Métodos Matemáticos 2
Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

L. A. Núñez*
Centro de Astrofísica Teórica,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela
y
Centro Nacional de Cálculo Científico
Universidad de Los Andes (CeCalCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida,
Mérida 5101, Venezuela

Mérida, Octubre 2001 Versión α1.0

Índice

1. Definiciones para comenzar

Definición

La ecuación diferencial

$$a_0(x)\ y(x) + a_1(x)\ y'(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\ y^{(n-1)}(x) + a_n(x)\ y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

*e-mail: nunez@ula.ve

o equivalentemente,

$$\sum_{i=o}^{n} a_i(x)\ y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

es lineal de orden n . Obviamente,

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}(x) = 0 \qquad \Longrightarrow Homog\acute{e}nea \\ \mathcal{F}(x) \neq 0 \qquad \Longrightarrow InHomog\acute{e}nea \\ a_i(x) = a_i = ctes \end{array}$$

Definición
Si los coeficientes $a_i = ctes$ entonces la ecuación diferencial lineal y homogénea, de orden n , tiene asociada un polinomio característico de la forma

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Las raíces de este polinomio indicarán la forma de la solución.
Definición
Si el polinomio característico puede factorizarse

$$(r - m_1)^{k_1} (r - m_2)^{k_2} (r - m_3)^{k_3} \cdots (r - m_l)^{k_l} = 0$$

entonces diremos que las raíces $m_{k_1}, m_{k_2}, m_{k_3}, \cdots, m_{k_l}$ tienen multiplicidades $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_l$, respectivamente.

2. Homogéneas, Lineales, de Segundo Orden

La ecuación

$$a\ y'' + b\ y' + c\ y = 0$$

tiene asociada el polinomio característico

$$a\ r^2 + b\ r + c = 0$$

y sus raíces m_1 y m_2 condicionan la solución de la manera siguiente

1. Si $m_1 \neq m_2$ y m_1 y m_2 son reales, entonces la solución es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

2. Si $m_1 = m_2$ y m_1 y m_2 son reales, entonces la solución es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2\ x e^{m_1 x}$$

3. Si $m_1 = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ y $m_2 = \overline{m}_1 = \alpha - i\beta$, entonces la solución es

$$y = e^{\alpha\ x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2\ \operatorname{sen} \beta x \right)$$

Ejemplos

La ecuación

$$y'' + 3y' - 4y = 0; \qquad y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = -1$$

tiene como polinomio característico

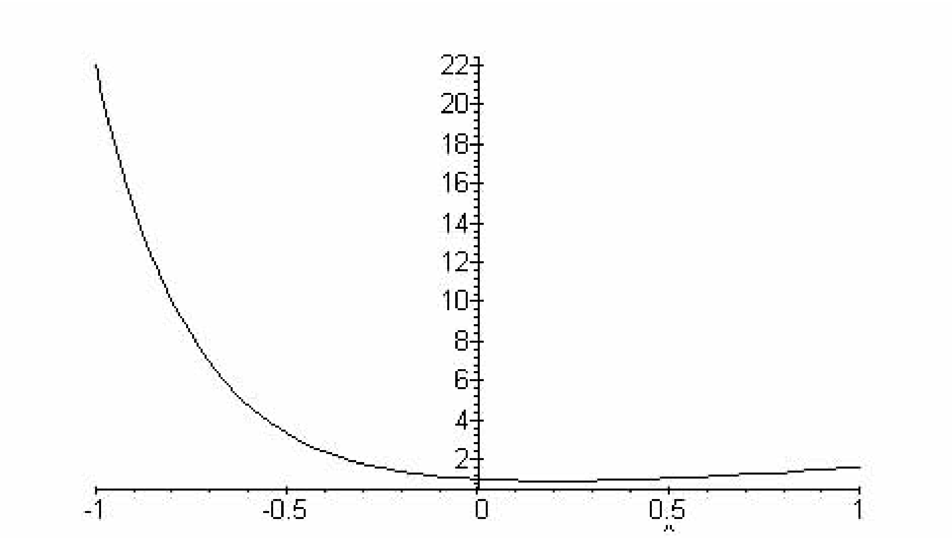
$$r^2 + 3r - 4 = (r + 4)(r - 1) = 0$$

y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$$

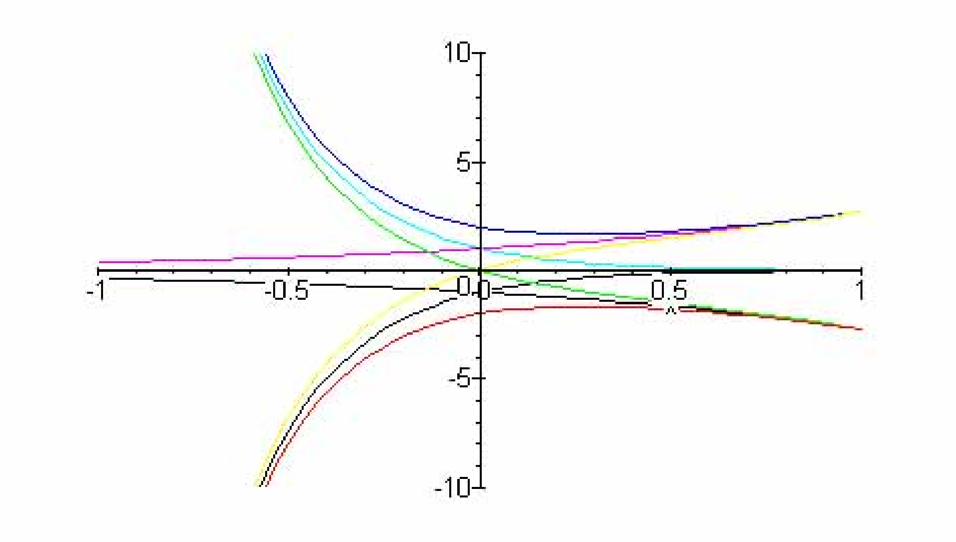
y como solución particular

$$y(x) = \frac{2}{5}e^{-4x} + \frac{3}{5}e^x$$



$y(x) = \frac{2}{5}e^{-4x} + \frac{3}{5}e^x$

De igual modo, para distintos valores de $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$ tendremos las siguientes gráficas



$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x} \text{ para } C_1 = \{-1, 0, 1\} \text{ y } C_2 = \{-1, 0, 1\}$$

¿Cuáles son las condiciones iniciales a las cuales corresponden esos valores de las constantes?

La ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0; \qquad y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = -1$$

tiene como polinomio característico

$$r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$$

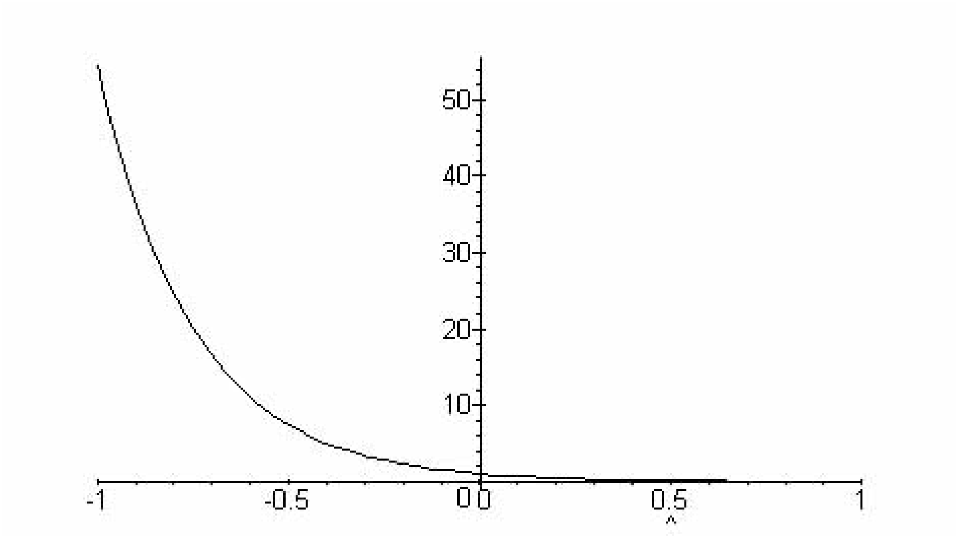
y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \; x e^{-x}$$

y como solución particular

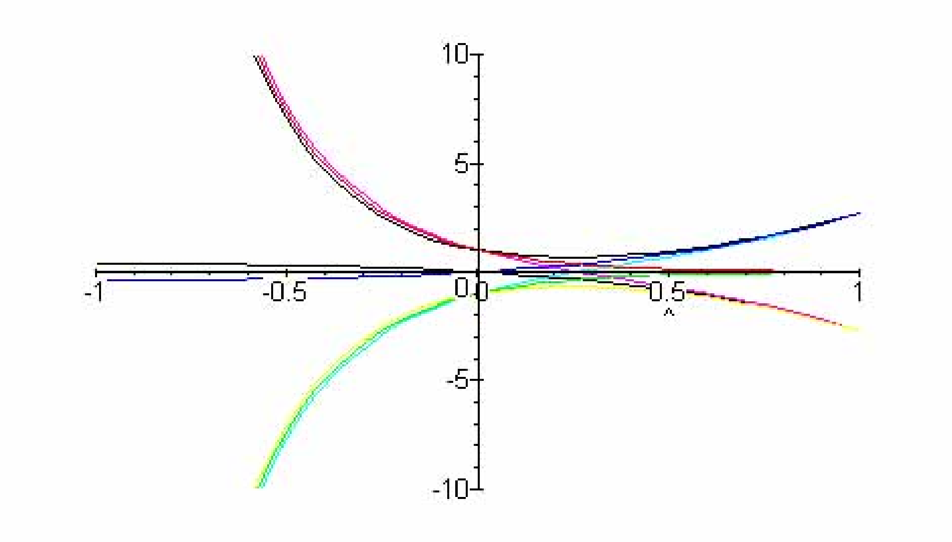
$$y(x) = e^{-x}$$

La gráfica será la figura



$$y(x) = e^{-x}$$

por su parte, para distintos valores de $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$ tendremos las siguientes gráficas



$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2\ xe^{-x}$ para $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

¿Cuáles son las condiciones iniciales a las cuales corresponden esos valores de las constantes?

Finalmente, la ecuación

$$y'' + 4y' + 20y = 0; \qquad y(0) = 3 \quad \wedge \quad y'(0) = -1$$

tiene como polinomio característico

$$r^2 + 4r + 20 = (r + 2)^2 + 16 = 0$$

con las siguientes soluciones

$$r = -2 \pm 4i$$

y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = e^{-2x} \ \ (C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x)$$

y como solución particular

$$y(x) = e^{-2x} \ \left(3 \cos 4x + \frac{5}{4} \operatorname{sen} 4x \right)$$

La gráfica será.

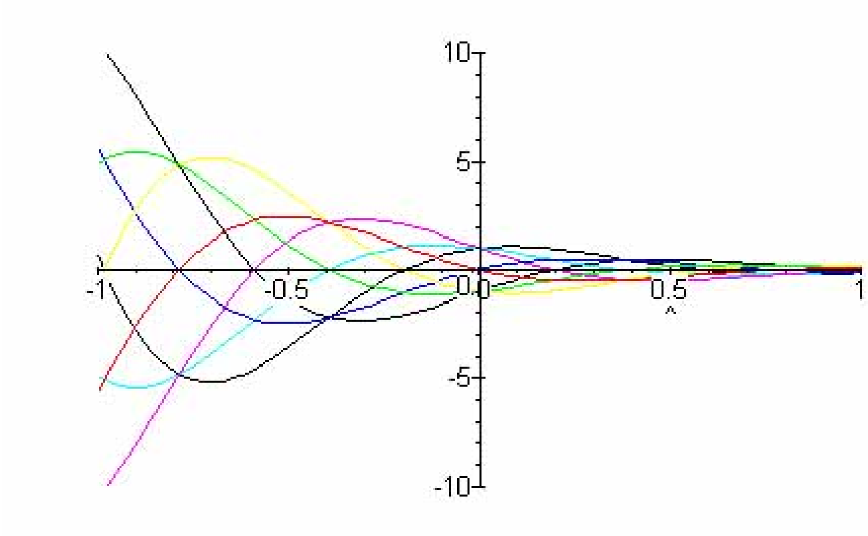
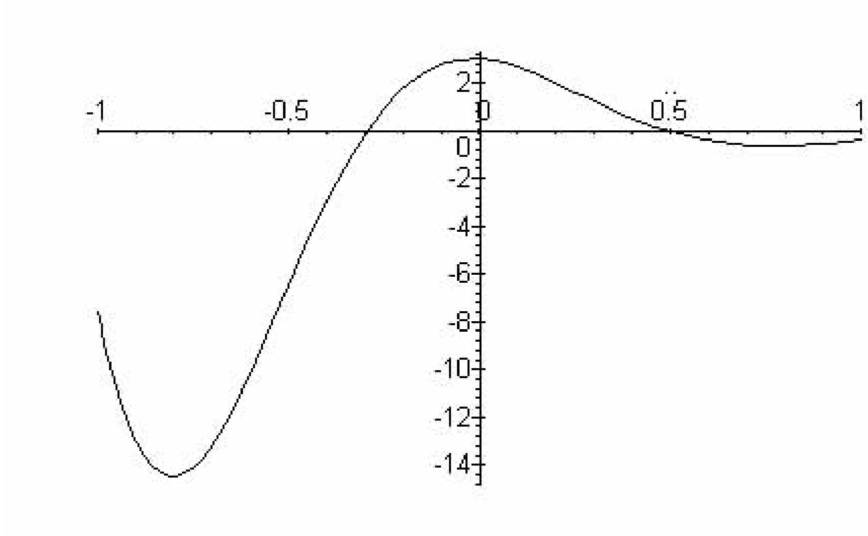


Figura 1: $y(x) = e^{-2x}\ \ (C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x)$ para $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$



$$y(x) = e^{-2x}\ \ \left(3 \cos 4x + \tfrac{5}{4} \operatorname{sen} 4x\right)$$

Al igual que en los casos anteriores, para distintos valores de tendremos las siguientes gráficas

3. Ecuaciones Diferenciales de Orden n

La ecuación

$$a_0\ y(x) + a_1\ y'(x) + \cdots + a_{n-1}\ y^{(n-1)}(x) + a_n\ y^{(n)}(x) = 0$$

con $a_i = ctes$ tiene asociada un polinomio característico de la forma

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

el cual condicionará la solución de la siguiente forma

1. Si m es una raíz real con multiplicidad $k \geqq 2$ entonces las k soluciones asociadas con m serán de la forma
$$e^{mx}, xe^{mx}, x^2e^{mx}, x^3e^{mx}, \cdots x^{k-1}e^{mx}$$

2. Si m y $\overline{m}$ son parejas de soluciones complejas, $\alpha \pm i\beta$, del polinomio característico y tienen multiplicidad k , entonces las soluciones correspondientes serán
$$e^{\alpha x}\cos\beta x; e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x; \cdots \; x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x; x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

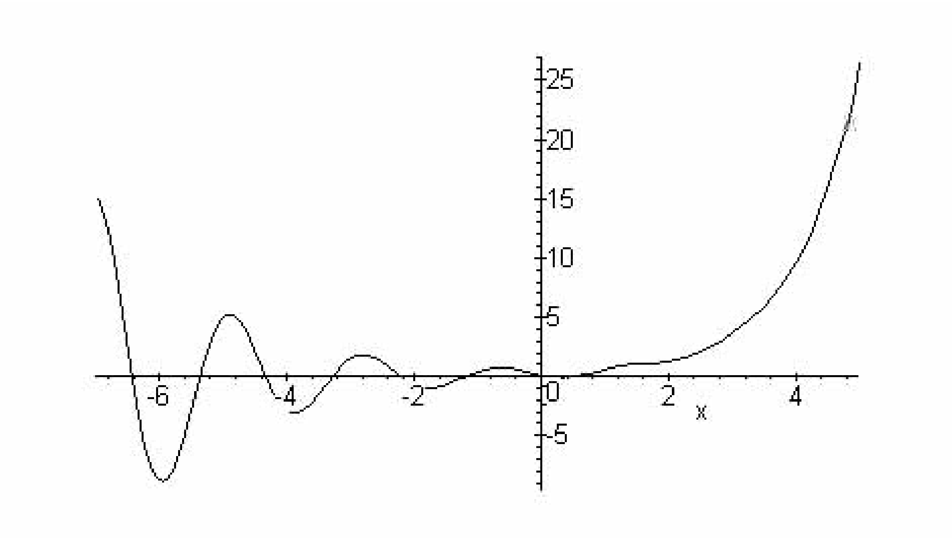
Ejemplos

- La ecuación
$$24y''' + 2y'' - 5y' - y = 0$$
tiene como polinomio característico
$$24r^3 + 2r^2 - 5r - 1 = (3r+1)(2r-1)(4r+1) = 0$$
consecuentemente con las raíces
$$m_1 = -\frac{1}{3}, \quad m_2 = \frac{1}{2}, \quad m_3 = -\frac{1}{4},$$
y con la solución de la forma
$$y(x) = C_1e^{-x/3} + C_2e^{x/2} + C_3e^{-x/4}$$

- La ecuación
$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$
tiene como polinomio característico
$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3 = 0$$
consecuentemente con las raíces $m = -1$ con multiplicidad $k = 3$ y con una solución de la forma
$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}$$

- La ecuación
$$4y^{(4)} + 12y''' + 49y'' + 42y' + 10y = 0$$
tiene como polinomio característico
$$4r^4 + 12r^3 + 49r^2 + 42r + 10 = (r^2 + 2r + 10)(2r+1)^2 = 0$$
consecuentemente con las raíces
$$m_1 = -1 + 3i, \quad m_2 = -1 - 3i, \quad m_3 = -\frac{1}{2},$$
donde m_3 tiene multiplicidad 2. Entonces la solución es de la forma
$$y(x) = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x) + C_3e^{-x/2} + C_4xe^{-x/2}$$

- La ecuación
$$y^{(4)} + 4y''' + 24y'' + 40y' + 100y = 0$$
tiene como polinomio característico
$$r^4 + 4r^3 + 24r^2 + 40r + 100 = (r^2 + 2r + 10)^2 = 0$$
consecuentemente con las raíces
$$m_1 = -1 + 3i, \quad m_2 = -1 - 3i,$$
con multiplicidad 2. Entonces la solución es de la forma
$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + C_3\ x \cos 3x + C_4\ x \operatorname{sen} 3x)$$
- La ecuación
$$4y''' + 33y' - 37y = 0;$$
con
$$y(0) = 0; \quad y'(0) = -1; \quad y''(0) = 3$$
tiene como polinomio característico
$$4r^3 + 33r - 37 = (r - 1)(4r^2 + 4r + 37) = 0$$
consecuentemente con una solución general de la forma
$$y(x) = C_1 e^x + e^{-x/2}(C_2 \cos 3x + C_3 \operatorname{sen} 3x)$$
y con la solución particular
$$y(x) = \frac{8}{45}e^x - e^{-x/2}(\frac{8}{45} \cos 3x + \frac{19}{45} \operatorname{sen} 3x)$$



$y(x) = \frac{8}{45}e^x - e^{-x/2}(\frac{8}{45} \cos 3x + \frac{19}{45} \operatorname{sen} 3x)$

4. Algunos Métodos de Solución

4.1. El Wronskiano

Definición: Independencia y Dependencia Lineal.
Sean n funciones $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots f_n(x)$, cuando menos $n-1$ veces diferenciables. Entonces, el conjunto $S=\{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots f_n(x)\}$, se dice linealmente dependiente en el intervalo I, si existen algunas constantes, $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \cdots c_n$ distintas de cero tal que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\ f_i(x) = c_1\ f_1(x) + c_2\ \ f_2(x) + \cdots + c_n\ f_n(x) = 0$$

Por el contrario, si no existe ninguna constante $c_i \neq 0$, se dirá que S es linealmente independiente.

Definición:Wronskiano
El conjunto $S=\{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots f_n(x)\}$ de funciones, cuando menos $n-1$ veces diferenciables, conforman el Wronskiano,

$$W(S) = W(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots f_n(x))$$

a través del siguiente determinante

$$W(S) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Si $W(S) \neq 0$ al menos en un punto dentro del intervalo I, entonces S es linealmente independiente

Definición: Conjunto Fundamental de Soluciones.
El conjunto $S=\{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots f_n(x)\}$ de n soluciones no triviales a la ecuación diferencial:

$$a_0(x)\ y(x) + a_1(x)\ y'(x) + \cdots + a_n(x)\ y^{(n)}(x) = 0, \qquad (1)$$

Se le denomina conjunto fundamental de soluciones. La combinación lineal

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\ f_i(x) = c_1\ f_1(x) + c_2\ \ f_2(x) + \cdots + c_n\ f_n(x)$$

también es solución de la ecuación diferencial (1) y se denomina como solución general de (1). Adicionalmente, si los coeficientes $a_i(x)$ son continuos en el intervalo abierto I para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, entonces la ecuación diferencial (1) tiene un conjunto fundamental de n soluciones linealmente independientes.

Definición: Soluciones Particulares y Generales.
Dada una ecuación diferencial lineal Inhomogénea

$$a_0(x)\ y(x) + a_1(x)\ y'(x) + \cdots + a_n(x)\ y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \qquad (2)$$

Si $y_p(x)$ es solución de (2) sin constantes arbitrarias, entonces $y_p(x)$ se denomina solución particular de (2). De igual modo, se denominará solución general de (2) a la suma de la solución, $y_h(x)$, de la ecuación homogénea (1) más la solución particular:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

4.2. Métodos de los Coeficientes Indeterminados

Dada la ecuación diferencial

$$a_0\ y(x) + a_1\ y'(x) + \cdots + a_n\ y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \tag{3}$$

con $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots a_n$ coeficientes constantes, el método de los coeficientes indeterminados se puede esquematizar de la siguiente manera

1. Resuelva la ecuación diferencial homogénea

   $$a_0\ y(x) + a_1\ y'(x) + \cdots + a_n\ y^{(n)}(x) = 0 \tag{4}$$

   y obtenga $y_h(x)$.

2. Proponga la forma de la solución particular para la ecuación inhomogénea (3) siguiendo el siguiente procedimiento. Dada $F(x) = b_0\ g_0(x) + b_1\ g_1(x) + \cdots + b_n\ g_n(x)$, con los b_i coeficientes constantes, entonces

   a) Si $F(x) = P(x)$, un polinomio, es decir $g_i(x) = x^m$ entonces proponga como solución particular a
   $$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m$$

   b) Si $g_i(x) = x^m e^{kx}$ entonces proponga como conjunto fundamental de soluciones particulares a
   $$y_p(x) = e^{kx}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m)$$

   c) Si $g_i(x) = x^m e^{kx} \cos \beta x$ o $g_i(x) = x^m e^{kx} \operatorname{sen} \beta x$, entonces proponga como conjunto fundamental de soluciones particulares a

   $$y_p(x) = \begin{array}{c} e^{kx}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m) \cos \beta x + \\ e^{kx}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m) \operatorname{sen} \beta x \end{array}$$

3. Determine el valor de los coeficientes A_i al sustituir la solución propuesta $y_p(x)$ en (3)

4. Construya las solución general $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Ejemplos

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$$

Tiene como solución de la homogénea

$$y_h = (C_1 + C_2 x)\, e^{-2x}$$

y proponemos como solución particular de la ecuación a

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C) + De^x$$

sustituimos su expresión en la ecuación y obtenemos

$$\begin{gathered}
A + De^x + \\
4\,(2Ax + B + De^x) + \\
4\left((Ax^2 + Bx + C) + De^x\right) + \\
= 4x^2 + 6e^x
\end{gathered}$$

de donde surge el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
2A &= 4 \\
8A + 4B &= 0 \\
2A + 4B + 4C &= 0 \\
9D &= 6
\end{aligned}$$

y de allí el valor de los coeficientes

$$A = 1; \quad B = -2; \quad C = \frac{3}{2}; \quad D = \frac{2}{3}$$

y con ellos la solución general

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-2x} + x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} e^x$$

Ejercicios

1. La ecuación
$$y'' - 3y' + 2y = 2x\ e^{3x} + 3 \operatorname{sen} x$$
tiene como solución
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x\ e^{3x} - \frac{3}{2}\ e^{3x} + \frac{3}{10}\ \operatorname{sen} x + \frac{9}{10} \cos x$$

2. La ecuación
$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2\ + 3\ e^{2x}$$
tiene como solución
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{7}{2} + 3x + x^2 + 3x\ e^{2x}$$

4.3. Métodos de Variación de los Parámetros

Dada la ecuación diferencial

$$a_0(x)\ y(x) + a_1(x)\ y'(x) + \cdots + a_n(x)\ y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \tag{5}$$

El método de variación de los parámetros se puede esquematizar de la siguiente manera

1. Resuelva la ecuación diferencial homogénea
$$a_0(x)\ y(x) + a_1(x)\ y'(x) + \cdots + a_n(x)\ y^{(n)}(x) = 0 \tag{6}$$
y obtenga $y_h(x)$.

2. Proponga como solución particular

$$y_p = u_1(x)\ y_{h1} + u_2(x)\ y_{h2}$$

donde las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son funciones a determinar en el método y las y_1 y y_2 son las soluciones a la ecuación homogénea (6).

3. Sustituya esta solución propuesta en la ecuación (5) para obtener, luego de algún nivel de álgebra elemental

$$\begin{gathered}
u_1(x)\overbrace{\left(a_0(x)\ y_1 + a_1(x)\ y_1' + a_2(x)\ y_1''\right)}^{=0} + \\
u_2(x)\overbrace{\left(a_0(x)\ y_2 + a_1(x)\ y_2' + a_2(x)\ y_2''\right)}^{=0} + \\
a_2(x)\left(u_1'y_1 + u_2'y_2\right)' + a_1(x)\left(u_1'y_1 + u_2'y_2\right) \\
a_2(x)\left(u_1'y_1' + u_2'y_2'\right) = \mathcal{F}(x)
\end{gathered}$$

de donde surge el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 \\
a_2(x)\left(u_1'y_1' + u_2'y_2'\right) &= \mathcal{F}(x)
\end{aligned}$$

con sus soluciones de la forma

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2(x)} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2(x)} & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_1(x)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2(x)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_2(x)$$

e integrando se obtienen los coeficientes respectivos,

$$u_1(x) = \int \mathcal{G}_1(x)\ dx; \qquad u_2(x) = \int \mathcal{G}_2(x)\ dx$$

para finalmente obtener la solución general

$$y = C_1\ y_1 + C_2\ y_2 + u_1(x)\ y_1 + u_2(x)\ y_2$$

nótese que no incorporamos las constantes de integración en la funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$.

Ejemplo:

La ecuación inhomogénea de Cauchy[1]-Euler[2]

$$a_0\ y(x) + a_1\ x\ y'(x) + \cdots + a_n\ x^n\ y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

con los $a_i = ctes$, puede ser resuelta por este método. Consideremos una ecuación de orden 2

$$c\ y(x) + b\ x\ y'(x) + a\ x^2\ y''(x) = \mathcal{F}(x)$$

La solución de la homogénea se propone como $y_h = x^m$ por lo tanto

$$\begin{aligned} c\ y(x) + b\ x\ y'(x) + a\ x^2\ y''(x) &= 0 \\ c\ x^m + b\ x\ mx^{m-1} + a\ x^2\ m(m-1)x^m &= 0 \\ x^m\left(c + bm + am(m-1)\right) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

con

$$m = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

por lo tanto

1. Si $m_1 \neq m_2$ y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

2. Si $m_1 = m_2$ y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^{m_1}\left(C_1 + C_2\ \ln x\right)$$

3. Si $m_1 = \overline{m}_2 = \alpha + i\beta$, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^{\alpha}\left(C_1 \cos(\beta\ \ln x) + C_2\ \operatorname{sen}(\beta\ \ln x)\right)$$

Ahora para lograr la solución de la inhomogénea suponemos el caso $m_1 \neq m_2$ por lo tanto

$$y_{1h} = x^{m_1} \quad y_{2h} = x^{m_2}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a\ x^2} & m_2\ x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1\ x^{m_1-1} & m_2\ x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a\ x^2} & m_2\ x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_1(x)$$

[1]**Louis Augustin Baron de Cauchy** (1789-1857). Matemático francés, uno de los creadores del análisis matemático moderno. Estudió, entre otras cuestiones, los criterios de convergencia de series, las funciones de variable compleja y los sistemas de ecuaciones diferenciales

[2]**Leonhard Euler** (1707-1783). Matemático suizo. Destacó en el estudio de diversas cuestiones del cálculo logarítmico y diferencial, así como de las series algebraicas y la trigonometría.

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1\ x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a\ x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1\ x^{m_1-1} & m_2\ x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1\ x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a\ x^2} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \mathcal{G}_2(x)$$

La siguiente ecuación diferencial

$$x^2y'' - xy + 5y = \frac{1}{x}$$

tiene como solución de la homogénea

$$y_h = x\ \ (C_1 \cos(2\ \ln x) + C_2\ \operatorname{sen}(2\ \ln x))$$

la solución particular por el método de variación de los parámetros queda como

$$y_p = u_1(x)\ y_{h1} + u_2(x)\ y_{h2}$$

calculando los coeficientes respectivos en donde el Wronskiano

$$W\left(x\ \cos(2\ \ln x);\ x\ \operatorname{sen}(2\ \ln x)\right) = 2x$$

por lo cual los coeficientes quedan

$$u_1 = \int \mathcal{G}_1(x)\ dx = \int \frac{x \operatorname{sen}(2 \ln x) \frac{1}{x}}{2x} dx = \frac{1}{4} \cos(2 \ln x)$$

$$u_2 = \int \mathcal{G}_2(x)\ dx = \int \frac{x \cos(2 \ln x) \frac{1}{x}}{2x} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2 \ln x)$$

finalmente las solución particular será

$$y_p = x\left(\frac{1}{4}\cos^2(2\ln x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\ln x)\right) = \frac{1}{4}x$$

y la general

$$y = x\ \ (C_1 \cos(2\ \ln x) + C_2\ \operatorname{sen}(2\ \ln x)) + \frac{1}{4}x$$

4.4. Métodos de Reducción de Orden

Este método supone, por lo tanto

$$a_0(x)\ y(x) + a_1(x)\ y'(x) + a_2(x)\ y''(x) = \mathcal{F}(x)$$

tendrá como primer solución no trivial para la ecuación homogénea, $y_{h1}(x)$, entonces la segunda solución vendrá dada por

$$y_{h2}(x) = y_{h1}(x) \int u(x)\ dx$$

donde $u(x)$ es la función incógnita a determinar. Sustituyendo esta expresión en la ecuación homogénea se obtiene

$$\overbrace{\left(a_0(x)\ y_1(x) + a_1(x)\ y_1'(x) + a_2(x)\ y_1''(x)\right)}^{=0} \int u(x)\ dx +$$
$$+ a_2(x)\ y_1(x)\ u'(x) + \left(2a_2(x)\ y_1'(x) + a_1(x)\ y_1(x)\right)\ u(x) = 0$$

resolviendo la ecuación diferencial para $u(x)$ tendremos que:

$$u(x) = \frac{e^{-\displaystyle\int \frac{a_1}{a_2} dx}}{y_1^2}$$

La ecuación

$$(x-1)y''' + 2y'' = \frac{x+1}{2x^2}$$

tiene como solución $y_1 = C_1 x + C_2$ y como solución general

$$y = C_1 x + C_2 + C_3 \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ x\ \ \ln|x|$$