28
1.8.1. Puntos fijos de las isometrías.	31
2. Simetría Axial.	33
2.1. Intuición, definición y primeras propiedades.	33
2.1.1. Primeros resultados.	34

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
2.2. Construyendo el espaciotiempo a partir del eje.	37
2.2.1. Otros sistemas de coordenadas.	40
2.3. Espaciotiempos axialmente simétricos que admiten más simetrías.	43
2.3.1. Espaciotiempos estacionarios y axisimétricos.	44
2.4. Un modelo simple de fluido.	46
2.5. Coordenadas esféricas.	48
3. Espaciotiempos Warped.	51
3.1. Introducción y primeras propiedades.	51
3.1.1. Espaciotiempos warped y descomponibles.	51
3.1.2. Observadores adaptados y tetradas.	53
3.1.3. Tensor de Einstein y Espaciotiempos warped.	54
3.2. Contenido material de los espaciotiempos warped B_T	55
3.2.1. Observadores y contenido material.	55
3.2.2. El tensor de presiones anisotrópicas y el tensor de shear.	56
3.2.3. Estructura de Autovectores y condiciones de energía.	58
3.2.4. Resumiendo algunos resultados.	63
3.3. Escenario de hidrodinámica y radiación.	64
3.4. Un Ejemplo.	67
4. Apéndice 1.	69
4.1. Variedades y coordenadas. Una aproximación informal.	69
4.1.1. Coordenadas en una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$	70
4.2. Variedades y coordenadas. Una aproximación formal.	73

Capítulo 1

Tópicos Avanzados.

En este capítulo veremos revisaremos algunos conceptos básicos en Relatividad General y estableceremos parte de la notación que utilizaremos en lo que sigue y a continuación veremos algunos desarrollos un tanto más avanzados en geometría diferencial pero que resultan altamente intuitivos y fáciles de comprender.

Todas nuestras consideraciones se aplicarán en última instancia a un espaciotiempo, esto es: una variedad 4-dimensional dotada de una métrica de tipo Lorentz, pero la mayor parte de los resultados que presentaremos son válidos para una variedad n -dimensional cualquiera dotada de una métrica (no singular) arbitraria, de modo que en gran parte de este capítulo (sobre todo en las primeras secciones) nos referiremos a una dimensión n arbitraria.

1.1. Variedades, coordenadas y tensores: Un resumen operativo.

Vamos a revisar en esta sección los conceptos más elementales de la Geometría Diferencial, que constituye el lenguaje matemático en que viene escrita la teoría de la Relatividad General y que describe a su vez la interacción gravitatoria.

1.1.1. Variedades y coordenadas: Resumen.

Como es conocido (véase el Apéndice 1 para más detalles), una variedad (diferenciable) M de dimensión n es la generalización a dimensión n del concepto de superficie (diferenciable). Equivalentemente: es un conjunto de puntos que localmente (esto es: en un entorno de cada punto) admite sistemas de coordenadas de modo que: (1) a puntos distintos corresponden a valores distintos de las coordenadas y viceversa, y (2) a puntos próximos entre sí corresponden valores próximos entre sí de las coordenadas y viceversa (localmente como \mathbb{R}^n). Además, los cambios de coordenadas (tanto en las regiones de superposición de dos entornos como dentro de un mismo entorno) son infinitamente diferenciables; esto es: los puntos no forman 'puntas', 'crestas', etc. (diferenciable).

La imagen pictórica es la de que una variedad está hecha de trozos que son como conjuntos abiertos de

\mathbb{R}^n , ‘cosidos’ entre si sin formar puntas, crestas, etc., esto es: “suavemente”.

A partir de este momento pasamos a manejar la imagen intuitiva de variedad y a aligerar un poco el lenguaje; así hablaremos de *una variedad M con sistemas (o cartas) de coordenadas $x = \{x^a\}$ y $x' = \{x^{a'}\}$* , sin preocuparnos de los abiertos donde están definidas dichas coordenadas, ni de los abiertos de \mathbb{R}^n sobre los cuáles toman valores, etc. sobreentenderemos en todo momento que ambos sistemas de coordenadas coexisten en una cierta región de la variedad que es la que nos interesa.

Recordemos que dado un punto p de coordenadas x_p^a , la curva coordenada x^1 que pasa por p se obtiene fijando los valores de las coordenadas $x^2 = x_p^2, \dots, x^n = x_p^n$ y dejando variar la coordenada x^1 , así, paramétricamente esa curva sería, por ejemplo $x^a(t) = (t, x_p^2, \dots, x_p^n)$; y así para todas las curvas coordenadas. Recordemos también que en un punto cualquiera siempre se cortan n curvas coordenadas y que éstas nunca se superponen dos a dos, i.e.: se cortan, no son tangentes nunca.

1.1.2. Vectores y campos de vectores.

Dada una variedad n -dimensional M , consideremos un punto $p \in M$ y un sistema de coordenadas $x = \{x^a\}$ válido en una región alrededor de ese punto. Vamos a definir los conceptos de *vector contravariante* y *vector covariante* (y los conceptos asociados de *campos vectoriales* contra y covariante respectivamente) del modo en que los usaremos en todo lo que sigue.

Vectores contravariantes.

Con la notación establecida más arriba, consideremos ahora el siguiente conjunto de operadores de derivación en p :

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\} \equiv \{ \partial_a \Big|_p \} \quad (1.1)$$

Claramente, para a fijo, el operador $\partial_a \Big|_p$ aplicado a una función cualquiera $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ da la derivada de la función f a lo largo de la curva coordenada x^a , o equivalentemente, la derivada direccional de f en la dirección del vector “flecha” tangente a la curva coordenada x^a , todo ello evaluado en el punto p . Existe pues, una correspondencia biyectiva entre los vectores “flecha” tangentes a las curvas coordenadas en un punto dado y los operadores derivada parcial según cada una de las coordenadas en ese punto:

$$\boxed{\text{vector tangente a la curva coord. } x^a \text{ en } p} \leftrightarrow \boxed{\text{derivada parcial según la coord. } x^a \text{ en } p = \partial_a \Big|_p}$$

Más aún: dado un vector “flecha” cualquiera con origen en p , \vec{X}_p , la derivada direccional de f (en p) según la dirección de esa flecha se podrá escribir como

$$[a^1 \partial_1 f + \dots + a^n \partial_n f]_p$$

siendo a^1, \dots, a^n las componentes de esa flecha según las flechas tangentes a cada una de las curvas coordenadas que pasan por p . Así pues existe una correspondencia biyectiva entre vectores flecha con origen en p y operadores derivada direccional en p :

$$\boxed{\text{vector flecha con origen en } p, \vec{X}_p} \leftrightarrow \boxed{\text{operador derivada direccional según } \vec{X}_p \text{ en } p : = a^k \partial_k \Big|_p}$$

De lo anterior se sigue que podemos intercambiar la imagen pictórica de un vector como una flecha con origen en p con la de un operador derivada direccional en p según la dirección que marca esa flecha, de modo que escribiremos

$$\vec{X}_p = [a^1 \partial_1 + \dots + a^n \partial_n]_p \equiv a^k \partial_k|_p \quad (1.2)$$

y llamaremos **vectores en p** (o **vectores contravariantes en p**) a los operadores derivada de este tipo, visualizándolos, si así lo deseamos, como flechas con punto de aplicación en p .

Se denomina **espacio tangente a M en el punto p** , y se representa por $T_p M$, al conjunto de todos los operadores derivada direccional como el anterior, es decir:

$$T_p M = \left\{ \vec{X}_p = X^k \partial_k|_p, \quad X^k \in \mathbb{R} \right\}$$

y se puede visualizar como el conjunto de todas las flechas tangentes a la variedad M que tienen punto de aplicación en p .

Claramente, $T_p M$ tiene estructura de espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar definidos del modo más intuitivo posible, es decir

$$\vec{X}_p = X^k \partial_k|_p, \quad \vec{Y}_p = Y^k \partial_k|_p \quad \text{entonces} \quad \vec{X}_p + \vec{Y}_p = (X^k + Y^k) \partial_k|_p$$

$$\vec{X}_p = X^k \partial_k|_p, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{entonces} \quad c \vec{X}_p = (c X^k) \partial_k|_p$$

y las flechas que representan \vec{X}_p e \vec{Y}_p se suman siguiendo la regla del paralelogramo, etc.

El conjunto $\mathcal{B} = \{\partial_a|_p\}$ introducido más arriba es una base del espacio tangente: **base coordenada** (asociada a las coordenadas x^a), y por lo tanto se tiene $\dim T_p M = n$. Los números X^1, \dots, X^n se llaman **componentes** del vector (según la base \mathcal{B}).

Cambio de base (o de coordenadas) en $T_p M$.

Dado otro sistema de coordenadas $\{x^{a'}\}$, tendremos otra base coordenada de $T_p M$: $\mathcal{B}' = \{\partial_{a'}|_p\}$; expresando un mismo vector en una y otra base (prescindimos de indicar que las derivadas son en el punto p) y utilizando la regla de la cadena se tiene:

$$\vec{X}_p = X^{j'} \partial_{j'} = X^k \partial_k = X^k \left[\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \right]_p \partial_{j'}$$

es decir:

$$X^{j'} = \left[\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \right]_p X^k \quad (1.3)$$

Esto motiva la siguiente definición de vector de uso común en física:

Un vector (contravariante) n -dimensional \vec{X} es un conjunto de n números reales asociados al punto p , que escribimos X^1, \dots, X^n en el sistema de coordenadas $\{x^a\}$ y $X^{1'}, \dots, X^{n'}$ en el sistema de coordenadas $\{x^{a'}\}$, de modo que ambos conjuntos de números están relacionados mediante el jacobiano del cambio de coordenadas evaluado en p :

$$X^{j'} = \left[\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \right]_p X^k, \quad X^i = \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \right]_p X^{j'}.$$

Campos de Vectores Contravariantes.

Los vectores son objetos definidos en un punto y por lo tanto sus componentes son números reales. En Física se tienen multitud de ejemplos de *campos vectoriales*, por ejemplo el campo gravitatorio, en que lo que se tiene es un vector definido en cada punto del espacio (de la variedad), de modo que dicho conjunto de vectores se puede describir colectivamente mediante un vector cuyas componentes son funciones de las coordenadas.

De modo más preciso, se llama **campo vectorial (contravariante)** a una función \vec{X} definida sobre la variedad M tal que a cada punto $p \in M$ le asigna un vector en ese punto, es decir, un vector $\vec{X}_p \in T_p M$. Para una región en la que existe un sistema de coordenadas x , se tendrá

$$\vec{X} = X^a(x) \partial_a$$

de modo que cuando se particulariza a un punto p de coordenadas $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n)$ se tiene el vector $\vec{X}_p = X^a(x_p) \partial_a|_p$.

En lo que respecta al cambio de coordenadas, todo funciona, obviamente, igual que en el caso de los vectores, sólo que ahora deberemos expresar las componentes del campo en las coordenadas que corresponda; i.e.:

$$X^{a'}(x') = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} \right] X^b(x(x')).$$

Ejemplo. Sea $M = \mathbb{R}^2$ y consideremos el campo vectorial dado en cartesianas por:

$$X^1 = y, \quad X^2 = -x; \quad \text{i.e. : } X^a(x, y) = (y, -x) \quad \text{o bien} \quad \vec{X} = y\partial_x - x\partial_y$$

El mismo campo en coordenadas polares $x^{a'} = (\rho, \phi)$ tiene componentes:

$$X^{1'} = 0, \quad X^{2'} = -1; \quad \text{i.e. : } X^{a'}(\rho, \phi) = (0, -1) \quad \text{o bien} \quad \vec{X} = -\partial_\phi.$$

según puede comprobarse explícitamente utilizando la jacobiana del cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \phi &= \arctan \frac{y}{x} \\ x &= \rho \cos \phi, & y &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

entonces

$$\left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} \right] = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\frac{\sin \phi}{\rho} & \frac{\cos \phi}{\rho} \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} X^{\rho} \\ X^{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\frac{\sin \phi}{\rho} & \frac{\cos \phi}{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \sin \phi \\ -\rho \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vectores covariantes.

Con la notación establecida al principio de esta sección, consideremos en este caso el conjunto siguiente:

$$\mathcal{B}^* = \{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\} \equiv \{dx_p^a\} \quad (1.4)$$

El conjunto de todas las combinaciones lineales de las diferenciales anteriores se denomina **espacio cotangente a M en p** y se representa como $T_p M^*$; esto es:

$$T_p M^* = \{ \theta_p = \theta_1 dx_p^1 + \dots + \theta_n dx_p^n \equiv \theta_a dx_p^a, \quad \theta_a \in \mathbb{R} \}$$

Claramente tiene estructura de espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar definidos del modo más intuitivo posible; i.e.:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_p = \theta_a dx_p^a, \quad \boldsymbol{\sigma}_p = \sigma_a dx_p^a \quad \text{entonces} \quad \boldsymbol{\theta}_p + \boldsymbol{\sigma}_p &= (\theta_a + \sigma_a) dx_p^a \\ \boldsymbol{\theta}_p = \theta_a dx_p^a, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{entonces} \quad c\boldsymbol{\theta}_p &= (c\theta_a) dx_p^a\end{aligned}$$

El conjunto \mathcal{B}^* es una base para $T_p M^*$, como antes también llamada **base coordenada**. Los vectores $\boldsymbol{\theta}_p \in T_p M^*$ se llaman **vectores covariantes** (o **1-formas**).

Se *define* la acción de los vectores covariantes sobre los contravariantes diciendo que los vectores covariantes son funciones reales lineales cuando actúan sobre los vectores contravariantes; esto es

$$\boldsymbol{\theta}_p(\vec{X}_p) \in \mathbb{R} \quad \text{para todo} \quad \vec{X}_p, \quad \boldsymbol{\theta}_p(a\vec{X}_p + b\vec{Y}_p) = a\boldsymbol{\theta}_p(\vec{X}_p) + b\boldsymbol{\theta}_p(\vec{Y}_p)$$

La manera de calcular viene dada por la relación

$$dx_p^a(\partial_b|_p) = \delta_b^a \quad (1.5)$$

que a veces se llama **relación de dualidad**. A partir de esta relación y de la propiedad de linealidad anterior, es inmediato ver que

$$\boldsymbol{\theta}_p = \theta_a dx_p^a, \quad \vec{X}_p = X^b \partial_b|_p \quad \text{entonces} \quad \boldsymbol{\theta}_p(\vec{X}_p) = \theta_a X^a. \quad (1.6)$$

Asimismo, se *define* la acción de los vectores contravariantes sobre los vectores covariantes diciendo que los vectores contravariantes son funciones reales lineales (cuando actúan sobre los covariantes), de modo que

$$\vec{X}_p(\boldsymbol{\theta}_p) \equiv \boldsymbol{\theta}_p(\vec{X}_p); \quad \text{i.e. :} \quad \vec{X}_p(\boldsymbol{\theta}_p) = X^a \theta_a$$

para $\boldsymbol{\theta}_p = \theta_a dx_p^a$ y $\vec{X}_p = X^b \partial_b|_p$.

Cambio de base (o de coordenadas) en $T_p M^*$.

Como en el caso anterior, dados dos sistemas de coordenadas x y x' válidos en un entorno de p , se tienen dos bases de $T_p M^*$: $\mathcal{B}^* = \{dx_p^a\}$ y $\mathcal{B}'^* = \{dx_p^{a'}\}$, y entonces, expresando una misma forma $\boldsymbol{\theta}_p$ en componentes según ambas bases y utilizando la regla de la cadena:

$$\boldsymbol{\theta}_p = \theta_{a'} dx^{a'} = \theta_b dx^b = \theta_b \left[\frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} \right]_p dx^{a'}$$

es decir

$$\theta_{a'} = \theta_b \left[\frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} \right]_p \quad (1.7)$$

lo cual da pie a la definición usual de vector covariante en Física:

Un vector covariante n -dimensional $\boldsymbol{\theta}$ es un conjunto de n números reales asociados al punto p , que escribimos $\theta_1, \dots, \theta_n$ en el sistema de coordenadas $\{x^a\}$ y $\theta_{1'}, \dots, \theta_{n'}$ en el sistema de coordenadas $\{x^{a'}\}$, de modo que ambos conjuntos de números están relacionados mediante el jacobiano inverso del cambio de coordenadas evaluado en p :

$$\theta_{a'} = \theta_b \left[\frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} \right]_p, \quad \theta_a = \theta_{c'} \left[\frac{\partial x^{c'}}{\partial x^a} \right]_p.$$

Campos de vectores covariantes.

De modo semejante a lo que ocurría en el caso anterior, llamaremos **campo vectorial covariante** a una función θ definida sobre la variedad M tal que a cada punto $p \in M$ le asigna un vector covariante en ese punto, es decir, un vector $\theta_p \in T_p M^*$. Para una región en la que existe un sistema de coordenadas x , se tendrá

$$\theta = \theta_a(x) dx^a$$

de modo que cuando se particulariza a un punto p de coordenadas $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n)$ se tiene $\theta_p = \theta_a(x_p) dx_p^a$.

1.1.3. Tensores de orden superior.

A partir de lo visto anteriormente se definen los **tensores covariantes de orden 2**, **tensores contravariantes de orden 2**, y **tensores mixtos (1,1)**, respectivamente, como funciones que van de $T_p M \times T_p M$, de $T_p M^* \times T_p M^*$, y de $T_p M \times T_p M^*$ en \mathbb{R} respectivamente y que son lineales en cada uno de sus argumentos.

Es muy fácil demostrar que, en términos de las bases coordenadas \mathcal{B} y \mathcal{B}^* introducidas más arriba se pueden escribir como:

Tensores covariantes $T = T_{ab} dx_p^a \otimes dx_p^b$ de modo que $T(\vec{X}_p, \vec{Y}_p) = T_{ab} dx_p^a(\vec{X}_p) \cdot dx_p^b(\vec{Y}_p) \equiv T_{ab} X^a Y^b$, donde \otimes se lee *producto tensorial* y hemos supuesto que $\vec{X}_p = X^a \partial_a|_p$ y $\vec{Y}_p = Y^a \partial_a|_p$. Las cantidades T_{ab} se denominan **componentes del tensor** y es inmediato ver, substituyendo \vec{X}_p y \vec{Y}_p por $\partial_c|_p$ y $\partial_d|_p$ respectivamente que $T_{cd} = T(\partial_c|_p, \partial_d|_p)$. Asimismo, si cambiamos a otras coordenadas x' las componentes están relacionadas mediante:

$$T_{a'b'} = \left[\frac{\partial x^r}{\partial x'^a} \right]_p \left[\frac{\partial x^s}{\partial x'^b} \right]_p T_{rs}.$$

Tensores contravariantes $T = T^{ab} \partial_a|_p \otimes \partial_b|_p$ y entonces $T(\theta_p, \sigma_p) = T^{ab} \partial_a|_p(\theta_p) \cdot \partial_b|_p(\sigma_p) = T^{ab} \theta_a \sigma_b$ para $\theta_p = \theta_a dx_p^a$, etc. En este caso las componentes del tensor son $T^{ab} \equiv T(dx_p^a, dx_p^b)$. Si cambiamos a otras coordenadas x' se tiene

$$T^{a'b'} = \left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^r} \right]_p \left[\frac{\partial x'^b}{\partial x^s} \right]_p T^{rs}.$$

Tensores mixtos (1,1) $T = T_a^b dx_p^a \otimes \partial_b|_p$ donde $T(\theta_p, \vec{X}_p) = T_a^b \theta_b X^a$ en una notación obvia, y $T_a^b = T(dx_p^b, \partial_a|_p)$. En este caso, el comportamiento bajo cambios de coordenadas es

$$T_{a'}^{b'} = \left[\frac{\partial x^s}{\partial x'^a} \right]_p \left[\frac{\partial x^b}{\partial x'^r} \right]_p T_s^r.$$

El comportamiento bajo cambios de base lleva a la siguiente definición, de uso corriente en Física:

Los tensores de orden 2 serán conjuntos de n^2 números asociados a un punto p , que escribimos como T_{ab} , T^{ab} o T_a^b en el sistema de coordenadas $\{x^a\}$ (según sean covariantes, contravariantes o mixtos) y $T_{a'b'}$, $T^{a'b'}$ o $T_a^{b'}$ en el sistema de coordenadas $\{x^{a'}\}$, de modo que las cantidades sin prima y las cantidades con prima están relacionadas, para cada índice, mediante el producto de una jacobiana o una jacobiana inversa según el índice sea contravariante o covariante respectivamente.

Los campos de tensores de orden 2 se definen de modo similar a como hemos definido los campos de vectores contravariantes y covariantes; esto es: serán funciones sobre M tales que a cada punto $p \in M$ le hacen corresponder un tensor del tipo requerido en ese punto. Las componentes pasan a ser entonces funciones de las coordenadas en lugar de números reales, etc.

Nota. Normalmente se abusa del lenguaje y en lugar de decir 'campo tensorial' se habla simplemente de 'tensor', y es el contexto el que dicta si estamos hablando de un tensor definido tan sólo en un punto o de un campo tensorial definido en toda la variedad (o en una región de ella). Nosotros también lo haremos siempre y cuando ello no pueda dar lugar a confusión. Asimismo, y siempre que ello no conduzca a confusión, prescindiremos de toda indicación relativa al punto p sobreentendiéndola; así pondremos dx^a en lugar de dx_p^a , etc.

Resumimos lo expuesto en la siguiente tabla:

Nombre habitual	Matemáticas	Física	Cambio coordenadas
Vector contravariante	$\vec{u} = u^a \partial_a$	u^a	$u^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^r} u^r$
Vector covariante	$\theta = \theta_a dx^a$	θ_a	$\theta_{a'} = \frac{\partial x^r}{\partial x^{a'}} \theta_r$
Tensor covariante	$T = T_{ab} dx^a \otimes dx^b$	T_{ab}	$T_{a'b'} = \frac{\partial x^r}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^s}{\partial x^{b'}} T_{rs}$
Tensor contravariante	$T = T^{ab} \partial_a \otimes \partial_b$	T^{ab}	$T^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^r} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^s} T^{rs}$
Tensor mixto	$T = T_a^b dx^a \otimes \partial_b$	T_a^b	$T_{a'}^{b'} = \frac{\partial x^s}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^r} T_s^r$

La generalización de las definiciones anteriores a tensores (o campos tensoriales) de orden (r,s) arbitrarios resulta inmediata y no daremos aquí más detalles. Véase por ejemplo el apartado¹ de "Notas de clase" en <http://www.uib.es/depart/dfs/GRG/index.html>.

¹Aunque los títulos están en catalán, las notas están escritas en español.

1.1.4. Variedades con métrica.

Una **métrica (o tensor métrico)** en una variedad M es un campo tensorial covariante, de orden 2 y simétrico, que en unas coordenadas cualesquiera $x = \{x^a\}$ se escribe como $g_{ab}(x)$. Una variedad M donde se tiene definida una métrica $g_{ab}(x)$ se llama **variedad Riemanniana** se nota como (M, g) .

Para un punto cualquiera $p \in M$ consideramos $T_p M$ y entonces $g_{ab}(p)$ (tensor métrico en p) se obtiene sin más que substituir las coordenadas del punto p en el campo $g_{ab}(x)$.

Nota 1. El hecho que $g_{ab}(x)$ sea simétrica significa, recordemos, que $g_{ab}(x) = g_{ba}(x)$ para cualesquiera índices $a, b = 1, \dots, n$ y en cualquier sistema de coordenadas. Recordemos además que se verifica la propiedad de linealidad en cada argumento; i.e.:

$$\begin{aligned} g_{ab}(x) [f(x)u_1^a(x) + h(x)u_2^a(x)] v^b(x) &= \\ = f(x) g_{ab}(x)u_1^a(x)v^b(x) + h(x) g_{ab}(x)u_2^a(x)v^b(x) \end{aligned}$$

Nota 2. Dado que la métrica es un tensor de orden 2, se puede (y se acostumbra a) representar mediante una matriz. Si el determinante de dicha matriz es cero, entonces la métrica se denomina **singular**; si es distinto de cero entonces la métrica se denomina **no singular**. Nosotros trabajaremos exclusivamente con métricas no singulares, en cuyo caso podremos construir la **métrica inversa** o **métrica contravariante**, $g^{ab}(x)$, que es un campo tensorial contravariante de orden 2 tal que sus componentes dispuestas en forma de matriz, forman la matriz inversa de la que representa $g_{ab}(x)$; esto es:

$$g^{ab}(x)g_{bc}(x) = \delta_c^a, \quad g_{ab}(x)g^{bc}(x) = \delta_a^c.$$

La métrica contravariante es también simétrica por construcción.

Nota 3. Una métrica se dice que es **definida positiva** si, para todo punto $p \in M$ y todo vector $u^a \in T_p M$ se tiene $g_{ab}u^a u^b > 0$ y $g_{ab}u^a u^b = 0$ si y solo si $u^a = 0^2$. Si ello no es así, entonces se dice que la métrica es **indefinida**; en este caso existen vectores k^a tales que $g_{ab}k^a k^b = 0$ y sin embargo $k^a \neq 0$, dichos vectores se llaman **vectores nulos o isótropos**. Este es el caso de la teoría de la Relatividad.

La métrica se utiliza en primer lugar para definir el producto escalar (o producto interno) entre vectores; y también para definir la **norma de un vector**, así se tiene:

Se llama **norma** del vector u^a (campo vectorial $u^a(x)$), y se representa $\|\vec{u}\|$ al escalar (la función):

$$\|\vec{u}\| \equiv \sqrt{g_{ab}u^a u^b} \quad \left(\|\vec{u}\| \equiv \sqrt{g_{ab}(x)u^a(x)u^b(x)} \right)$$

Ejemplo 1. En el caso en que $M = \mathbb{R}^3$ y utilizando coordenadas cartesianas $x^a = \{x, y, z\}$, la métrica euclídea habitual es

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz = \delta_{ab} dx^a \otimes dx^b$$

²Naturalmente, la primera parte se puede formular también como $g_{ab}(x)u^a(x)u^b(x) > 0$ para todo campo vectorial $u^a(x)$, pero la segunda parte no: puede darse que $u^a(p) = 0$ en un punto $p \in M$ dado, pero $u^a(x) \neq 0$ como campo vectorial.

así, en un punto dado p tenemos:

$$\begin{aligned} g : T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Sus componentes g_{ab} en coordenadas cartesianas $x^a = \{x, y, z\}$ son: $g_{ab} = \delta_{ab}$ (constantes, esto es: valen lo mismo en todos los puntos). En coordenadas esféricas $x^{a'} = \{r, \theta, \phi\}$, se tiene

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi$$

es decir: $g_{1'1'} = 1$, $g_{2'2'} = r^2$, $g_{3'3'} = r^2 \sin^2 \theta$ y $g_{a'b'} = 0$ para $a' \neq b'$.

En forma matricial se tiene:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_{a'b'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2. Sea $M = S_a^2$ la esfera de radio a , su métrica en coordenadas esféricas $x = \{\theta, \phi\}$ y su inversa son:

$$g_{ab}(x) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad g^{ab}(x) = \begin{bmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & a^{-2} \sin^{-2} \theta \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Sea $M = \mathbb{R}^4$ con coordenadas cartesianas $x = \{x, y, z, ct\}$, consideremos la métrica siguiente llamada **Métrica de Minkowski**:

$$\eta_{ab}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{inversa : } \eta^{ab}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El par (\mathbb{R}^4, η) se llama **espacio-tiempo de Minkowski** y es la variedad en la que está formulada la relatividad especial. Los puntos de esta variedad se llaman **sucesos**, c es la velocidad de la luz en el vacío y t es el tiempo medido en un sistema de referencia fijado.

Es fácil ver que, en un punto cualquiera p , el vector $k^a = (0, 0, 1, 1)$ (en las coordenadas cartesianas descritas más arriba) es un vector nulo. Asimismo, para cualquier función de las coordenadas $f(x)$ se tiene que $X^a = (0, 0, f(x), f(x))$ es un campo nulo.

Gimnasia de índices.

Dada una métrica no singular g_{ab} vimos que podíamos definir la métrica contravariante o inversa, g^{ab} . Estos dos objetos se utilizan para construir nuevos tensores a partir de otros tensores dados mediante contracciones; el efecto es ‘bajar’ (métrica g_{ab}) índices o ‘subirlos’ (métrica inversa g^{ab}).

Así por ejemplo, dado un vector contravariante X^a , podemos contraerlo con la métrica; i.e.: $g_{ab}X^b$, el resultado es otro tensor (ya que se trata del producto de dos tensores), covariante en este caso y de orden 1 (tiene un solo índice libre), es decir, una 1-forma o vector covariante. Como este nuevo tensor proviene del tensor X^a y la métrica es un tensor ‘distinguido’ (en el sentido de que está fijo), se acostumbra a notar este nuevo tensor con la misma letra X y el índice allí donde corresponda; es decir se pone

$$X_a \equiv g_{ab}X^b.$$

De modo semejante, dado Y_a (1-forma, vector covariante) se define el vector contravariante Y^a como:

$$Y^a \equiv g^{ab}Y_b$$

En general, tendremos expresiones del tipo:

$$T^a{}_{bcd} = g^{am}T_{mbcd}, \quad T_a{}^b{}_{cd} = g^{bm}T_{amcd}, \quad S_{ab} = g_{am}g_{bn}S^{mn}, \quad \text{etc.}$$

En las definiciones anteriores se debe respetar el orden de los índices; es decir $T_a{}^b{}_{cd} = g^{bm}T_{amcd}$ no es igual a $T^b{}_{acd} = g^{bm}T_{macd}$, etc.

La métrica en un punto y n-tuplas.

Es interesante darse cuenta de que, dada una métrica $g_{ab}(x)$, para un punto $p \in M$ cualquiera de coordenadas x_p , la métrica en ese punto $g_{ab}(x_p)$ se puede representar mediante una matriz constante simétrica, digamos g_p , y entonces se tiene de resultados elementales de cálculo tensorial que existe una matriz real $n \times n$, pongamos A , tal que

$$A^T g_p A = \text{diag}(+1, \dots, +1, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1)$$

esto es, g_p se puede llevar a la forma diagonal de modo que en la diagonal sólo hay $-1, 0, +1$. Si g_{ab} es no singular (que será siempre nuestro caso), entonces no hay ceros en la diagonal. Si además es definida positiva, sólo hay $+1$ y se dice que la métrica es **Riemanniana**, si la métrica es indefinida, hay tanto valores $+1$ como -1 . Un caso particular importante para nosotros es cuando hay un único valor -1 y el resto son $+1$; i.e.: $\text{diag}(+1, \dots, +1, -1)$, se dice entonces que la métrica es de **tipo Lorentz**, y éste es precisamente el caso de la Relatividad cuando la dimensión de la variedad es $n = 4$, en cuyo caso (M, g) se denomina **espaciotiempo**; esto es: un espaciotiempo es una variedad 4-dimensional dotada de una métrica que en cada punto se puede reducir a la de Minkowski.

La **signatura** de la métrica es el número de $+1$ menos el número de -1 en su expresión diagonal; así en el caso de la Relatividad la signatura es $+2$.

Otro aspecto importante a tener en cuenta es que, para toda métrica $g_{ab}(x)$ en una variedad de dimensión n , siempre es posible encontrar n campos vectoriales covariantes linealmente independientes $\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$ (**n-tupla** de vectores covariantes³) tales que

$$g_{ab} = \epsilon_1 \omega_{1a} \omega_{1b} + \dots + \epsilon_n \omega_{na} \omega_{nb}, \quad \epsilon_a = \pm 1$$

la métrica inversa entonces es, definiendo $\omega_1^a = g^{ab} \omega_{1b}$, etc.

$$g^{ab} = \epsilon_1 \omega_1^a \omega_1^b + \dots + \epsilon_n \omega_n^a \omega_n^b, \quad \epsilon_a = \pm 1$$

y entonces $\{\vec{\omega}_1, \dots, \vec{\omega}_n\}$ es una n-tupla de vectores contravariantes⁴.

Es relativamente simple ver que esto siempre es así, puesto que una métrica en dimensión n tiene $n(n+1)/2$ componentes independientes (recordemos que la métrica es simétrica); mientras que n campos independientes tienen en total n^2 componentes diferentes, se trat pues de resolver un sistema de $n(n+1)/2$ ecuaciones independientes con n^2 incógnitas, y el problema tiene siempre solución (y además no única; i.e.: hay más incógnitas que ecuaciones) para $n \geq 2$.

En el caso de la Relatividad, a dichos conjuntos de campos covariantes se les llama **tetradas**, y se suelen escribir como $\{x_a, y_a, z_a, u_a\}$ y entonces

$$g_{ab} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b - u_a u_b, \quad g^{ab} = x^a x^b + y^a y^b + z^a z^b - u^a u^b$$

en cuyo caso se llama **tetrada ortonormal** ya que⁵ $x_a x^a = y_a y^a = z_a z^a = +1$, $u_a u^a = -1$ y el resto

³recordemos $\omega_1(x) = \omega_{1a} dx^a$, etc.

⁴Siendo $\vec{\omega}_1 = \omega_1^a \partial_a$.

⁵Recordemos que $x_a x^a = g_{ab} x^a x^b$, etc.

de productos cero: $x^a y_a = \dots = 0$, donde no hay que confundir las componentes x^a del vector $\vec{x} = x^a \partial_a$ con las coordenadas x^a .

También se utilizan **tetradas nulas**, $\{x_a, y_a, l_a, n_a\}$ con $l^a l_a = n^a n_a = 0$ y $l^a n_a = \pm 1$ (el signo se escoge, se utilizan ambas convenciones pero hay que fijarlo de entrada), y entonces la métrica se escribe:

$$g_{ab} = x_a x_b + y_a y_b \pm (l_a n_b + n_a l_b).$$

El elemento de línea.

Para una variedad con métrica (M, g) se utiliza la expresión **elemento de línea** para designar la norma al cuadrado de un campo vectorial cuyas componentes son infinitésimos de las coordenadas, a saber: $\vec{ds}(x) = \delta x^a \partial_a$. Es costumbre escribir la expresión anterior como $\vec{ds}(x) = dx^a \partial_a$, pero no hay que confundir estos dx^a con los vectores covariantes que forman la base $\mathcal{B}^* = \{dx_p^a\}$ de $T_p M^*$; aquí se trata simplemente de diferenciales en el sentido de incrementos infinitesimales. De acuerdo con esto se tiene:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b. \quad (1.8)$$

donde no ponemos la dependencia en las coordenadas para la métrica ni para ds según es costumbre. Notemos que ds^2 debería ser, en realidad $(ds)^2$, o aún $\|\vec{ds}\|^2$, ya que $ds^2 = 2s ds$, sin embargo se escribe siempre como ds^2 . Es frecuente abusar del lenguaje y referirnos a la expresión anterior como a '*la métrica de la variedad*'.

Claramente, esto da una cierta idea de distancia entre puntos infinitamente próximos entre sí (e.g.: un punto p de coordenadas x_p^a y otro punto q de coordenadas $x_p^a + dx^a$). Esta idea de distancia coincide con la habitual en \mathbb{R}^3 y en las superficies contenidas en él.

A partir de aquí se pueden obtener las **geodésicas** de la variedad; esto es: las curvas de longitud extrema que conectan dos puntos entre sí en M . Esto se hace mediante un problema variacional con los extremos fijos, a saber: dados los puntos $p, q \in M$, consideramos todas las curvas $\gamma(t)$ que unen dichos puntos entre sí. Cada una de estas curvas tendrá una expresión paramétrica $x^a = x^a(t)$ y el vector tangente a ella en cada punto será:

$$\vec{u} = \frac{dx^a}{dt} \partial_a = u^a \partial_a$$

la longitud de la curva entre p y q será entonces

$$S_{pq} = \int_p^q ds = \int_p^q \sqrt{|g_{ab} dx^a dx^b|} = \int_p^q \sqrt{|g_{ab} u^a u^b|} dt$$

imponiendo $\delta S = 0$ se obtiene que la curva que verifica la condición de longitud extrema es la que satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = A(t) \frac{dx^a}{dt}$$

donde

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{am} [g_{mb,c} + g_{mc,b} - g_{bc,m}]$$

son los llamados **símbolos de Christoffel**.

Es trivial ver que siempre se puede reparametrizar la curva, pongamos $t = t(s)$, de modo que el segundo miembro es cero; i.e.:

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0$$

Los parámetros s que verifican esta propiedad⁶ se llaman **parámetros afines** y se dice entonces que la curva está parametrizada de manera afín. Tienen la propiedad que

$$\vec{u} = \frac{dx^a}{ds} \partial_a = u^a \partial_a \quad \text{es tal que} \quad g_{ab} u^a u^b = \text{constante}$$

y siempre se puede escoger de modo que esta constante sea $+1$, -1 o 0 : si la métrica es definida positiva, entonces es $+1$, si es una métrica de Lorentz puede tomar los tres valores y entonces hablamos de geodésicas de tipo espacio, tiempo o luz respectivamente.

Para el caso en que $M = \mathbb{R}^3$ se tiene $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ en coordenadas cartesianas, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$, en esféricas, etc.

En el caso de una esfera de radio a , cuya métrica viene dada en el **Ejemplo 2**:

$$ds^2 = a^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2]$$

que no es sino el elemento de longitud sobre la esfera (al cuadrado) o también el diferencial de ángulo sólido al cuadrado $d\Omega^2$.

Para el espacio-tiempo de Minkowski tenemos una expresión que aparece a menudo en electromagnetismo: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$.

Un ejemplo interesante, sacado de la Relatividad General, es el elemento de línea de Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = \frac{R^2(t)}{(1 + \frac{k}{4} r^2)} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] - c^2 dt^2 \quad (1.9)$$

donde la constante k puede tomar los valores $-1, 0, +1$ y la función $R(t)$ es lo que se llama **Radio del Universo**. Esta métrica describe el Universo actual a gran escala. De aquí se puede deducir el “Big-bang”, la edad actual del universo, etc., etc. La variedad a la que corresponde depende del valor de k : para $k = 0$ es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, para $k = -1$ es $\mathbb{R} \times H^3$ (siendo H^3 el hiperbolide tridimensional), y para $k = +1$ es $\mathbb{R} \times S^3$ (donde S^3 designa a la esfera tridimensional). El factor \mathbb{R} del producto cartesiano se refiere al tiempo, mientras que el otro factor (\mathbb{R}^3 , H^3 o S^3) se refiere a las secciones espaciales; esto es: si fijamos el tiempo (‘congelamos’ la evolución del Universo, como si hiciéramos una foto) la geometría del espacio de tres dimensiones donde viven las galaxias, etc. sería \mathbb{R}^3 , H^3 o S^3 respectivamente.

1.2. La aplicación exponencial y las coordenadas normales.

Consideremos un punto $p \in M$ y el espacio tangente a la variedad en ese punto $T_p M$ (podemos visualizarlo como el conjunto de todas las flechas tangentes a M y con punto de aplicación en p). La **Aplicación Exponencial** se define como:

$$\begin{array}{ccc} \chi : & T_p M & \rightarrow & M \\ & \vec{v} & \rightarrow & \chi(\vec{v}) \equiv q \end{array}$$

donde q es el punto sobre la geodésica $\gamma_{\vec{v}}(s)$ que pasa por p y tiene velocidad \vec{v} en p , y está situado a distancia paramétrica $s = 1$ de p . La imagen de un vector $\vec{v} \in T_p M$ por la aplicación exponencial χ se puede calcular siguiendo los pasos que se detallan a continuación:

⁶No son únicos pero casi: si s es afín, entonces cualquier otro parámetro afín s' es necesariamente $s' = as + b$ con a, b constantes.

1. Sea $\vec{v} \in T_p M$, esto es: $\vec{v} = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$
2. Resolver, en unas coordenadas cualesquiera y^a definidas en un entorno de p , la ecuación de las geodésicas (que es una ecuación de segundo orden) sujeta a las dos condiciones iniciales:

$$\frac{d^2 y^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dy^b}{ds} \frac{dy^c}{ds} = 0$$

$$y^a(s=0) = y^a(p) \quad \text{y} \quad \frac{dy^a}{ds}(s=0) = v^a$$

Esta ecuación tiene una solución única que depende de s y de las condiciones iniciales:

$$y^a = f^a(s, y^a(p), v^a) \tag{1.10}$$

3. El punto $q \equiv \chi(\vec{v})$ es, de acuerdo con la definición, tal que $y^a(q) = f^a(s=1, y^a(p), v^a)$.

A partir de lo anterior se definen las **coordenadas normales** x^a para el punto q como: $x^a(q) = v^a$; esto es, el cambio de coordenadas entre coordenadas normales x y coordenadas originales y viene dado por:

$$y^a = f^a(1, y^a(p), x^a)$$

y de aquí podemos invertir y obtener x^a como función de las coordenadas y^a . Notemos que $x^a(p) = 0$ y también que χ es un difeomorfismo de un cierto conjunto abierto de vectores alrededor de $\vec{0} \in T_p M$, $W_{\vec{0}}$ en una región abierta (adecuadamente pequeña) de puntos alrededor de $p \in M$, U_p que se llama **entorno normal (de p)**. Las coordenadas normales estén definidas en ese entorno.

Además, se puede demostrar muy fácilmente que si $\vec{v} \in W_{\vec{0}}$, entonces $t\vec{v} \in W_{\vec{0}}$ también para cualquier valor de $t \in [0, 1]$ (se dice entonces que $W_{\vec{0}}$ tiene forma de estrella: *star-shaped*); por lo tanto, todos los puntos a lo largo de la geodésica que une p y q están contenidos en el entorno normal U_p y tienen coordenadas normales $x^a = tv^a$ para algún valor de t entre 0 y 1 ($0 < t < 1$). La propia expresión paramétrica de la geodésica en coordenadas normales es entonces simplemente:

$$x^a(t) = tv^a, \quad v^a = \text{constante}, \quad \vec{u} = \frac{dx^a}{dt} \frac{\partial}{\partial x^a} = v^a \frac{\partial}{\partial x^a}$$

esto es, el campo de velocidades de la geodésica es constante (vale lo mismo en todos sus puntos), y así podemos escribir por ejemplo:

$$g_{ab}(x = t\vec{v})v^a v^b = g_{ab}(x_p = 0)v^a v^b = \text{constante}.$$

Multiplicando por t^2 y recordando que $x^a = tv^a$ tenemos entonces: $g_{ab}(x)x^a x^b = g_{ab}(0)x^a x^b (= \text{constante} \times t^2)$, de donde nos interesa quedarnos con

$$g_{ab}(x)x^a x^b = g_{ab}(0)x^a x^b$$

para todo punto de coordenadas x^a , notando que $g_{ab}(0) = \text{constantes}$.

Consideremos ahora la ecuación de las geodésicas en coordenadas normales:

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0$$

donde los símbolos de Christoffel están expresados en las coordenadas normales x . Puesto que

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = 0, \quad \frac{dx^b}{dt} = v^b$$

obtenemos:

$$\Gamma_{bc}^a(x)v^b v^c = 0$$

para todos los puntos de la geodésica. En particular, para el punto p cuyas coordenadas son $x_p = 0$ obtenemos

$$\Gamma_{bc}^a(0)v^b v^c = 0$$

y esto debe ser así para *todas* las geodésicas que salen de p , esto es: para todos los valores posibles de v^a , lo cual implica inmediatamente que, en coordenadas normales

$$\Gamma_{bc}^a(0) = \Gamma_{bc}^a(p) = 0, \quad \text{o equivalentemente} \quad g_{ab,c}(p) = 0.$$

Para otro punto cualquiera (diferente de p) de coordenadas normales x , a partir de $x^a = tv^a$, obtenemos inmediatamente:

$$t^{-2}\Gamma_{bc}^a(x)x^b x^c = 0 \quad \text{esto es} \quad \Gamma_{bc}^a(x)x^b x^c = 0.$$

De todo lo que hemos visto se sigue que en coordenadas normales definidas alrededor de p , la métrica en un entorno de ese punto se puede escribir como:

$$g_{ab}(x) = g_{ab}(0) + \frac{1}{2!}g_{ab,cd}(0)x^c x^d + O(x^2)$$

y recordando ahora que $g_{ab}(0) = \text{diag}(+1, \dots, -1)$ tenemos el resultado de que, en un entorno lo suficientemente pequeño de p (i.e.: para puntos cuyas coordenadas x^a verifiquen $|g_{ab,cd}(0)x^c x^d| \ll 1$ la métrica es aproximadamente constante (o *plana*), y esto es lo que advertimos, por ejemplo, sobre la superficie de la Tierra, donde las geodésicas son círculos máximos y $g_{ab}(0) = \delta_{ab}$. Este hecho a menudo se cita diciendo que la "la Tierra es localmente plana", pero esto ocurre en cualquier variedad diferenciable. En Relatividad General esto está directamente relacionado con la indistinguibilidad, en un entorno espacio-temporal suficientemente pequeño de un suceso cualquiera, entre un sistema de referencia en caída libre en un campo gravitatorio y un sistema inercial (*Principio de Equivalencia*).

Notemos que, en general, no todos los vectores de $T_p M$ estarán en $W_{\vec{0}}$ ya que, por ejemplo, puede ocurrir que para algún vector $\vec{u} \in T_p M$ la geodésica $\gamma_{\vec{u}}(s)$ no exista para $s = 1$ y entonces $\vec{u} \notin W_{\vec{0}}$; sin embargo, y dado que las geodésicas siempre existen para un determinado rango de valores de su parámetro $s \in (-\delta, \delta)$ para algún $\delta > 0$ (teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales), se tiene que siempre existe algún múltiplo de \vec{u} , pongamos $\vec{u}' = \alpha \vec{u}$ con $\alpha = \text{constant}$, tal que $\vec{u}' \in W_{\vec{0}}$ (es decir: $W_{\vec{0}}$ contiene todas las direcciones posibles en \mathbb{R}^n). También puede ocurrir que $q = \gamma_{\vec{v}}(1) = \gamma_{\vec{v}'}(1)$ con $\vec{v} \neq \vec{v}'$, una función así no sería un difeomorfismo (ya que no es inyectiva). Los puntos en que esto ocurre se llaman **puntos focales**, es decir: puntos en los que las geodésicas se cortan; para evitar esto y seguir teniendo un difeomorfismo, basta reducir U_p . Todo esto está relacionado con los tópicos referentes a *completitud geodésica* y a la *teoría de singularidades*, ambos de especial relevancia en Relatividad General.

Los entornos normales, y por ende las coordenadas normales, existen alrededor de todos y cada uno de los puntos de M . Recordemos además que en las coordenadas normales definidas a partir de p se tiene $\Gamma_{bc}^a(p) = 0$ según hemos visto anteriormente.

Restringiendo todavía más el entorno normal U_p se obtiene lo que se llama un **entorno normal convexo** $V_p \subseteq U_p$, que también existe en alrededor de cada punto de la variedad y es tal que dados dos puntos cualesquiera de él, siempre existe una geodésica que los une, y ésta es única y está enteramente contenida en V_p . Para más información, véase M Crampin, FAE Pirani, *Applicable Differential Geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series 59 Cambridge University Press (1986).

1.3. La Relatividad General como teoría geométrica.

Como es bien sabido, la Relatividad General es una *teoría física* que describe la interacción gravitatoria. Los principios físicos en los que se base y sus consecuencias "físicas" son realmente muy interesantes y complejos. Resulta sin embargo relativamente fácil de describir matemáticamente (geoméricamente) en una primera aproximación.

Básicamente y a nivel muy rudimentario, la situación puede describirse como sigue: todos los puntos de una determinada región del espacio donde existe un campo gravitatorio, y sus historias a lo largo del tiempo, tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión 4 (3 dimensiones de espacio y 1 de tiempo) sobre la que hay definida una métrica g tal que, en cada punto, la matriz que la representa se puede reducir, mediante un cambio de base, a la forma de Minkowski; esto es: $g(p) = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$. Dicha variedad se llama **espaciotiempo** y sus puntos **sucesos**. Las partículas que se mueven sometidas tan sólo a la influencia del campo gravitatorio se mueven a lo largo de geodésicas causales (i.e.: tipo tiempo si son partículas con masa diferente de cero y tipo nulo o luz si son partículas de masa nula), esto es: en unas coordenadas arbitrarias x^a y siendo s la longitud a lo largo de la curva en el caso de las partículas con masa

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0, \quad u^a = \frac{dx^a}{ds} : u^a u_a = -1, 0 \quad (1.11)$$

donde $\vec{u} = u^a \partial_a$ es el campo de velocidades a lo largo de la curva.

La expresión anterior se escribe a menudo como

$$u^b \nabla_b u^a = u^a_{;b} u^b = 0$$

donde ∇_b designa el operador **derivada covariante** a lo largo de la curva coordenada x^b . La derivada covariante tiene la propiedad de que

$$\nabla_c g_{ab} = g_{ab;c} = 0$$

y está definida, para un tensor cualquiera, por ejemplo T^{ab}_{cd} , de la siguiente forma:

$$\nabla_m T^{ab}_{cd} = T^{ab}_{cd;m} = T^{ab}_{cd,m} + T^{nb}_{cd} \Gamma^a_{nm} + T^{an}_{cd} \Gamma^b_{nm} - T^{ab}_{nd} \Gamma^n_{cm} - T^{ab}_{cn} \Gamma^n_{dm}$$

donde la coma denota, como es habitual, derivada parcial. Para las funciones coincide con la derivada parcial; i.e.: $\nabla_c f = f_{;c} = \partial_c f = f_{,c}$. Por lo demás, es un operador derivación; esto es: es lineal y verifica la regla de Leibniz para la derivación de un producto.

La interpretación clásica es que el campo gravitatorio (consecuencia de la existencia de materia-energía en alguna región del espaciotiempo) *curva* dicho espaciotiempo alejándolo del de Minkowski que se llama *plano*. La medida de dicha curvatura la da el **tensor de Riemann** (o **de curvatura**), R^a_{bcd} , que se calcula a partir de las primeras y segundas derivadas de la métrica (véase cualquier texto de Relatividad General), si resulta que $R^a_{bcd} = 0$ en una región abierta del espaciotiempo, entonces existen coordenadas en las cuales la métrica g se escribe como la métrica de Minkowski (espaciotiempo plano). El tensor de Riemann se puede descomponer como

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{1}{2} (g_{ac} R_{bd} - g_{bc} R_{ad} + g_{bd} R_{ac} - g_{ad} R_{bc}) - \frac{R}{12} (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \quad (1.12)$$

siendo C_{bcd}^a el llamado **tensor de Weyl**, $R_{ab} \equiv g^{mn}R_{manb}$ el **tensor de Ricci** y $R = g^{mn}R_{mn}$ el **escalar de Ricci**. La relación entre el contenido material del espaciotiempo, representado por su **tensor impulso-energía** T_{ab} y la curvatura viene dada a través del tensor de Ricci mediante las **ecuaciones de Einstein**

$$R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{ab} \quad (1.13)$$

donde el primer miembro $R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab} \equiv G_{ab}$ constituye el llamado **tensor de Einstein** que verifica $\nabla_c G^{ac} = G^{ac}_{;c} = 0^7$, y G y c representan respectivamente la constante de la gravitación universal y la velocidad de la luz en el vacío. Nosotros utilizaremos en lo que sigue unidades geometrizadas en las que $8\pi G/c^2 = 1$.

Ni que decir tiene que todo lo referente a las coordenadas normales y que se discute en la sección anterior, encuentra también aquí su aplicación, en particular cabe notar que en coordenadas normales alrededor de p la métrica se escribirá:

$$g_{ab}(x) = \eta_{ab} + \frac{1}{2!}g_{ab,cd}(p)x^c x^d + O(x^2)$$

y $g_{ab,cd}(p)$ depende linealmente de las componentes del tensor de curvatura en el punto p : $R_{abcd}(p)$, y se puede ver muy fácilmente a partir de la expresión del tensor de Riemann, que

$$R_{abcd}(p) = \frac{1}{2}(g_{ad,bc} + g_{bc,ad} - g_{ac,bd} - g_{bd,ac})_p.$$

Una **solución de las ecuaciones de Einstein** es cualquier métrica g que verifica dichas ecuaciones para un cierto contenido material (i.e.: un cierto T_{ab}), que en particular puede ser el vacío $T_{ab} = 0$, lo cual a su vez implica $R_{ab} = R = 0$. Obviamente, si $g = \eta$ (métrica de Minkowski) se tiene $R_{ab} = R = 0$, pero como es bien conocido el recíproco no es cierto, i.e.: existen soluciones del vacío que no son planas, como por ejemplo la solución de Schwarzschild.

En general, encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein es difícil, por lo que se hacen determinadas suposiciones simplificadoras. Históricamente, el tipo de hipótesis simplificadoras que más se han empleado han sido sobre la simetría; esto es: se ha supuesto que la métrica (u otros tensores relevantes) tienen determinadas simetrías en el sentido explicado en el capítulo anterior. Así por ejemplo, de suponer que la métrica es esféricamente simétrica, se sigue muy rápidamente que existen coordenadas $\{t, r, \theta, \phi\}$ en las que ésta se puede escribir como

$$ds^2 = -A^2(t, r)dt^2 + B^2(t, r)dr^2 + Y^2(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.14)$$

y aún más: las coordenadas t, r se pueden definir de modo que $A = B$ o que $Y = rB$, o aún $Y = r$ si $Y^{,a}Y_{,a} > 0$.

⁷Por lo tanto, $\nabla_c T^{ac} = 0$ también.

1.4. Transformaciones generadas por un campo vectorial.

Dado un campo vectorial contravariante, \vec{X} , y considerada la congruencia de sus curvas integrales, es posible definir la siguiente transformación

$$\begin{aligned}\varphi_t : M &\rightarrow M \\ p &\mapsto \varphi_t(p) = q\end{aligned}$$

donde q es el punto que se halla sobre la misma curva integral de \vec{X} que p , pero a una distancia paramétrica t de éste, es decir, si $x^a(t)$ es la órbita (curva integral) de \vec{X} que pasa por p de modo que $x_p^a = x^a(t_0)$, entonces $x_q^a = \varphi_t^a(x(t_0)) = x^a(t_0 + t)$.

Desarrollando en serie de Taylor alrededor de $t = t_0$ se tiene

$$\begin{aligned}x_q^a = \varphi_t^a(x(t_0)) &= x^a(t_0) + \left[\frac{dx^a}{dt} \right]_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2x^a}{dt^2} \right]_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots = \\ &= x_p^a + X^a(p) (t - t_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dx^a}{dt} \right) \right]_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots = \\ &= x_p^a + X^a(p) (t - t_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{dx^m}{dt} \frac{\partial X^a}{\partial x^m} \right]_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots = \\ &= x_p^a + X^a(p) (t - t_0) + \frac{1}{2!} X^m(p) \left[\frac{\partial X^a}{\partial x^m} \right]_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots\end{aligned}$$

Formalmente, y teniendo en cuenta que $\vec{X} = X^m \partial_m$, se puede escribir como

$$x_q^a = \varphi_t^a(x(t_0)) = \left(e^{(t-t_0)\vec{X}_p} \right) x^a \quad (1.15)$$

donde la exponencial en la expresión anterior debe entenderse como la serie de Taylor:

$$\begin{aligned}\left[\left(e^{(t-t_0)\vec{X}} \right) x^a \right]_{t=t_0} &\equiv \left\{ \left[1 + (t-t_0)\vec{X} + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2\vec{X}\vec{X} + \dots \right] x^a \right\}_p = \\ &= \left\{ x^a + (t-t_0)X^m (\partial_m x^a) + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2 X^c \partial_c (X^m (\partial_m x^a)) + \dots \right\}_p = \\ &= \left\{ x^a + (t-t_0)X^a + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2 X^c X^a_{,c} + \dots \right\}_p\end{aligned} \quad (1.16)$$

y sólo tiene sentido para aquellos valores de t para los que la órbita existe (véanse los ejemplos anteriores). En lo que sigue y siempre que ello no induzca a confusión se pondrá $t_0 = 0$, esto es $x_p^a = x^a(0)$.

Las transformaciones $\{\varphi_t\}$ verifican las siguientes propiedades⁸

1. $\varphi_t \circ \varphi_{t'}(p) = \varphi_t(\varphi_{t'}(p)) = \varphi_{t+t'}(p)$ para un punto p cualquiera.
2. $\varphi_{t=0}(p) = p$ para todo punto p . La transformación φ_0 se llama **Transformación Identidad**.

⁸siempre y cuando los dos miembros de las ecuaciones que siguen tengan sentido.

3. Dada una transformación φ_t , su inversa φ_t^{-1} existe y es $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$, esto es: $\varphi_{-t} \circ \varphi_t(p) = \varphi_{t=0}(p) = p$ para todo punto $p \in M$.
4. Se verifica la propiedad asociativa (puesto que la composición de funciones la verifica), esto es: $(\varphi_t \circ \varphi_{t'}) \circ \varphi_{t''} = \varphi_t \circ (\varphi_{t'} \circ \varphi_{t''})$.

Lo anterior se puede resumir diciendo:

Proposición 1 *El conjunto de todas las transformaciones $\{\varphi_t\}$ inducidas por un campo \vec{X} tiene estructura de grupo con la operación composición y se llama **Grupo Uniparamétrico de Transformaciones (inducidas por \vec{X})**.*

1.5. Transformaciones inducidas sobre vectores y tensores.

Las funciones

$$\begin{aligned} \varphi_t : M &\rightarrow M \\ p &\mapsto \bar{p} = \varphi_t(p) \end{aligned}$$

transforman un punto p en otro punto \bar{p} , *moviendo* p una distancia paramétrica t a lo largo de la curva integral del campo \vec{X} que pasa por ese punto, el punto obtenido es \bar{p} .

En general, toda función $\phi : M \rightarrow M$ se llama **transformación** dado que *transforma* unos puntos en otros; las funciones φ_t para todo t son un caso particular de transformaciones.

Una transformación ϕ cualquiera actúa, pues, de modo natural sobre los puntos de la variedad. Se pueden definir *transformaciones inducidas* sobre todos los objetos que ‘habitan’ la variedad M : funciones reales, vectores, tensores arbitrarios, etc. La forma en que se definen estas transformaciones inducidas es, como veremos, la más natural y simple posible.

Ejemplo 1: Sea $M = \mathbb{R}^2$ y supongamos coordenadas cartesianas $\{x, y\}$. Consideremos, por ejemplo, la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) = (3x + 2y, -x^2 + y^2) \end{aligned}$$

entonces se tiene $\varphi^1(x, y) = 3x + 2y$ y $\varphi^2(x, y) = -x^2 + y^2$. Si p es tal que $(x_p, y_p) = (1, 1)$ entonces $q = \varphi(p)$ será $(x_q, y_q) = (5, 0)$.

Transformaciones inducidas.

(1) Funciones. Dada una función real $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, se define el **pull-back de la función f por φ** como

$$\varphi^* f = f \circ \varphi.$$

(2) Vectores contravariantes y Diferencial o Push-Forward. Sea como antes $\varphi : M \rightarrow M$ y $p, q \in M$ dos puntos tales que $q = \varphi(p)$. Consideremos ahora la siguiente función definida entre $T_p M$ y $T_q M = T_{\varphi(p)} M$, llamada **diferencial de φ o push-forward por φ** .

$$\begin{aligned} \varphi_* : T_p M &\rightarrow T_{\varphi(p)} M \\ \vec{Y}_p &\mapsto (\varphi_* \vec{Y}_p) \equiv \vec{Y}'_{\varphi(p)} \equiv \vec{Y}'_q \end{aligned}$$

definida de modo que, para toda función real $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, la derivada direccional de f en $q = \varphi(p)$ en la dirección de \vec{Y}' , tenga el mismo valor numérico que la derivada direccional de $f \circ \varphi$ en p en la dirección de \vec{Y} , esto es:

$$\begin{aligned} \left[\vec{Y}'(f) \right]_{\varphi(p)} &\equiv \left[\vec{Y}(f \circ \varphi) \right]_p, \quad \text{para toda } f \\ \text{es decir :} \quad \text{número} &= \text{número} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$Y'^a \left[\frac{\partial f}{\partial x^a} \right]_{\varphi(p)} = Y^m \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^m} \right]_p \left[\frac{\partial f}{\partial x^a} \right]_{\varphi(p)}$$

y entonces:

$$Y'^a(q) = Y^m(p) \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^m} \right]_p \tag{1.18}$$

que a menudo se escribe también como

$$Y'^a(q) = Y^m(p) \frac{\partial x^a_q}{\partial x^m_p}$$

aunque ello puede inducir a error, ya que no tiene porqué haber ningún cambio de coordenadas (i.e.: puede ser que utilicemos el mismo sistema de coordenadas para los puntos p y q), sinó tan sólo una transformación de puntos.

Nota 1. φ_* es una función lineal que viene representada, en las bases $\{\partial_a|_p\}$ y $\{\partial_a|_q\}$ por la matriz

$$\varphi_* = [(\varphi_*)^a_b], \quad \text{con} \quad (\varphi_*)^a_b = \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^b} \right]_p, \quad \text{y entonces} \quad Y'^a(q) = (\varphi_*)^a_b Y^b(p).$$

Nota 2. Una forma fácil de recordarlo es pensar en φ como si fuera un *cambio de coordenadas*; esto es: pasar de coordenadas x^a a coordenadas φ^a , el vector \vec{Y}' es entonces el vector \vec{Y} en las *nuevas coordenadas*, pero *cuidado*: \vec{Y}' es un vector definido en q , no en p . La matriz de φ_* es entonces la Jacobiana del cambio de coordenadas.

Ejemplo 2. Para la función φ definida en el **Ejemplo 1**, esto es $\varphi(x, y) = (3x + 2y, -x^2 + y^2)$ y los puntos $p : (x_p, y_p) = (1, 1)$ y $q = \varphi(p) : (x_q, y_q) = (5, 0)$, si $\vec{Y} = (2\partial_x + 3\partial_y)_p$ se tendrá

$$\begin{aligned} Y'^1(q) &= Y^1(p) \left[\frac{\partial \varphi^1(x, y)}{\partial x} \right]_p + Y^2(p) \left[\frac{\partial \varphi^1(x, y)}{\partial y} \right]_p = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \\ Y'^2(q) &= Y^1(p) \left[\frac{\partial \varphi^2(x, y)}{\partial x} \right]_p + Y^2(p) \left[\frac{\partial \varphi^2(x, y)}{\partial y} \right]_p = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 2 \\ \text{i.e.} \quad \vec{Y}'_q &= (12\partial_x + 2\partial_y)_q. \end{aligned}$$

1.5.1. Vectores Covariantes y Pull-back.

Con la misma notación de antes, consideremos ahora $T_p M^*$ y $T_{\varphi(p)} M^* = T_q M^*$ y la función siguiente, llamada **pull-back**,

$$\begin{aligned} \varphi^* : T_{\varphi(p)} M^* &\rightarrow T_p M^* \\ \theta_q &\mapsto (\varphi^* \theta_q) \equiv \theta'_p \end{aligned}$$

definida de modo que el valor numérico de $\theta'_p \equiv (\varphi^* \theta_q) \in T_p M^*$ cuando actúa sobre un vector cualquiera $\vec{Y}_p \in T_p M$ sea igual al valor numérico de θ_q cuando actúa sobre el vector $\vec{Y}'_q \equiv (\varphi_* \vec{Y}_p) \in T_q M$, esto es:

$$\begin{aligned} \left[\theta'_p \left(\vec{Y}_p \right) \right] &\equiv \theta_q \left(\vec{Y}'_q \right) = \theta_q \left(\varphi_* \vec{Y}_p \right) \quad \text{para cualquier } \vec{Y}_p \quad (1.19) \\ \text{es decir :} \quad \text{número} &= \text{número} \end{aligned}$$

De modo parecido al caso anterior tenemos

$$\begin{aligned} \theta'_a(p) dx_p^a (Y^c \partial_c)_p &= \theta_m(q) dx_q^m \left(Y^n(p) \left[\frac{\partial \varphi^b(x)}{\partial x^n} \right]_p \partial_b|_q \right), \\ \theta'_a(p) Y^a(p) &= \theta_m(q) Y^n(p) \left[\frac{\partial \varphi^m(x)}{\partial x^n} \right]_p; \quad \text{esto es} \\ \theta'_a(p) &= \theta_m(q) \left[\frac{\partial \varphi^m(x)}{\partial x^a} \right]_p. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Nota 1. Como antes, φ^* es una función lineal cuya matriz es, en las bases $\{dx^a|_q\}$ y $\{dx^a|_p\}$:

$$\varphi^* = [(\varphi^*)_b^a], \quad \text{con} \quad (\varphi^*)_b^a = \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^b} \right]_p, \quad \text{y entonces} \quad \theta'_b(p) = (\varphi^*)_b^a \theta_a(p)$$

esto es: $\varphi^* = (\varphi_*)^t$ donde la t indica transposición.

Nota 2. Idéntico comentario al caso anterior: se puede pensar como un cambio de coordenadas y θ' es θ expresado en las *nuevas coordenadas* φ^a , aunque hay que tener en cuenta que θ' y θ están definidas en puntos diferentes.

1.5.2. Tensores arbitrarios y Pull-Back.

Las definiciones anteriores se pueden generalizar a tensores cualesquiera de modo inmediato; y la aplicación se llama genéricamente **pull-back**. Veamos algunos casos.

Tensores contravariantes de orden 2. Supongamos que T_p es un tensor contravariante de orden 2 en el punto p , es decir:

$$T_p = T^{ab} \partial_a|_p \otimes \partial_b|_p$$

se define entonces el tensor $T'_q \equiv \varphi^*(T_p)$ como

$$\varphi^*(T^{ab} \partial_a|_p \otimes \partial_b|_p) \equiv T^{ab} (\varphi_* \partial_a)_q \otimes (\varphi_* \partial_b)_q$$

Como resulta inmediato comprobar⁹ se tiene

$$T'_q \equiv \varphi^*(T_p) = T^{ab}(p) \left[\frac{\partial \varphi^c}{\partial x^a} \right]_p \left[\frac{\partial \varphi^d}{\partial x^b} \right]_p \partial_c|_q \otimes \partial_d|_q$$

esto es

$$T'_q \equiv \varphi^*(T_p) = T'^{cd}(q) \partial_c|_q \otimes \partial_d|_q, \quad \text{siendo} \quad T'^{cd}(q) = T^{ab}(p) \left[\frac{\partial \varphi^c}{\partial x^a} \right]_p \left[\frac{\partial \varphi^d}{\partial x^b} \right]_p$$

o equivalentemente

$$T'^{cd}(q) = T^{ab}(p) (\varphi^*)_a^c (\varphi^*)_b^d, \quad \text{siendo} \quad (\varphi^*)_a^c = \left[\frac{\partial \varphi^c}{\partial x^a} \right]_p \quad (1.21)$$

Tensores covariantes de orden 2. Procediendo de modo análogo, para un tensor covariante de orden 2, definido en el punto q , $T_q = T_{ab} dx_q^a \otimes dx_q^b$, se define

$$T'_p \equiv \varphi^*(T_q) \equiv T_{ab} (\varphi^* dx^a)_p \otimes (\varphi^* dx^b)_p = T'_{cd} dx_p^c \otimes dx_p^d$$

esto es,

$$T'_p \equiv \varphi^*(T_q) = T'_{cd}(p) dx_p^c \otimes dx_p^d, \quad \text{siendo} \quad T'_{cd}(p) = T_{ab}(q) \left[\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^c} \right]_p \left[\frac{\partial \varphi^b}{\partial x^d} \right]_p$$

es decir

$$T'_{cd}(p) = T_{ab}(q) (\varphi^*)_c^a (\varphi^*)_d^b \quad \text{donde} \quad (\varphi^*)_c^a = (\varphi^*)_c^a \quad (1.22)$$

La definición hecha al principio es equivalente a $T'_p(\vec{X}_p, \vec{Y}_p) \equiv T_q(\varphi_*(\vec{X}_p), \varphi_*(\vec{Y}_p))$ para dos vectores cualesquiera \vec{X}_p, \vec{Y}_p .

Tensores mixtos (1,1). Para un tensor mixto de tipo (1, 1) definido en p , $T_p = T_b^a(p) \partial_a|_p \otimes dx^b|_p$ resulta

$$T'_q \equiv \varphi^*(T_p) = T_d^c(q) \partial_c|_q \otimes dx^d|_q, \quad \text{siendo} \quad T_d^c(q) = T_b^a(p) \left[\frac{\partial \varphi^c}{\partial x^a} \right]_p \left[\frac{\partial (\varphi^{-1})^b}{\partial x^d} \right]_{\varphi(p)}$$

La expresión anterior resulta poco adecuada para el cálculo puesto que contiene la matriz de las derivadas de φ^{-1} en el punto $q = \varphi(p)$, mientras que las otras cantidades están evaluadas en p . Utilizando el teorema de la función inversa se puede reescribir de un modo más conveniente; así, si ponemos

$$\left[\frac{\partial (\varphi^{-1})^b}{\partial x^d} \right]_{\varphi(p)} \equiv \left[(\varphi^{-1})^b \right]_{\varphi(p)}$$

el teorema de la función inversa implica

$$\left[(\varphi^{-1})^b \right]_{\varphi(p)} = \left[(\varphi^*)_p^{-1} \right]_c^b \quad \text{siendo} \quad \left[(\varphi^*)_c^a \right]_p = \left[\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^c} \right]_p$$

⁹Póngase por ejemplo $\partial_a|_p = \vec{Y}_p$, se tendrá $\varphi_*(\vec{Y}_p) = Y'^c \partial_c|_q$, donde $Y'^c = [\partial \varphi^c / \partial x^m]_p Y^m(p)$, pero $Y^m(p) = \delta_a^m$ de donde $\varphi_*(\partial_a) = [\partial \varphi^c / \partial x^a]_p$.

con lo cual la expresión anterior queda

$$T_d'^c(q) = T_b^a(p) (\varphi_*)^c_a \left[(\varphi^*)^{-1} \right]_d^b \quad (1.23)$$

donde todas cantidades que aparecen en el segundo miembro están calculadas en el punto p .

1.6. La derivada de Lie formal e informalmente.

En lo que sigue, $\vec{X} = X^a(x)\partial_a$ designará un campo vectorial definido en M y que representaremos por \vec{X} o X^a según convenga, es respecto a este campo que definiremos la derivada de Lie de un campo tensorial cualquiera. Asimismo, y siguiendo la notación y definiciones establecidas en la sección anterior, $\{\varphi_t\}$ designarán las transformaciones inducidas por el campo \vec{X} . Se tiene entonces

Definición. Sea un campo tensorial de tipo (p, q) cualquiera $T(x) = T_{b\dots}^{a\dots}(x)\partial_a \otimes \dots \otimes dx^b \otimes \dots$ definido sobre M , su **Derivada de Lie respecto a \vec{X}** es el campo tensorial

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T(x) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [T'(x) - T(x)] \quad (1.24)$$

donde $T'(x) \equiv (\varphi_{-\delta t}^*(T))(x)$ y se ha explicitado la dependencia en las coordenadas x de los campos T' y T para indicar que están evaluados en el mismo punto.

De la definición anterior es claro que el resultado de tomar la derivada de Lie de un tensor es otro tensor del mismo tipo, puesto que se trata de la resta de dos tensores multiplicada por el escalar $(\delta t)^{-1}$. Asimismo y teniendo en cuenta las definiciones de $\varphi_{\delta t}^*(T)$ para los diferentes tipos de tensores (basta con considerar transformaciones infinitesimales), se tiene para un campo tensorial cualquiera $T_{b\dots}^{a\dots}$ definido sobre M y en unas coordenadas arbitrarias $x = \{x^a\}$:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T_{b\dots}^{a\dots} = T_{b\dots, m}^{a\dots} X^m - T_{b\dots}^{m\dots} X_{,m}^a - \dots + T_{m\dots}^{a\dots} X_{,b}^m + \dots \quad (1.25)$$

Propiedades de la derivada de Lie.

1. Linealidad: $\mathcal{L}_{\vec{X}}(aT_{b\dots}^{a\dots} + bS_{b\dots}^{a\dots}) = a\mathcal{L}_{\vec{X}}T_{b\dots}^{a\dots} + b\mathcal{L}_{\vec{X}}S_{b\dots}^{a\dots}$.
2. Leibnitz: $\mathcal{L}_{\vec{X}}(T_{b\dots}^{a\dots} \cdot S_{d\dots}^{c\dots}) = (\mathcal{L}_{\vec{X}}T_{b\dots}^{a\dots})S_{d\dots}^{c\dots} + T_{b\dots}^{a\dots}(\mathcal{L}_{\vec{X}}S_{d\dots}^{c\dots})$
3. Preserva el tipo de tensor: la derivada de Lie de un tensor de tipo (p, q) es también un tensor de tipo (p, q) .
4. Conmuta con la contracción: $\mathcal{L}_{\vec{X}}T_{ac}^a = \delta_b^a \mathcal{L}_{\vec{X}}T_{bc}^a$.
5. Para los campos escalares (i.e.: funciones o campos tensoriales de orden cero) se tiene: $\mathcal{L}_{\vec{X}}f = X^m f_{,m}$.

Para los tipos de campos tensoriales que utilizamos más a menudo resulta:

Campos de vectores.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}Y^a = Y_{,m}^a X^m - X_{,m}^a Y^m \equiv [\vec{X}, \vec{Y}]^a \quad (1.26)$$

La última expresión, $[\vec{X}, \vec{Y}]$, se denomina **conmutador o paréntesis de Lie** de los campos \vec{X} y \vec{Y} , se verifica:

- $[\vec{X}, \vec{Y}] = -[\vec{Y}, \vec{X}]$.

- **Identidad de Jacobi:** Dados tres campos vectoriales cualesquiera, $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ se tiene:

$$[\vec{X}, [\vec{Y}, \vec{Z}]] + [\vec{Z}, [\vec{X}, \vec{Y}]] + [\vec{Y}, [\vec{Z}, \vec{X}]] = 0 \quad (1.27)$$

Campos de 1-formas.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}\theta_a = \theta_{a,m}X^m + X^m_{,a}\theta_m \quad (1.28)$$

Tensores covariantes de orden 2.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T_{ab} = T_{ab,m}X^m + T_{mb}X^m_{,a} + T_{am}X^m_{,b} \quad (1.29)$$

Tensores contravariantes de orden 2.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T^{ab} = T^{ab}_{,m}X^m - T^{mb}X^a_{,m} - T^{am}X^b_{,m} \quad (1.30)$$

Tensores mixtos de tipo (1,1).

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T^a_b = T^a_{b,m}X^m - T^m_b X^a_{,m} + T^a_m X^b_{,m} \quad (1.31)$$

Ejemplo. Veamos en detalle cómo se obtiene la expresión (1.26) para un campo vectorial $\vec{Y}(x)$. Sea un campo de vectores $\vec{Y}(x) = Y^a(x)\partial_a$. Dado que tendremos que trabajar con transformaciones inversas (i.e.: $\varphi_{-\delta t}$), pondremos $x = \varphi_{-\delta t}(\varphi_{\delta t}(x))$. A efectos de simplificar la notación escribiremos $\varphi_{-\delta t*}(\vec{Y}) \equiv \vec{Y}'$.

Paso 1 Dado $\vec{Y}'(x)$, calculemos $\vec{Y}'(x) = \vec{Y}'(\varphi_{-\delta t}(\varphi_{\delta t}(x)))$, tendremos:

$$\begin{aligned} \vec{Y}'(x) &= Y'^a(\varphi_{-\delta t}(\varphi_{\delta t}(x)))\partial_a|_x = Y^m(\varphi_{\delta t}(x))\left[\frac{\partial\varphi^a_{-\delta t}}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)}\partial_a|_x = \\ &= Y^m(x^c + \delta t X^c(x))\left[\frac{\partial(x^a - \delta t X^a)}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)}\partial_a|_x = \\ &= \left(Y^m(x) + \delta t\left[\frac{\partial Y^m}{\partial x^c}\right]_x X^c(x)\right)\left[\delta^a_m - \delta t\left[\frac{\partial X^a}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)}\right] \end{aligned}$$

El término

$$\left[\frac{\partial X^a}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)} = X^a_{,m}(\varphi_{\delta t}(x)) = X^a_{,m}(x^d + \delta t X^d(x))$$

está evaluado en el punto $\varphi_{\delta t}(x)$, para expresarlo en x desarrollamos en serie de Taylor alrededor de x , de modo que se obtiene (despreciando términos $O(\delta t^2)$):

$$X^a_{,m}(x^d + \delta t X^d(x)) = X^a_{,m}(x) + \delta t X^a_{,me}(x)X^e(x)$$

substituyéndolo en las expresiones anteriores y realizando las operaciones indicadas se tiene:

$$\vec{Y}'(x) = \{Y^a(x) + \delta t[Y^a_{,m}X^m - X^a_{,m}Y^m]_x + O(\delta t^2)\}\partial_a|_x$$

Paso 2 Efectuemos la resta $\vec{Y}'(x) - \vec{Y}(x)$, se tiene:

$$\vec{Y}'(x) - \vec{Y}(x) = \{\delta t[Y^a_{,m}X^m - X^a_{,m}Y^m]_x + O(\delta t^2)\}\partial_a|_x$$

Paso 3 Dividiendo por δt y tomando el límite cuando tiende a cero se tiene, en un punto cualquiera x :

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}\vec{Y} = (Y^a_{,m}X^m - X^a_{,m}Y^m)\partial_a$$

1.6.1. La derivada de Lie en coordenadas adaptadas.

Veamos a continuación una introducción informal para la derivada de Lie con respecto a un campo \vec{X} . Lo presentaremos para el caso de la derivada de Lie de un campo de vectores \vec{Y} , pero el procedimiento es inmediatamente generalizable a un tensor de tipo arbitrario.

Notemos que si $\vec{X} = \partial_c$, esto es: $X^a = \delta_c^a$ (i.e.: \vec{X} es el campo tangente a la curva coordenada x^c que pasa por cada punto), la expresión (1.25) se reduce simplemente a:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T_{b\dots}^{a\dots} = T_{b\dots, c}^{a\dots} \quad (1.32)$$

esto es: la derivada de Lie coincide con la parcial.

Se puede demostrar el siguiente resultado:

Proposición 2 *Sea \vec{X} un campo vectorial tal que, en un punto $p \in M$ dado, $\vec{X}(p) \neq 0$. Entoces existe un sistema de coordenadas $x' = \{x^{1'}, \dots, x^{n'}\}$ en un entorno de p tal que $\vec{X} = \partial_{1'}$. Se dice entonces que **las coordenadas x' están adaptadas al campo \vec{X}** .*

Demostración: Lo anterior se verificará si y sólo si $X^a \partial_a = \partial_{1'}$, esto es, si y sólo si el sistema

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^c} X^c = \delta_{1'}^{a'}, \quad a' = 1', \dots, n'$$

tiene solución. Pero esto está garantizado en un entorno de cualquier punto p por los teoremas de existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, siempre y cuando $X^c(p) \neq 0$ para alguna $c = 1, \dots, n$. Notemos que en el sistema anterior $X^c(x)$ son datos y las incógnitas son las funciones $x^{a'} = x^{a'}(x^1, \dots, x^n)$. \square

A partir del resultado anterior se tiene para los campos \vec{X} y \vec{Y} :

$$X^{a'} = \delta_{1'}^{a'}, \quad X^c = \frac{\partial x^c}{\partial x^{1'}}, \quad Y^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{m'}} Y^m, \quad Y^c = \frac{\partial x^c}{\partial x^{b'}} Y^{b'} \quad (1.33)$$

En las coordenadas x' se tendrá, de acuerdo con la ecuación (1.32),

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} \vec{Y} = Y_{1'}^{a'} \partial_{a'}$$

Pongamos $Y_{1'}^{a'} \equiv T^a$ para mayor comodidad y calculemos T^a , esto es, $\mathcal{L}_{\vec{X}} \vec{Y}$ en las coordenadas x originales:

$$\begin{aligned} T^a &= \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}} T^{m'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}} \left(Y^{m'} \right) = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}} \left(\frac{\partial Y^{m'}}{\partial x^{1'}} \right) = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}} \left[X^c \partial_c \left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^b} Y^b \right) \right] = \\ & Y^b_{,c} X^c + \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}} \left[\frac{\partial^2 x^{m'}}{\partial x^c \partial x^b} X^c Y^b \right] \end{aligned} \quad (1.34)$$

para calcular el segundo sumando en la expresión anterior, consideremos:

$$\frac{\partial}{\partial x^b} \left[\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^c} X^c \right] = X^a_{,b}$$

desarrollando la derivada indicada en el primer miembro e igualando con el segundo se tiene

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}} \left[\frac{\partial^2 x^{m'}}{\partial x^c \partial x^b} \right] X^c = -\frac{\partial}{\partial x^b} \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}} \right) \left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^c} \right) X^c$$

pero de (1.33) se tiene que

$$\left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^c} \right) X^c = \delta_{1'}^{m'} \quad \text{y} \quad \frac{\partial x^a}{\partial x^{1'}} = X^a$$

y entonces

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}} \left[\frac{\partial^2 x^{m'}}{\partial x^c \partial x^b} \right] X^c = -\frac{\partial X^a}{\partial x^b}$$

substituyendo finalmente en (1.34) se obtiene

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} \vec{Y} = (Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m) \partial_a.$$

□

1.6.2. La derivada de Lie y el pull-back de un tensor cualquiera.

La definición de derivada de Lie dada por la ecuación (1.24), da lugar a una expresión formal para el pull-back de un tensor cualquiera de modo muy simple. De la expresión

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T(x) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [T'(x) - T(x)]$$

se tiene que para $\delta t \rightarrow 0$,

$$T'(x) = T(x) + (\delta t) \mathcal{L}_{\vec{X}} T(x) \equiv (1 + (\delta t) \mathcal{L}_{\vec{X}}) T(x), \quad T'(x) = (\varphi_{-\delta t}^*(T))(x).$$

Dada una transformación finita correspondiente a un parámetro t , φ_t , ésta se puede imaginar como la composición de infinitas transformaciones infinitesimales como la anterior, poniendo $\delta t = t/N$ cuando $N \rightarrow \infty$ se tiene entonces

$$T'(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{N} \mathcal{L}_{\vec{X}} \right)^N T(x) = e^{t \mathcal{L}_{\vec{X}}} T(x)$$

esto es

$$(\varphi_{-t}^*(T))(x) = e^{t \mathcal{L}_{\vec{X}}} T(x)$$

o equivalentemente, cambiando t por $-t$:

$$(\varphi_t^*(T))(x) = e^{-t \mathcal{L}_{\vec{X}}} T(x) \tag{1.35}$$

donde $\exp(-t \mathcal{L}_{\vec{X}})$ debe entenderse como la serie de Taylor que define la función exponencial para el argumento indicado (esto es, el operador $-t \mathcal{L}_{\vec{X}}$). La expresión anterior resulta útil para determinadas aplicaciones.

1.7. Simetría de un tensor.

Basándonos en la idea de derivada de Lie como generalización de la idea de derivada direccional, y en particular en la expresión de ésta en términos de coordenadas adaptadas al vector \vec{X} , generador infinitesimal de las transformaciones $\{\varphi_t\}$, resulta intuitivo dar la siguiente definición de invariancia o simetría de un tensor T :

Se dice que el campo tensorial T es **invariante bajo el grupo G** , o que G es el **grupo de simetría o de invariancia de T** , si y sólo si

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T = 0 \Leftrightarrow \varphi_t^*T = T \text{ para todo } t \quad (1.36)$$

donde \vec{X} designa al generador infinitesimal de G .

Fijémonos que la definición anterior, en coordenadas adaptadas a \vec{X} , es simplemente

$$\frac{\partial T_{b\dots}^{a\dots}}{\partial x^1} = 0, \quad \text{siendo } \vec{X} = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

lo cual se puede interpretar diciendo " $T_{b\dots}^{a\dots}$ no depende de la coordenada x^1 ", o bien "es invariante bajo traslaciones a lo largo de las curvas coordenadas x^1 ", etc.

1.8. Isometrías.

Las **isometrías** son las simetrías de la métrica, esto es: transformaciones $\{\varphi_t\}$ tales que

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}g_{ab} = 0 \Leftrightarrow (\varphi_t^*g)(x) = g(x) \text{ para todo } t. \quad (1.37)$$

En componentes, la primera ecuación se puede escribir como:

$$g_{ab,c}X^c + g_{ac}X_{,b}^c + g_{cb}X_{,a}^c = 0$$

o equivalentemente, en la forma conocida como **ecuación de Killing**, esto es:

$$X_{a;b} + X_{b;a} = 0$$

una forma particularmente útil de la cual es:

$$X_{a;b} = F_{ab}, \quad F_{ab} = -F_{ba} \quad (1.38)$$

donde F_{ab} es un tensor antisimétrico (o bivector) llamado **bivector de Killing**, y de la identidad de Ricci se puede ver fácilmente que

$$F_{ab;c} = R_{abcd}X^d. \quad (1.39)$$

En cuanto a la segunda expresión en la definición, de (1.22) se tiene, poniendo $(\varphi_t^* g) = g'$ para mayor comodidad

$$g'_{cd}(x) = \left[\frac{\partial \varphi_t^a}{\partial x^c} \right]_x \left[\frac{\partial \varphi_t^b}{\partial x^d} \right]_x g_{ab}(\varphi_t(x))$$

y entonces la condición $(\varphi_t^* g)(x) = g(x)$; i.e.: $g'(x) = g(x)$ es:

$$\left[\frac{\partial \varphi_t^a}{\partial x^c} \right]_x \left[\frac{\partial \varphi_t^b}{\partial x^d} \right]_x g_{ab}(\varphi_t(x)) = g_{cd}(x) \quad (1.40)$$

donde conviene recordar que habíamos introducido la notación:

$$\left[\frac{\partial \varphi_t^a}{\partial x^c} \right]_x = (\varphi_t^*)^a_c$$

esto es, φ_t^* es una aplicación lineal y como tal viene representada por una matriz en las bases coordenadas. Para los desarrollos que siguen en esta sección, la expresión anterior resulta poco útil, sin embargo será interesante en el análisis de la simetría axial.

Si \vec{X} y \vec{Y} son dos KV, entonces $a\vec{X} + b\vec{Y}$ es un KV para constantes cualesquiera a, b :

$$\mathcal{L}_{a\vec{X}+b\vec{Y}} g_{ab} = a\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} + b\mathcal{L}_{\vec{Y}} g_{ab} = 0 \quad (1.41)$$

y también lo es $[\vec{X}, \vec{Y}]$ ya que

$$\mathcal{L}_{[\vec{X}, \vec{Y}]} g_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}}(\mathcal{L}_{\vec{Y}} g_{ab}) - \mathcal{L}_{\vec{Y}}(\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab}) = 0 \quad (1.42)$$

por lo tanto, el conjunto de todos los vectores de Killing sobre M tiene estructura de álgebra de Lie y se llama **álgebra de Killing** $\mathcal{K}(M)$.

Veamos a continuación algunos resultados clásicos e importantes:

Teorema 1 *Sea M una variedad n -dimensional y $\mathcal{K}(M)$ su álgebra de Killing, se tiene entonces:*

1. *Para un KV $\vec{X} \in \mathcal{K}(M)$, \vec{X} está totalmente determinado sobre M especificando $X^a(p)$ y $F_{ab}(p)$ en un punto cualquiera de M .*
2. *$\dim \mathcal{K}(M) \leq n(n+1)/2$, en el caso de la Relatividad General, $\dim \mathcal{K}(M) \leq 10$, y en particular se tiene que dicha álgebra es finita.*
3. *Si $\dim \mathcal{K}(M) = n(n+1)/2$, entonces M es de curvatura constante, es decir: $R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$, siendo k constante.*
4. *Si M tiene curvatura constante entonces localmente $\dim \mathcal{K}(M) = n(n+1)/2$.*
5. *Si \vec{X} es un KV entonces*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} &= \mathcal{L}_{\vec{X}} R_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}} R = \mathcal{L}_{\vec{X}} G_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}} T_{ab} = 0, \\ \mathcal{L}_{\vec{X}} R^a_{bcd} &= \mathcal{L}_{\vec{X}} C^a_{bcd} = 0, \quad \mathcal{L}_{\vec{X}} (\nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_n} R^a_{bcd}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Demostración. No daremos la demostración en detalle sino que sólo la indicaremos a grandes rasgos. El primer resultado que se enuncia, viene de expandir en serie de potencias las componentes X_a alrededor de p , así en unas coordenadas cualesquiera x^a y poniendo $x^a(p) = x_p^a$ se tendrá para un punto cualquiera

$$X_a(x) = X_a(p) + X_{a,b}(p)(x^b - x_p^b) + \frac{1}{2!}X_{a,bc}(p)(x^b - x_p^b)(x^c - x_p^c) + \dots$$

pero $X_{a,b} = X_{a;b} + \Gamma_{ab}^c X_c$; i.e.: $X_{a,b} = F_{ab} + \Gamma_{ab}^c X_c$; es decir: $X_{a,b}(p)$ se puede expresar en términos de $X_a(p)$ y de $F_{ab}(p)$, y lo mismo se tiene para las derivadas de orden superior que involucran $F_{ab;c} = R_{abcd}X^d$, $F_{ab;cd}(p) = R_{abcd;e}X^e + R_{abcd}F_e^d$, etc. Fijémonos que $R_{abcd}(p)$, $R_{abcd;e}(p)$, etc. son *datos*, es decir: son conocidos. Asimismo, notemos también $X^a(x)$ depende linealmente de $X_a(p)$ y $F_{ab}(p)$.

En cuanto al segundo resultado, deriva directamente del primero, puesto que equivale a decir, en un punto p fijado y conocidos por tanto $R_{abcd}(p)$, $R_{abcd;e}(p)$, etc., cuántas condiciones iniciales $X_a(p)$ y $F_{ab}(p)$ independientes podemos dar: n para $X_a(p)$, y $n(n-1)/2$ para $F_{ab}(p)$, lo que en total hace $n(n+1)/2$. Como $X^a(x)$ depende linealmente de estas condiciones, se tiene que como máximo podremos construir $n(n+1)/2$ campos de Killing linealmente independientes.

Los resultados siguientes son estándar y pueden encontrarse en muchos libros¹⁰, en particular el último se deduce derivando la ecuación de Killing repetidamente (lo cual impone condiciones de integración) y utilizando las identidades de Bianchi y de Ricci, una manera rápida de verlo es en el caso en que $\vec{X}(p) \neq 0$, tomando un sistema de coordenadas adaptado a él se tiene $\vec{X} = \partial_1$ en una región alrededor de p , entonces $\mathcal{L}_{\vec{X}}g_{ab} = g_{ab,1} = 0$, esto es: la métrica no depende de x^1 y por lo tanto, tampoco podrán depender de esa coordenada ninguno de los tensores construidos a partir de la métrica: el de Riemann, Ricci, etc., con lo que su derivada de Lie respecto a \vec{X} será cero. \square

Corolario 2 *Del resultado anterior se deduce que si un KV \vec{X} es tal que se anula en un punto p , esto es: $X^a(p) = 0$ y en ese mismo punto se tiene que $X_{a;b}(p) = 0$ entonces necesariamente $\vec{X} = 0$ en toda la variedad.*

Otro resultado que se deduce directamente del teorema anterior es:

Proposición 3 *Si el rango del sistema lineal de ecuaciones algebraicas*

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}R_{bcd}^a = 0, \quad \mathcal{L}_{\vec{X}}(\nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_n} R_{bcd}^a) = 0$$

en las incógnitas X_a y $X_{a;b}$ es q , entonces la dimensión del álgebra de Killing es $r = \frac{n(n+1)}{2} - q$.

Otro resultado interesante y fácil de entender es que la aplicación exponencial "conmuta" con las isometrías, más concretamente:

$$\varphi_t \circ \chi = \chi \circ \varphi_{t*} \tag{1.43}$$

Gráficamente el significado de la expresión anterior es muy claro: dado $\vec{v} \in T_p M$, $\chi(\vec{v}) = q$ donde q es el punto a distancia paramétrica 1 que está sobre la geodésica con origen en p y vector tangente \vec{v} en ese punto; $\varphi_t(q) = r$ otro punto (hasta aquí el primer miembro de la ecuación); el segundo miembro dice que dado el vector anterior $\vec{v} \in T_p M$, se tiene $\varphi_{t*}(\vec{v}) = \vec{w} \in T_q M$, y entonces $\chi(\vec{w})$, el punto a distancia paramétrica 1 sobre la geodésica que sale de q y tiene por tangente en q al vector \vec{w} , coincide con el punto r .

¹⁰Véase H Stephani, General Relativity 2nd edition, Cambridge University Press 1990.

1.8.1. Puntos fijos de las isometrías.

Para un grupo de transformaciones cualesquiera generadas por un campo \vec{X} , digamos $\{\varphi_t\}$, se dice que el punto $p \in M$ es fijo si

$$\varphi_t(p) = p \quad \text{para todo } t.$$

A partir de $x^a(\bar{p}) = (\exp t\vec{X})_p x^a(p)$ (véase la sección 4 en este mismo capítulo) y poniendo ahora $\bar{p} = p$ se tiene inmediatamente que $\vec{X}_p = 0$, esto es: los puntos fijos de una transformación son aquéllos en que \vec{X} , el generador infinitesimal de dicha transformación, se anula.

Recordemos que para las isometrías teníamos siempre la relación

$$\varphi_t \circ \chi = \chi \circ \varphi_{t*}$$

y también la expresión general¹¹ de la diferencial φ_{t*} aplicada a un vector

$$\left(\varphi_{t*}\vec{Y}\right)(x) = \left(e^{-t\mathcal{L}\vec{x}}\right)_x \vec{Y}(x)$$

aplicando la expresión anterior al caso en que las coordenadas x son las del punto fijo p y recordando que $X^a(p) = 0$ es fácil ver (expandiendo en serie de potencias) que

$$\varphi_{t*} = e^{tA}, \quad A = [X^a_{,b}(p)]$$

donde A es una matriz cuyos elementos son simplemente

$$A^a_b = X^a_{,b}(p) = X^a_{;b}(p)$$

y la segunda igualdad para la derivada covariante se sigue de que $X^a_{;b}(p) = X^a_{,b}(p) + \Gamma^a_{bc}(p)X^c(p)$ y el término que contiene los símbolos de Christoffel es cero porque $X^c(p) = 0$.

Ahora bien, para un punto $p' \neq p$, $p' \in U_p$ entorno normal de p , se tiene que $p' = \chi(\vec{v})$, para algún $\vec{v} \in T_p M$. Usando coordenadas normales x^a ($x^a(p') = v^a$) y aplicando la expresión (1.43) al vector $\vec{v} \in T_p M$ tenemos:

$$x^a(\varphi_t(p')) = (e^{tA})^a_b v^b = (e^{tA})^a_b x^b(p') \quad (1.44)$$

para puntos sobre la órbita de la isometría, de donde:

$$X^a(p') = \left[\frac{dx^a}{dt}\right]_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[(e^{tA})^a_b x^b(p') \right]_{t=0} = A^a_b x^b(p')$$

es decir:

$$X^a = A^a_b x^b \quad (1.45)$$

para un punto cualquiera de coordenadas x^a en un entorno normal del punto fijo p , y entonces \vec{X} es una función lineal de las coordenadas normales en todo ese entorno.

¹¹no necesariamente para las isometrías sino para cualquier transformación.

Se dice entonces que los generadores infinitesimales de las isometrías son siempre linealizables, ya que si p no es un punto fijo, entonces siempre podemos encontrar coordenadas tales que $\vec{X} = \partial_1$, esto es $X^a = \delta_1^a$.

Notemos además que en el punto fijo, dado que $\vec{X}(p) = 0$, tenemos, a partir del corolario de la sección anterior y de la ecuación (1.39):

$$X^a(p) = 0, \quad F_{ab}(p) \neq 0, \quad F_{ab;c}(p) = 0. \quad (1.46)$$

Capítulo 2

Simetría Axial.

2.1. Intuición, definición y primeras propiedades.

La idea intuitiva de simetría axial es la de una isometría (de hecho un uniparamétrico de isometrías $\{\varphi_t\}$) generada por un KV espacial, digamos \vec{X} cuyas órbitas son curvas cerradas. El *eje de simetría* es entonces el conjunto de puntos que la isometría deja fijos, que como vimos son necesariamente aquéllos en los que \vec{X} se anula.

La aproximación usual al problema consiste en adaptar una coordenada, digamos ϕ , al KV que genera el grupo de isometrías de modo que $\vec{X} = \partial_\phi$, lo cual tiene la ventaja de que tanto la métrica como todos los objetos geométricos de la variedad construidos a partir de ella, son independientes de la coordenada ϕ .

Hablando estrictamente sin embargo, es fácil darse cuenta que una carta coordenada que contenga ϕ definida de este modo, nunca puede contener puntos que estén sobre el eje de simetría (ya que en dichos puntos $\vec{X} = 0$ y en cambio $\vec{X} = \partial_\phi$ no se anula nunca), y por lo tanto dichas coordenadas pueden no ser las adecuadas para analizar lo que sucede, tanto física como geoméricamente, en las vecindades del eje. Además, esta elección de coordenadas puede resultar engañosa en otros sentidos: consideremos por ejemplo el plano euclídeo \mathbb{R}^2 ; su elemento de línea en las coordenadas cartesianas usuales es:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

y el vector de Killing que implementa la simetría axial es, en dichas coordenadas, $\vec{X} = y\partial_x - x\partial_y$, el eje de simetría, (conjunto de puntos fijos de la isometría) viene dado como hemos dicho por la solución de $\vec{X} = 0$, esto es; $x = y = 0$ i.e.: el eje consta de un solo punto, a saber: el origen de coordenadas o . Se puede comprobar que $X_{a;b}(o) \equiv F_{ab}(o) \neq 0$ tal y como debe ser de acuerdo con el corolario¹ visto al final del tema anterior. Si consideramos ahora coordenadas polares (ρ, ϕ) con ϕ adaptada a \vec{X} se tiene:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad \vec{X} = \partial_\phi$$

y el punto fijo pasa a ser $\rho = 0$; notemos que $\vec{X}(\rho = 0) \neq 0$ (puesto que, en estas coordenadas $X^a = (0, 1)$ y siempre es distinto de cero), sin embargo $X_a = (0, \rho^2)$ sí se anula en $\rho = 0$, podríamos entonces pensar que 'estamos a salvo' en el sentido que el vector covariante X_a asociado con la isometría sí se anula

¹Recordemos que si $X^a(o) = F_{ab}(o) = 0$ entonces $\vec{X} = 0$ en toda la variedad.

en el eje. Calculando ahora $F_{ab} = X_{a;b}$ es inmediato ver que $F_{ab}(\rho = 0) = 0$, de donde se seguiría, aparentemente, que $\vec{X} = 0$ en todo el plano euclídeo, cosa que, evidentemente, no es cierta. Ni que decir tiene que esto es un simple problema de coordenadas puesto que el determinante Jacobiano del cambio entre cartesianas y polares se anula precisamente en el punto o , lo cual quiere decir que las coordenadas polares no son válidas en ese punto (como por otra parte es claro de la expresión del elemento de línea en $\rho = 0$, esto es: se trata de una singularidad coordenada). Esto ocurre en cualquier variedad de cualquier dimensión que sea axialmente simétrica y tal que se haya adaptado una coordenada al KV.

Los problemas anteriores sugieren la necesidad de una definición precisa de simetría axial y un estudio detallado de sus consecuencias, lo que a su vez implica apartarse inicialmente de las coordenadas polares, para recuperarlas más tarde en el proceso de escribir la métrica. Este sera el objetivo del resto de esta sección.

Diremos que un espaciotiempo (M, g) es **axialmente simétrico** si y sólo si existe una realización efectiva de la circunferencia S^1 en M , que es una isometría y es tal que el conjunto de puntos fijos es no vacío.

Si relajamos la última condición (i.e.: no exigimos que el conjunto de puntos fijos sea distinto del conjunto vacío), el espaciotiempo se llama **cíclicamente simétrico**. Existen ejemplos importantes de tales espacios: el espaciotiempo de Misner, el campo exterior de una fuente cuando el eje está enteramente contenido en ésta, etc. o también se pueden construir identificando puntos en espaciotiempos que admiten una isometría espacial. Carter² demostró que los espaciotiempos cíclicos que son asintóticamente Minkowski en direcciones espaciales, tienen necesariamente puntos fijos bajo la isometría y por lo tanto, son axialmente simétricos.

En lo que sigue, representaremos el grupo uniparamétrico de isometrías axiales como $\{\varphi_t, t \in S^1\}$ y llamaremos a su generador infinitesimal \vec{X} **KV axial**, mientras que su conjunto de ceros (puntos fijos de las isometrías) será representado como

$$W_2 \equiv \left\{ p \in M \quad : \quad \vec{X}(p) = 0 \right\}$$

y nos referiremos a él como el **eje de simetría**.

2.1.1. Primeros resultados.

Recordemos que en unas coordenadas cualesquiera y en un punto cualquiera de M :

$$X_{a;b} + X_{b;a} = 0, \quad X_{a;b} = F_{ab} \quad : \quad F_{ab} = -F_{ba}. \quad (2.1)$$

Además, de lo visto en la última sección del capítulo anterior, se tiene

$$\forall p \in W_2, \quad X^a(p) = 0, \quad F_{ab}(p) \neq 0, \quad F_{ab;c}(p) = 0. \quad (2.2)$$

Las ecuaciones anteriores, junto con el hecho de que el KV axial tiene órbitas cerradas, tienen profundas implicaciones en la geometría del espaciotiempo en la vecindad del eje como veremos inmediatamente.

Recordemos también de la última sección del capítulo anterior que para $p \in W_2$, y como $\varphi_t(p) = p$, se tiene que $\varphi_{t*} : T_p M \rightarrow T_p M$ que viene dada, en unas coordenadas cualesquiera, por

$$\varphi_{t*} = e^{tA}, \quad A = [X^a_{;b}(p)] = [X^a_{;b}(p)] = F^a_b(p) \quad (2.3)$$

²B Carter, Commun. Math. Phys. **17** 233 (1970).

La matriz A es por lo tanto igual al bivector $F_b^a(p)$ evaluado en p ; se tendrá entonces que para un vector cualquiera de T_pM , $\vec{v} = v^c \partial_c|_p$,

$$\varphi_{t*}(\vec{v}) = \vec{w} \in T_pM \quad \text{siendo} \quad w^a = [e^{tA}]^a_c v^c \quad (2.4)$$

Asimismo, la aplicación exponencial y las isometrías conmutan, es decir (véase el capítulo anterior):

$$\varphi_t \circ \chi = \chi \circ \varphi_{t*} \quad (2.5)$$

El hecho que las órbitas del KV axial sean cerradas implica que debe existir algún valor de $t = T$ (a parte de $t = 0$) tal que $\varphi_T(q) = q$ para todo punto q en un entorno normal de cualquier otro punto r (no necesariamente del eje), y ello a su vez implica que

$$\varphi_{T*}|_r = id|_{T_rM}$$

para todo punto q en un entorno normal, ya que $q = \chi(\vec{v})$ para $\vec{v} \in T_rM$, entonces, aplicando la ecuación (2.5) a \vec{v} y poniendo $t = T$, se tiene en el primer miembro $\varphi_T \circ \chi(\vec{v}) = q$ lo cual implica que $\varphi_{T*}(\vec{v}) = \vec{v}$ ya que χ es un difeomorfismo (y por lo tanto es biyectiva). Esto se verificará también en los puntos $p \in W_2$; i.e.: existe una isometría φ_T con $T \neq 0$ tal que $\varphi_{T*}|_p = id|_{T_pM}$.

Teniendo todo esto en cuenta se puede demostrar:

Proposición 4 *Para todo punto p del eje de simetría, el bivector F_{ab} es tal que $F_{ab}(p) = x_a y_b - y_a x_b$ siendo $\{x_a, y_a, l_a, n_a\}$ una tetraza nula en $p \in W_2$.*

Demostración. De los desarrollos anteriores sabemos que para un punto $p \in W_2$, $\varphi_{t*} = e^{tA}$ siendo A la matriz cuyos elementos son $A^a_b = F_b^a(p)$, ahora bien, es fácil demostrar que para todo tensor F_{ab} antisimétrico siempre existe una tetraza $\{x_a, y_a, l_a, n_a\}$ tal que se puede escribir de una de las cuatro formas siguientes:

1. $F_{ab} = \lambda(x_a y_b - y_a x_b) + \mu(l_a n_b - n_a l_b)$ con λ, μ constantes (estamos en un punto, si consideráramos un campo de tensores serían funciones y los elementos de la tetraza campos de vectores). En este caso se dice que el bivector es no-simple.
2. $F_{ab} = \mu(l_a n_b - n_a l_b)$. Bivector simple y tipo tiempo.
3. $F_{ab} = \alpha(l_a x_b - x_a l_b)$. Bivector simple nulo.
4. $F_{ab} = \lambda(x_a y_b - y_a x_b)$. Bivector simple tipo espacio.

Es muy fácil ver que para los tres primeros tipos, no existe ningún valor $T \neq 0$ tal que $\varphi_{T*}|_p = id|_{T_pM}$ (recordemos que en términos de la tetraza anterior, la identidad, cuyos elementos de matriz son δ^a_b se escribe $\delta^a_b = x^a x_b + y^a y_b + l^a n_b + n^a l_b$), así por ejemplo, para el caso del bivector nulo se tiene

$$\varphi_{t*}|_p = \exp(tA) \quad \Rightarrow \quad [\varphi_{t*}|_p]^a_b = \delta^a_b + t(l^a x_b - x^a l_b) + \frac{1}{2} t^2 l^a l_b$$

y el único valor de t para el cual es la identidad es $t = 0$.

Para el último caso tenemos:

$$\begin{aligned} [\varphi_{t*}|_p]^a_b &= \delta^a_b + tF^a_b(p) + \frac{1}{2}t^2F^a_c(p)F^c_b(p) + \dots = \\ &= \cos(\lambda t)(x^ax_b + y^ay_b) + \sin(\lambda t)(x^ay_b - y^ax_b) + l^an_b + n^al_b \end{aligned}$$

Rescalando t de modo que obtengamos la periodicidad estándar 2π , podemos poner $\lambda = 1$ y así tenemos que $F_{ab}(p) = x_a y_b - y_a x_b$, como queríamos demostrar. \square

El resultado anterior nos servirá en la sección siguiente para establecer distintos sistemas de coordenadas con un significado geométrico muy preciso, antes sin embargo hay otros resultados interesantes que son también consecuencia directa de éste e independientes de cualquier sistema de coordenadas que usemos.

Consideremos $T_p M$ para un punto $p \in W_2$ como el considerado anteriormente y consideremos la base (tetrada contravariante) de $T_p M$ formada por los vectores $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{l}, \vec{n}\}$ obtenidos a partir de la tetrada $\{x_a, y_a, l_a, n_a\}$.

Es inmediato ver que $T_p M = P_p \oplus L_p$ donde P_p es el subespacio generado por $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ y L_p el generado por $\{\vec{l}, \vec{n}\}$, dichos subespacios son ortogonales entre sí y el hecho que χ sea un difeomorfismo implica que $\chi(P_p) \equiv N_p$ es una *subvariedad regular* de dimensión 2 y de tipo espacio que se transforma en ella misma (es estable) bajo la acción de la isometría, según se sigue de (2.5). Esto se puede visualizar como que las órbitas del KV axial \vec{X} están "empaquetadas" alrededor del eje formando las subvariedades N_p , que cortan al eje perpendicularmente, y entonces \vec{X} es tangente a ellas, con lo que hemos demostrado que

Corolario 3 *El KV axial \vec{X} es de tipo espacio en un entorno del eje.*

En cuanto a $\chi(L_p)$ también es una subvariedad regular bidimensional, de tipo tiempo y que está enteramente contenida en el eje W_2 ; sus puntos por tanto están fijos por la acción de la isometría y se puede demostrar fácilmente que es *autoparalela* (ver más abajo), así pues hemos demostrado:

Proposición 5 *El eje de simetría W_2 es una superficie bidimensional, de tipo tiempo y autoparalela.*

Autoparalela significa que dado un punto $p \in W_2$, un vector tangente a W_2 en p ; i.e.: $\vec{v} \in T_p W_2$, y una curva C cualquiera que pase por p y esté contenida en W_2 , entonces el transporte paralelo de \vec{v} a lo largo de C produce siempre un vector tangente a la subvariedad.

En particular esto implica que todas las geodésicas que salen de todos los puntos de W_2 y tales que su vector velocidad en ese punto es tangente a W_2 , están contenidas en W_2 ; se dice entonces que W_2 es una subvariedad **totalmente geodésica**, y entre otras cosas esto implica que las dos formas fundamentales (curvaturas extrínsecas) son cero (los observadores de M no 'ven' curvatura en W_2), y que las geodésicas de W_2 (considerada ella como variedad) son también geodésicas de M , la variedad total.

Además, y como $\chi_* = id|_{T_p M}$, se tiene que $L_p = T_p W_2$ (i.e.: es el espacio tangente al eje) y que $P_p = (T_p W_2)^\perp$, de lo cual se puede deducir inmediatamente:

Teorema 4 *Sea $p \in W_2$ un punto cualquiera del eje de simetría y $\vec{v} \in T_p M$ un vector cualquiera tangente a la variedad en ese punto, entonces:*

1. *La condición necesaria y suficiente para que $\vec{v} \in T_p W_2$ (sea tangente al eje) es que $\varphi_{t*}(\vec{v}) = \vec{v}$, o alternativamente $[\vec{v}, \vec{X}]|_p = 0$.*

2. La condición necesaria y suficiente para que $\vec{v} \in (T_p W_2)^\perp$ (sea perpendicular al eje) es que $\varphi_{t*}(\vec{v}) = \vec{w}$, \vec{w}, \vec{v} linealmente independientes pero tales que $\varphi_{t*}(\vec{w}) = a\vec{v} + b\vec{w}$. Alternativamente $\vec{v}, [\vec{v}, \vec{X}]|_p$ son linealmente independientes pero $[[\vec{v}, \vec{X}], \vec{X}]|_p$ depende linealmente de los dos anteriores.
3. La condición necesaria y suficiente para que $\vec{v} \notin T_p W_2$ y $\vec{v} \notin (T_p W_2)^\perp$ es que $\vec{v}, \varphi_{t*}(\vec{v}) = \vec{w}$ y $\varphi_{t*}(\vec{w}) = \vec{u}$ sean linealmente independientes pero tales que $\varphi_{t*}(\vec{u}) = a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{u}$. Alternativamente $\vec{v}, [\vec{v}, \vec{X}]|_p$ y $[[\vec{v}, \vec{X}], \vec{X}]|_p$ son linealmente independientes pero $[[[\vec{v}, \vec{X}], \vec{X}], \vec{X}]|_p$ depende linealmente de los tres anteriores.

Otros resultados inmediatos tienen que ver con los tipos de Segre y de Petrov de los tensores de Ricci (o energía-impulso) y Weyl respectivamente, así, expresando $\mathcal{L}_{\vec{X}} C_{abcd} = 0$ y $\mathcal{L}_{\vec{X}} R_{ab} = 0$ para un punto p del eje, como $X^a(p) = 0$ se tiene simplemente $R_{cb} F^c_a + R_{ac} F^c_b \stackrel{p}{=} 0$, y una expresión similar para el tensor de Weyl, y entonces se tiene, inmediatamente:

Teorema 5 *En un espaciotiempo axialmente simétrico y sobre los puntos del eje, el tensor de Weyl sólo puede ser de tipo D o de tipo O, mientras que el tipo de Segre es [(11), 2], [(11)1, 1], [(11), z\bar{z}]³, o alguna degeneración de éstos.*

Finalmente se tiene también (aunque es más largo de demostrar, véase por ejemplo: M Mars and JMM Senovilla, *Class. Quantum Grav.* **10** 1633 (1993))

Teorema 6 *Para puntos próximos al eje de simetría se tiene*

$$(X^a X_a)^{-1} \nabla_c (X^a X_a) \nabla^c (X^a X_a) \xrightarrow{W_2} 1. \quad (2.6)$$

que se conoce popularmente como *elementary flatness condition*. Notemos que no se trata de ninguna condición extra, sino que es una consecuencia directa de la geometría asumida.

2.2. Construyendo el espaciotiempo a partir del eje.

De los desarrollos de la expresión (1.45) al final del capítulo anterior se tiene que en coordenadas normales x^a definidas en el entorno de cualquier punto fijo de la isometría (i.e.: del eje en nuestro caso) se tiene que

$$X^a = F^a_b x^b \quad (2.7)$$

Considerando ahora la subvariedad N_p definida anteriormente para $p \in W_2$, definimos en ella coordenadas normales x e y tales que $x(p) = y(p) = 0$, se sigue entonces que existen coordenadas (x, y, z, t) en un entorno U de p tales que, para cualquier punto $p' \in W_2 \cap U$ todos los puntos en N'_p , tienen las mismas coordenadas z y t (iguales a las de p') y entonces $x(p') = y(p') = 0$, además en dichas coordenadas se tiene

$$\vec{X} = y\partial_x - x\partial_y \quad (2.8)$$

³Desde un punto de vista físico, este tipo no es interesante, puesto que no corresponde a materia físicamente aceptable; esto es. no verifica la condición dominante de energía.

La existencia de un tal sistema de coordenadas puede verse del siguiente modo: para cualquier punto $q' \in U$, pero $q' \notin W_2$ y $q' \notin N_p$, existe algún punto $p' \in W_2 \cap U$ tal que $q' \in N_{p'}$.

Sea ahora γ la geodésica (única y contenida enteramente en $W_2 \cap U$) que une los puntos p y p' , y notemos el transporte paralelo a lo largo de γ por τ .

A continuación escogemos una tetrada contravariante en p , $\{\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{l}_p, \vec{n}_p\}$ tales que $\{\vec{x}_p, \vec{y}_p\}$ y $\{\vec{l}_p, \vec{n}_p\}$ generen los subespacios $(T_p W_2)^\perp$ y $T_p W_2$ respectivamente. Definimos un campo de tetradas $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{l}, \vec{n}\}$ a lo largo de γ mediante el transporte paralelo de la tetrada anterior a lo largo de ella. Dado que W_2 es autoparalela se sigue que $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ y $\{\vec{l}, \vec{n}\}$ generaran en cada punto de $W_2 \cap U$ los subespacios ortogonal y tangente al eje en ese punto, respectivamente.

Finalmente, escogemos coordenadas normales x e y en N_p como antes (en particular pueden ser tales que $\partial_x|_p \|\vec{x}_p$ y $\partial_y|_p \|\vec{y}_p$) y definimos: $\psi : N_p \rightarrow N_{p'}$ como $q' = \psi(q) \equiv (\chi_{p'} \circ \tau \circ \chi_p^{-1})(q)$. La función ψ define coordenadas sobre $N_{p'}$ con las propiedades requeridas.

Las coordenadas así definidas son lo más parecido a las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^4 , y las curvas coordenadas respectivas se cortan perpendicularmente⁴ entre si en todos los puntos del eje.

En lo que sigue pondremos $x^A = \{x, y\}$, $A = 1, 2$ y $x^\alpha = \{z, t\}$ para $\alpha = 3, 4$. Las subvariedades N son entonces simplemente las dadas por $x^\alpha = \text{constante}$, mientras que el eje W_2 viene dado por $x^A = 0$.

Además, se puede demostrar lo siguiente:

Teorema 7 *En la notación establecida previamente se tiene:*

$$g_{xx} \stackrel{W_2}{=} g_{yy}, \quad g_{xy} \stackrel{W_2}{=} 0, \quad g_{A\alpha} \stackrel{W_2}{=} 0, \quad (2.9)$$

$$g_{xx,A} \stackrel{W_2}{=} g_{yy,A} \stackrel{W_2}{=} 0, \quad g_{xy,d} \stackrel{W_2}{=} 0, \quad g_{xx,\alpha} \stackrel{W_2}{=} g_{yy,\alpha}, \quad (2.10)$$

$$g_{\alpha\beta,A} \stackrel{W_2}{=} 0, \quad g_{\alpha x,x} \stackrel{W_2}{=} g_{\alpha y,y}, \quad g_{\alpha x,y} \stackrel{W_2}{=} -g_{\alpha y,x}. \quad (2.11)$$

Demostración. Todos estos resultados se siguen de que $F^a_{b;c} \stackrel{W_2}{=} 0$, la forma del KV axial dada por (2.8), esto es: $\vec{X} = y\partial_x - x\partial_y$ que a su vez implica que sobre U (y no sólo sobre el eje):

$$F^a_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

y finalmente el que $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 0$ y también $\partial_d(\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab}) = 0$, ambas ecuaciones evaluadas sobre W_2 . \square

El teorema anterior proporciona información sobre cómo determinados coeficientes de la métrica tienden a cero cuando nos aproximamos al eje, ayudando así a entender el significado de éste y otros sistema de coordenadas relacionados con él y que introduciremos seguidamente.

La forma más general de la métrica axialmente simétrica en las coordenadas (x, y, z, t) introducidas es:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} B + A \sin 2(\phi + M) & A \cos 2(\phi + M) & D \sin(\phi + N) & E \sin(\phi + S) \\ A \cos 2(\phi + M) & B - A \sin 2(\phi + M) & D \cos(\phi + N) & E \cos(\phi + S) \\ D \sin(\phi + N) & D \cos(\phi + N) & F & J \\ E \sin(\phi + S) & E \cos(\phi + S) & J & H \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

⁴Se pueden escoger de modo que esto sea así siempre.

donde $\phi = \arctan(x/y)$ y las funciones A, B, \dots, H lo son de $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}, z, t$. La función ρ es invariante sobre cada una de las órbitas de \vec{X} y por tanto las etiqueta en cada una de las subvariedades N_ρ . Notemos que ρ y ϕ así definidas son lo más parecido posible a las coordenadas polares planas, y que el eje W_2 viene dado por $\rho = 0$, mientras que ϕ no está definida allí según comentamos.

Por otro lado, el teorema anterior implica que E, D deben tender a cero cuando $\rho \rightarrow 0$ al menos como ρ , además si tomamos t y z ortogonales entre sí sobre el eje (lo cual no supone ninguna pérdida de generalidad), se tiene que $J \rightarrow 0$ como ρ^2 al menos, e idéntico comportamiento se tiene para A , mientras que B debe ser de la forma $B = B_0(x^\alpha) + \rho^2 \bar{B}_1(\rho, x^\alpha)$ donde $\bar{B}_1(\rho = 0, x^\alpha) \neq 0$ en principio⁵ y $B_0(x^\alpha) \neq 0$. En cuanto al resto de coeficientes de la métrica se tiene, de los resultados expuestos en el teorema anterior $F = F_0(x^\alpha) + \rho \bar{F}_1(\rho, x^\alpha)$ y $H = H_0(x^\alpha) + \rho \bar{H}_1(\rho, x^\alpha)$ donde como antes, las funciones con barra no se anulan necesariamente en el eje $\rho = 0$ (ver nota a pie de página), y $F_0(x^\alpha), H_0(x^\alpha) \neq 0$.

Hasta aquí no hemos utilizado la libertad coordenada que todavía tenemos. Notemos que una rotación en el plano x, y (subvariedades N) de modo que

$$x' = \rho \sin(\phi + h(\rho, z, t)), \quad y' = \rho \cos(\phi + h(\rho, z, t))$$

preserva la forma del KV axial, esto es: $\vec{X} = y' \partial_{x'} - x' \partial_{y'}$, el eje (i.e.: W_2 viene dado por $x' = y' = 0$), las subvariedades N (i.e.: siguen siendo las subvariedades $z, t = \text{constantes}$ y vienen ahora coordenadas por x', y'), la forma de la métrica (incluyendo el comportamiento cerca del eje, puesto que $\rho^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$), y permite poner $A = 0$, esto es $g_{xy} = 0$, o alternativamente, permite poner M, N o S igual a cero. Notemos que esta transformación no es sinó una rotación sobre las subvariedades N que depende también de ρ , esto es de la órbita particular de \vec{X} .

Si ahora cambiamos a coordenadas polares $\{\phi, \rho, z, t\}$ definidas como antes, entonces el KV axial toma la forma habitual:

$$\vec{X} = \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{2.14}$$

y la métrica es ahora, en coordenadas $x^\alpha = (\phi, \rho, z, t)$ (no ponemos primas en los índices para simplificar la notación):

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2(B + A \sin 2(\phi + M)) & \rho A \cos 2(\phi + M) & \rho D \sin(\phi + N) & \rho E \sin(\phi + S) \\ \rho A \cos 2(\phi + M) & B - A \sin 2(\phi + M) & D \cos(\phi + N) & E \cos(\phi + S) \\ \rho D \sin(\phi + N) & D \cos(\phi + N) & F & J \\ \rho E \sin(\phi + S) & E \cos(\phi + S) & J & H \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

y nuevamente, una redefinición de la coordenada angular $\phi' = \phi + h(\rho, z, t)$ permite poner $A = 0$ o alternativamente M, N o S , mientras que preserva la forma del KV axial⁶, de la métrica, del eje (ahora W_2 viene dado por $\rho = 0$), y de las subvariedades N (coordenadas ahora por ρ y ϕ pero definidas como antes como $z, t = \text{constantes}$). Nótese los factores extra ρ y ρ^2 que aparecen en algunos de los coeficientes de la métrica y que conducen a singularidades coordenadas en el eje $\rho = 0$.

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores sobre cómo tienden a cero algunas de las funciones se tiene:

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &\sim O(\rho^2), & g_{\phi\rho} &\sim O(\rho^3), & g_{\phi z} &\sim O(\rho^2), & g_{\phi t} &\sim O(\rho^2), & g_{\rho\rho} &\sim O(0) \\ g_{\rho z} &\sim O(\rho), & g_{\rho t} &\sim O(\rho), & g_{zz} &\sim O(0), & g_{zt} &\sim O(\rho^2), & g_{tt} &\sim O(0). \end{aligned}$$

⁵Puede haber espaciotiempos en los que $B = B_0(x^\alpha) + \rho^n \bar{B}_1(\rho, x^\alpha)$ con $n > 2$, lo anterior es una cota mínima sobre cómo tiende a cero.

⁶De hecho es muy fácil ver que la condición necesaria y suficiente para que un cambio de coordenadas mantenga la forma de $\vec{X} = \partial_\phi$ es precisamente ésta: $\phi' = \phi + h(\rho, z, t)$, entonces $\vec{X} = \partial_{\phi'}$.

Estas serán las coordenadas polares y nuestra métrica de partida para todos los desarrollos que siguen. Fijémonos que estas coordenadas así definidas son lo más parecido posible a las coordenadas cilíndricas usuales en \mathbb{R}^3 .

2.2.1. Otros sistemas de coordenadas.

Vamos ahora a realizar cambios de coordenadas que lleven la métrica a otras formas más adecuadas a determinados tipos de cálculos. A la hora de hacer dichos cambios, impondremos tres requisitos: en primer lugar y como resulta obvio y deseable, queremos mantener la forma del KV axial; en segundo lugar, queremos mantener el control sobre cómo tienden a cero los coeficientes de la métrica cuando nos aproximamos al eje; finalmente, queremos en este punto mantener la coordenada temporal completamente libre, esto es: no queremos hacer uso de la libertad de gauge para definirla todavía. Más adelante usaremos esta libertad para adaptar la coordenada temporal al caso en que el espaciotiempo sea estacionario además de axialmente simétrico y encontrar así la forma de la métrica conocida como Lewis-Papapetrou.

Consideremos el efecto de la siguiente familia de cambios de coordenadas:

$$\phi' = \phi + h(\rho, x^\beta), \quad \rho' = f(\rho, x^\beta), \quad z' = G(\rho, x^\beta), \quad t' = t$$

Estos cambios preservan la forma de \vec{X} pero no preservan la expresión en coordenadas de las subvariedades N (i.e.: $N_p = \{x^\alpha = \text{constant}\} \neq \{x^{\alpha'} = \text{constant}\}$). El eje de simetría se preserva si y sólo si $f(\rho = 0, x^\beta) = 0$. La forma general de la métrica también se mantiene pero la conducta en las vecindades del eje de los coeficientes de la métrica varía dependiendo de cómo dependan de ρ las funciones $f(\rho, x^\beta)$ y $G(\rho, x^\beta)$. Dado que estamos interesados en mantener la expresión coordenada del eje pongamos:

$$f(\rho, x^\beta) = \rho \bar{f}(\rho, x^\beta), \quad \text{con} \quad \bar{f}(0, x^\beta) \neq 0$$

y también y sin pérdida de generalidad:

$$G(\rho, x^\beta) = z + G_1(\rho, x^\beta).$$

El cambio inverso de coordenadas será también de la misma forma, esto es: $\phi = \phi' + \hat{h}(\rho', x^{\beta'})$, $\rho = \rho' \hat{f}(\rho', x^{\beta'})$ con $\hat{f}(\rho' = 0, x^{\beta'}) \neq 0$, $z = z' + \hat{G}_1(\rho', x^{\beta'})$ y $t = t'$. Calculando las expresiones de los coeficientes de la métrica en las nuevas coordenadas y poniendo especial atención a su comportamiento cerca del eje es fácil (aunque algo tedioso) ver lo siguiente (prescindimos de las primas para aligerar la notación):

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &\sim O(\rho^2), & g_{\phi\rho} &\sim \text{mín } O(\rho^3, \rho^2 h_{,\rho}, \rho^2 G_{1,\rho}), & g_{\phi z} &\sim O(\rho^2), & g_{\phi t} &\sim O(\rho^2), & g_{\rho\rho} &\sim O(0) \\ g_{\rho z} &\sim O(\rho), & g_{\rho t} &\sim O(\rho), & g_{zz} &\sim O(0), & g_{zt} &\sim \text{mín}(O(\rho^2), O(G_{,t})), & g_{tt} &\sim O(0) \end{aligned}$$

y podemos hacer entonces los siguientes comentarios:

- (a) Si $h_{,\rho} \stackrel{W_2}{=} G_{,\rho} \stackrel{W_2}{=} 0$ entonces $g_{\phi\rho} \sim O(\rho^3)$.
- (b) Si ponemos $G(\rho, x^\beta) = z + \rho^2 \bar{G}(\rho, x^\beta)$ con $\bar{G}(0, x^\beta) \neq 0$, entonces $g_{zt} \sim O(\rho^2)$.

- (c) Al haber un cambio de coordenadas de estas características, podemos de hecho extender el entorno U del eje al cual restringíamos nuestras consideraciones. Así las nuevas coordenadas pueden definirse en un entorno $V \supseteq U$ de modo que x' e y' ya no sean coordenadas normales sobre N .

A partir de ahora, consideraremos tan sólo los cambios siguientes:

$$\phi' = \phi + h(\rho, x^\beta), \quad \rho' = \rho \bar{f}(\rho, x^\beta), \quad z' = z + \rho^2 \bar{G}(\rho, x^\beta), \quad t' = t, \quad (2.16)$$

$$\text{siendo} \quad \bar{f}(0, x^\beta) \neq 0, \quad \bar{G}(0, x^\beta) \neq 0. \quad (2.17)$$

La métrica toma entonces la forma (una vez más prescindiendo de las primas):

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2 \bar{g}_{\phi\phi} & \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho^2 \bar{g}_{\phi t} \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & \bar{g}_{\rho\rho} & \rho \bar{g}_{\rho z} & \rho \bar{g}_{\rho t} \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho \bar{g}_{\rho z} & \bar{g}_{zz} & \rho^2 \bar{g}_{zt} \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi t} & \rho \bar{g}_{\rho t} & \rho^2 \bar{g}_{zt} & \bar{g}_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

donde $\bar{g}_{ab} = \bar{g}_{ab}(\rho, z, t)$ son tales que, en principio⁷, $\bar{g}_{ab}(0, z, t) \neq 0$.

Si imponemos que sobre el eje W_2 tengamos

$$\frac{\partial x^{A'}}{\partial x^B} \stackrel{W_2}{=} \delta_B^A$$

se sigue que $\bar{f}(0, z, t) = 1$ y también $h(0, z, t) = 0$. Si además exigimos que se preserve el carácter normal de las coordenadas x', y' sobre N , es decir:

$$\Gamma_{B'C'}^{A'} \stackrel{W_2}{=} \Gamma_{B'C'}^{\alpha'} \stackrel{W_2}{=} 0$$

se tiene también

$$\bar{f}_{,\rho} \stackrel{W_2}{=} h_{,\rho} \stackrel{W_2}{=} 0$$

y entonces $g_{\phi\rho} = \rho^3 \bar{g}_{\phi\rho}$.

La forma anterior de la métrica es invariante bajo los cambios de coordenadas dados por (2.16) (incluyendo el comportamiento cerca del eje), y también lo son el KV axial ($\vec{X} = \partial_\phi$) y el eje W_2 ($\rho = 0$), y es inmediato ver que son los cambios más generales que preservan lo antedicho.

Forma 'Shift-free' de la métrica.

Utilizando los cambios de coordenadas dados por (2.16), es relativamente fácil ver que siempre es posible escoger las funciones h, \bar{f}, \bar{G} de modo que la métrica tome la forma:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2 \bar{g}_{\phi\phi} & \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & 0 \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & \bar{g}_{\rho\rho} & \rho \bar{g}_{\rho z} & 0 \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho \bar{g}_{\rho z} & \bar{g}_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{g}_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

⁷Esto es estrictamente así para los elementos de la diagonal para asegurar la regularidad en el eje, en cuanto a los términos extra-diagonales, se trata tan sólo de una 'cota inferior' sobre cuán rápido pueden tender a cero estos coeficientes al acercarnos al eje.

Llamaremos a esta forma de la métrica **'shift-free'** ya que el llamado vector de shift en el formalismo 3+1 de la relatividad es cero.

La forma más simple de verlo es demostrar que siempre es posible, mediante una de estas transformaciones de coordenadas, reducir los coeficientes g^{it} para $i \neq 4$ a cero:

$$g^{t'\phi'} = g^{t\phi} + g^{tt}h_{,t} + g^{t\rho}h_{,\rho} + g^{tz}h_{,z} = 0 \quad (2.20)$$

$$g^{t'\rho'} = g^{tt}\rho\bar{f}_{,t} + g^{t\rho}(\bar{f} + \rho\bar{f}_{,\rho}) + g^{tz}\rho\bar{f}_{,z} = 0 \quad (2.21)$$

$$g^{t'z'} = g^{tt}\rho^2\bar{G}_{,t} + g^{t\rho}(2\rho\bar{G} + \rho^2\bar{G}_{,\rho}) + g^{tz}(1 + \rho^2\bar{G}_{,z}) = 0 \quad (2.22)$$

ahora, del hecho que g^{it} dependen de ρ, z, t y de la teoría elemental de ecuaciones diferenciales, se sigue que siempre es posible escoger h de modo que se verifique la primera de las ecuaciones anteriores, mientras que las dos últimas ecuaciones pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \rho(g^{tt}\gamma_{,t} + g^{t\rho}\gamma_{,\rho} + g^{tz}\gamma_{,z}) &= -g^{t\rho} \\ 2\rho g^{t\rho} + \rho^2(g^{tt}\bar{G}_{,t} + g^{t\rho}\bar{G}_{,\rho} + g^{tz}\bar{G}_{,z}) &= -g^{tz} \end{aligned}$$

donde $\gamma = \ln \bar{f}$, y de nuevo la teoría elemental de ecuaciones diferenciales junto con las expresiones de g^{tt} , $g^{t\rho}$ y g^{tz} en términos de las funciones que aparecen en (2.5) y sus respectivos órdenes (dados a continuación), permite concluir que siempre existen soluciones a las ecuaciones anteriores para determinados rangos de las coordenadas de modo que el eje siempre queda incluido.

Es interesante notar que la forma anterior de la métrica sólo es posible, en general, si el espaciotiempo no admite otras isometrías que formen grupo con la isometría axial. Sea, por ejemplo, el espaciotiempo estacionario además de axialmente simétrico; siempre podemos adaptar la coordenada temporal t al KV que implementa la estacionariedad (véase la sección siguiente) y al métrica queda entonces como en (2.5) de modo que las funciones no dependen del tiempo, sino tan sólo de ρ y z . Para ver que en este caso no es posible hacer un cambio de coordenadas que simultáneamente preserve la forma del KV temporal y anule las componentes $g_{t'\phi'}$, $g_{t'\rho'}$ y $g_{t'z'}$, consideremos las ecuaciones anteriores especificadas a este caso (i.e.: h, f, G no dependen de t) sin ni siquiera restringir la forma de f y G :

$$\begin{aligned} g^{t'\phi'} &= g^{t\phi} + g^{t\rho}h_{,\rho} + g^{tz}h_{,z} = 0 \\ g^{t'\rho'} &= g^{t\rho}f_{,\rho} + g^{tz}f_{,z} = 0 \\ g^{t'z'} &= g^{t\rho}G_{,\rho} + g^{tz}G_{,z} = 0 \end{aligned}$$

dado que todas las funciones dependen tan sólo de ρ y z , se sigue que para que se puedan verificar las dos últimas ecuaciones, los gradientes de f y G deberían ser linealmente dependientes en cada punto, con lo cual el cambio de coordenadas no sería admisible. Idénticos comentarios para el caso de cualquier otra isometría que forme grupo con la axial.

Es interesante notar sin embargo que lo anterior sí es posible si el espaciotiempo es estático (no estacionario), i.e.: el KV temporal es ortogonal a una hipersuperficie.

2.3. Espaciotiempos axialmente simétricos que admiten más simetrías.

El resultado básico era conocido hace más de treinta años, pero sorprendentemente, se ha 'olvidado' y 'redescubierto' muchas veces desde entonces.

Teorema 8 Sea (M, g) un espaciotiempo axialmente simétrico con KV axial \vec{X} y tal que admita otro KV, \vec{Y} , de modo que \vec{X}, \vec{Y} generan un grupo de isometrías a dos parámetros. Se sigue entonces que el grupo G_2 es abeliano, esto es:

$$[\vec{X}, \vec{Y}] = 0.$$

Demostración. Llamaremos $\{\varphi_t\}$ y $\{\psi_s\}$ a los subgrupos uniparamétricos generados por \vec{X} y \vec{Y} respectivamente. Además tenemos que $\varphi_t(x) = \varphi_{t+2\pi}(x)$ para todo punto $x \in M$ y todo valor de t (en particular: $\varphi_0(x) = \varphi_{2\pi}(x) = x$), i.e.: las órbitas de $\{\varphi_t\}$ son cerradas.

Sea O_1 la órbita (cerrada) de $\{\varphi_t\}$ que pasa por un punto dado x_0 , esto es: $O_1 = \{\varphi_t(x_0), \forall t \in [0, 2\pi)\}$. Consideremos ahora $\psi_s(O_1)$ que será también cerrada puesto que ψ_s es un difeomorfismo. En cualquier carta coordenada x^a que cubra O_1 y $\psi_s(O_1)$ tendremos:

$$\psi_s(O_1) = \{x^a(t) + sY^a(x(t)) + O(s^2), \quad x^a(t) = \varphi_t^a(x_0)\}$$

El que $\psi_s(O_1)$ sea cerrada implica que para cualquier valor del parámetro t , $x^a(t+2\pi) + sY^a(x(t+2\pi)) = x^a(t) + sY^a(x(t))$, y como $x^a(t+2\pi) = x^a(t)$, lo anterior implica, para puntos x sobre O_1 :

$$Y^a(x(t+2\pi)) = Y^a(x(t)) \quad (2.23)$$

Sea ahora $x \in O_1$ tal que $x^a = x^a(t)$ y pongamos $\varphi_t^a(x) = y^a$, notemos que para $t' = 2\pi$ se tiene $y = x$. A continuación definamos sobre O_1 el vector \vec{Y}' mediante transporte de Lie de \vec{Y} a lo largo de O_1 , esto es:

$$\vec{Y}'(x) = \exp(-t\mathcal{L}_{\vec{X}})\vec{Y}(x) \quad (2.24)$$

dado que

$$Y'^c(y) = \frac{\partial y^c}{\partial x^a} Y^a(x)$$

de (2.23) se sigue que para $t' = 2\pi$, $\vec{Y}'(\varphi_{2\pi}(x)) = \vec{Y}(\varphi_{2\pi}(x))$ para cualquier $x \in O_1$, lo cual puede ser expresado, teniendo en cuenta (2.24) como

$$\exp(-2\pi\mathcal{L}_{\vec{X}})\vec{Y}(x) = \vec{Y}(x)$$

desarrollando en serie de Taylor el primer miembro tenemos:

$$\vec{Y}(x) - 2\pi[\vec{X}, \vec{Y}](x) + \frac{(2\pi)^2}{2!}[\vec{X}, [\vec{X}, \vec{Y}]](x) + \dots = \vec{Y}(x).$$

Ahora bien, si \vec{X}, \vec{Y} generan un grupo entonces $[\vec{X}, \vec{Y}] = a\vec{X} + b\vec{Y}$ para algunas constantes a, b , substituyendo esto en la expresión anterior se tiene

$$-2\pi(a\vec{X} + b\vec{Y}) + \frac{(2\pi)^2}{2!}b(a\vec{X} + b\vec{Y}) \dots = 0$$

que implica $a = b = 0$. □

Lo anterior es cierto para un grupo de transformaciones a dos parámetros cualquiera tal que uno de sus generadores tenga órbitas cerradas. Otra demostración (véase A Barnes, *Class. Quantum Grav.* **17** 2605 (2000)) utilizando coordenadas adaptadas es como sigue: poniendo $\vec{X} = \partial_\phi$ y para $x^1 = \phi$, se tiene

$$[\vec{X}, \vec{Y}] = a\vec{X} + b\vec{Y} \Leftrightarrow \frac{\partial Y^1}{\partial \phi} = a + b\frac{\partial Y^1}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial Y^k}{\partial \phi} = b\frac{\partial Y^k}{\partial \phi}, \quad k \neq 1$$

que integrando e imponiendo que las soluciones tengan periodicidad 2π de modo que \vec{Y} sea monovaluado sobre la variedad, implica rápidamente que $a = b = 0$.

2.3.1. Espaciotiempos estacionarios y axisimétricos.

Un espaciotiempo se llama **estacionario** si admite un KV \vec{Y} de tipo tiempo definido globalmente, si además \vec{Y} es ortogonal a una hipersuperficie, entonces el espaciotiempo se llama **estático**.

Un campo vectorial cualquiera \vec{Z} es ortogonal a una hipersuperficie si y sólo si en un sistema de coordenadas cualquiera se tiene $Z_a = \lambda f_{,a}$ para alguna función $f(x^a)$, siendo λ otra función de las coordenadas. La expresión anterior es equivalente a que $Z_{[a} Z_{b;c]} = 0$.

Para el caso de un KV temporal ello significa que es posible definir unas coordenadas de modo que $\vec{Y} = \partial_t$ y $Y_a dx^a = A(x^c) dt$, en estas coordenadas la métrica es tal que $g_{ti} = 0$ para $x^i \neq t$. Similares comentarios se aplican al caso en que el KV sea de tipo espacio, el caso en que es nulo es ligeramente diferente.

De lo visto en la sección precedente se sigue que el KV axial y el temporal deben conmutar, es decir $[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$ de modo que se pueden escoger las coordenadas como en (2.5) o (2.18) de manera que $\vec{Y} = \partial_t$. Es fácil ver que las formas anteriores de la métrica, el eje y su expresión coordenada y los KV axial temporal quedan preservados por los cambios de coordenadas del tipo (2.16) suplementados con transformaciones de la coordenada temporal del tipo $t' = t + T(\rho, z, t)$, (y como antes, son los únicos que preservan todo lo mencionado aquí), de modo que a partir de ahora consideraremos cambios de coordenadas:

$$\phi' = \phi + h(\rho, x^\beta), \quad \rho' = \rho \bar{f}(\rho, x^\beta), \quad z' = z + \rho^2 \bar{G}(\rho, x^\beta), \quad t' = t + T(\rho, z, t), \quad (2.25)$$

$$\text{siendo} \quad \bar{f}(0, x^\beta) \neq 0, \quad \bar{G}(0, x^\beta) \neq 0. \quad (2.26)$$

En este caso es fácil (aunque tedioso) escoger las funciones h y T de modo que $g_{\phi\rho} = g_{t\rho} = 0$, esto fija \bar{f} y \bar{G} salvo funciones que dependen de z sólo. La forma que queda es entonces:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2 \bar{g}_{\phi\phi} & 0 & \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho^2 \bar{g}_{\phi t} \\ 0 & \bar{g}_{\rho\rho} & \rho \bar{g}_{\rho z} & 0 \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho \bar{g}_{\rho z} & \bar{g}_{zz} & \rho^2 \bar{g}_{zt} \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi t} & 0 & \rho^2 \bar{g}_{zt} & \bar{g}_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Donde ahora $\bar{g}_{ab} = \bar{g}_{ab}(\rho, z)$. Partiendo de la forma anterior de la métrica, se puede ver que es posible hacer un nuevo cambio de coordenadas del mismo tipo, pero sin variar ahora las coordenadas ϕ y t que ya fueron fijadas por el cambio anterior⁸ (i.e.: definimos nuevas coordenadas $\rho' = \rho \bar{f}(\rho, z)$ y $z' = z + \rho^2 \bar{G}(\rho, z)$ con $\bar{f}(0, z), \bar{G}(0, z) \neq 0$) de modo se pueden anular las componentes $g_{\rho z}$ y además se puede conseguir $\bar{g}_{\rho\rho} = \bar{g}_{zz}$, manteniendo todo lo demás: forma de la métrica y de los KV, eje de simetría y comportamiento cerca de éste. Así pues se tiene:

⁸Queda todavía la posibilidad de añadir a ϕ y t sendas funciones arbitrarias de z , pero no necesitamos hacer uso de esta posibilidad en este momento.

Teorema 9 *Dado un espaciotiempo estacionario y axisimétrico, siempre es posible definir unas coordenadas $x^a = (\phi, \rho, z, t)$ de modo que los KV son $\vec{X} = \partial_\phi$ y $\vec{Y} = \partial_t$ y la métrica se escribe como:*

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2 \bar{g}_{\phi\phi} & 0 & \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho^2 \bar{g}_{\phi t} \\ 0 & \bar{g}_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & 0 & \bar{g}_{\rho\rho} & \rho^2 \bar{g}_{zt} \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi t} & 0 & \rho^2 \bar{g}_{zt} & \bar{g}_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

de modo que las cantidades con barra son en principio diferentes de cero.

La anterior es la forma más general (y más simple) de la métrica para un espaciotiempo con las simetrías descritas. No se conocen soluciones exactas explícitas para este tipo de espaciotiempos, pero sí se conocen (y son de gran interés) para el caso particular en que las órbitas del grupo de isometría admiten superficies bidimensionales ortogonales a ellas, dando lugar entonces a la forma de la métrica que se conoce con el nombre de Lewis-Papapetrou.

En la subsección siguiente vamos a tratar este caso en detalle.

Superficies ortogonales. Métricas de Lewis-Papapetrou y Weyl.

El punto de partida será la métrica obtenida en (2.28), y las coordenadas son $x^a = (\phi, \rho, z, t)$. La condición de que los subespacios ortogonales a las órbitas del grupo formen superficies 2-dimensionales es muy simple de establecer. Los KV \vec{X}, \vec{Y} son tangentes a las órbitas y en las coordenadas adaptadas éstas vienen coordenadas por ϕ, t siendo ρ, z constantes sobre cada una de ellas. Se tiene que $\{\vec{X}, \vec{Y}\}$ forman una base del espacio tangente a dichas órbitas en cada punto del espaciotiempo. Consideremos ahora dos campos de vectores, digamos \vec{v}, \vec{w} que sean ortogonales a \vec{X}, \vec{Y} en todos los puntos del espaciotiempo, se pueden escoger sin pérdida de generalidad ortogonales entre si, la condición de que formen superficie es entonces:

$$[\vec{v}, \vec{w}] = a\vec{v} + b\vec{w}, \quad a, b \text{ funciones} \quad (2.29)$$

Lo anterior, junto con la condición de que sean ortogonales a \vec{X}, \vec{Y} es equivalente a

$$[\vec{v}, \vec{w}]^a X_a = [\vec{v}, \vec{w}]^a Y_a = 0$$

que desarrollando $[\vec{v}, \vec{w}]^a X_a = X^a(v^a_{;b} w^b - w^a_{;b} v^b) = 0$ y teniendo en cuenta que $X^a v_a = 0$ implica $X^a_{;b} v_a = -v^a_{;b} X_a$, etc. puede reescribirse como:

$$X_{a;b} v^a w^b = X_{a;b} w^a v^b = 0, \quad Y_{a;b} v^a w^b = Y_{a;b} w^a v^b = 0 \quad (2.30)$$

o alternativamente

$$\epsilon_{abcd} X^a Y^b X^{c;d} = \epsilon_{abcd} X^a Y^b Y^{c;d} = 0 \quad (2.31)$$

que es como se presenta habitualmente en los libros y que tiene la ventaja de que sólo interviene los propios KV y sus bivectores (i.e.: ya no aparecen los vectores \vec{v}, \vec{w}).

La expresión anterior se puede ver que es equivalente a (véase por ejemplo Kramer et al. 2nd edition p. 294)

$$X^d R_{d[a} X_b Y_c] = 0 = Y^d R_{d[a} X_b Y_c] \quad (2.32)$$

Que implica inmediatamente que todos los espaciotiempos vacíos verifican esta condición al igual que los fluidos perfectos cuya velocidad u_a sea tangente a las órbitas, esto es: $\vec{u} = u^1 \partial_\phi + u^4 \partial_t$ (entonces se

verifica la llamada **condición de circularidad**: $u_{[a} X_b Y_{c]} = 0$), y también los campos electromagnéticos cuya 4-corriente j_a verifique también la condición de circularidad: $j_{[a} X_b Y_{c]} = 0$.

Volviendo a (2.30), podemos escoger $\vec{v} = \partial_\rho$ y \vec{w} tal que $w_a = (0, 0, 1, 0)$, (esto es: $w^a = g^{za}$), de este modo quedan garantizadas todas las condiciones de ortogonalidad. Notemos además que

$$X_a = g_{a\phi}, \quad Y_a = g_{at}$$

Las condiciones $X_{a;b} v^a w^b = 0$ etc. se reducen simplemente a

$$\Gamma_{\rho\phi}^z = \Gamma_{\rho t}^z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^{za} g_{a\phi,\rho} = g^{za} g_{at,\rho} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^{za}_{,\rho} g_{a\phi} = g^{za}_{,\rho} g_{at} = 0$$

donde la última expresión se deduce de la anterior sin más que tener en cuenta que $g^{za} g_{a\phi} = 0$, etc.

Esta última expresión se puede interpretar diciendo que el tri-vector de componentes $(g^{z\phi}_{,\rho}, g^{zz}_{,\rho}, g^{zt}_{,\rho})$ es ortogonal en \mathbb{R}^3 (i.e.: con el producto interno cartesiano habitual en \mathbb{R}^3) a los dos trivectores $(g_{\phi\phi}, g_{z\phi}, g_{t\phi})$ y $(g_{\phi t}, g_{zt}, g_{tt})$, por lo tanto debe ser proporcional al 'producto vectorial' de estos dos últimos vectores, unos simples cálculos ponen de manifiesto que

$$g^{za}_{,\rho} = F(\rho, z) g^{za}$$

lo cual implica trivialmente

$$g^{za} = \Sigma(\rho, z) \tilde{g}^{za}(z)$$

una última transformación $\phi' = \phi + A(z)$, $t' = t + B(z)$ manteniendo $z' = z$ y $\rho' = \rho$, muestra que es posible finalmente anular las funciones $g^{\phi'z'}$ y $g^{t'z'}$ y la métrica queda finalmente en la forma:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2 \bar{g}_{\phi\phi} & 0 & 0 & \rho^2 \bar{g}_{\phi t} \\ 0 & \bar{g}_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{g}_{\rho\rho} & 0 \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi t} & 0 & 0 & \bar{g}_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

que es precisamente la correspondiente a la métrica de Lewis-Papapetrou, donde además tenemos en todo momento información de cómo tienden a cero los distintos coeficientes de la métrica y la coordenada ρ mantiene, a pesar de todas las transformaciones el significado de la coordenada polar del mismo nombre, en las cercanías del eje de simetría.

El elemento de línea de Lewis-Papapetrou acostumbra a escribirse como:

$$ds^2 = e^{-2U} [e^{2k} (d\rho^2 + dz^2) + W^2 d\phi^2] - e^{2U} (dt + Ad\phi)^2 \quad (2.34)$$

donde A, U, k son funciones de ρ, z , además la función W se puede transformar a $W = \rho$ mediante una transformación que involucra las coordenadas ρ y z , las coordenadas resultantes acostumbran a llamarse **coordenadas canónicas de Weyl**.

Cabe resaltar que con el método aquí expuesto, obtenemos no sólo la métrica de Lewis-Papapetrou, sino también importante información sobre los coeficientes de ésta.

2.4. Un modelo simple de fluido.

El propósito de esta sección es construir un modelo simple de fluido utilizando la forma shift-free de la métrica que vimos en (2.19) e imponiendo algunas restricciones simples:

1. Las funciones \bar{g}_{ab} no dependen de ρ . Esto permite en particular poner $\bar{g}_{tt} = -1$ sin pérdida de generalidad.
2. El espaciotiempo presenta la simetría discreta $z \mapsto -z$ (reflexión a través del plano ecuatorial), esto implica $g_{\phi z} = g_{\rho z} = g_{tz} = 0$.

De las restricciones anteriores se sigue que la métrica tiene la forma:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2 \bar{g}_{\phi\phi} & \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & 0 & 0 \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & \bar{g}_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{g}_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

donde $\bar{g}_{ab} = \bar{g}_{ab}(z, t)$. Imponiendo que el tensor de Einstein de esta métrica sea de tipo fluido perfecto; i.e.:

$$G^a_b = (\rho + p)u^a u_b + p\delta^a_b$$

con $\rho \geq 0$ (densidad medida por el observador que se mueve con velocidad \vec{u} , $u^a u_a = -1$) y excluyendo el caso $\rho + p = 0$ (presión negativa e igual en módulo a la densidad) que lleva a un término en Λ , se tiene que como \vec{u} es no degenerado, debe ser invariante bajo el grupo de isometrías, esto es:

$$[\vec{X}, \vec{u}] = 0$$

Por lo tanto, el Teorema 4 implica que \vec{u} debe ser tangente al eje de simetría W_2 en puntos que están sobre él, lo cual implica a su vez que $u^\rho \stackrel{W_2}{=} u^\phi \stackrel{W_2}{=} 0$, y de la expresión del tensor de Einstein se tiene

$$G^\phi_\rho \stackrel{W_2}{=} G^z_\phi \stackrel{W_2}{=} G^z_t \stackrel{W_2}{=} G^\rho_\phi \stackrel{W_2}{=} G^z_\rho \stackrel{W_2}{=} G^z_t \stackrel{W_2}{=} 0 \quad (2.36)$$

Además, la simetría discreta $z \mapsto -z$ implica que $u^z = 0$ y de las ecuaciones de campo se tiene entonces

$$G^z_\phi = G^z_\rho = G^z_t = 0$$

Un cálculo directo de G^z_ϕ y G^z_ρ implica, a partir de la ecuación anterior

$$\bar{g}_{\phi\rho} = \alpha(t)\bar{g}_{\phi\phi}, \quad \bar{g}_{\rho\rho} = \beta(t)\bar{g}_{\phi\phi} \quad (2.37)$$

Substituyendo esto en las expresiones de G^z_t y G^z_ρ y teniendo en cuenta (2.36) se tiene

$$\alpha_{,t} = \beta_{,t} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

y entonces $G^\rho_\phi \stackrel{W_2}{=} G^\phi_\rho \stackrel{W_2}{=} 0$ se verifican idénticamente.

Poniendo ahora $\bar{g}_{\phi\phi} \equiv A$, $\bar{g}_{\phi\rho} \equiv B$, $\bar{g}_{\rho\rho} \equiv P$ y $\bar{g}_{zz} \equiv M$, se tiene que $G^z_t = 0$ implica:

$$\frac{A_{,tz}}{A} - \frac{1}{2} \frac{A_{,z}}{A} \frac{A_{,t}}{A} - \frac{1}{2} \frac{A_{,z}}{A} \frac{M_{,t}}{M} = 0$$

de donde se sigue

$$M = \frac{(A_{,z})^2}{A}$$

y una función arbitraria de z se ha puesto igual a 1 redefiniendo la coordenada z .

En este punto es inmediato ver que $\vec{u} = \partial_t$ (velocidad comóvil) y que $G_\phi^\phi = G_\rho^\rho$ se verifica idénticamente. Por otro lado $G_\phi^\phi = G_z^z$ implica inmediatamente $\alpha = 0$ y entonces $\beta = 1$ mediante una redefinición trivial de la coordenada radial. El elemento de línea es entonces:

$$ds^2 = A(z, t) \left[\rho^2 d\phi^2 + d\rho^2 + \left(\frac{A_{,z}}{A} \right)^2 dz^2 \right] - dt^2$$

donde la función $A(z, t)$ debe verificar:

$$\frac{1}{2} \frac{A_{,t}}{A} \left(\frac{A_{,tz}}{A_{,z}} - \frac{A_{,t}}{A} \right) + \frac{A_{,tt}}{A} - \frac{A_{,ttz}}{A} - \frac{1}{4A} = 0$$

La densidad de energía y la presión verifican entonces:

$$\rho = -\frac{1}{4A} - \frac{1}{4} \left(\frac{A_{,t}}{A} \right)^2 + \frac{A_{,t}}{A} \frac{A_{,tz}}{A_{,z}}, \quad p = \frac{1}{4A} + \frac{1}{4} \left(\frac{A_{,t}}{A} \right)^2 - \frac{A_{,tt}}{A}$$

Esta métrica admite tres KV: $\vec{X} = \partial_\phi$, $\vec{Y} = \sin \phi \partial_\rho + (1/\rho) \cos \phi \partial_\phi$ y $\vec{Z} = \cos \phi \partial_\rho - (1/\rho) \sin \phi \partial_\phi$ que actúan sobre órbitas dos dimensionales planas (superficies de t y z constantes) y es un caso particular de espaciotiempo 'warped'.

2.5. Coordenadas esféricas.

Recordemos por un momento la primera expresión de la métrica en coordenadas $x^a = (\phi, \rho, z, t)$, dada en (2.5), y antes de realizar cambios de coordenadas:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2(B + A \sin 2(\phi + M)) & \rho A \cos 2(\phi + M) & \rho D \sin(\phi + N) & \rho E \sin(\phi + S) \\ \rho A \cos 2(\phi + M) & B - A \sin 2(\phi + M) & D \cos(\phi + N) & E \cos(\phi + S) \\ \rho D \sin(\phi + N) & D \cos(\phi + N) & F & J \\ \rho E \sin(\phi + S) & E \cos(\phi + S) & J & H \end{bmatrix}$$

Como habíamos dicho, las coordenadas así definidas son lo más parecido posible a las coordenadas cilíndricas en \mathbb{R}^4 , y tienen su mismo (o muy similar) significado geométrico. Es posible ahora definir, en el mismo entorno U donde están definidas estas coordenadas, otras que llamaremos esféricas porque, nuevamente, son lo más semejante a las coordenadas esféricas en \mathbb{R}^4 , así tenemos:

$$\phi = \phi, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\rho}{z}, \quad t = t \quad (2.38)$$

Notemos que el KV axial sigue siendo $\vec{X} = \partial_\phi$, pero ahora el eje viene dado por los puntos $\sin \theta = 0$ (ya que $\rho = r \sin \theta$ y $z = r \cos \theta$), y las subvariedades N viene dadas t y $r \cos \theta$ constantes (i.e.: no son coordenadas adaptadas a estas subvariedades). Se puede escribir la métrica en estas coordenadas sin más que efectuar el cambio definido, aunque aquí no lo haremos en el caso más general.

Estas coordenadas se utilizan para estudiar lo que ocurre en regiones asintóticamente lejanas al eje; en particular la **métrica de Bondi** corresponde a unas coordenadas de este tipo (pero con la coordenada radial redefinida de modo que es nula, i.e.: $g_{rr} = 0$) y el KV axial es ortogonal a una hipersuperficie. Esta métrica se usa para analizar problemas relacionados con radiación gravitatoria.

También se usan para estudiar espaciotiempos que no son esféricamente simétricos pero se acercan mucho a esta simetría.

Una subfamilia muy importante de éstos (y que incluye de modo natural los espaciotiempos esféricamente simétricos) es la de los espaciotiempos axialmente simétricos y *warped de clase B_T*.

La condición necesaria y suficiente para que un espaciotiempo sea de este tipo es que existan dos vectores nulos \vec{l}, \vec{n} , tales que $l^a n_a = +1$ y que sus derivadas covariantes se puedan escribir

$$l_{a;b} = \beta l_a l_b - \psi_{,a} l_b + (l^c \psi_{,c}) g_{ab} \quad (2.39)$$

$$l_{a;b} = -\beta n_a l_b - \psi_{,a} n_b + (n^c \psi_{,c}) g_{ab} \quad (2.40)$$

donde ψ es una función cuyo gradiente verifica $\psi_{[a} l_b n_c] = 0$.

Para el caso en que \vec{l}, \vec{n} estén en el plano generado por ∂_t y ∂_r , las condiciones anteriores implican (de nuevo el cálculo es algo largo e involucra algunos cambios relativamente obvios de las coordenadas) que el elemento de línea se puede escribir como

$$ds^2 = -A^2(t, r) dt^2 + B^2(t, r) dr^2 + e^{2\psi(t, r)} f(\theta)^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (2.41)$$

donde claramente, todas las métricas con simetría esférica están incluidas: $f^2(\theta) = 1$. Además, si $\psi_{,a} \psi^{,a} > 0$ entonces en esa región se puede hacer otro cambio de coordenadas y poner, sin pérdida de generalidad: $\exp 2\psi(t, r) = r^2$.

Ello permite estudiar métricas que no son esféricamente simétricas pero se apartan poco de dicha simetría.

Capítulo 3

Espaciotiempos Warped.

3.1. Introducción y primeras propiedades.

Dadas dos variedades con métrica (M_1, h_1) y (M_2, h_2) y una función real diferenciable $\theta : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$, (**factor de warping**), construimos una nueva variedad métrica (M, g) con $M = M_1 \times M_2$ y

$$g = \pi_1^* h_1 \otimes e^{2\theta} \pi_2^* h_2, \quad (3.1)$$

donde π_1, π_2 son las proyecciones canónicas sobre M_1 y M_2 respectivamente. Esta estructura se llama *variedad con producto warped*, y en el caso en que (M, g) es un espaciotiempo (i.e.: $\dim M = 4$ y g una métrica tipo Lorentz) lo llamaremos simplemente **espaciotiempo warped**. Uno de los ejemplos más simples de espaciotiempo warped es el universo de Friedman-Robinson-Walker; pero este tipo de estructura contiene una gran cantidad de espaciotiempos de interés en Relatividad General: las soluciones de Bertotti-Robinson, Robertson-Walker, Schwarzschild, Reissner-Nordstrom, de Sitter, etc. Asimismo, estos espaciotiempos se pueden ver, en un cierto sentido, como generalizaciones de los espaciotiempos descomponibles.

La importancia de los espaciotiempos warped es que su geometría y, como veremos, también su física, está directamente relacionada con las propiedades de sus subvariedades factor M_1, M_2 de dimensión menor y que son, en general, más fáciles de estudiar. Se tiene así un método útil para estudiar grandes familias de espaciotiempos. Si el factor de warping es constante, el espaciotiempo es descomponible, tal es el caso de la solución de Bertotti-Robinson o el universo estático de Einstein. Si el factor de warping no es constante, encontraremos grandes familias de espaciotiempos: por ejemplo todos que son esféricamente, plano o hiperbólicamente simétricos, todos los estáticos, y muchos más de interés en astrofísica y en cosmología.

3.1.1. Espaciotiempos warped y descomponibles.

Partiendo de la expresión (3.1) para la métrica del espaciotiempo, simplificaremos la notación y prescindiremos de las proyecciones canónicas π_1, π_2 y escribiremos simplemente

$$g = h_1 \otimes e^{2\theta} h_2. \quad (3.2)$$

donde θ es una función definida sólo sobre M_1 . Notemos que siempre podemos reescribir la expresión anterior como:

$$g = e^{2\theta} (e^{-2\theta} h_1 \otimes h_2) \equiv e^{2\theta} (h'_1 \otimes h_2) \quad (3.3)$$

donde $h'_1 = e^{-2\theta} h_1$ es también una métrica sobre M_1 ; así pues, la métrica de una variedad warped está siempre conformemente relacionada con la de una variedad descomponible.

En nuestro caso $\dim M_1 + \dim M_2 = 4$ y g tiene signatura de Lorentz; esto es: una de las variedades (M_i, h_i) es Lorentz y la otra Riemann. Si se tiene $\dim M_1 = 1$ o $\dim M_2 = 1$, el espaciotiempo se llama **warped de clase A**, mientras que si $\dim M_1 = \dim M_2 = 2$ se llama **warped de clase B**, que es la clase en que estaremos interesados.

Los espaciotiempos warped de clase A se pueden caracterizar mediante la existencia de un vector conforme de Killing (CKV) \hat{u} , que es no nulo, que no se anula en ningún punto, que es ortogonal a una hipersuperficie, entonces $\vec{u} \equiv e^{-\theta} \hat{u}$ con $e^\theta \equiv \sqrt{|\hat{u}^\alpha u_\alpha|}$ es necesariamente unitario y sin distorsión ('shearfree'). Si la expansión $u^a{}_{;a} \equiv \Theta = 0$ entonces el espaciotiempo es warped y la función de warping θ es una función sobre la subvariedad de dimensión 3 (clase A2), si la aceleración $\dot{u}_a \equiv u_{a;b} u^b = 0$ entonces es warped y la función de warping es una función sobre la subvariedad de dimensión 1 (clase A1). Si $\Theta \neq 0, \dot{u}_a \neq 0$ entonces el espaciotiempo no es warped de clase A pero está conformemente relacionado con uno que es 1+3 descomponible.

Los de clase B, mediante la existencia de dos vectores nulos \vec{l}, \vec{n} , tales que $l^a n_a = +1$ tal que sus derivadas covariantes se puedan escribir

$$l_{a;b} = \beta l_a l_b - \theta_{,ab} + (l^c \theta_{,c}) g_{ab} \quad (3.4)$$

$$l_{a;b} = -\beta n_a l_b - \theta_{,anb} + (n^c \theta_{,c}) g_{ab} \quad (3.5)$$

donde la función de warping θ es tal que su gradiente debe verificar una de las dos condiciones siguientes

$$(l_a n_b + n_a l_b) \theta^{,b} = 0, \quad \text{o bien} \quad (g_{ab} - l_a n_b - n_a l_b) \theta^{,b} = 0.$$

Si estas últimas condiciones no se cumplen, el espaciotiempo no es warped, pero está conformemente relacionado a un espaciotiempo descomponible 2+2.

Véase J. Carot y J. da Costa, *Class. Quantum Grav.*, **10** 461 (1993) y también B. Haddow y J. Carot, *Class. Quantum Grav.* **13** 289 (1996) para más detalles.

La clase B se subdivide en cuatro casos más según sea el gradiente del factor de warping: B_T si es no nulo y tangente a la subvariedad tipo Lorentz, B_R si es nulo (y por tanto también tangente a la subvariedad tipo Lorentz), B_S si tangente a la subvariedad tipo Riemann, y B_P si es cero, i.e.: $\theta = \text{constante}$ que corresponde al caso en que (M, g) es localmente descomponible.

De todas las posibilidades anteriores sólo nos interesará el caso B_T . Así y sin pérdida de generalidad, supondremos que (M_1, h_1) es Lorentz (coordenadas $x^A = (x^0, x^1)$) y (M_2, h_2) Riemann (coordenadas $x^\alpha = (x^2, x^3)$); el factor de warping θ será entonces $\theta(x^0, x^1)$. Llamaremos y notaremos un sistema de coordenadas **adaptado** para el espaciotiempo M como $x^a = (x^A, x^\alpha)$ $a = 0, \dots, 3$ donde x^A y x^α son las definidas previamente. Siempre utilizaremos este tipo de cartas coordenadas, además y para aligerar la notación a veces emplearemos los siguientes nombres para las coordenadas: $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. En este punto vale la pena notar que todos los espaciotiempos que son esféricamente, plano o hiperbólicamente simétricos, son casos particulares de espaciotiempos warped de clase B_T .

En lo que sigue, escribiremos la métrica en la forma (3.3), y pondremos además $\exp \theta = \omega^{-1}$ por conveniencia; prescindiremos de las primas en (3.3) y de los subíndices 1 y 2 en las métricas de las subvariedades M_1 y M_2 cuando no haya riesgo de confusión, así el elemento de línea quedará:

$$ds^2 = \omega^{-2}(x^D) [h_{AB}(x^D) dx^A dx^B + h_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta] \quad (3.6)$$

i.e.

$$ds^2 \equiv \omega^{-2} d\hat{s}^2 \quad \Leftrightarrow \quad g_{ab} = \omega^{-2} \hat{g}_{ab} \quad (3.7)$$

donde \hat{g} es la métrica descomponible con la cual está relacionado y cuyo elemento de línea es

$$d\hat{s}^2 = h_{AB}(x^D) dx^A dx^B + h_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.8)$$

Dado que h_{AB} y $h_{\alpha\beta}$ son dos 2-métricas, se pueden escoger siempre las coordenadas x^A y x^α de modo que ambas tomen formas diagonales (e incluso explícitamente conformemente planas); así y para fijar aún más la notación, a menudo utilizaremos la siguiente forma de la métrica en nuestros cálculos:

$$ds^2 = \omega^{-2}(x^D) \left[-A^2(t, x) dt^2 + B^2(t, x) dx^2 e^{2Q(y, z)} (dy^2 + dz^2) \right] \quad (3.9)$$

Notaremos la derivada covariante con respecto a g mediante un punto y coma (o también ∇), y la asociada a \hat{g} mediante una barra inclinada (o alternativamente $\hat{\nabla}$); del mismo modo, los tensores definidos en (M, \hat{g}) o referidos a \hat{g} se notarán mediante ‘ $\hat{}$ ’.

3.1.2. Observadores adaptados y tetradas.

Otra cuestión importante es la relacionada con los observadores (congruencias curvas tipo tiempo) en estos espaciotiempos. Un campo vectorial temporal unitario y dirigido hacia el futuro \hat{v} se llamará **observador adaptado** en (M, \hat{g}) si es ortogonal a una hipersuperficie y tangente a M_1 . Estos requisitos equivalen a decir que, en un sistema de coordenadas adaptado, sus componentes son $\hat{v}^a = (\hat{v}^0(x^D), \hat{v}^1(x^D), 0, 0)$. Es fácil ver que tales observadores existen siempre y que siempre es posible escoger las coordenadas x^D de modo que $\hat{v}^1 = 0$ mientras que la métrica preserva su forma diagonal (i.e.: comóvil). Construiremos una **tetrada adaptada** en (M, \hat{g}) escogiendo un campo vectorial unitario y de tipo espacio \hat{p} tangente a M_1 y ortogonal a \hat{v} ; i.e.: $\hat{p}^a = (\hat{p}^0(x^D), \hat{p}^1(x^D), 0, 0)$, y otros dos campos espaciales unitarios, \hat{y} , \hat{z} , también ortogonales a una hipersuperficie, tangentes a M_2 y mutuamente ortogonales $y^a z_a = 0$ (así en una carta adaptada: $\hat{y}^a = (0, 0, \hat{y}^2(x^\gamma), \hat{y}^3(x^\gamma))$, y expresiones parecidas para \hat{z}^a , notemos también que $v^a y_a = \dots = p^a z_a = 0$). En términos de esta tetrada adaptada se tiene:

$$h_{AB} = -\hat{v}_A \hat{v}_B + \hat{p}_A \hat{p}_B, \quad h_{\alpha\beta} = \hat{y}_\alpha \hat{y}_\beta + \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta. \quad (3.10)$$

y un cálculo trivial muestra que

$$\hat{v}_{A/B} = -a \hat{p}_A \hat{v}_B + \vartheta \hat{p}_A \hat{p}_B, \quad \hat{v}_{\alpha/\beta} = 0 \quad (3.11)$$

$$\hat{p}_{A/B} = -a \hat{v}_A \hat{v}_B + \vartheta \hat{v}_A \hat{p}_B, \quad \hat{p}_{\alpha/\beta} = 0 \quad (3.12)$$

Notemos que ϑ y a son respectivamente, la expansión y la aceleración de \hat{v} en (M, \hat{g}) . Utilizando estas expresiones, el shear asociado a \hat{v} resulta ser (recordemos que $\hat{\omega}_{ab} = 0$):

$$\hat{\sigma}_{ab} = \vartheta \left(\hat{p}_a \hat{p}_b - \frac{1}{3} \hat{h}_{ab} \right), \quad \text{with } \hat{h}_{ab} \equiv \hat{g}_{ab} + \hat{v}_a \hat{v}_b, \quad (3.13)$$

A continuación definimos un **observador adaptado** en (M, g) , \vec{v} como $\vec{v} = \omega \hat{v}$, donde \hat{v} es un observador adaptado cualquiera en el espaciotiempo descomponible (M, \hat{g}) como los definidos más arriba. Notemos que \vec{v} es también ortogonal a una hipersuperficie y tangente a M_1 , sus componentes, en una carta adaptada cualquiera serán funciones de las coordenadas x^D únicamente. Construimos el resto de

la **tetrada adaptada** en (M, g) simplemente como $\vec{p} = \omega \hat{p}$, $\vec{y} = \omega \hat{y}$, y $\vec{z} = \omega \hat{z}$, donde los vectores con sombrero forman una tetrada adaptada en (M, \hat{g}) . En términos de una tetrada adaptada:

$$g_{AB} = -v_A v_B + p_A p_B, \quad g_{\alpha\beta} = y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta. \quad (3.14)$$

En cuanto al shear y vorticidad de \vec{v} se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ab} &= \omega^{-1} \hat{\sigma}_{ab} = \omega \vartheta \left(p_a p_b - \frac{1}{3} h_{ab} \right) \\ h_{ab} &\equiv g_{ab} + v_a v_b, \\ \omega_{ab} &= \omega^{-1} \hat{\omega}_{ab} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Desde un punto de vista geométrico, observadores adaptados y tetradas, parecen muy naturales en los espaciotiempos warped y en los descomponibles relacionados con ellos. Como veremos, también aparecen de un modo muy natural en base a consideraciones de carácter puramente físico.

Notemos que existen observadores que, aun siendo tangentes a M_1 no son ortogonales a una hipersuperficie, e.g.: en las coordenadas introducidas en (3.9), consideremos

$$\hat{u} = f \partial_t + B^{-1} [A^2 f^2 - 1]^{1/2} \partial_x \quad (3.16)$$

donde $f = f(x^D, x^\gamma)$ depende de las cuatro coordenadas, es inmediato comprobar que este vector tiene vorticidad diferente de cero (sus componentes dependen de coordenadas en M_1 y M_2 cualquier carta adaptada). Volveremos a esto más tarde, pero como ya apuntamos, estos observadores son de algún modo poco naturales desde un punto de vista físico.

3.1.3. Tensor de Einstein y Espaciotiempos warped.

La geometría del espaciotiempo descomponible (M, \hat{g}) impone ciertas restricciones que serán importantes para nosotros en el estudio de la hidrodinámica en espaciotiempos warped de esta clase y que tienen que ver con la aparición de manera natural de las tetradas y observadores adaptados que discutimos antes.

Con la notación y convenciones establecidas, resulta que el tensor de Tensor de Einstein en (M, g) se puede escribir como

$$G_{ab} = \hat{G}_{ab} + 2\omega^{-1} \omega_{a/b} - 2\omega^{-1} \hat{g}^{cd} \left(\omega_{c/d} - \frac{3}{2} \omega^{-1} \omega_c \omega_d \right) \hat{g}_{ab}. \quad (3.17)$$

Notemos que \hat{R}_{ab} es tal que

$$\hat{R}_{AB} = \frac{1}{2} R_1 h_{AB}, \quad \hat{R}_{A\alpha} = 0, \quad \hat{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R_2 h_{\alpha\beta}, \quad (3.18)$$

donde R_1 y R_2 son los escalares de Ricci asociados con las 2-métricas h_{AB} y $h_{\alpha\beta}$ respectivamente. El escalar de Ricci \hat{R} es $\hat{R} = R_1 + R_2$, y de aquí

$$\left. \begin{aligned} \hat{G}_{AB} &= -\frac{1}{2} R_2 h_{AB}, \\ \hat{G}_{A\beta} &= 0, \\ \hat{G}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} R_1 h_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Además

$$\omega_{A/\alpha} = \omega_{\alpha/A} = 0, \quad \omega_{\alpha/\beta} = 0, \quad (3.20)$$

y teniendo en cuenta (3.17), se sigue que G_{ab} tiene forma diagonal por cajas:

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} G_{AB} & 0 \\ 0 & G_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

con

$$\left. \begin{aligned} G_{AB} &= -\frac{1}{2}R_2(x^\gamma)h_{AB} + S_{AB}(x^D) \\ G_{A\beta} &= 0 \\ G_{\alpha\beta} &= L(x^D)h_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

donde S_{AB} (y por lo tanto G_{AB}) es no-diagonal en el caso general.

En este punto, resulta interesante darse cuenta que de la forma de \hat{G}_{ab} , se sigue que cualquier campo vectorial \vec{X} tangente a M_1 que sea un autovector de G_{ab} (o equivalentemente de R_{ab}) será automáticamente un autovector de $\omega_{a/b}$ y viceversa; y que cualquier campo vectorial \vec{Y} tangente a M_2 que es un autovector de G_{ab} (o equivalentemente de R_{ab}) será también automáticamente un autovector de $\omega_{a/b}$ y viceversa; en la sección siguiente demostraremos que todos los autovectores del tensor de Einstein son necesariamente tangentes a M_1 o a M_2 , tal y como sugiere la estructura por bloques de G_{ab} .

Notemos también que casi todas las propiedades físicas del espaciotiempo que estamos considerando están de algún modo codificadas en el factor de warping ω , puesto que la contribución al tensor de impulso-energía $T_{ab} = G_{ab}$ del espaciotiempo descomponible subyacente, consiste en un simple corrimiento en los autovalores.

3.2. Contenido material de los espaciotiempos warped B_T .

Dedicaremos esta sección al estudio de los tipos algebraicos permitidos para el tensor de Einstein, lo cual, a través de las ecuaciones de campo proporcionará información sobre los contenidos materiales permitidos para estos espaciotiempos.

3.2.1. Observadores y contenido material.

Dado un tensor simétrico de segundo orden como el tensor de energía-momento T_{ab} en un espaciotiempo arbitrario (M, g) , y dado un campo vectorial unitario y tipo tiempo cualquiera \vec{v} (que supondremos orientado hacia el futuro) definido sobre M , se puede siempre descomponer T_{ab} como sigue

$$T_{ab} = \tilde{\rho}v_a v_b + Ph_{ab} + \Pi_{ab} + v_a \mathcal{F}_b + \mathcal{F}_a v_b, \quad (3.23)$$

donde h_{ab} es el proyector ortogonal a \vec{v} , esto es: $h_{ab} = g_{ab} + v_a v_b$, y el resto de las magnitudes que aparecen en la expresión anterior son:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\rho} &= T_{ab}v^a v^b, & P &= \frac{1}{3}h^{ab}T_{ab} \\ \mathcal{F}_a &= -h_a^c T_{cd}v^d, \\ \Pi_{ab} &= h_a^c h_b^d (T_{cd} - P g_{cd}). \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Si T_{ab} representa el contenido material del espaciotiempo y \vec{v} es la 4-velocidad de algún observador, entonces $\tilde{\rho}$ es la densidad de energía medida por dicho observador, P es la llamada presión isotrópica (medida por ese observador), y \mathcal{F}^a y Π_{ab} son, respectivamente, el **flujo de momento** y the **tensor de presiones anisotrópicas** que mide el observador \vec{v} . Notemos que

$$\mathcal{F}^a v_a = g^{ab} \Pi_{ab} = \Pi_{ab} v^b = 0. \quad (3.25)$$

Recordando ahora (3.21), se tiene que en el caso de los B_T warped espaciotiempos warped B_T y trabajando en una carta adaptada cualquiera, el tensor de Einstein tiene aquella estructura diagonal por cajas. Una inspección directa de la dependencia funcional de las componentes de G_{ab} muestra que dada una tetraada adaptada a (M, g) cualquiera: $\vec{v}, \vec{p}, \vec{y}, \vec{z}$, el tensor de Einstein, o equivalentemente, el tensor de energía-momento T_{ab} , se pueden escribir como

$$G_{ab} = T_{ab} = \rho v_a v_b + \mathcal{F}(v_a p_b + p_a v_b) + P_1 p_a p_b + P_2 (y_a y_b + z_a z_b), \quad (3.26)$$

para ciertas funciones

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \omega^2 \left(\frac{1}{2} R_2(x^\gamma) + S_1(x^D) \right), \\ P_1 &= \omega^2 \left(-\frac{1}{2} R_2(x^\gamma) + S_3(x^D) \right), \\ \mathcal{F} &= \mathcal{F}(x^D) \quad \text{y} \quad P_2 = P_2(x^D) \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Además, si definimos el vector nulo $k_a = v_a + p_a$, la expresión anterior puede reescribirse como

$$G_{ab} = T_{ab} = \mathcal{F} k_a k_b + (\rho - \mathcal{F}) v_a v_b + (P_1 - \mathcal{F}) p_a p_b + P_2 (y_a y_b + z_a z_b). \quad (3.28)$$

Físicamente, esto se puede interpretar diciendo que el contenido material de este espaciotiempo se puede representar siempre como un fluido anisotrópico de 4-velocidad \vec{v} (comóvil con un observador adaptado), densidad ρ , presiones P_1 y P_2 , y flujo de momento $\mathcal{F} p_a$ (ecuación (3.26)); o también (ecuación (3.28)) como la suma de un fluido anisotrópico con la misma 4-velocidad \vec{v} , densidad $\rho - \mathcal{F}$, presiones $P_\perp = P_1 - \mathcal{F}$ y P_2 , más un campo de radiación nula dirigido a lo largo de \vec{k} y que transporta una densidad de energía \mathcal{F} . Esta partición del tensor energía-momento (especialmente la última (3.28)) ha sido extensamente usada en el contexto de la simetría esférica (véase L. Herrera, A. Di Prisco, J. Martín, J. Ospino, N.O. Santos, y O. Troconis, *Phys Rev D* **69** 084026 (2004), también <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0403006> y las referencias que allí se citan).

Es interesante darse cuenta que las descomposiciones anteriores son altamente no-únicas en el sentido que G_{ab} o T_{ab} se pueden descomponer del mismo modo para todos los observadores v'^a cuyas líneas-universo sean tangentes a M_1 (tanto si son adaptados, i.e.: \vec{v} ortogonales a una hipersuperficie, como si no lo son), esto es, cuya 4-velocidad sea $v'^a = \cosh \phi v^a + \sinh \phi p^a$ para una función arbitraria $\phi(x^D, x^\gamma)$, entonces $p'^a = \sinh \phi v^a + \cosh \phi p^a$ y también $k'^a = v'^a + p'^a$. Si ϕ depende de x^γ (i.e.: el observador \vec{v}' es no-adaptado) la densidad correspondiente ρ' , presiones P'_1, P'_2 , etc. no tendrán la forma funcional dada en (3.27), pero si $\phi = \phi(x^D)$ el observador y la tetraada resultantes son también adaptados y entonces (3.27) se verifica para las cantidades con prima ρ' , etc.

3.2.2. El tensor de presiones anisotrópicas y el tensor de shear.

Escribiendo G_{ab} en las ecuaciones (3.26, 3.28) en la forma de la ecuación (3.23) y utilizando el observador adaptado \vec{v} para llevar a cabo la descomposición, se tiene:

$$T_{ab} = \tilde{\rho} v_a v_b + P h_{ab} + \Pi_{ab} + v_a \mathcal{F}_b + \mathcal{F}_a v_b \quad (3.29)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho, & P &= \frac{1}{3}(P_1 + 2P_2), \\ \mathcal{F}_a &= \mathcal{F}p_a, & h_{ab} &= p_ap_b + y_ay_b + z_az_b, \\ \Pi_{ab} &= \frac{1}{3}(P_1 - P_2)(2p_ap_b - y_ay_b - z_az_b) \\ \circ \Pi_{ab} &\equiv \Pi(p_ap_b - \frac{1}{3}h_{ab}) \\ \text{con } \Pi &= P_1 - P_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

De (3.15) y la expresión de Π_{ab} dada más arriba, es inmediato ver que el tensor de shear σ_{ab} de \vec{v} es proporcional al tensor de presiones anisotrópicas Π_{ab} , cuandoquiera que ambos tensores son distintos de cero

$$\Pi_{ab} = \lambda \sigma_{ab}, \quad \text{con } \lambda = \Pi^{-1} \omega \vartheta. \quad (3.31)$$

Si $\lambda < 0$, se puede interpretar como un coeficiente de viscosidad de shear: $\lambda = -2\eta$, $\eta > 0$ siendo el llamado **coeficiente de viscosidad cinemática**, y la viscosidad puede verse como la fuente de la anisotropía en las presiones.

Para cualquier otro observador adaptado \vec{v}' , con

$$v'^a = \cosh \phi v^a + \sinh \phi p^a, \quad p'^a = \sinh \phi v^a + \cosh \phi p^a$$

donde $\phi = \phi(x^D)$ se obtienen expresiones similares a las anteriores:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}' &= \rho \cosh^2 \phi - 2\mathcal{F} \sinh \phi \cosh \phi + P_1 \sinh^2 \phi, \\ P' &= \frac{1}{3}(P'_1 + 2P'_2), \\ P'_1 &= \rho \sinh^2 \phi - 2\mathcal{F} \sinh \phi \cosh \phi + P_1 \cosh^2 \phi, \\ P'_2 &= P_2, \quad \mathcal{F}'_a = \mathcal{F}'p'_a, \\ \mathcal{F}' &= \mathcal{F} \cosh 2\phi - \frac{1}{2}(\rho + P_1) \sinh 2\phi, \\ h'_{ab} &= p'_ap'_b + y_ay_b + z_az_b, \\ \Pi_{ab} &= \Pi' \left(p'_ap'_b - \frac{1}{3}h_{ab} \right), \quad \Pi' = P'_1 - P'_2, \end{aligned}$$

donde las magnitudes con prima son las que mide el observador \vec{v}' . Notemos que aquí también se tiene $\Pi'_{ab} = \lambda' \sigma'_{ab}$; así, para todos los observadores adaptados el tensor de presiones anisotrópicas es proporcional a su tensor de shear.

Esta proporcionalidad se 'remonta' al espaciotiempo descomponible (M, \hat{g}) ; para verlo consideremos la tetraada adaptada y observador adaptado en (M, \hat{g}) que están conformemente relacionados a aquéllos en (M, g) ; i.e.: $\hat{v} = \omega^{-1} \vec{v}, \dots, \hat{z} = \omega^{-1} \vec{z}$ (véase la sección anterior); de (3.19) tenemos

$$\left. \begin{aligned} \hat{G}_{AB} &= -\frac{1}{2}R_2(-\hat{v}_A \hat{v}_B + \hat{p}_A \hat{p}_B), \\ \hat{G}_{A\beta} &= 0 \\ \hat{G}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}R_1(\hat{y}_\alpha \hat{y}_\beta + \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta) \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

que también puede descomponerse con respecto al observador \hat{v} como en (3.23) y así

$$\hat{G}_{ab} = \hat{T}_{ab} = \hat{\rho} \hat{v}_a \hat{v}_b + \hat{P} \hat{h}_{ab} + \hat{\Pi}_{ab} + \hat{\mathcal{F}}_a \hat{v}_b + \hat{v}_a \hat{\mathcal{F}}_b, \quad (3.33)$$

con

$$\left. \begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{2}R_2, & \hat{P} &= \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}R_2 + R_1) \\ \hat{\mathcal{F}}_a &= 0, & \hat{\Pi}_{ab} &= \hat{\Pi}(\hat{p}_A\hat{p}_B - \frac{1}{3}\hat{h}_{ab}) \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

donde $\hat{\Pi} = \frac{1}{2}(R_1 - R_2)$. De la expresión para $\hat{\Pi}_{ab}$ y (3.13) tenemos $\hat{\Pi}_{ab} = \hat{\lambda}\hat{\sigma}_{ab}$, y recordando que $\sigma_{ab} = \omega\hat{\sigma}_{ab}$ y $\Pi_{ab} = \lambda\sigma_{ab}$, concluimos finalmente

$$\Pi_{ab} \propto \hat{\Pi}_{ab}. \quad (3.35)$$

La verdadera ecuación de estado que describe las propiedades de la materia a densidades superiores a la nuclear ($\approx 10^{14} \text{ gr/cm}^3$) es esencialmente desconocida debido a nuestra incapacidad para verificar la microfísica de la materia nuclear a tan altas densidades. Teniendo presente esta incertidumbre, parece razonable explorar algunas ecuaciones de estado para la anisotropía local comenzando con un objeto geométrico simple como el tensor de shear σ_{ab} . La proporcionalidad entre el tensor de presiones anitrópicas y el de shear abre la posibilidad de diseñar de algún modo tales ecuaciones de estado.

Ni que decir tiene, un espaciotiempo descomponible de estas características no representa por si mismo ningún tipo razonable de materia (nótese que $\hat{\rho} + \hat{P}_1 = 0$), sin embargo, es interesante darse cuenta de como la estructura descomponible 'genera' de algún modo anisotropía en las presiones en el físicamente realista espaciotiempo warped. Ello contrasta con el factor de warping ω , que contribuye a lo que uno podría llamar a grandes rasgos la 'física isotrópica' a saber: la densidad de energía ρ y la presión isotrópica P .

3.2.3. Estructura de Autovectores y condiciones de energía.

Veamos ahora como la geometría asumida impone ciertas restricciones sobre el contenido material, y como se manifiesta esto en la estructura algebraica (autovector/autovalor) del tensor de Einstein.

Notemos que los autovectores del tensor de Einstein G_{ab} son los mismos que los del tensor de Ricci R_{ab} , y sus correspondientes autovalores están 'corridos' una cantidad $-\frac{1}{2}R$, donde R es el escalar de Ricci asociado con g , además, a partir de la forma de \hat{G}_{ab} y de la ecuación (3.17), se tiene que estos autovectores coinciden con los del tensor $\omega_{a/b}$.

Así, los tres tensores G_{ab} , R_{ab} y $\omega_{a/b}$ todos tiene el mismo tipo de Segre con los mismos autovectores. Por conveniencia trabajaremos con el tensor de Ricci en una carta adaptada, así:

$$R^a_b = \begin{pmatrix} R^A_B & 0 \\ 0 & R^\alpha_\beta \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

con

$$R^A_B = R^A_B(x^D) \quad \text{y} \quad R^\alpha_\beta = f(x^D, x^\gamma)\delta^\alpha_\beta.$$

The polinomio característico de R^a_b es entonces

$$p(x) = \det [R^a_b - x\delta^a_b] \quad \Rightarrow$$

$$p(x) = \det (R^A_B(x^D) - x\delta^A_B) (x - f(x^D, x^\gamma))^2 \quad (3.37)$$

y por tanto hay un autovalor repetido $x = f$ que corresponde a dos autovectores tipo espacio tangentes a M_2 que se pueden escoger unitarios y mutuamente ortogonales, pongamos \vec{y} y \vec{z} ; entonces tenemos

en una carta adaptada: $y^a = (0, 0, y^2, y^3)$ y $z^a = (0, 0, z^2, z^3)$ (además: en una carta en la cual h_2 es diagonal $y^a = (0, 0, y^2, 0)$ y $z^a = (0, 0, 0, z^3)$). El resto de autovalores son las raíces del polinomio de segundo grado

$$q(x) = \det(R_B^A(x^D) - x\delta_B^A) = x^2 - t_R x + d_R, \quad (3.38)$$

donde $t_R = R_0^0 + R_1^1$ es la traza de la matriz (R_B^A) y d_R su determinante. Se tienen entonces las tres posibilidades siguientes:

El polinomio $q(x)$ tiene dos raíces reales.

Si $q(x)$ tiene dos raíces reales, digamos λ_1 y λ_2 , ambas serán funciones sobre M_1 (i.e.: funciones de las coordenadas x^D) ya que R_B^A son también funciones sobre M_1 . La condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es

$$t_R^2 - 4d_R > 0, \quad (3.39)$$

o, de acuerdo con nuestras consideraciones previas sobre la estructura de autovalores/autovectores de R_B^A y $\omega_{/B}^A$, que

$$t_\omega^2 - 4d_\omega > 0, \quad (3.40)$$

con

$$t_\omega = \text{trace}(\omega_{/B}^A) \quad \text{and} \quad d_\omega = \det(\omega_{/B}^A),$$

una expresión que involucra tan sólo derivadas covariantes de la función ω tomadas con respecto a la métrica descomponible. Este caso corresponde a R_B^A del tipo diagonal de Segre $\{1, 1\}$ o equivalentemente a la existencia de dos autovectores de R_B^A no nulos mutuamente ortogonales (y por lo tanto autovectores de R_b^a), digamos \vec{u} y \vec{n} que sepueden escoger unitarios, tipo tiempo y tipo espacio respectivamente, que son tangentes a M_1 y tales que, en la base del espacio tangente a M_1 formada por ellos (\vec{u}, \vec{n}) , la forma de Jordan de la matriz (R_B^A) es

$$R_B^A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

En las coordenadas adaptadas que consideramos, estos dos autovectores son parte de una tetraada adaptada (i.e.: $u^a = (u^0, u^1, 0, 0)$ y $n^a = (n^0, n^1, 0, 0)$ con $u^a = u^a(x^D)$, $n^a = n^a(x^D)$), y en particular \vec{u} corresponde a un observador adaptado.

De las condiciones $-u^a u_a = n^a n_a = 1$, $u^a n_a = 0$ es fácil ver que existe una función $\psi(x^D)$ tal que, en las coordenadas introducidas en (3.9)

$$\left. \begin{aligned} u^a &= (A^{-1} \cosh \psi, B^{-1} \sinh \psi, 0, 0), \\ n^a &= (A^{-1} \sinh \psi, B^{-1} \cosh \psi, 0, 0), \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

y existe un cambio de coordenadas en M_1 tal que $\psi = 0$ y la métrica mantiene su forma diagonal (i.e.: se puede escribir como en (3.9)). Este particular gauge de coordenadas se llama **comóvil**; en este punto sin embargo, no lo utilizaremos todavía.

El tensor de Ricci tensor y el tensor de Einstein, son entonces del tipo diagonal de Segre con una doble degeneración espacial $\{1, 1(11)\}$, es decir:

$$G_{ab} = \rho u_a u_b + p_1 n_a n_b + p_2 (y_a y_b + z_a z_b), \quad (3.43)$$

que equivale a decir que toma forma diagonal en la tetraada adaptada u_a, n_a, y_a, z_a . Las cantidades ρ, p_1, p_2 vienen dadas por:

$$\rho = \left(\frac{1}{2} R_2 + S \right) \omega^2 + 2\omega \omega_{A/B} \hat{u}^A \hat{u}^B, \quad (3.44)$$

$$p_1 = - \left(\frac{1}{2} R_2 + S \right) \omega^2 + 2\omega\omega_{A/B} \hat{n}^A \hat{n}^B, \quad (3.45)$$

$$p_2 = - \left(\frac{1}{2} R_1 + S \right) \omega^2, \quad (3.46)$$

donde $S \equiv \omega^{-1} h^{MN} (2\omega_{M/N} - 3\omega^{-1} \omega_M \omega_N)$, y $\hat{u}_a = \omega u_a$, $\hat{n}_a = \omega n_a$. En el gauge comóvil mencionado arriba, las componentes coordenadas del tensor de Einstein también forman una matriz diagonal (i.e.: $G_{tx} = \omega_{t/x}$, etc.), y $\hat{u}^a = (A^{-1}, 0, 0, 0)$, $\hat{n}^a = (0, B^{-1}, 0, 0)$. Las ecuaciones de campo implican entonces que el tensor de energía-momento T_{ab} tiene la misma forma. La condición dominante de energía se verifica si y sólo si $\rho \geq 0$ y $-\rho \leq p_i \leq \rho$ para $i = 1, 2$.

Físicamente, esto se puede interpretar diciendo que existe un observador adaptado, con 4-velocidad \vec{u} , que mide un flujo de momento cero, densidad de energía ρ y presiones p_1 en la dirección \vec{n} (que llamaremos dirección/presión **radial**), y p_2 en otra dirección espacial perpendicular a \vec{n} (direcciones/presiones **tangenciales**). El uso de los nombres ‘radial’ y ‘tangencial’ se justifica por lo que ocurre en los espaciotiempos esféricamente simétricos, donde la dirección \vec{n} es perpendicular a las órbitas (esferas) y puede identificarse con la dirección radial, y las otras direcciones espaciales perpendiculares a ella son necesariamente tangentes a las esferas.

Los flúidos perfectos están incluidos en esta clase y son precisamente aquéllos para los que $p_1 = p_2$. De las ecuaciones (3.91,3.92) es inmediato ver, en vista de la dependencia funcional de p_1 y p_2 , que una condición necesaria para que esto ocurra es que $R_2 = \text{constant}$. Así tenemos el resultado de que *Los espaciotiempos warped B_T de tipo flúido perfecto son necesariamente esféricamente, plano o hiperbólicamente simétricos.*

Si el contenido material viene descrito por (3.30) esto implica, nuevamente de acuerdo con nuestras consideraciones sobre la estructura de autovector/autovalor de G^a_b, R^a_b , etc., que

$$t_G^2 - 4d_G > 0, \quad (3.47)$$

con

$$t_G = \text{trace}(G^A_B), \quad \text{and} \quad d_G = \det(G^A_B),$$

o en términos de las magnitudes físicas introducidas en (3.30):

$$\left| \frac{2\mathcal{F}}{\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi} \right| < 1 \quad (3.48)$$

También se puede llegar a estos resultados a partir de (3.26) poniendo

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \cosh \phi u_a + \sinh \phi n_a \quad \text{and} \\ p_a &= \sinh \phi u_a + \cosh \phi n_a \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

e imponiendo entonces que ϕ sea tal que el término en T_{ab} que contiene $u_a n_b + n_a u_b$ sea cero. Existe pues un observador privilegiado que mide un flujo de momento igual a cero. Dicho observador se mueve con velocidad

$$\left. \begin{aligned} u^a &= \cosh \phi v^a + \sinh \phi p^a \quad \text{donde} \\ \tanh 2\phi &= - \frac{2\mathcal{F}}{\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

De los comentarios que siguen a la ecuación (3.26), se tiene que $\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi$ es una función de las coordenadas x^D , y también lo es \mathcal{F} , y entonces $\phi = \phi(x^D)$ que es la condición para que \vec{u} sea un observador adaptado.

Las cantidades $\tilde{\rho}$, P , Π y \mathcal{F} en (3.30) y ρ , p_1 y p_2 en (3.43) están relacionadas via:

$$\tilde{\rho} = \rho \cosh^2 \phi + p_1 \sinh^2 \phi,$$

$$P = \frac{1}{3} (\rho \sinh^2 \phi + p_1 \cosh^2 \phi + 2p_2),$$

$$\Pi = \rho \sinh^2 \phi + p_1 \cosh^2 \phi - p_2,$$

$$\mathcal{F} = (\rho + p_1) \sinh \phi \cosh \phi,$$

o equivalentemente

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi \right)^2 - 4\mathcal{F}^2} + \tilde{\rho} - P - \frac{2}{3}\Pi \right],$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi \right)^2 - 4\mathcal{F}^2} - \tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi \right],$$

$$p_2 = P - \frac{1}{3}\Pi,$$

y por lo tanto la condición dominante de energía se expresa en estas coordenadas (recordemos que en este caso se verifica (3.48)):

$$\begin{aligned} \rho &\geq 0 \\ &\Downarrow \\ \sqrt{\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi \right)^2 - 4\mathcal{F}^2} + \tilde{\rho} - \left(P + \frac{2}{3}\Pi \right) &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} -\rho &\leq p_1 \leq \rho \\ &\Downarrow \\ \tilde{\rho} - \left(P + \frac{2}{3}\Pi \right) &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} -\rho &\leq p_2 \leq \rho \\ &\Downarrow \\ \tilde{\rho} + P - \frac{4}{3}\Pi + \sqrt{\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi \right)^2 - 4\mathcal{F}^2} &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

y

$$\tilde{\rho} + \sqrt{\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi \right)^2 - 4\mathcal{F}^2} - 3P \geq 0 \quad (3.54)$$

con

$$\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi\right)^2 - 4\mathcal{F}^2 \geq 0 \quad (3.55)$$

La segunda desigualdad (3.52) implica la primera (3.51), por lo tanto sólo necesitamos tener en cuenta las cuatro últimas.

El polinomio $q(x)$ tiene una única raíz real.

Si $q(x)$ tiene una sola raíz real, entonces

$$t_R^2 - 4d_R = 0, \quad \text{or equivalentemente,} \quad t_\omega^2 - 4d_\omega = 0, \quad (3.56)$$

donde las definiciones son las mismas que en el caso anterior. El tensor de Ricci (Einstein, ω_b^a , etc.) tiene entonces un autovector nulo \vec{k} con autovalor (en el caso del tensor de Ricci) $-\sigma = \frac{1}{2}t_R$, y la forma de Jordan de la matriz (R_B^A) es

$$R_B^A = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 1 & -\sigma \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

El tensor G_{ab} es del tipo de Segre $\{2, (11)\}$ y por tanto existe una tetraada nula en la cual

$$G_{ab} = \sigma(k_a l_b + l_a k_b) + \lambda k_a k_b + p_2(y_a y_b + z_a z_b), \quad (3.58)$$

con $k_a k^a = l_a l^a = 0$ y $k_a l^a = -1$, y \vec{k}, \vec{l} se pueden escoger de modo que sus componentes sean funciones sobre M_1 (i.e.: dependen sólo de las coordenadas x^D). Las funciones σ, λ y p_2 viene dadas por:

$$\sigma = -\left(\frac{1}{2}R_2 + S\right)\omega^2 + 2\omega\omega_{A/B}\hat{k}^A\hat{l}^B, \quad (3.59)$$

$$\lambda = 2\omega\omega_{A/B}\hat{l}^A\hat{l}^B, \quad p_2 = -\left(\frac{1}{2}R_1 + S\right)\omega^2, \quad (3.60)$$

donde, como antes $S \equiv \omega^{-1}h^{MN}(2\omega_{M/N} - 3\omega^{-1}\omega_M\omega_N)$, and $\hat{k}_a = \omega k_a$, $\hat{l}_a = \omega l_a$. En este caso se tiene que $\omega_{A/B}\hat{k}^A\hat{k}^B = 0$, y es fácil ver que existen coordenadas $\{u, v, y, z\}$ tales que la métrica descomponible se puede escribir como

$$ds^2 = -2B^2(u, v)dudv + e^{2Q(y, z)}(dy^2 + dz^2), \quad (3.61)$$

de modo que $\hat{k}^a = (B^{-1}, 0, 0, 0)$, $\hat{l}^a = (0, B^{-1}, 0, 0)$. En este gauge, la ecuación $\omega_{A/B}\hat{k}^A\hat{k}^B = 0$ es simplemente $\omega_{u/u} = 0$, que se puede integrar una vez (redefiniendo la coordenada v de modo trivial) dando $\omega_u = B^2$.

Cualquier par \vec{u}, \vec{n} de vectores unitarios mutuamente ortogonales, de tipo tiempo y tipo espacio respectivamente, que estén contenidos en el 2-espacio generado por \vec{k} y \vec{l} serán de la forma

$$u_a = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(k_a + \frac{1}{a^2}l_a\right) \quad \text{and} \quad n_a = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(k_a - \frac{1}{a^2}l_a\right), \quad (3.62)$$

donde a es alguna función arbitraria; se sigue que G_{ab} se puede reescribir en términos de la tetraada $\vec{u}, \vec{n}, \vec{y}, \vec{z}$ como

$$G_{ab} = \left(\sigma + \frac{\lambda}{2a^2}\right)u_a u_b + \left(\frac{\lambda}{2a^2} - \sigma\right)n_a n_b + \frac{\lambda}{2a^2}(u_a n_b + n_a u_b) + p_2(y_a y_b + z_a z_b), \quad (3.63)$$

y la condición dominante de energía se verifica si y sólo si [?]

$$\sigma \geq 0, \quad \lambda > 0 \quad \text{y} \quad -\sigma \leq p_2 \leq \sigma. \quad (3.64)$$

Como antes, si el contenido material viene descrito por (3.26) esto implica

$$\sigma + \frac{\lambda}{2a^2} = \tilde{\rho}, \quad \frac{\lambda}{2a^2} - \sigma = P + \frac{2}{3}\Pi, \quad \frac{\lambda}{2a^2} = \mathcal{F}, \quad (3.65)$$

que a su vez implica

$$\left| \frac{2\mathcal{F}}{\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi} \right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi \right| = |2\mathcal{F}|. \quad (3.66)$$

En este caso, no existe ningún sistema de coordenadas tal que G_{ab} sea diagonal; o bien, puesto en lenguaje físico, todos los observadores físicos medirán siempre un flujo de momento \mathcal{F} distinto de cero, pero \mathcal{F} debe verificar la ecuación (3.66); además, the condición dominante de energía (3.64) se puede traducir como

$$\tilde{\rho} - \left(P + \frac{2}{3}\Pi \right) \geq 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{F} > 0. \quad (3.67)$$

De nuevo en este caso, notamos la proporcionalidad entre Π_{ab} y σ_{ab} .

El polinomio $q(x)$ tiene dos raíces complejas.

Si $q(x)$ admite dos raíces complejas deben ser necesariamente complejas conjugadas la una de la otra: z y \bar{z} . En este caso es bien conocido que the condición dominante de energía no se puede verificar nunca, de modo que si T_{ab} es de este tipo no puede representar materia físicamente aceptable. No consideraremos ya más este caso, pero notaremos que esto ocurre cuandoquiera que

$$\left| \frac{2\mathcal{F}}{\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi} \right| > 1. \quad (3.68)$$

3.2.4. Resumiendo algunos resultados.

Para cerrar esta sección reusmiremos brevemente algunos de los resultados obtenidos hasta aquí:

1. Los únicos casos compatibles con una geometría del tipo warped B_T que verifican la condición dominante de energía corresponden a que G_{ab} (o T_{ab}) sea de los tipos $\{1, 1(11)\}$ o $\{2, (11)\}$ (o una degeneración de éstos). En ambos casos, el contenido material del espaciotiempo puede ser interpretado (por cualquier observador adaptado) bien como un fluido anisotrópico con flujo de momento, o bien como la suma de un fluido anisotrópico sin flujo de momento y un campo de radiación pura.
2. Es del tipo $\{1, 1(11)\}$ si se verifica (3.48), y entonces las desigualdades (3.52) a (3.55) se deben verificar para que se cumpla la condición dominante de energía. En cualquier caso, y para cualquier observador adaptado (incluyendo el privilegiado que no ve flujo de momento), existe proporcionalidad entre el tensor de presiones anisotrópicas y el de shear de dicho observador. Los espaciotiempos de tipo fluido perfecto son del tipo $\{1, (111)\}$ y entonces $R_2 = \text{constant}$; i.e.: el espaciotiempo es esféricamente, plano o hiperbólicamente simétrico.
3. Es del tipo $\{2, (11)\}$ cuando se verifica (3.66), entonces (3.67) debe satisfacerse para que se cumpla la condición dominante de energía. De nuevo se tiene proporcionalidad entre el tensor de presiones anisotrópicas y el de shear de los observadores adaptados.

3.3. Escenario de hidrodinámica y radiación.

En esta sección vamos a presentar algunas de las consecuencias de los resultados generales sobre condiciones de energía y estructura del tensor energía-momento que hemos obtenido. Tendremos 'in mente' el caso de la simetría esférica (que como ya dijimos es un caso particular de espaciotiempo warped B_T) y consideraremos un fluido radiante. De la discusión previa se sigue sin embargo que todo lo que veamos en esta sección es inmediatamente generalizable al caso de un espaciotiempo warped B_T genérico.

En este caso, el tensor de energía-momento puede describir

- Un fluido anisotrópico de velocidad \vec{v} (supuesto sin rotación y por tanto adaptado en el sentido definido previamente) y tensor de energía-momento $T_{(a)}^{M(b)} = \text{diag}(\rho, P_r, P_\perp, P_\perp)$, donde ρ es la densidad de energía, P_r la presión radial y P_\perp la presión tangencial. Los índices entre paréntesis son índices de tetrad, ésta siendo $\vec{v}, \vec{p}, \vec{y}, \vec{z}$, donde \vec{y}, \vec{z} son mutuamente ortogonales, unitarios, de tipo espacio y tangentes a las esferas, \vec{p} es unitario y espacial y perpendicular a los anteriores, y \vec{v} es unitario temporal y ortogonal a los otros tres.
- Un campo de radiación de densidad específica $\mathbf{I}(x, t; \vec{n}, \nu)$ dado por

$$d\mathcal{E} = \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu) dS \cos \varphi d\Theta d\nu dt, \quad (3.69)$$

donde $d\mathcal{E}$ se define como la energía que atraviesa un elemento de superficie dS , en el ángulo sólido alrededor de \vec{n} , i.e. $d\Theta \equiv \sin \theta d\theta d\psi \equiv -d\mu d\psi$ (φ es el ángulo entre \vec{n} y la normal a dS), transportada por radiación de frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$ en un tiempo dt . Se mide en la posición x y tiempo t , viajando en la dirección \vec{n} con una frecuencia ν . Como en la teoría clásica de la transferencia radiativa, para una geometría planar, los momentos de $\mathbf{I}(x, t; \vec{n}, \nu)$ se pueden escribir como¹

$$\rho_R = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \int_1^{-1} d\mu \mathbf{I}(x, t; \vec{n}, \nu), \quad (3.70)$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \int_1^{-1} d\mu \mu \mathbf{I}(x, t; \vec{n}, \nu) \quad (3.71)$$

y

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \int_1^{-1} d\mu \mu^2 \mathbf{I}(x, t; \vec{n}, \nu) . \quad (3.72)$$

Físicamente, ρ_R , \mathcal{F} y \mathcal{P} , representan la contribución de la radiación a la densidad de energía, densidad de flujo de energía y presión radial, respectivamente.

De las hipótesis anteriores se tiene que el tensor de energía-momento se puede escribir como

$$T_{(a)(b)} = T_{(a)(b)}^M + T_{(a)(b)}^R$$

donde la parte material es $T_{(a)(b)}^M$ dada más arriba, y el término correspondiente a la radiación $T_{(a)(b)}^R$ se puede escribir en la tetrad introducida (véase la nota a pie de página) como

$$T_{(a)(b)}^R = \begin{pmatrix} \rho_R & \mathcal{F} & 0 & 0 \\ \mathcal{F} & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_R - \mathcal{P}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_R - \mathcal{P}) \end{pmatrix} . \quad (3.73)$$

¹Mihalas, D. y Weibel Mihalas, B. (1984) *Foundations of Radiation Hydrodynamics* (Oxford University Press). Rezzolla L. y Miller J. (1994) *Class. Quantum Grav.* **11** 1815.

Por lo tanto en este caso las variables físicas genéricas son:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho + \rho_R; \\ P &= \frac{1}{3} (P_r + 2P_\perp + \rho_R) \\ \Pi &= P_r + \frac{3}{2}\mathcal{P} - P_\perp - \frac{1}{2}\rho_R \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

En coordenadas, el tensor de energía-momento se puede escribir como:

$$\begin{aligned} T_{ab} &= (\rho + \rho_R)v_a v_b + (P_r + \mathcal{P})p_a p_b + \mathcal{F}(v_a p_b + p_a v_b) \\ &\quad + \frac{1}{2}(P_\perp + \rho_R - \mathcal{P})(y_a y_b + z_a z_b) \end{aligned} \quad (3.75)$$

o, usando la notación establecida en (3.23):

$$\begin{aligned} T_{ab} &= (\rho + \rho_R)v_a v_b + \frac{1}{3}(P_r + 2P_\perp + \rho_R)h_{ab} + \mathcal{F}(v_a p_b + p_a v_b) \\ &\quad + \left(P_r - P_\perp + \frac{1}{2}(3\mathcal{P} - \rho_R) \right) (p_a p_b - \frac{1}{3}h_{ab}), \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde el último término se escribe a menudo en los cálculos como

$$\begin{aligned} \Pi_{ab} &= \left(P_r - P_\perp + \frac{1}{2}(3\mathcal{P} - \rho_R) \right) (p_a p_b - \frac{1}{3}h_{ab}) \\ \Pi_{ab} &\equiv \Pi(p_a p_b - \frac{1}{3}h_{ab}), \end{aligned}$$

y utilizando también la notación establecida en la sección precedente

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho + \rho_R, \quad P = \frac{1}{3} (P_r + 2P_\perp + \rho_R), \\ \Pi &= \left(P_r - P_\perp + \frac{1}{2} (3\mathcal{P} - \rho_R) \right). \end{aligned}$$

Desde un punto de vista físico, el tensor anterior representa la situación más general posible en la que uno está interesado en el contexto astrofísico, por lo que será la que adoptaremos como representación del contenido material de ahora en adelante. Notemos que, de nuestros desarrollos en las secciones precedentes se sigue que la geometría del espaciotiempo geometry "fuerza" este tipo de contenido material (en este punto, es interesante reparar en el hecho de que no todas las posibles combinaciones de tensores de energía-momento dan lugar a un tensor total de energía-momento compatible con la geometría warped; i.e.: de los tipos $\{1, 1(11)\}$ o $\{2, (11)\}$; véase G.S. Hall y D.A. Negm, *Int. J. of Theor. Phys.* **25** 405 (1986), para más detalles al respecto).

Vamos ahora a trasladar al caso presente las condiciones que obtuvimos en general; i.e.: (3.48) y (3.66), junto con las correspondientes desigualdades (3.52) a (3.55) y (3.67) para la condición dominante de energía.

Para el caso en que G_{ab} (o T_{ab}) sea del tipo $\{1, 1(11)\}$ (3.48) se puede reescribir como

$$\left| \frac{2\mathcal{F}}{\rho + \rho_R + P_r + \mathcal{P}} \right| < 1 \quad (3.77)$$

y las desigualdades (3.52) a (3.55) imponen

$$\rho + \rho_R - P_r - \mathcal{P} \geq 0, \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} & \rho + 2\rho_R - P_r + 2P_\perp - 2\mathcal{P} + \\ & + \sqrt{(\rho + \rho_R + P_r + \mathcal{P})^2 - 4\mathcal{F}^2} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\rho - P_r - 2P_\perp + \sqrt{(\rho + \rho_R + P_r + \mathcal{P})^2 - 4\mathcal{F}^2} \geq 0 \quad (3.80)$$

$$(\rho + \rho_R + P_r + \mathcal{P} - 2\mathcal{F})(\rho + \rho_R + P_r + \mathcal{P} + 2\mathcal{F}) \geq 0 \quad (3.81)$$

o

$$\left| \frac{2\mathcal{F}}{\bar{\rho} + \bar{P}_r} \right| < 1 \quad (3.82)$$

y

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{(\bar{\rho} + \bar{P}_r)^2 - 4\mathcal{F}^2} + \bar{\rho} - \bar{P}_r \geq 0, \\ & \bar{\rho} - \bar{P}_r \geq 0, \\ & \bar{\rho} - \bar{P}_r + 2\bar{P}_\perp + \sqrt{(\bar{\rho} + \bar{P}_r)^2 - 4\mathcal{F}^2} \geq 0 \\ & \bar{\rho} - \bar{P}_r - 2\bar{P}_\perp + \sqrt{(\bar{\rho} + \bar{P}_r)^2 - 4\mathcal{F}^2} \geq 0 \\ & (\bar{\rho} + \bar{P}_r + 2\mathcal{F})(\bar{\rho} + \bar{P}_r - 2\mathcal{F}) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

donde hemos definido

$$\bar{\rho} = \rho + \rho_R, \quad \bar{P}_r = P_r + \mathcal{P}, \quad \text{and} \quad \bar{P}_\perp = P_\perp + \frac{1}{2}(\rho_R - \mathcal{P})$$

que representan la densidad density, presión radial y presión tangencial "totales" medidas por un observador local Minkowskiano (el que se mueve con velocidad \vec{v}).

Si G_{ab} (o T_{ab}) es del tipo $\{2, (11)\}$, (3.66) se reescribe como

$$|\rho + \rho_R + P_r + \mathcal{P}| = |2\mathcal{F}| \quad (3.84)$$

y las desigualdades (3.67)

$$\rho + \rho_R - P_r - \mathcal{P} \geq 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{F} > 0. \quad (3.85)$$

o equivalentemente

$$|\bar{\rho} + \bar{P}_r| = |2\mathcal{F}| \quad \text{and} \quad \begin{cases} \bar{\rho} - \bar{P}_r \geq 0 \\ \mathcal{F} > 0 \end{cases} .$$

3.4. Un Ejemplo.

Consideremos el espaciotiempo cuyo elemento de línea viene dado por

$$ds^2 = -\frac{1}{2} \frac{Q^2(t, r)}{P^2(t, r)} dt^2 + \frac{1}{2} P^2(t, r) dr^2 + r^2(d\theta^2 + f^2(\theta) d\phi^2) \quad (3.86)$$

donde la función $f(\theta)$ la escogeremos como la función de Airy

$$f(\theta) = Ai\left(\frac{-1 - a\theta}{a^{2/3}}\right)$$

Un cálculo directo de $t_G^2 - 4d_G$ (que recordemos tiene que ser mayor o igual que cero para tener $\{1, 1(11)\}$ o $\{2, (11)\}$ respectivamente) da como resultado

$$\Delta \equiv t_G^2 - 4d_G = 16 \frac{Q_r^2 - 4P^2 P_t^2}{r^2 P^4 Q^2}, \quad \Delta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_r^2 - 4P^2 P_t^2 \geq 0 \quad (3.87)$$

Nosotros asumiremos que es positivo, y pondremos $\delta^2 \equiv Q_r^2 - 4P^2 P_t^2 > 0$, con lo cual se tiene que el vector propio temporal unitario del tensor de Einstein (4-velocidad del observador adaptado privilegiado que no detecta flujo de momento) es

$$u^a = \left(\frac{P}{Q} \sqrt{\frac{Q_r}{\delta}} + 1, \frac{1}{P} \sqrt{\frac{Q_r}{\delta}} - 1, 0, 0 \right) \quad (3.88)$$

En cuanto al 4-vector unitario \vec{n} es:

$$n^a = \left(\frac{P}{Q} \sqrt{\frac{Q_r}{\delta}} - 1, \frac{1}{P} \sqrt{\frac{Q_r}{\delta}} + 1, 0, 0 \right) \quad (3.89)$$

la densidad que mide el observador \vec{u} viene dada por:

$$\rho = \frac{1}{r^2 Q P^3 \delta} \left\{ \delta [2r(2P_r Q - P Q_r) + Q P^3 (1 - a\theta) - 2QP] + 2rP(4P^2 P_t^2 + Q_r^2) \right\} \quad (3.90)$$

La presión p_1 (presión 'radial') es

$$p_1 = \frac{1}{r^2 Q P^3 \delta} \left\{ \delta [2r(2P_r Q - P Q_r) + Q P^3 (1 + a\theta) - 2QP] - 2rP(4P^2 P_t^2 + Q_r^2) \right\} \quad (3.91)$$

y la presión 'tangencial' p_2 :

$$p_2 = \frac{2}{r Q^3 P^4} \left\{ Q^2 P (P Q_r - 2Q P_r) + 3r Q^2 P_r (Q P_r - Q_r P) + r Q^2 P (P Q_{rr} - Q P_{rr}) - r P^4 (P Q P_{tt} - P P_t Q_t + P_t^2 Q) \right\} \quad (3.92)$$

Es interesante reparar en el hecho que al hacer el parámetro $a = 0$ se recupera la situación esféricamente simétrica.

Es posible escoger funciones P y Q que verifiquen las propiedades requeridas en orden a satisfacer la condición dominante de energía.

Capítulo 4

Apéndice 1.

4.1. Variedades y coordenadas. Una aproximación informal.

Existen dos aproximaciones a la idea de variedad:

1. Una variedad es la generalización de la idea de superficie (bidimensional) en el espacio euclideo \mathbb{R}^3 . Se puede demostrar que cualquier variedad (analítica) de dimensión n se puede considerar como una superficie en un espacio euclideo \mathbb{R}^N con $n \leq N \leq n(n+1)/2$, entonces el espacio \mathbb{R}^N se llama **espacio ambiente** de la variedad en cuestión.
2. Una variedad n -dimensional se puede ‘ver’ como un conjunto de puntos que localmente (i.e.: en entornos pequeños alrededor de cada punto) se parece al conjunto de puntos \mathbb{R}^n (espacio euclideo n -dimensional), aunque globalmente puedan ser muy distintos.

El primer punto de vista tiene la ventaja de que en \mathbb{R}^N podemos definir coordenadas cartesianas globalmente (con todo lo que ello supone) y restringir después a la variedad en cuestión. Las superficies en \mathbb{R}^3 son desde luego variedades 2-dimensionales:

Ejemplo 1: Utilizando coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 la esfera S^2 (centrada en el origen y de radio 1) se puede definir como

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

podemos utilizar las coordenadas cartesianas para coordinar puntos de la esfera; así por ejemplo, un punto del hemisferio norte tendrá coordenadas $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, con lo que tan sólo son precisas dos coordenadas (x e y por ejemplo) para describir los puntos de la esfera, de acuerdo con la idea de superficie como un conjunto de puntos bidimensional, esto es: con *dos grados de libertad*.

Ver la superficie (la esfera en el caso anterior) como un subconjunto del espacio ambiente \mathbb{R}^3 y utilizar coordenadas cartesianas allí tiene ventajas; por ejemplo, los vectores (flechas) con origen en un punto $p \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (lo que llamaremos $T_p\mathbb{R}^3$; i.e.: vectores tangentes a \mathbb{R}^3 con origen en p) tienen componentes, según la base cartesiana de ese espacio, iguales a la diferencia entre las coordenadas del extremo de la flecha y el origen de ésta (p); sin embargo, resulta difícil ver si un determinado vector de $T_p\mathbb{R}^3$ lo es también de T_pS^2 para un punto p sobre la esfera; esto es: si una flecha con origen en p es o no tangente a la esfera. Además, uno tiene que estar refiriéndose todo el tiempo al espacio ambiente.

El segundo punto de vista es **intrínseco**; esto es: considera la variedad por sí misma, y no como subconjunto de algún espacio ambiente. En general, no podremos definir coordenadas cartesianas, pero todo lo que digamos estará ya directamente referido a la geometría de la propia variedad. El punto clave está en el concepto de **localmente como \mathbb{R}^n** . Así diremos, por ejemplo, que la esfera es una variedad 2-dimensional porque localmente (en un entorno alrededor de cualquier punto):

(a) Podemos coordinar todos los puntos de ese entorno de manera continua utilizando tan sólo dos coordenadas (por ejemplo: longitud y latitud).

(b) En ese entorno la geometría es parecida a la de \mathbb{R}^2 (por ejemplo, para nosotros, habitantes de la Tierra -considerándola como una esfera perfecta-, ésta nos parece plana, como \mathbb{R}^2 , en un entorno de nuestra posición). Esta segunda condición es lo que significa el adjetivo **diferenciable**; esto es: la superficie no puede tener 'puntas' o 'crestas':

Ejemplo 2: un cono incluyendo el vértice no sería una variedad diferenciable, ya que en un entorno del vértice, las cosas no son como en \mathbb{R}^2 ; por ejemplo: el vector tangente a cualquier curva que pasara por ese vértice es discontinuo en el vértice (esto es: la derivada de la representación paramétrica de la curva no existe en ese punto, la curva **no es diferenciable** en ese punto), y eso no ocurre para ningún punto de \mathbb{R}^2 .

Para entender mejor el significado de las coordenadas en una variedad cualquiera, consideremos a continuación el caso de coordenadas definidas sobre una superficie de \mathbb{R}^3 .

4.1.1. Coordenadas en una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Consideremos un punto $p \in \Sigma$ cualquiera y un abierto, que llamaremos O_p , contenido en Σ y que contenga ese punto; esto es: $p \in O_p \subseteq \Sigma$.

Figura 1

Diremos que $x^a = \{x^1, x^2\}$ son **coordenadas** válidas en la región O_p si existe un abierto de $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y una función x de O_p en U :

$$\begin{aligned} x : O_p \subseteq \Sigma &\rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2 \\ q &\mapsto (x_q^1, x_q^2) \end{aligned}$$

tal que

1. x es biyectiva (i.e.: inyectiva y exhaustiva).
2. x es continua.
3. x^{-1} (que existe porque x es biyectiva) es también continua.

Parafraseando: $\{x^1, x^2\}$ son coordenadas válidas en la región O_p si a todo punto $q \in O_p$ de esa región se le pueden hacer corresponder dos números reales (x_q^1, x_q^2) que llamamos **coordenadas del punto q** , de manera que

(1) **biyectividad de x** : a puntos distintos corresponden valores distintos de sus coordenadas y fijado un punto p sus coordenadas (x_p^1, x_p^2) son únicas.

(2) **continuidad de x** : al variar continuamente los puntos de O_p (i.e.: al pasar de un punto de O_p a otro infinitamente cercano), los valores de (x^1, x^2) varían continuamente (i.e.: pasan de un valor a otro infinitamente cercano)

(3) **continuidad de x^{-1}** : al variar los valores de x^1, x^2 de manera continua, obtenemos una variación continua de puntos de Σ .

Nota 1. Dado que x es biyectiva y tanto ella como su inversa son continuas, también hubiéramos podido definirla como una función de $U \subseteq \mathbb{R}^2$ en $O_p \subseteq \Sigma$, esto es:

$$\begin{aligned} x : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow O_p \subseteq \Sigma \\ (x_q^1, x_q^2) &\mapsto q \end{aligned}$$

en algunos libros las coordenadas se definen de este modo y en otros del otro. En cualquier caso, el abierto U de \mathbb{R}^2 es el conjunto de todos los valores posibles de las coordenadas x .

Nota 2. Las funciones $x : O_p \rightarrow U$ es lo que en Física llamamos **sistemas de coordenadas** (y normalmente, no nos molestamos demasiado en especificar el dominio O_p y recorrido U); en Matemáticas se llaman normalmente **cartas coordenadas**.

Sobre los conceptos topológicos.

En la revisión anterior de la definición de coordenadas en una superficie, aparecen dos conceptos topológicos importantes: el de *conjunto abierto* y el de *función continua*. Antes, conviene decir que los conjuntos que consideraremos (variedades, superficies, etc.) se llamarán genéricamente **espacios**, y sus elementos (los elementos de estos conjuntos) se llamarán **puntos**.

Conjunto Abierto Es el concepto que permite introducir las ideas de proximidad (o vecindad) entre puntos, separación entre puntos, etc. Así por ejemplo, dos puntos "son vecinos" si están contenidos en un mismo abierto (que no sea el espacio total); están separados si existen dos abiertos, conteniendo cada uno de ellos uno de esos puntos, que son disjuntos (i.e.: su intersección es vacía). Expresiones tales como *entorno de un punto p* tienen una definición precisa que coincide con la idea intuitiva que sugiere la propia expresión (i.e.: el punto p y sus puntos vecinos).

En todo momento, el modelo a seguir es el de los abiertos en \mathbb{R} , i.e.: conjuntos tales como los intervalos abiertos (a, b) , las uniones de un número cualquiera (finito o infinito) de intervalos de

este tipo, las intersecciones de un número finito de intervalos de este tipo, el espacio total \mathbb{R} y el conjunto vacío \emptyset . En este caso, la noción de proximidad, separación, etc., es muy clara porque tenemos la noción de **distancia** entre dos números $d(a, b) = |a - b|$ que coincide con la noción habitual de distancia, y por tanto conceptos tales como proximidad, separación, etc. son claros. En el caso general sin embargo, podemos no tener una noción de distancia y es por eso que se definen los conjuntos abiertos, de una manera formal.

Así, un espacio M en el que tenemos definida una colección de subconjuntos de M , que designaremos $\{O_\alpha\} = \mathcal{T}$, se llama **espacio topológico** (y \mathcal{T} se llama **topología** sobre M) si se verifican las tres propiedades siguientes:

1. $M, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. La unión de un número cualquiera (finito o infinito) de subconjuntos $O_\alpha \in \mathcal{T}$, está también en \mathcal{T} .
3. La intersección de un número finito de subconjuntos $O_\alpha \in \mathcal{T}$, está también en \mathcal{T} .

Los conjuntos O_α se llaman **abiertos** (de M o de la topología \mathcal{T}). Todas las variedades son espacios topológicos.

Función Continua Entre dos espacios X e Y es una función $f : X \rightarrow Y$ (i.e.: una asignación de puntos de Y a puntos de X) de modo que a puntos de X próximos entre si les corresponden (al "aplicarles" f), puntos de Y que también están próximos entre si. La definición en términos de abiertos es que la anti-imagen o pre-imagen por f de un abierto de Y es un abierto de X . El modelo a tener en cuenta en todo momento es el de las funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

De manera precisa, dados dos espacios topológicos X e Y (con topologías \mathcal{T}_X y \mathcal{T}_Y), una función $f : X \rightarrow Y$ es **continua** si para todo abierto $U_\beta \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(U_\beta) \in \mathcal{T}_X$; esto es: la anti-imagen de un abierto de Y es un abierto de X .

Las definiciones formales de estos conceptos, así como ejemplos y algunos desarrollos de interés que se basan en éstos, pueden encontrarse en cualquier libro de topología y/o de geometría diferencial. Véase también <http://www.uib.es/depart/dfs/GRG/index.html> el apartado¹ de "Notas de clase", el Tema 3 de "Ampliación de Métodos Matemáticos".

¹Aunque los títulos están en catalán, las notas están escritas en español.

4.2. Variedades y coordenadas. Una aproximación formal.

Como ya hemos dicho, una variedad es la generalización a una dimensión cualquiera del concepto de superficie, o también la imagen de que una variedad está hecha de trozos que son como conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , ‘cosidos’ entre si sin formar puntas, crestas, etc., esto es: “suavemente”.

A continuación damos la definición tal y como viene en la mayor parte de textos. Utilizaremos el lenguaje establecido en la sección anterior: abiertos, funciones continuas, etc.; todo ello en una dimensión n arbitraria.

Una **variedad real diferenciable** (C^∞) **n-dimensional** M es un conjunto de puntos junto con una colección de subconjuntos $\{O_\alpha\} = \mathcal{T}$, que son sus abiertos^a, de modo que:

1. Para cada O_α existe una función $x_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$, donde U_α es un abierto de \mathbb{R}^n , de modo que la función x_α (que tendrá n componentes):

$$x_\alpha(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$$

es biyectiva, continua y la inversa es también continua^b.

2. Si dos subconjuntos O_α, O_β se solapan; i.e.: $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, la función f definida como $f = x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$; i.e.:

$$f \equiv x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow x_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$$

es tal que f y f^{-1} (que son funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n) son C^∞ . Notemos que f es lo que llamamos un **cambio de coordenadas**.

^a \mathcal{T} es una topología y entonces M es un espacio topológico; en particular esto implica que cada punto $p \in M$ está contenido en al menos un subconjunto O_α y que los $\{O_\alpha\}$ forman un recubrimiento de M .

^bEn matemáticas, una función biyectiva, continua y con la inversa también continua se llama **homeomorfismo**, y si además ella y su inversa son C^∞ , se llama **difeomorfismo**.

Figura 2

Nota 1. Las funciones $x_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$ se llaman en Física **sistemas de coordenadas** (y normalmente, no nos molestamos demasiado en especificar el dominio O_α ni el recorrido U_α); mientras que en Matemáticas se llaman **cartas coordenadas**. Nosotros utilizaremos indistintamente un nombre u otro.

Nota 2. En la definición anterior se requiere que el recubrimiento $\{O_\alpha\}$ y la familia de cartas (o sistemas de) coordenadas $\{x_\alpha\}$ sea maximal, esto es: que todos los sistemas de coordenadas posibles y compatibles con los requisitos (1) y (2) de la definición estén incluidos. Ni que decir tiene que esto no supone ninguna complicación para los desarrollos que vienen a continuación y no debe preocuparnos. (Esto se hace para evitar que podamos ‘fabricar’ variedades nuevas introduciendo un nuevo sistema de coordenadas, o introduciendo un abierto $O_{\gamma'} \subset O_\gamma$ y definiendo allí nuevas coordenadas).

Nota 3. Si los cambios de coordenadas son continuos simplemente (ni siquiera diferenciables) hablamos de variedades topológicas, si son diferenciables tan sólo n veces, de variedades C^n . Nosotros supondremos siempre que nuestras variedades son C^∞ (suaves: ‘smooth’ en inglés) y las llamaremos simplemente **variedades** (en lugar de variedades diferenciables); éste es desde luego el caso de la Física, donde las variedades de interés son, en muchos casos, de dimensiones bajas: dimensión 2 (superficies en \mathbb{R}^3 incluyendo el plano \mathbb{R}^2), dimensión 3: el propio espacio \mathbb{R}^3 (o alguna región abierta de éste), dimensión 4: diferentes tipos de espacio-tiempo (sobre los cuáles está formulada la Teoría de la Relatividad). Hay otros casos de interés en que los puntos de la variedad no son necesariamente o directamente identificables como puntos en el sentido geométrico (i.e.: elementos de \mathbb{R}^3 o de alguna superficie contenida allí, o incluso puntos del espacio-tiempo): por ejemplo dado un sistema holónomo en mecánica clásica, el conjunto de todas las configuraciones posibles, tiene estructura de variedad diferenciable (es el llamado **espacio de configuraciones** del sistema) siendo sus coordenadas las coordenadas canónicas $q = (q^1, \dots, q^n)$ donde n el número de grados de libertad del sistema.

Ejemplo 3: Consideremos la esfera $S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$.

No es posible encontrar una función continua, biyectiva y cuya inversa sea también continua, que vaya de S^2 a (alguna región abierta de) \mathbb{R}^2 (i.e.: no existe ningún sistema de coordenadas global sobre la esfera); pero sí que es posible ‘coser’ diferentes trozos de esfera entre si ‘suavemente’ (sin puntas, crestas, etc.):

Consideremos los seis hemisferios abiertos siguientes:

$$\begin{aligned} O_1^+ &= \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 : x^1 > 0\}, & O_1^- &= \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 : x^1 < 0\} \\ O_2^+ &= \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 : x^2 > 0\}, & O_2^- &= \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 : x^2 < 0\} \\ O_3^+ &= \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 : x^3 > 0\}, & O_3^- &= \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 : x^3 < 0\} \end{aligned}$$

es trivial ver que recubren la esfera; además sobre cada uno de ellos pueden definirse coordenadas del modo que sigue; en la notación establecida en la definición, consideremos $U_1^+ = U_1^- = \dots = U_3^- = D \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$; entonces:

$$\begin{array}{lll} x_{1+} : & O_1^+ & \rightarrow D \\ & (x^1, x^2, x^3) & \mapsto (x^2, x^3) \\ x_{2+} : & O_2^+ & \rightarrow D \\ & (x^1, x^2, x^3) & \mapsto (x^1, x^3) \\ x_{3+} : & O_3^+ & \rightarrow D \\ & (x^1, x^2, x^3) & \mapsto (x^1, x^2) \end{array} \quad \begin{array}{lll} x_{1-} : & O_1^- & \rightarrow D \\ & (x^1, x^2, x^3) & \mapsto (x^2, x^3) \\ x_{2-} : & O_2^- & \rightarrow D \\ & (x^1, x^2, x^3) & \mapsto (x^1, x^3) \\ x_{3-} : & O_3^- & \rightarrow D \\ & (x^1, x^2, x^3) & \mapsto (x^1, x^2) \end{array}$$

Fijémonos que las funciones $x_{j\pm}$ para $j = 1, 2, 3$ no son sino las proyecciones de los puntos correspondientes sobre discos planos; así por ejemplo, la función x_{3+} proyecta el hemisferio norte de la esfera sobre el disco resultante de la intersección de la esfera con el plano XY , etc.

Es fácil demostrar que todas estas funciones son biyectivas y continuas y que sus inversas también son continuas. Asimismo, es fácil ver que $x_{j\pm} \circ (x_{k\pm})^{-1}$ son C^∞ en su dominio de definición.