

MODELOS DE DISCOS DELGADOS EN RELATIVIDAD GENERAL.

GUILLERMO A. GONZÁLEZ

**Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación
Escuela de Física – Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia**

Junio de 2005

1. Modelos Relativistas de Discos

La métrica para un espacio-tiempo estático con simetría axial

$$ds^2 = e^{-2\Phi} [R^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda} (dr^2 + dz^2)] - e^{2\Phi} dt^2, \quad (1)$$

donde R , Φ e Λ dependen sólo de r y z .

El tensor métrico g_{ab}^+ , definido para $z \geq 0$,

$$ds^2|_{M^+} = g_{ab}^+ dx^a dx^b, \quad (2)$$

y el tensor métrico g_{ab}^- , definido para $z \leq 0$,

$$g_{ab}^-(r, z) = g_{ab}^+(r, -z), \quad (3)$$

de tal forma que $[g_{ab}] = g_{ab}|_{0^+} - g_{ab}|_{0^-} = 0$.

Las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico

$$b_{ab} = [g_{ab,z}] = 2 g_{ab,z}^+|_{z=0^+}. \quad (4)$$

Para la métrica (1):

$$b_{tt} = 2g_{tt,z} = -4e^{2\Phi} \Phi_{,z}, \quad (5a)$$

$$b_{\varphi\varphi} = 2g_{\varphi\varphi,z} = 4e^{-2\Phi} R(R_{,z} - R\Phi_{,z}), \quad (5b)$$

$$b_{rr} = 2g_{rr,z} = 4e^{2(\Lambda-\Phi)} (\Lambda_{,z} - \Phi_{,z}), \quad (5c)$$

$$b_{zz} = 2g_{zz,z} = 4e^{2(\Lambda-\Phi)} (\Lambda_{,z} - \Phi_{,z}), \quad (5d)$$

donde todas las cantidades están evaluadas en $z = 0^+$.

El tensor de Riemann

$$R_{bcd}^a = (R_{bcd}^a)^D + H_{bcd}^a \delta(\phi),$$

con

$$H_{bcd}^a = [\Gamma_{bd}^a] n_c - [\Gamma_{bc}^a] n_d,$$

El tensor de momentum-energía

$$T_{ab} = (T_{ab})^D + Q_{ab} \delta(\phi),$$

donde

$$(F)^D = F^+ \theta + F^- (1 - \theta).$$

Ecuaciones de Einstein:

$$R_{ab}^{\pm} - \frac{1}{2}g_{ab}R^{\pm} = T_{ab}^{\pm},$$

$$H_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}H = Q_{ab},$$

donde $H_{ab} = H_{acb}^c$ e $H = g_{\Sigma}^{ab}H_{ab}$.

Usando los resultados anteriores se obtiene la expresión

$$Q_b^a = \frac{1}{2}\{b_c^a n^c n_b - b_b^a n^c n_c + b_b^c n^a n_c - b_c^c n^a n_b - \delta_b^a (b_e^c n^e n_c - b_c^c n^e n_e)\}.$$

Componentes no-nulas del tensor de momentum-energía

$$Q_t^t = 2e^{2(\Phi-\Lambda)} \left\{ \Lambda_{,z} - 2\Phi_{,z} + \frac{R_{,z}}{R} \right\}, \quad (6a)$$

$$Q_\varphi^\varphi = 2e^{2(\Phi-\Lambda)} \Lambda_{,z}, \quad (6b)$$

$$Q_r^r = 2e^{2(\Phi-\Lambda)} \left\{ \frac{R_{,z}}{R} \right\}, \quad (6c)$$

El tensor de momentum-energía superficial S_b^a del disco se puede obtener a través de la relación

$$S_b^a = \int T_b^a ds. \quad (7)$$

donde $ds = \sqrt{g_{zz}} dz$.

Usando la métrica (1):

$$S_0^0 = 2e^{\Phi-\Lambda} \left\{ \Lambda_{,z} - 2\Phi_{,z} + \frac{R_{,z}}{R} \right\}, \quad (8a)$$

$$S_1^1 = 2e^{\Phi-\Lambda} \Lambda_{,z}, \quad (8b)$$

$$S_2^2 = 2e^{\Phi-\Lambda} \left\{ \frac{R_{,z}}{R} \right\}, \quad (8c)$$

Llevando a la forma canónica

$$g_{ab} = -V_a V_b + W_a W_b + X_a X_b + Y_a Y_b, \quad (9a)$$

$$S_{ab} = \sigma V_a V_b + p_\varphi W_a W_b + p_r X_a X_b, \quad (9b)$$

Tetrada ortonormal $e_{\hat{a}}{}^b = \{V^b, W^b, X^b, Y^b\}$:

$$V^a = e^{-\Phi} (1, 0, 0, 0) , \quad (10a)$$

$$W^a = \frac{e^{\Phi}}{R} (0, 1, 0, 0) , \quad (10b)$$

$$X^a = e^{\Phi-\Lambda} (0, 0, 1, 0) , \quad (10c)$$

$$Y^a = e^{\Phi-\Lambda} (0, 0, 0, 1) . \quad (10d)$$

La densidad de energía:

$$\sigma = -S_0^0, \quad (11)$$

La presión azimutal:

$$p_\varphi = S_1^1, \quad (12)$$

La presión radial:

$$p_r = S_2^2, \quad (13)$$

y la densidad Newtoniana efectiva:

$$\varrho = \sigma + p_\varphi + p_r. \quad (14)$$

2. El Modelo De Contra-Rotación

En forma canónica el tensor de momentum-energía superficial

$$S^{ab} = \sigma V^a V^b + p_\varphi W^a W^b + p_r X^a X^b, \quad (15)$$

se puede expresar como

$$S^{ab} = S_+^{ab} + S_-^{ab}, \quad (16)$$

donde S_+^{ab} y S_-^{ab} son, respectivamente, el SEMT de los flúidos contra-rotantes progrados y retrogrados.

Proyecciones sobre la Tetrada

Usando las relaciones

$$U_{\pm}^{\hat{a}} = e^{\hat{a}}_b U_{\pm}^b \quad , \quad U_{\pm}^a = U_{\pm}^{\hat{b}} e_{\hat{b}}^a. \quad (17)$$

Si $U_{\pm}^a = (U_{\pm}^0, U_{\pm}^1, 0, 0)$ son los vectores velocidad de los dos fluídos contra-rotantes, se obtienen las relaciones

$$U_{\pm}^a = U_{\pm}^{\hat{0}} e_{\hat{0}}^a + U_{\pm}^{\hat{1}} e_{\hat{1}}^a, \quad (18)$$

$$-(U_{\pm}^{\hat{0}})^2 + (U_{\pm}^{\hat{1}})^2 = -1, \quad (19)$$

La velocidad tangencial de contra-rotación, medida en la tetraada $e_{\hat{a}}{}^b$, está dada por

$$U_{\pm} = \frac{U_{\pm}^{\hat{1}}}{U_{\pm}^{\hat{0}}}. \quad (20)$$

Reemplazando ahora (20) en (19), se obtiene

$$U_{\pm}^{\hat{0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - U_{\pm}^2}}. \quad (21)$$

Reemplazando entonces en (18), y usando la tetraada (10), tenemos las componentes de la velocidad de los flúidos contra-rotantes en términos de la tetraada (10) y de la velocidad tangencial (20).

$$U_{\pm}^a = \frac{V^a + W^a U_{\pm}}{\sqrt{1 - U_{\pm}^2}}; \quad (22)$$

El momento angular específico de una partícula en una órbita circular de radio r está definido como $h_{\pm} = g_{\varphi\varphi}U_{\pm}^{\varphi}$ y mediante las relaciones (20) y (21), se puede ver que

$$h_{\pm} = \frac{Re^{-\Phi}U_{\pm}}{\sqrt{1 - U_{\pm}^2}}. \quad (23)$$

La condición de estabilidad,

$$\frac{d(h^2)}{dr} > 0, \quad (24)$$

es una extensión del criterio de estabilidad de Rayleigh de un fluido en reposo en un campo gravitacional.

De igual manera, se pueden expresar V^a y W^a en términos de U_{\pm}^a y de U_{\pm} de la siguiente forma

$$V^a = \frac{\sqrt{1 - U_-^2} U_+ U_-^a - \sqrt{1 - U_+^2} U_- U_+^a}{U_+ - U_-}, \quad (25a)$$

$$W^a = \frac{\sqrt{1 - U_+^2} U_+^a - \sqrt{1 - U_-^2} U_-^a}{U_+ - U_-}, \quad (25b)$$

De acuerdo con lo anterior, los productos $V^a V^b$ y $W^a W^b$ están dados por

$$\begin{aligned}
 V^a V^b &= \frac{[(1 - U_-^2)U_+^2 U_-^a U_-^b + (1 - U_+^2)U_-^2 U_+^a U_+^b]}{(U_+ - U_-)^2} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{1 - U_-^2} \sqrt{1 - U_+^2} U_+ U_- (U_-^a U_+^b + U_+^a U_-^b)}{(U_+ - U_-)^2},
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 W^a W^b &= \frac{[(1 - U_+^2)U_+^a U_+^b + (1 - U_-^2)U_-^a U_-^b]}{(U_+ - U_-)^2} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{1 - U_+^2} \sqrt{1 - U_-^2} (U_+^a U_-^b + U_-^a U_+^b)}{(U_+ - U_-)^2},
 \end{aligned}$$

Finalmente, para poder completar la descomposición (16), debemos también expresar el vector X^a en términos de los vectores U_{\pm}^a y de las velocidades tangenciales U_{\pm} .

$$h_{ab} = g_{ab} - Y_a Y_b. \quad (27)$$

la expresión para h_{ab} en forma canónica es

$$h_{ab} = -V_a V_b + W_a W_b + X_a X_b; \quad (28)$$

despejando entonces el producto $X_a X_b$, tenemos

$$X_a X_b = h_{ab} + V_a V_b - W_a W_b, \quad (29)$$

lo cual, usando (26), permite expresar $X_a X_b$ en términos de U_{\pm}^a y U_{\pm} .

El Tensor de Momentum-Energía

Tomando el tensor de momentum energía S^{ab} en su forma canónica

$$S^{ab} = \sigma V^a V^b + p_\varphi W^a W^b + p_r X^a X^b$$

y reemplazando la expresión (29) para el producto $X^a X^b$, se obtiene

$$S^{ab} = (\sigma + p_r) V^a V^b + (p_\varphi - p_r) W^a W^b + p_r h^{ab}. \quad (30)$$

Finalmente, usando la expresión (26) para los productos $V^a V^b$ y $W^a W^b$, se obtiene

$$\begin{aligned}
S^{ab} &= \frac{f(U_-, U_-)(1 - U_+^2) U_+^a U_+^b}{(U_+ - U_-)^2} \\
&+ \frac{f(U_+, U_+)(1 - U_-^2) U_-^a U_-^b}{(U_+ - U_-)^2} \\
&- \frac{f(U_+, U_-)(1 - U_+^2)^{\frac{1}{2}} (1 - U_-^2)^{\frac{1}{2}} (U_+^a U_-^b + U_-^a U_+^b)}{(U_+ - U_-)^2} \\
&- p_r h^{ab},
\end{aligned} \tag{31}$$

donde

$$f(U_-, U_-) = (\sigma + p_r)U_-^2 + p_\varphi - p_r , \quad (32a)$$

$$f(U_+, U_+) = (\sigma + p_r)U_+^2 + p_\varphi - p_r , \quad (32b)$$

$$f(U_+, U_-) = (\sigma + p_r)U_+U_- + p_\varphi - p_r . \quad (32c)$$

Así, (31) proporciona la expresión necesaria de S^{ab} en términos de las velocidades de los dos flúidos contra-rotantes.

Las velocidades tangenciales de contra-rotación deben estar relacionadas mediante la condición de ligadura

$$f(U_+, U_-) = 0 , \quad (33)$$

Ahora bien, escribiendo el SEMT (16) como la suma de dos flúidos perfectos contra-rotantes de la forma

$$S_+^{ab} = (\sigma_+ + p_+)U_+^a U_+^b + p_+ h^{ab}, \quad (34a)$$

$$S_-^{ab} = (\sigma_- + p_-)U_-^a U_-^b + p_- h^{ab}, \quad (34b)$$

se obtiene la expresión

$$S^{ab} = (\sigma_+ + p_+)U_+^a U_+^b + (\sigma_- + p_-)U_-^a U_-^b + (p_+ + p_-)h^{ab}; \quad (35)$$

Tomando ahora una solución de la ecuación (33) para las velocidades de contra-rotación, se tiene que

$$(\sigma + p_r)U_+U_- + p_\varphi - p_r = 0; \quad (36)$$

por lo tanto, despejando $p_\varphi - p_r$ y reemplazando en (32a) se tiene que

$$f(U_-, U_-) = (\sigma + p_r)U_-(U_- - U_+). \quad (37)$$

Igualmente se obtiene

$$f(U_+, U_+) = (\sigma + p_r)U_+(U_+ - U_-), \quad (38)$$

al reemplazar $p_\varphi - p_r$ en (32b).

Así entonces, reemplazando (37), (38) y (33) en (31) se obtiene

$$\begin{aligned}
 S^{ab} = & \left[\frac{1 - U_+^2}{U_- - U_+} \right] (\sigma + p_r) U_- U_+^a U_+^b + \\
 & \left[\frac{1 - U_-^2}{U_+ - U_-} \right] (\sigma + p_r) U_+ U_-^a U_-^b + \\
 & p_r h^{ab}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Comparando entonces (39) y (35) se obtienen las expresiones

$$\sigma_+ + p_+ = \left[\frac{1 - U_+^2}{U_- - U_+} \right] \{(\sigma + p_r)U_-\} , \quad (40a)$$

$$\sigma_- + p_- = \left[\frac{1 - U_-^2}{U_+ - U_-} \right] \{(\sigma + p_r)U_+\} , \quad (40b)$$

$$p_+ + p_- = p_r. \quad (40c)$$

Combinando estas expresiones podemos obtener la expresión

$$\sigma_+ + \sigma_- = \sigma + p_r - p_\varphi, \quad (41)$$

para las densidades de energía de los flúidos contra-rotantes.

Velocidades de Contra-Rotación

La ecuación de las geodésicas para las componentes covariantes del vector velocidad, $U_a = g_{ab}U^b$, puede escribirse como

$$\frac{dU_a}{d\tau} = \frac{1}{2}g_{bc,a}U^bU^c; \quad (42)$$

Para órbitas circulares se tiene que $r = cte.$, así que $U_r = 0$; de acuerdo con esto, (42) se reduce a

$$g_{bc,r}U^bU^c = 0, \quad (43)$$

donde b y c toman los valores 0 y 1.

Escribiendo los vectores velocidad de los flúidos contra-rotantes como $U_{\pm}^a = (U_{\pm}^0, U_{\pm}^1, 0, 0) = U_{\pm}^0(1, \omega_{\pm}, 0, 0)$, donde $\omega_{\pm} = U_{\pm}^1/U_{\pm}^0$

son las velocidades angulares, la ecuación (43) implica que

$$g_{11,r}\omega^2 + g_{00,r} = 0, \quad (44)$$

cuyas soluciones están dadas por

$$\omega_{\pm} = \pm \omega, \quad (45)$$

$$\omega^2 = - \frac{g_{00,r}}{g_{11,r}}.$$

Vamos ahora a calcular $f(U_+, U_-)$ para las velocidades geodésicas.

En primer lugar, expresando U_{\pm} en términos de ω_{\pm} se obtiene

$$U_{\pm} = - \left[\frac{W_1}{V_0} \right] \omega_{\pm}, \quad (46)$$

y así, usando (9a) y (9b), se tiene que

$$f(U_+, U_-) = \frac{A + (\sigma + p_r - p_\varphi)B}{g_{11,r}V_0^2}, \quad (47)$$

donde

$$A = g_{11,r}S_{00} + g_{00,r}S_{11}, \quad (48a)$$

$$B = g_{00}g_{11,r} + g_{00,r}g_{11}. \quad (48b)$$

Usando las ecuaciones de Einstein (56a) - (56d) y las expresiones (8a) - (8c) para el SEMT se puede mostrar que

$$f(U_+, U_-) = \left[\frac{R}{R_{,r} - R\Phi_{,r}} \right] \frac{dp_r}{dr}; \quad (49)$$

Un caso importante de lo anterior es cuando no hay presión radial, $p_r = 0$, de modo que la condición (33) es equivalente a

$$U^2 = \frac{p_\varphi}{\sigma}, \quad (50)$$

Ahora, dado que $p_r = 0$, se puede tomar $p_+ = p_- = 0$, así que se tienen dos flúidos de polvo contra-rotantes con densidades de energía iguales, dadas por

$$\sigma_+ = \sigma_- = \frac{\sigma - p_\varphi}{2}. \quad (51)$$

Por otro lado, cuando $p_r \neq 0$ se tiene que, en general, $f(U_+, U_-) \neq 0$ para flúidos que circulan a lo largos de geodésicas y así no es posible obtener un modelo contra-rotante con ellos.

Vamos a considerar que los dos flúidos circulan con velocidades tangenciales iguales y opuestas, aunque no a lo largo de geodésicas;

$$U_{\pm} = \pm U, \quad (52)$$

de modo que la ecuación (33) es equivalente a

$$U^2 = \left[\frac{p_{\varphi} - p_r}{\sigma + p_r} \right]. \quad (53)$$

Este caso, el cual también se considera comúnmente, permite igualmente una determinación completa de los vectores velocidad U_{\pm}^a ; sin embargo, esto solo se puede hacer cuando la expresión anterior es positivo definida.

En el caso general, cuando (53) no es positivo definida, los dos flúidos circularán con velocidades diferentes y (33) se puede escribir como

$$U_+U_- = \left[\frac{p_r - p_\varphi}{\sigma + p_r} \right], \quad (54)$$

así que sólo se puede obtener un CRM sí

$$|p_r - p_\varphi| < |\sigma + p_r|, \quad (55)$$

con el fin de que $|U_\pm| \leq 1$. Además, esta relación no determina completamente las velocidades tangenciales U_\pm , y así el CRM es indeterminado.

3. Discos Contra-Rotantes con Presión Radial

Como una aplicación de lo presentado anteriormente, vamos a considerar algunos modelos simples de discos con presión radial diferente de cero que se pueden interpretar apropiadamente mediante el Modelo de Contra-Rotación. Tales discos se obtienen considerando una solución simple de las ecuaciones de Einstein que permite obtener expresiones simples para todas las cantidades involucradas en el Modelo de Contra-Rotación.

Solución General con Presión Radial

Tomando la métrica en la forma (1):

$$R_{,rr} + R_{,zz} = 0 , \quad (56a)$$

$$(R\Phi_{,r})_{,r} + (R\Phi_{,z})_{,z} = 0 , \quad (56b)$$

$$R_{,z}\Lambda_{,r} + R_{,r}\Lambda_{,z} - 2\mathcal{R}\Phi_{,r}\Phi_{,z} - R_{,rz} = 0 , \quad (56c)$$

$$R_{,r}\Lambda_{,r} - R_{,z}\Lambda_{,z} - R(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2) + R_{,zz} = 0 , \quad (56d)$$

validas en la región exterior al disco; esto es, para $z \neq 0$.

Sea $\mathcal{F}(\nu) = R(r, z) + iZ(r, z)$, donde $\nu = r + iz$.

$$r \rightarrow R(r, z), \quad z \rightarrow Z(r, z). \quad (57)$$

La métrica:

$$ds^2 = e^{-2\Psi} [R^2 d\varphi^2 + e^{2\Pi} (dR^2 + dZ^2)] - e^{2\Psi} dt^2, \quad (58)$$

Las ecuaciones de Einstein:

$$\Psi_{,RR} + \frac{1}{R} \Psi_{,r} + \Psi_{,ZZ} = 0, \quad (59a)$$

$$\Pi_{,R} = R(\Psi_{,R}^2 - \Psi_{,Z}^2), \quad (59b)$$

$$\Pi_{,Z} = 2R\Psi_{,R}\Psi_{,Z}. \quad (59c)$$

La solución general para el sistema de ecuaciones de Einstein originales, (56a) - (56d), está dada entonces por las funciones

$$R(r, z) = \operatorname{Re} \mathcal{F}(\nu) , \quad (60a)$$

$$Z(r, z) = \operatorname{Im} \mathcal{F}(\nu) , \quad (60b)$$

$$\Phi(r, z) = \Psi(R, Z) , \quad (60c)$$

$$\Lambda(r, z) = \Pi(R, Z) + \ln |\mathcal{F}'(\nu)| . \quad (60d)$$

La presión radial se expresa como

$$p_r = 2e^{\Phi-\Lambda} \frac{R_{,z}}{R}, \quad (61)$$

de modo que, usando (60c) y (60d), se tiene finalmente

$$p_r = \frac{2e^{\Psi-\Pi}}{\sqrt{R_{,r}^2 + R_{,z}^2}} \frac{R_{,z}}{R}, \quad (62)$$

donde todas las cantidades están evaluadas en $z = 0^+$.

Una posibilidad simple para la función $\mathcal{F}(\nu)$ está dada por

$$\mathcal{F}(\nu) = \nu + iz_0, \quad (63)$$

donde z_0 es una constante.

Otra posibilidad para $\mathcal{F}(\nu)$ está dada por

$$\mathcal{F}(\nu) = \nu + \alpha\sqrt{\nu^2 - 1}, \quad (64)$$

donde $\alpha \geq 0$, de tal forma que la expresión general para la presión radial se puede escribir como

$$p_r = \frac{2\alpha\sqrt{1 - r^2}}{1 + (\alpha^2 - 1)r^2} e^{\Psi - \Pi}, \quad (65)$$

de donde se puede ver que si Ψ y Π son reales y finitas cuando $z = 0^+$, entonces p_r es una función bien comportada de r para todo valor de $\alpha \geq 0$.

Una Familia Simple De Discos

La solución considerada está dada por

$$\Psi(R, Z) = \frac{\mu}{2k} \ln \left[\frac{R_+ + R_- - 2k}{R_+ + R_- + 2k} \right], \quad (66a)$$

$$\Pi(R, Z) = \frac{\mu^2}{2k^2} \ln \left[\frac{(R_+ + R_-)^2 - 4k^2}{4 R_+ R_-} \right], \quad (66b)$$

donde $\mu > 0$, $k = \sqrt{\alpha^2 - 1}$ y $R_{\pm}^2 = R^2 + (Z \pm k)^2$.

La anterior es una de las más simples soluciones de Weyl y contiene la solución de Chazy-Curzon cuando $\alpha = 1$, la solución de Zipoy-Voorhees cuando $\alpha > 1$, y la solución de Morgan y Morgan, cuando $\alpha < 1$.

Las expresiones para la densidad de energía y las presiones acimutal y radial,

$$\sigma = p_r \left[\frac{2\mu - \alpha}{\alpha} - \frac{1 + \mu^2 r^2}{1 + k^2 r^2} \right], \quad (67a)$$

$$p_\varphi = p_r \left[\frac{1 + \mu^2 r^2}{1 + k^2 r^2} \right], \quad (67b)$$

$$p_r = p_0 [1 + k^2 r^2]^{(\mu^2 - k^2)/2k^2}, \quad (67c)$$

donde $p_0 = 2\alpha(\alpha - k)^{\mu/k} \geq 0$ y $0 \leq r \leq 1$.

Sea $\alpha = 0$, así que $p_r = p_\varphi = 0$, y

$$\sigma = \frac{4\mu e^{-\mu\pi/2}}{(1-r^2)^{(\mu^2+1)/2}}; \quad (68)$$

un disco de polvo con densidad de energía positiva, el cual satisface todas las condiciones de energía. De otra parte, la densidad de energía es singular en el borde del disco. Se puede ver también que $U_\pm = 0$, así que este es un disco “verdaderamente estático”, en el sentido de que no se le puede obtener una interpretación en términos del modelo de contra-rotación. Este caso corresponde al disco de Bonnor y Sackfield.

Sea $\mu = k > 0$, así que

$$\sigma = -4(\alpha - k)^2, \quad (69a)$$

$$p_r = p_\varphi = 2\alpha(\alpha - k). \quad (69b)$$

dado que $\sigma < 0$, los discos no satisfacen la condición de energía débil; por otro lado, $\varrho > 0$, así que los discos si satisfacen la condición de energía fuerte. Para estos discos se tiene igualmente que $U_\pm = 0$, así que tampoco es posible una interpretación en términos del modelo de contra-rotación. Estos son también discos “verdaderamente estáticos”.

Para cualquier otro valor de $\alpha > 0$ y $\mu \neq k$, las presiones radiales y acimutales, p_r y p_φ , son positivas en todas partes y bien comportadas para todos los valores de μ y α .

Para la “densidad Newtoniana efectiva” se obtiene

$$\varrho = \frac{2\mu p_r}{\alpha}; \quad (70)$$

esto es, ϱ es positiva en todas partes y los discos son atractivos, en concordancia con la condición de energía fuerte.

$$\sigma : \mu = 1.5$$

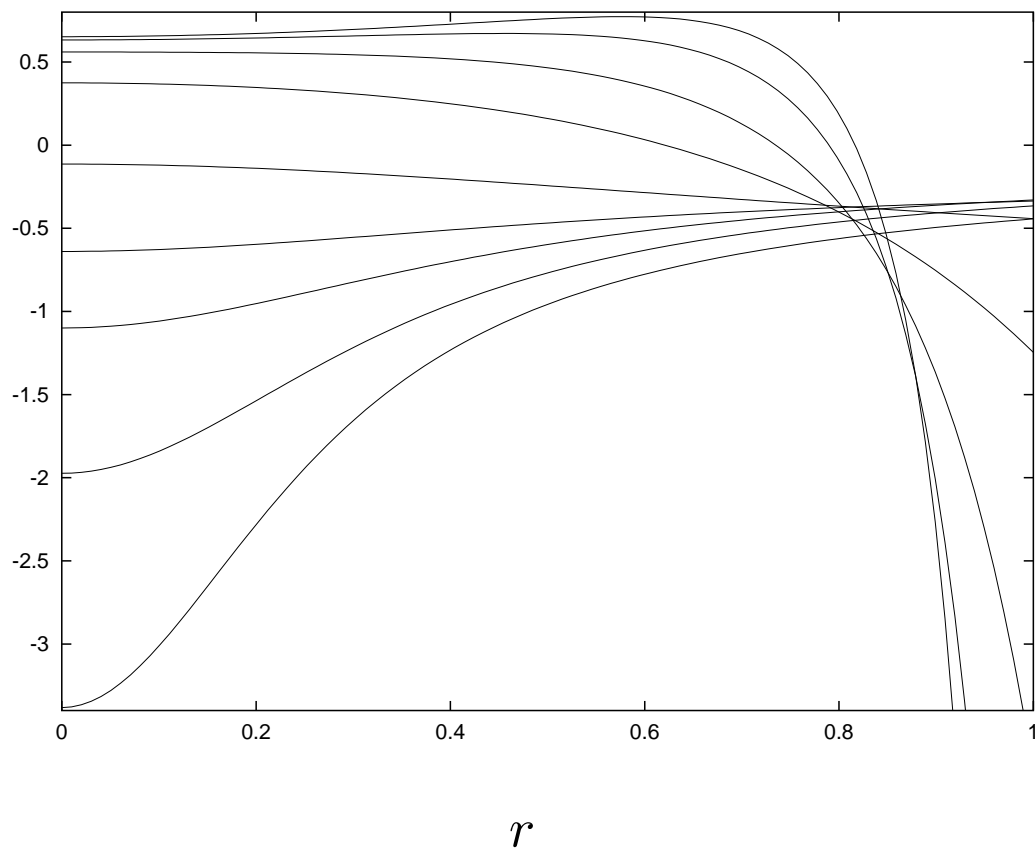


Figure 1: Gráficas de la densidad de energía, σ , para discos con $\mu = 1.5$ y $\alpha = 0.5, 0.6, 0.8, 1.1, 1.6, 2, 2.3, 2.8$ y 3.5 .

$$\sigma : \mu = 5.5$$

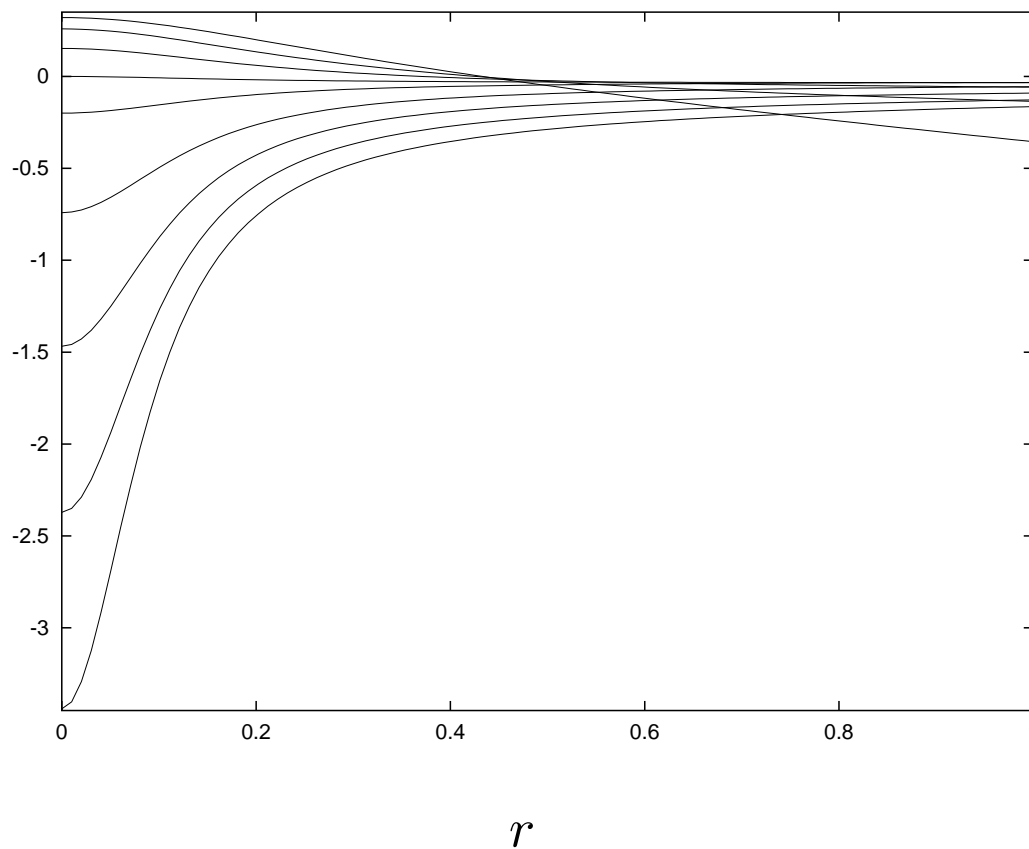


Figure 2: Gráficas de la densidad de energía, σ , para discos con $\mu = 5.5$ y $\alpha = 0.5, 0.6, 0.8, 1.1, 1.6, 2, 2.3, 2.8$ y 3.5 .

$$p_r : \mu = 1.5$$

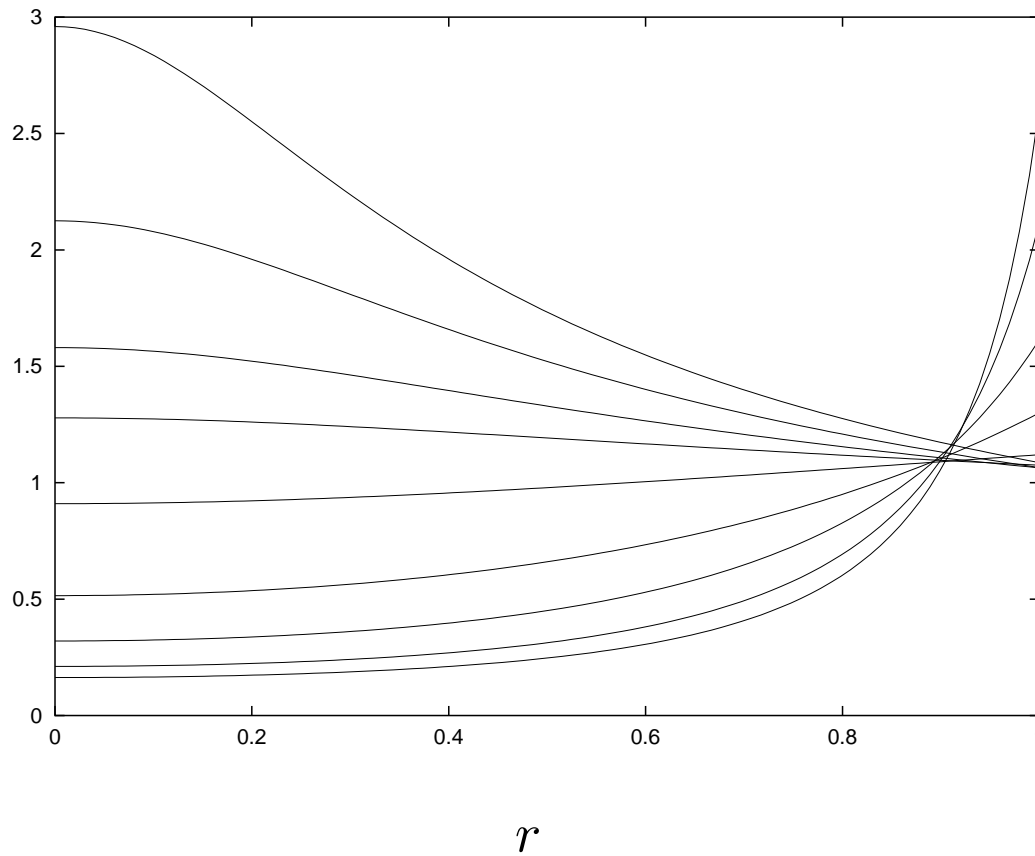


Figure 3: Gráficas de la presión radial, p_r , para discos con $\mu = 1.5$ y $\alpha = 0.5, 0.6, 0.8, 1.1, 1.6, 2, 2.3, 2.8$ y 3.5 .

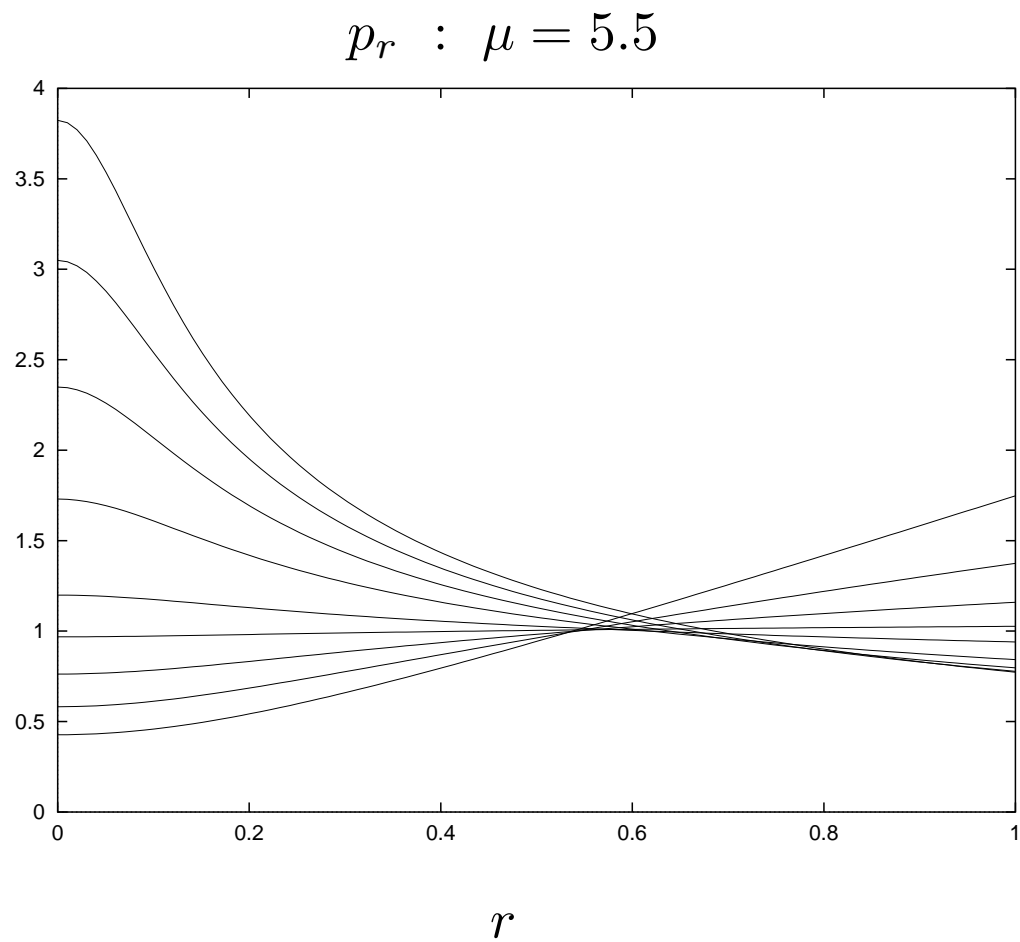


Figure 4: Gráficas de la presión radial, p_r , para discos con $\mu = 5.5$ y $\alpha = 0.5, 0.6, 0.8, 1.1, 1.6, 2, 2.3, 2.8$ y 3.5 .

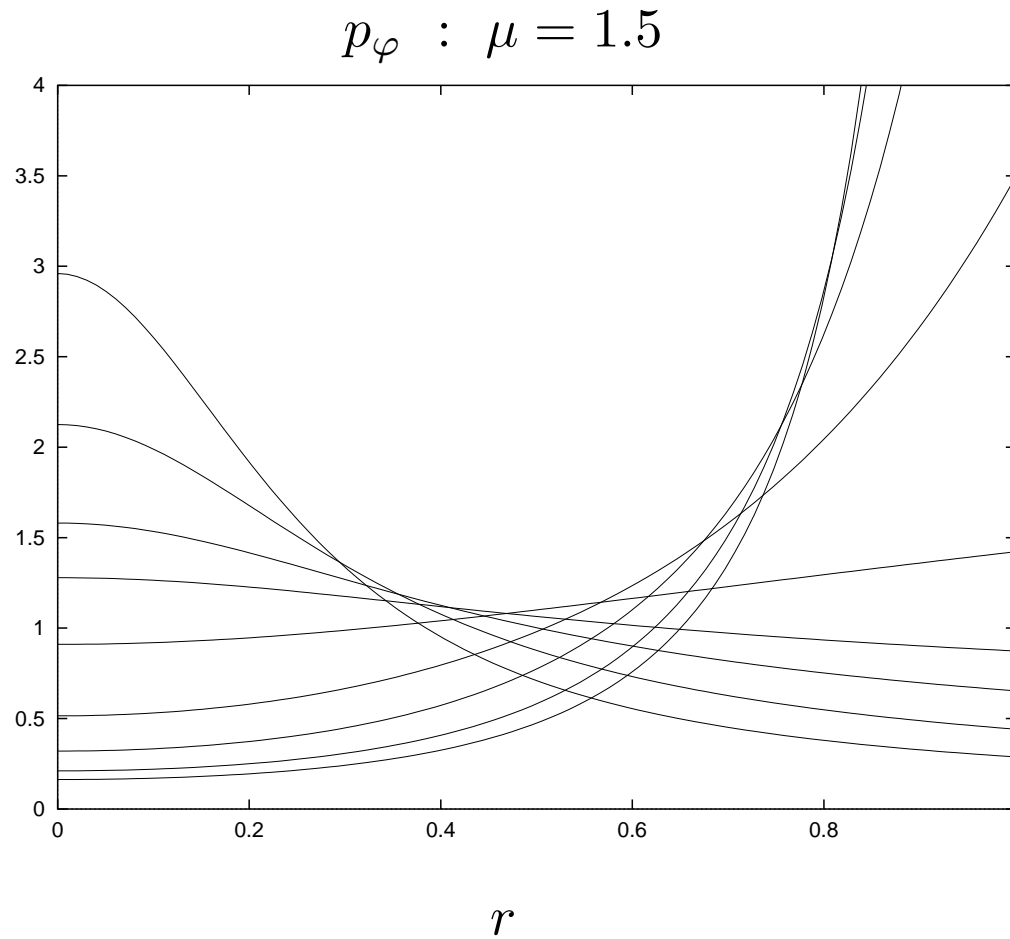


Figure 5: Gráficas de la presión acimutal, p_φ , para discos con $\mu = 1.5$ y $\alpha = 0.5, 0.6, 0.8, 1.1, 1.6, 2, 2.3, 2.8$ y 3.5 .

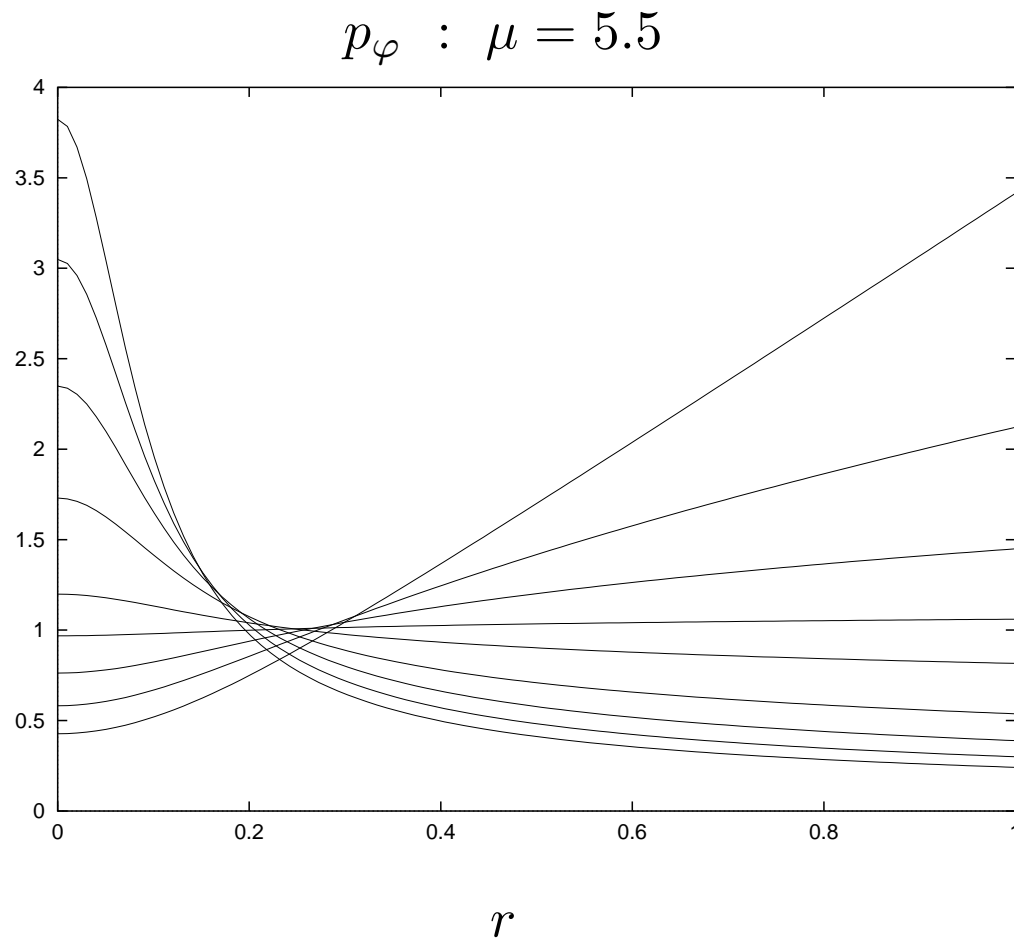


Figure 6: Gráficas de la presión acimutal, p_φ , para discos con $\mu = 5.5$ y $\alpha = 0.5, 0.6, 0.8, 1.1, 1.6, 2, 2.3, 2.8$ y 3.5 .

Modelos de Contra-Rotación Correspondientes

Como p_r depende de r , no se puede considerar que los dos flúidos contra-rotantes circulan a lo largo de geodésicas; sin embargo, se puede explorar la posibilidad de obtener un CRM bien definido con velocidades iguales y opuestas, para lo cual debemos calcular la velocidad tangencial U^2 :

$$U^2 = \frac{\alpha(\mu^2 - k^2)r^2}{(2\mu - \alpha) + \mu(2k^2 - \alpha\mu)r^2}. \quad (71)$$

Debemos imponer la condición

$$0 \leq U^2 \leq 1. \quad (72)$$

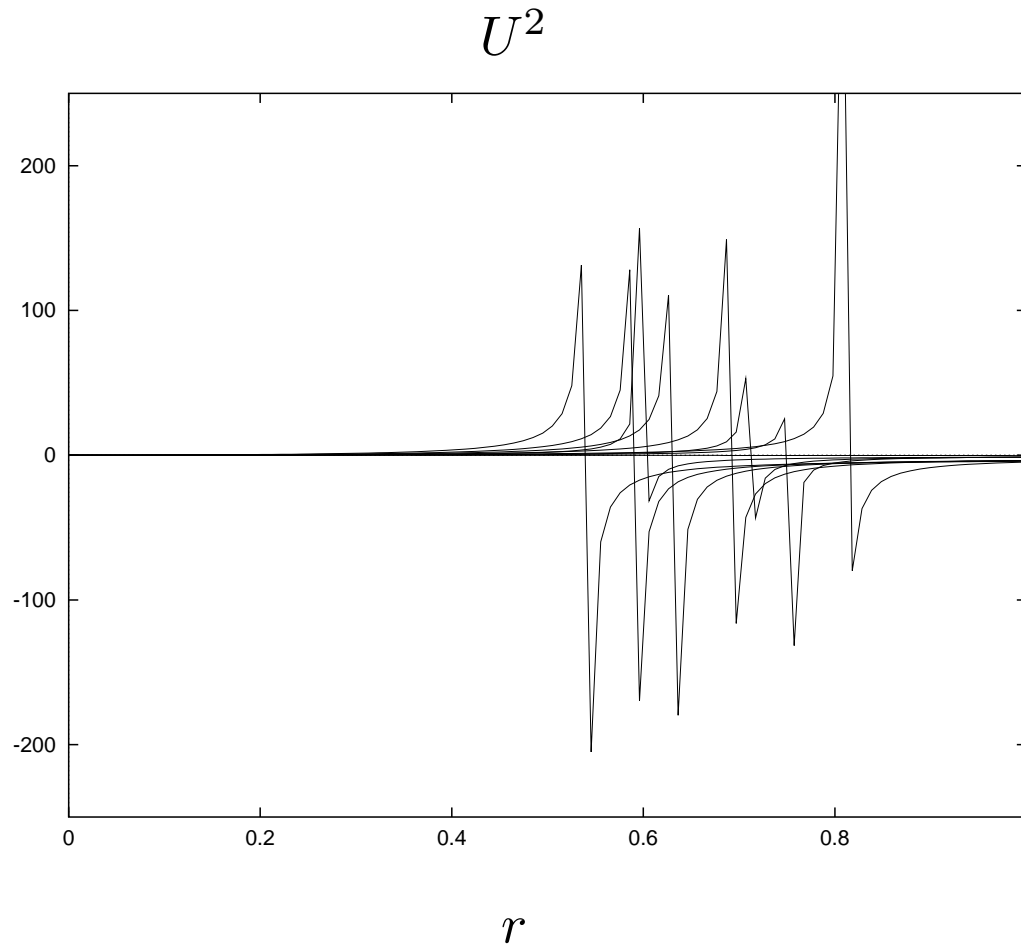


Figure 7: Gráficas de la velocidad de contra-rotación, U^2 , para discos con $\mu = 0.5$ y $\alpha = 0.5, 0.6, 0.8, 1.1, 1.4, 1.7, 2.2, 2.3$ y 2.8 .

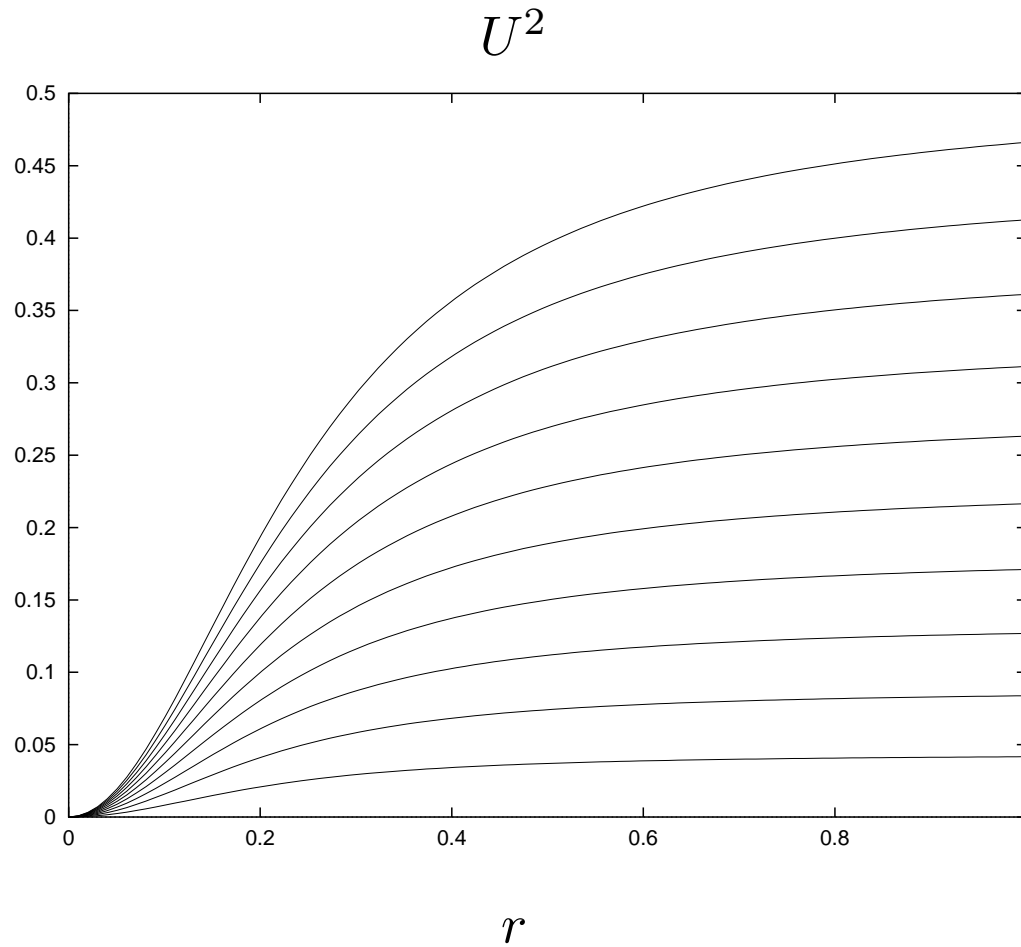


Figure 8: Gráficas de la velocidad de contra-rotación, U^2 , para discos con $\alpha = 5$ y $\mu = 5, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8$ y 5.9 .

$$h^2 = \frac{\alpha(\alpha + k)^{\mu/k}(\mu^2 - k^2)r^4}{(2\mu - \alpha) + [(2\mu - \alpha)k^2 - 2\alpha\mu^2]r^2}. \quad (73)$$

$$\sigma_+ + \sigma_- = 2 p_r \left[\frac{\mu}{\alpha} - \frac{1 + \mu^2 r^2}{1 + k^2 r^2} \right], \quad (74a)$$

$$\sigma_{\pm} + p_{\pm} = p_r \left[\frac{2\mu + \alpha}{2\alpha} - \frac{1 + \mu^2 r^2}{1 + k^2 r^2} \right]. \quad (74b)$$

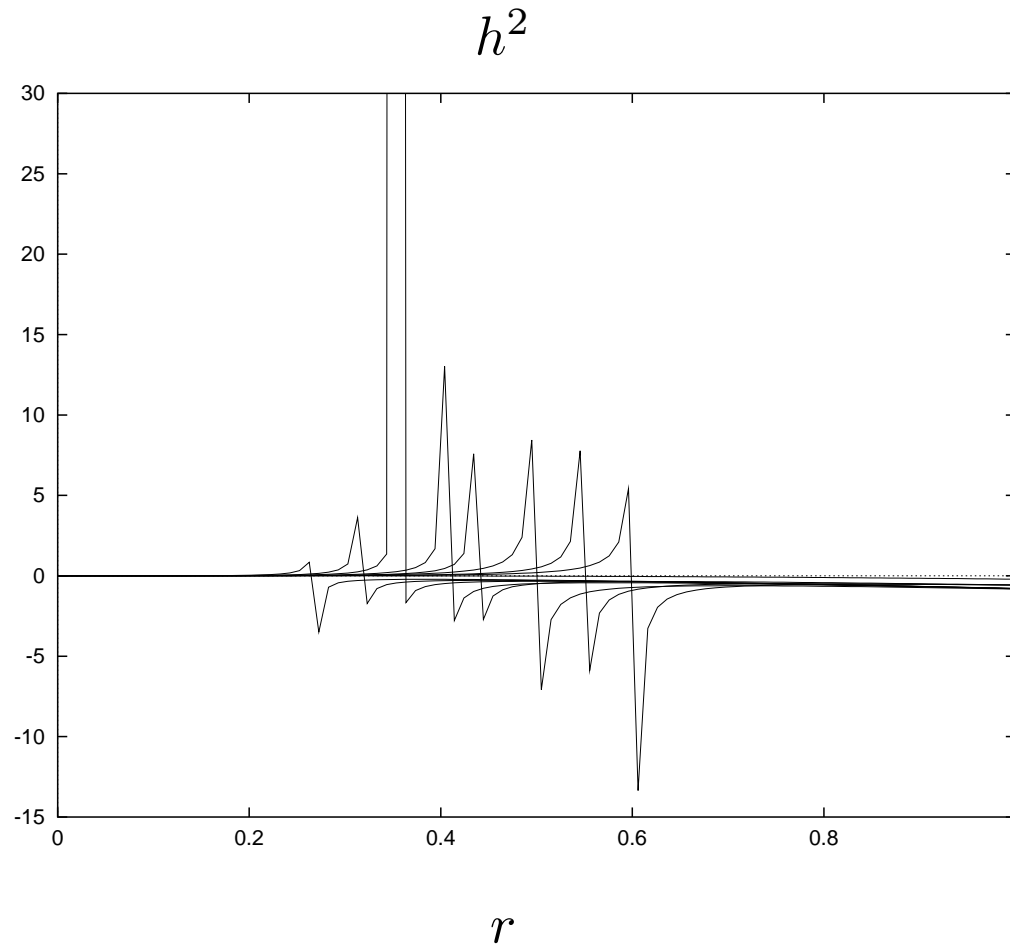


Figure 9: Momentum angular específico, h^2 , para discos con $\mu = 0.5$ y $\alpha = 0.5, 0.6, 0.8, 1.1, 1.4, 1.7, 2.2, 2.3$ y 2.8 .

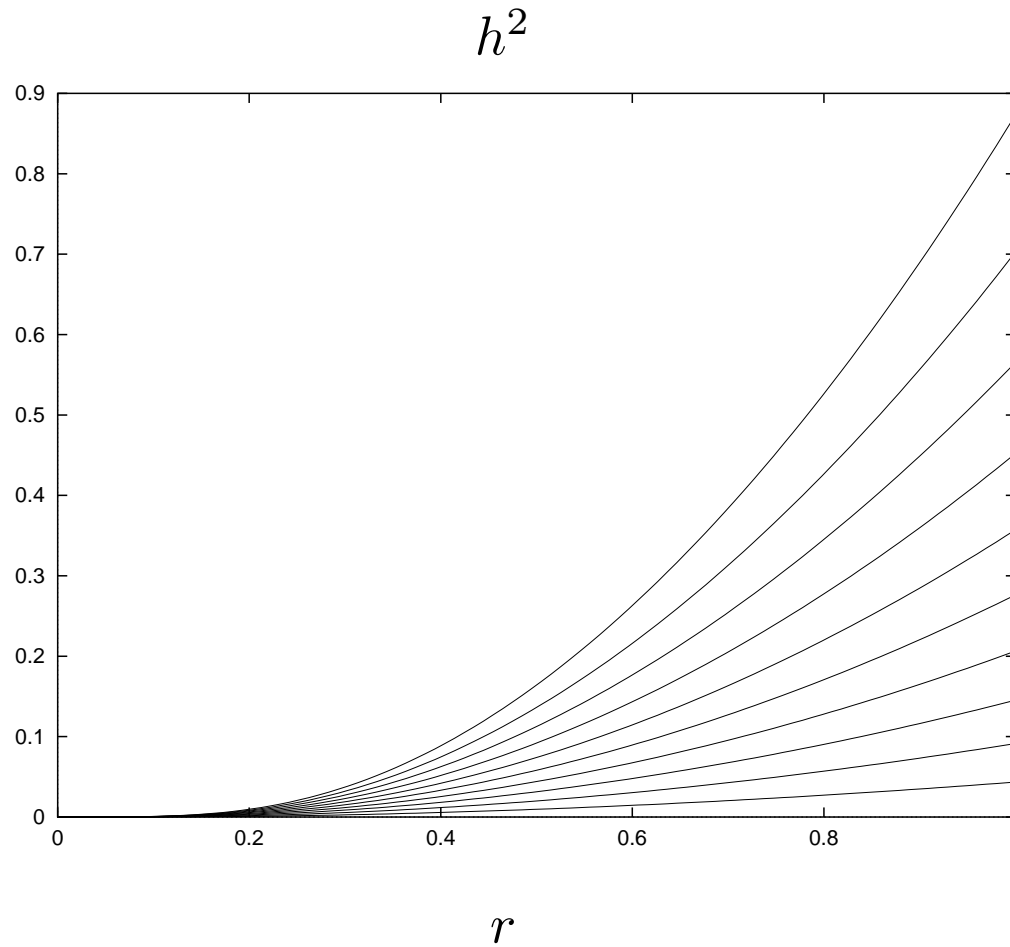


Figure 10: Momentum angular específico, h^2 , para discos con $\alpha = 5$ y $\mu = 5, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8$ y 5.9 .

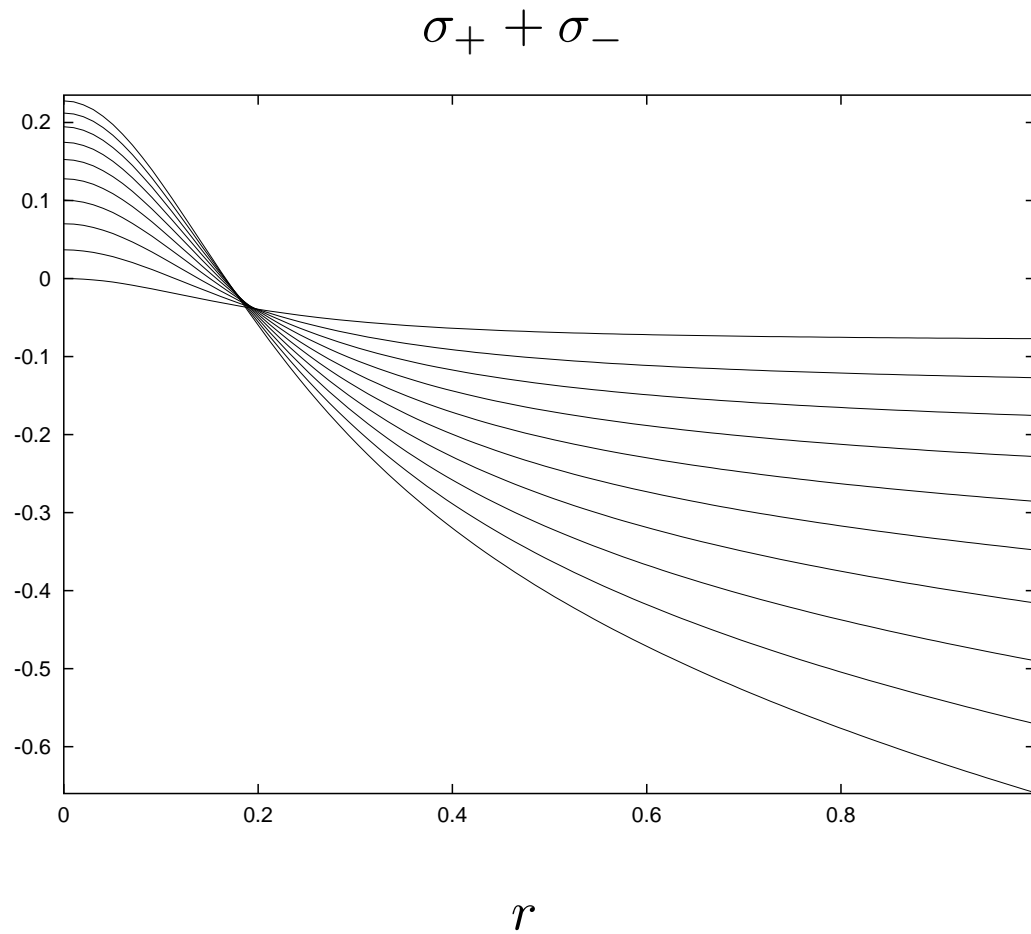


Figure 11: Gráficas de $\sigma_+ + \sigma_-$ para discos con $\alpha = 5$ y $\mu = 5, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8$ y 5.9 .

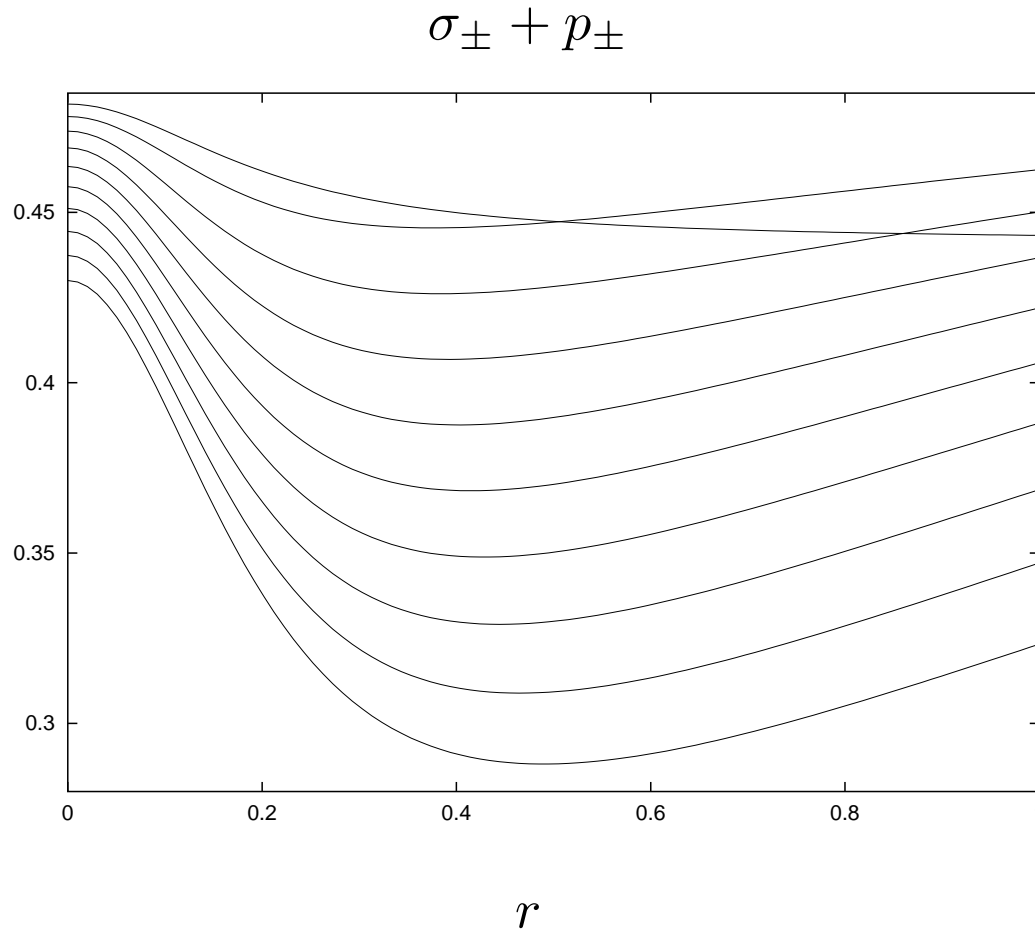


Figure 12: Gráficas de $\sigma_{\pm} + p_{\pm}$ para discos con $\alpha = 5$ y $\mu = 5, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8$ y 5.9 .