

Métodos Matemáticos de la Física 2

Ejercicios

L. A. Núñez*

*Centro de Astrofísica Teórica,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela*

y

*Centro Nacional de Cálculo Científico
Universidad de Los Andes (CECALCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida,
Mérida 5101, Venezuela*

Versión α

Índice

1. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden	2
2. Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden	4
2.1. Problemas Geométricos.	4
2.2. Soluciones y Concentraciones	5
2.3. Interés Compuesto	5
2.4. Ley de Enfriamiento de Newton	6
2.5. Mecánica Elemental	6
3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior	7
4. Métodos Numéricos	8
5. Solución Mediante Series de Potencias	9
6. Métodos de Solución Mediante Series de Frobenius	12
7. Espacios Vectoriales Lineales	15
8. Funciones Especiales	18

*e-mail: nunez@ula.ve

1. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

1. Compruebe que las funciones propuestas son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

$$\begin{aligned}
 y &= c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{x^3}{3} && \Leftrightarrow y'' + y' - x^2 - 2x = 0. \\
 y &= e^x \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{x^3}{6} \right) && \Leftrightarrow y''' - 3y'' + 3y' - y - e^x = 0. \\
 y &= 2x \arctan cx && \Leftrightarrow xy' - y - x \operatorname{sen}(y/x) = 0. \\
 y &= \frac{c-x}{x} && \Leftrightarrow (2x+2y+2)y' + x + y + 1 = 0. \\
 y &= \frac{c-x}{x} && \Leftrightarrow xy' - y - y^2 = 0. \\
 y &= \left(\frac{1}{x^3} \right) \left(\frac{\pi^3}{8} - \cos x \right) && \Leftrightarrow xy' + 3y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}. \\
 y &= -x^2 + \frac{2x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + c} && \Leftrightarrow y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2.
 \end{aligned}$$

2. En cada uno de los casos que se presentan abajo, resuelva la ecuación diferencial propuesta:

- a) $y' + 3y = x + e^{-2x}$;
- b) $y' + y = xe^{-x} + 1$;
- c) $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = 3 \cos 2x, \quad x > 0$;
- d) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \quad x > 0$;
- e) $y' - y = 2xe^x, \quad y(0) = 1$;
- f) $y' + y = \frac{1}{1+x^2} \quad y(0) = 0$;
- g) $yy' = (y+1)^2 \quad y \neq -1, \quad \wedge \quad y(2) = 0$;

3. Encuentre la solución a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}$$

Utilice el viejo truco de considerar $x = x(y)$.

4. Muestre que $\phi(x) = e^{2x}$ y $\phi(x) = Ce^{2x}$, con $C = cte$, son soluciones de la ecuación diferencial

$$y' - 2y = 0;$$

Sin embargo, $\phi(x) = \frac{1}{x}$, es solución de

$$y' + y^2 = 0;$$

pero $\phi(x) = \frac{C}{x}$, no lo es. ¿Por qué esa diferencia?

5. Encuentre la solución al problema de valores iniciales de las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} xdx + ye^{-x}dy &= 0 & y(0) &= 1 \\ \frac{dr}{d\theta} &= r & r(0) &= 2 \\ y' &= xy^3(1+x^2)^{-1/2} & y(0) &= 1 \\ y' &= \frac{2x}{y+x^2y} & y(0) &= -2 \end{aligned}$$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y^2(1-x^2)^{1/2}dy &= \arcsen xdx, & ,1 < x < 1. \\ y' &= \frac{ax-b}{cx-d}, & a, b, c, d = \text{ctes.} \\ y' &= \frac{ay+b}{cy+d}. & a, b, c, d = \text{ctes.} \\ y' &= \frac{ay+bx}{cy+dx}, & \text{sust. } v = y/x. \\ (a^2 + y^2)dx + 2x\sqrt{ax-x^2}dy &= 0 & y(a) = 0. \end{aligned}$$

7. Determine cual de las siguientes ecuaciones es exacta y en ese caso encuentre la solución

$$\begin{aligned} (2x+3) + (2y-2)y' &= 0. \\ (1+y^2)dx + xydy &= 0. \\ x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} &= 0. \\ e^{-y}(1+y') &= 1. \\ (x^2y^2+1)dx + 2x^2dy &= 0. \\ y' + 1 &= \frac{(x+y)^m}{(x+y)^n + (x+y)^p}. \\ y' &= \text{sen}(x-y). \end{aligned}$$

8. Encuentre las soluciones a las siguientes ecuaciones diferenciales, las cuales son presuntamente Homogéneas

$$\begin{aligned} xy' &= y + \sqrt{y^2 - x^2}. \\ xy' &= \sqrt{y^2 - x^2}. \\ y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy &= 0. \\ (y - xy')^2 &= x^2 + y^2. \\ 2x + 2y - 1 + y'(x + y - 2) &= 0. \\ y \cos xdx + (2y - \text{sen } x)dy &= 0. \end{aligned}$$

9. Utilice la técnica del factor integrador para encontrar las soluciones a las siguientes ecuaciones

diferenciales

$$\begin{aligned}
 e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy &= 0. \\
 (2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}) dx &= \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy \\
 x(2x^2 + y^2) + yy'(x^2 + 2y^2) &= 0. \\
 (x^2 + y^2 + 1) dx + -2xy dy &= 0. \\
 (x^2 + y) dx - x dy &= 0. \\
 (2xy^2 - 3y^3) dx + (7 - 3xy^2) dy &= 0. \\
 (3xy + y^2) + (x^2 + xy) y' &= 0. \\
 (3y^2 - x) dx + (2y^3 - 6xy) dy &= 0.
 \end{aligned}$$

10. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{x^3 - 2y}{2x + y} & y(0) &= 0 \\
 y' &= \frac{2x + y}{3 + 3y^2 - x} \\
 axy(y')^2 + (x^2 - ay^2 - b)y' - xy &= 0. \\
 (2xye^{x^2} - x \operatorname{sen} x) dx + e^{x^2} dy &= 0. \\
 (x^2 + y^2) dx - xy dy &= 0. \\
 y' - 1 &= e^{x+2y}. \\
 y &= (y' - 1)e^{y'} \\
 xdy - ydx &= (xy)^{1/2} dx \\
 y &= 2xy' + y' \\
 x^2 y' + 2xy - y^3 &= 0. \\
 y' &= 1 + x^2 - 2xy + y^2 \\
 (x^2 y + xy - y) dx + (x^2 y - 2x^2) dy &= 0.
 \end{aligned}$$

2. Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

2.1. Problemas Geométricos.

- Encuentre la familia de curvas, $y = f(x)$, tal que el área comprendida entre $x = a \wedge x = x$; $y = 0 \wedge y = f(x)$ es proporcional a longitud del arco de esa misma familia.
- Encuentre la familia de curvas, $y = f(x)$, tal que la pendiente de la curva es igual al cuadrado de abscisa en el punto de contacto de la tangente y la curva.
- Sea $r = r(\theta)$ una curva descrita en coordenadas polares. Compruebe las siguientes afirmaciones

- $\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}r^2$ Siendo A el área encerrada por el arco de curva y dos radio vectores cualesquiera.
- $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$ con s el arco de curva.
- $\tan \beta = r \frac{d\theta}{dr}$

4. Encuentre la familia de curvas, $r = r(\theta)$ tal que el radio vector r y la tangente en un punto genérico $P(r, \theta)$, siempre forman un ángulo $k\theta$, con $k = cte$.
5. Dada la familia de curvas uniparamétricas $y = ax^4 + bx$; con a y b ctes, encuentre la familia de curvas que en todo punto sus tangentes forman un ángulo de $\frac{\pi}{4}$.
6. Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias concéntricas de centro en el origen. Encuéntrenlas ahora para otra familia de circunferencias, esta vez no concéntricas, con centros en el eje de la x y todos pasan por el origen.
7. Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$r = k \sec \theta$$

2.2. Soluciones y Concentraciones

1. En un tanque de 300 litros se ha vertido por error 150 kgs. de sal en vez de 100 kgs. Para corregir este error se remueve un tapón del fondo del tanque que permite salir 9 lits./ de la solución. Si simultáneamente se llena el tanque con agua fresca a la misma velocidad, ¿ cuánto tiempo debemos esperar para que resolvamos el problemas ?
2. Un tanque de 350 lits. tiene una concentración inicial de fluido de 1 kg./lit. Se rellena con una solución de 0.5 kg./lit a una velocidad de 1 lit/., mientras que un tapón en el fondo permite salir 3 lit/min. Si la solución se mantiene homogénea removiéndola constantemente, ¿ Cuál es el comportamiento en el tiempo de la concentración de la solución ?
3. Un tanque inicialmente contiene 300 lits. de agua fresca. En un determinado instante se vierte una solución 700 gr./lit de sal a razón de 7 lit/. mientras la misma cantidad sale desde el fondo del tanque. Luego de 10 min. cambia la solución entrante por agua fresca y se mantiene el mismo régimen de salida. Encuentre la cantidad de sal presente en el tanque a los 20 minutos siguientes.
4. El anhídrico carbónico (CO_2) contenido en el aire de una habitación de 130 m^3 es 0.3%. Un sistema de ventilación permite refrescar este aire, a razón de $27 \text{ m}^3 /$. con uno que contiene una 0.1% de la misma sustancia
 - a) Encuentre el porcentaje de CO_2 en la habitación luego de 30 min.
 - b) ¿ Cuándo se alcanza el 0.2% en de CO_2 en el aire de la habitación ?

2.3. Interés Compuesto

1. Busque en la prensa el cambio del dolar a bolívares en los últimos 4 años. Encuentre la tasa de interés que ha debido (en promedio) mantenerse para mantener, continuamente, un dolar en una cuenta de ahorro en un banco venezolano.
2. ¿ Cuál habrá de ser el monto de sus prestaciones a ser depositadas en un banco, al 50% anual, para poder retirar Bs. 80.000,00 mensual durante 20 años, al cabo de los cuales el capital inicial también se habrá consumido ?

3. Determine el capital acumulado en 20 años siguiendo cada uno de estos esquemas de inversión:

- a) Sin capital inicial y Bs. 1.500.000,00 anual.
- b) Bs. 10.000.000,00 de capital inicial y Bs. 1.000.000,00 anual
- c) Bs. 20.000.000,00 de capital inicial y Bs. 500.000,00 anual
- d) Bs. 30.000.000,00 y ningún depósito adicional.

2.4. Ley de Enfriamiento de Newton

1. Un cuerpo que se encuentra a $20^{\circ}C$ se coloca en un ambiente que se encuentra a $60^{\circ}C$. A los 5 min. el cuerpo alcanza los $30^{\circ}C$. ¿Cuál será su temperatura al cabo de 20 min. ? ¿Cuándo alcanzará los $40^{\circ}C$?
2. Si en el problema anterior la temperatura del medio ambiente decrece linealmente de tal forma que a las 2 horas llega a $5^{\circ}C$ ¿cuáles serán las repuestas a las preguntas formuladas ?
3. Suponga que una gota de agua esférica se evapora proporcionalmente al área de su superficie. Su radio, originalmente de 3mm, se reduce a 2mm al cabo de una hora. Encuentre la variación en el tiempo del radio de la gota. Nota: este problema no tiene que ver con la ley de enfriamiento, pero como se evapora la gota lo puse aquí.
4. Una taza de cobre, de 0.1 kg. de masa se encuentra inicialmente a $20^{\circ}C$ en el momento que se vierte sobre ella café a $70^{\circ}C$. ¿Cuál es la temperatura del café cuando la taza y el café están en equilibrio térmico ? Recuerde los conceptos de calor específico de los materiales y equilibrio térmico en termodinámica.

2.5. Mecánica Elemental

1. Un misil de masa m se lanza verticalmente hacia arriba. Si suponemos la gravedad constante y la resistencia del aire se describe como $k v^2$ determine
 - a) La expresión para la altura máxima alcanzada por el objeto.
 - b) La expresión (aproximada) para el tiempo de vuelo.
2. Suponga ahora el problema anterior, pero con un ángulo de lanzamiento genérico θ . Encuentre
 - a) La expresión para la altura máxima alcanzada por el objeto y la correspondiente al alcance horizontal.
 - b) La expresión para el tiempo de vuelo.
 - c) ¿ Existe algún ángulo de tiro en el cual el cuerpo tenga un alcance máximo ?
3. Si en los problemas anteriores para misiles de vuelo transcontinental en donde la aceleración de gravedad no es constante sino que viene descrita por

$$\mathcal{G}(x) = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

como cambian las expresiones de los problemas anteriores. Adicionalmente, en el primero de los problemas anteriores, encuentre la velocidad de escape del cuerpo.

4. Un objeto que se encuentra sumergido en un fluido a una cierta profundidad está sometido a la acción de tres fuerzas: el peso (hacia abajo); el empuje (hacia arriba e igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo); y la resistencia del fluido (contraria al movimiento, y para un cuerpo esférico de radio a , igual a $6\pi\mu a |v|$ donde μ es el coeficiente de viscosidad). Encuentre la expresión para la velocidad límite para un cuerpo de densidad ρ , moviéndose dentro de un fluido de densidad ρ' .
5. En el problema anterior, suponga que el volumen del cuerpo esférico cambia. Esta es la situación para un burbuja de aire que se desprende del fondo de un envase. Suponga que la burbuja está formada por un gas ideal y por lo tanto presión volumen y temperatura vienen relacionadas por $PV = NRT$, y finalmente recuerde como se vincula la presión del fluido con la profundidad.
6. Un cohete de masa inicial 600 Kg. tiene aproximadamente 450 Kg de combustible el cual se consume totalmente en 60 s y sale expulsado a una velocidad de 2 Km/s.
 - a) Desprecie la resistencia del aire y la variación del peso con la altura y encuentre su velocidad final luego de despegar
 - b) Suponga ahora que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad. ¿Cómo cambian las expresiones anteriores?
 - c) ¿Qué pasaría si tuviera que tomar en cuenta el cambio de la aceleración de gravedad con la altura? ¿Cómo cambian las expresiones anteriores?

3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior

1. En cada uno de los casos que se presentan abajo, resuelva la ecuación diferencial propuesta:

a) $y'' + 3y' + 2y = 8 + 6x + e^{-2x} + 2 \cos^2 x$;

b) $y''' - y' = e^{2x}(\sin x)^2 + 1$;

c) $y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 3e^{-x} + x^2e^{2x}$, $x > 0$;

d) $y'' + 2y = \sin x \sin 2x$, $x > 0$;

e) $x^2y'' + xy - y = 2xe^x$, $y(0) = 1 \wedge y'(0) = 1$;

f) $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x \ln x$ $y(0) = 0 \wedge y'(0) = 1$;

g) $(x - 3)^2y'' + (x - 3)y - y = 2xe^x$ $y(0) = 1, \wedge y'(2) = 0$;

h) $y'' + \lambda^2y = \sum_{m=1}^N a \cos m\pi x$ $\lambda > 0; \lambda \neq 0; m = 1, 2, \dots, N$

i) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 2x^2$ $x > 0$

j) $y'' + 3y' + 2y = \cosh 2x$

2. Una ecuación diferencial de segundo orden

$$f_2(x) y'' + f_1(x) y' + f_0(x) y = Q(x) \quad (1)$$

se dice exacta si su lado izquierdo puede ser escrito como un diferencial exacto de una ecuación de primer orden, i.e.

$$\frac{d}{dx} \left(M(x) \frac{dy}{dx} + N(x)y \right) = Q(x)$$

La condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta es

$$\frac{d^2 f_2}{dx^2} - \frac{d f_1}{dx} + f_0 = 0$$

y en este caso, se cumple que

$$M(x) = f_2(x); \quad N(x) = f_1(x) - \frac{d f_2}{dx}$$

Utilice esta técnica para integrar la siguiente ecuación diferencial

$$(x^2 - 2x) y'' + 4(x - 1) y' + 2y = e^{2x}$$

3. Otra técnica heredada de las ecuaciones diferenciales de primer orden es intentar encontrar un factor integrador. En este caso la ecuación diferencial (1) es integrable si

$$\frac{d^2(f_2 h)}{dx^2} - \frac{d(f_1 h)}{dx} + (f_0 h) = 0$$

Utilice esta técnica para integrar la siguiente ecuación diferencial

$$x^3 y'' - (2x^3 - 6x^2) y' - 3(x^3 + 2x^2 - 2x)y = 0$$

4. Métodos Numéricos

1. La función de Debye, $D(x)$, de la termodinámica estadística se utiliza par calcular el calor específico a volumen constante. Esta función viene definida por

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt$$

Encuentre los valores de la función, $D(,6)$ y $D(1)$,

- Mediante la aproximación de los rectángulos para $N = 10, 20$. Estime el error en cada caso.
- Mediante la aproximación de los trapecios para $N = 5, 10, 20$. Estime el error en cada caso.
- Mediante la regla de Simpson para $2N = 10, 20$. Estime el error en cada caso

2. El período para un péndulo simple viene dado por

$$T(\theta_m) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - (\text{sen}(\frac{\theta_m}{2}))^2 (\text{sen} \varphi)^2}} d\varphi$$

Encuentre los valores del período correspondiente a $T(\frac{\pi}{6})$, $T(\frac{\pi}{4})$, $T(\frac{\pi}{3})$. Considerando $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$ y $l = 50$ cm-

- a) Mediante la aproximación de los rectángulos para $N = 10, 20$. Estime el error en cada caso.
- b) Mediante la aproximación de los trapecios para $N = 5, 10, 20$. Estime el error en cada caso.
- c) Mediante la regla de Simpson para $2N = 10, 20$. Estime el error en cada caso

Compárelo con el valor obtenido de la serie

$$T(\theta_m) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\text{sen} \left(\frac{\theta_m}{2} \right) \right)^2 + \frac{9}{64} \left(\text{sen} \left(\frac{\theta_m}{2} \right) \right)^4 + \dots \right)$$

3. Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}; \quad y(0) = 1; \quad x \in [0, 1]; \quad h = 0,1$$

- a) Derive su expansión en series de Taylor de tercer orden. Estime el error cometido en cada paso. ¿Cuál debe ser el paso para garantizar un precisión de seis cifras significativas, por paso?
 - b) Resuelva el problema de valores iniciales utilizando: el método mejorado de Euler, el método modificado de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden.
 - c) Integre analíticamente y construya una tabla de comparación con todos los métodos arriba expuestos.
 - d) Resuelva el problema de valores iniciales utilizando el método de Runge-Kutta de paso variable de cuarto-quinto orden y muestre la variación del paso a lo largo del intervalo de integración.
4. Para resolver los siguientes problemas de valores iniciales, utilice los métodos de Adams Bashforth ($m = 3$); Nystrom ($m = 3$); Milne ($m = 3$); y predictor-corrector (Runge-Kutta 4 orden + Adams-Bashforth ($m = 3$) + Adams-Moulton ($m = 2$)) en el intervalo $x \in [-1, 1]$ y $h = 0,1$. Construya un cuadro comparativo y estime el error relativo cometido en cada paso.

a) $y' = \frac{2x}{3y^2}; \quad y(-1) = 1$

b) $y' = \frac{-3x^2}{2y}; \quad y(-1) = 1$

c) $y' = 2(xy)^{\frac{1}{3}}; \quad y(-1) = 1$

5. Solución Mediante Series de Potencias

1. Determine el tipo de punto singular y la cota inferior de radio de convergencia para las soluciones en series de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, alrededor de los puntos x_0 indicados en cada caso:

a) $y'' + xy' - x^2y = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 3.$

b) $(x^2 + x - 2)y'' - 2y' - xy = 0; \quad x_0 = -3, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 3.$

- c) $(x^2 + 4x + 5)y'' + 2xy' - y = 0$; $x_0 = -2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 2$.
d) $(\cos x)y'' + xy' + x^2y = 0$; $x_0 = 0$.
e) $xy'' + (\sin x)y' + x^2y = 0$; $x_0 = 0$.

2. Determine en las siguientes ecuaciones diferenciales:.

- a) 1) $(1 + x^2)y'' - xy' - 3y = 0$.
2) $y'' + (y')^2 - xy = 0$.
3) $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$.
4) $(y')^2 - xy = 1$.
5) $y' = x + \frac{1}{y}$.
6) $y'' - xy' - y = \sin x$

- b) La cota inferior del radio de convergencia de las series soluciones.
c) La solución general de las ecuaciones en serie de potencias hasta orden 5.
d) El intervalo de convergencia.

3. Encuentre la solución particular en series de potencias (hasta orden 5) para los siguientes problemas de valores iniciales

- a) $y' - \sin y - \cos x = 0$; $y(0) = 0$.
b) $y' = e^{x-1} + y^2$; $y(1) = 1$.
c) $y'' + xy' - x^2y = 0$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$
d) $(1 - x)y''' - 2xy' + 3y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(1) = -1$, $y''(0) = 2$
e) $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y(-1) = -1$, $y'(-1) = 1$.

4. Dada la ecuación de *Hermite*

$$y'' - 2xy + 2\lambda y = 0,$$

con λ una constante positiva y $\|x\| < \infty$. Nótese que la ecuación de *Hermite* es realmente una familia de ecuaciones. Tantas como valores de λ se seleccionen.

- a) Encuentre la solución general en serie de potencias.
b) Muestre que la siguiente relación de recurrencia, entre los coeficiente de la solución, se cumple:

$$a_{n+2} = \frac{2(n - \lambda)}{(n + 1)(n + 2)}a_n$$

- c) La ecuación de *Hermite* tiene una solución polinómica. Escriba una lista de esos polinomios para $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

d) Muestre que para una elección particular de los valores de a_0 y a_1 los valores obtenidos coinciden con los siguientes

$$H_0 = 1$$

$$H_1 = 2x$$

$$H_2 = 2x^2 - 2$$

$$H_3 = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$

e) Muestre que los polinomios de *Hermite* pueden ser generados por la siguiente fórmula

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

f) Muestre que, en general

$$\delta_{nm} = \frac{1}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_m(x) H_n(x) dx$$

Donde δ_{nm} es la función delta de Kronecker $\delta_{nm} = 0$ si $m \neq n$; y $\delta_{mm} = 1$.

g) Compruebe que los polinomios de Hermite, cumplen la siguiente relación

$$H_{n+1} = xH_n - nH_{n-1}.$$

5. Dada la ecuación de *Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0,$$

con λ una constante positiva, y $\|x\| < 1$. Al igual que la ecuación de *Hermite*, la ecuación de *Legendre* es realmente una familia de ecuaciones. Tantas como valores de λ se seleccionen.

a) Encuentre la solución general en serie de potencias.

b) Muestre que la siguiente relación de recurrencia, entre los coeficiente de la solución, se cumple:

$$a_{n+2} = \frac{(\lambda - n)(\lambda + n - 1)}{(n + 1)(n + 2)} a_n$$

c) Si λ es una constante positiva, la ecuación de *Legendre* tiene una solución polinómica. Escriba una lista de esos polinomios para $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$.

d) Muestre que para una elección particular de los valores de a_0 y a_1 los valores obtenidos coinciden con los siguientes

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

e) Muestre que los polinomios de *Legendre* pueden ser generados por la fórmula de Rodríguez

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

f) Muestre que, en general

$$\delta_{nm} = \frac{(2n+1)}{2} \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx.$$

g) Compruebe que los polinomios de Hermite, cumplen la siguiente relación:

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} x P_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1}.$$

6. Métodos de Solución Mediante Series de Frobenius

1. Ubique y determine el tipo de punto singular para las soluciones en series de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^2(x-2)^2 y'' - 2x(x+1)y' + (x^2+1)y = 0;$

b) $x^2(x-2)y'' - 2(x+1)y' + (x^2+1)y = 0;$

c) $xy'' + (\sin x)y' + 2xy = 0;$

d) $x^2y'' + (\sin x)y' + 2xy = 0;$

e) $x^3y'' + (\sin x)y' + 2xy = 0;$

f) $(x^2+4)^2y'' + x(x^2+4)y' - y = 0;$

2. Determine las dos soluciones linealmente independientes (hasta orden 5) en las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^2y'' - \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}y = 0.$

b) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$

c) $x^2y'' + xy' = 0.$

d) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0.$

e) $x^2y'' + 3xy' + x(1+x)y = 0.$

f) $2x^2(x+1)y'' + x(3x-1)y' + y = 0.$

g) $xy'' + (2x+3)y' + 4y = 0.$

h) $xy'' + y = 0.$

i) $2xy'' + (3-x)y' - y = 0.$

j) $x^2y'' - xy' + (1+x^2)y = 0.$

3. Dada la ecuación de *Laguerre*

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0,$$

con λ una constante positiva y $x > 0$.

- a) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación indicadora ?
- b) Encuentre la solución general en serie de Frobenius.
- c) Muestre que la siguiente relación de recurrencia, entre los coeficientes de una de las soluciones, cumple:

$$a_n = \frac{(n-1) - \lambda}{n^2} a_{n-1}$$

- d) La ecuación de *Laguerre* tiene una solución polinómica. Escriba una lista de esos polinomios para $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$.
- e) Muestre que para una elección particular de los valores de a_0 los polinomios obtenidos coinciden con los siguientes

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1 - x$$

$$L_2(x) = 2 - 4x + x^2$$

$$L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$$

$$L_4(x) = 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4$$

⋮

$$L_n(x) = (n!)^2 \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(j!)^2 (n-j)!} x^j$$

- f) Muestre que los polinomios de *Laguerre* pueden ser generados por la siguiente fórmula

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- g) Muestre que, en general

$$\delta_{nm} = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx$$

- h) Suponga $f(x)$ definida en el intervalo $(0, \infty)$ puede ser expresada como una combinación lineal de polinomios de *Laguerre*

$$f(x) = c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x) + c_2 L_2(x) + c_3 L_3(x) + \dots$$

Donde los coeficientes vienen dados por,

$$c_n = \frac{\int_0^\infty e^{-x} f(x) L_n(x) dx}{\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_n(x) dx}.$$

i) Compruebe que los polinomios de *Laguerre*, cumplen la siguiente relación

$$L_{n+1} = (x - (2n + 1))L_n - n^2 L_{n-1}.$$

4. La ecuación de *Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0$$

con λ una constante positiva, tiene dos polos regulares en $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$.

- ¿ Cuáles son las raíces de la ecuación indicadora para el polo $x_0 = 1$?
- Encuentre la solución general en serie de Frobenius alrededor del polo $x_0 = 1$.
- ¿ Para qué valores de x converge la serie ?

5. Dada la ecuación de *Gauss* o *Hipergeométrica*

$$x(1 - x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0,$$

con γ, α, β constantes.

- Es claro que $x_0 = 0$ es un polo regular ¿ Cuáles son las raíces, r_1 y r_2 , de la ecuación indicadora ?
- Muestre que la siguiente relación de recurrencia, entre los coeficiente de una de las soluciones, cumple:

$$a_{n+1} = \frac{(n + m + r)(n + r + \beta)}{(n + r + 1)(n + r + \gamma)} a_n$$

- Muestre que la solución general en serie de Frobenius para $\gamma \neq \text{entero}$, puede expresarse como la combinación lineal,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

donde

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{x^2}{2!} + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + n - 1)\beta(\beta + 1)\dots(\beta + n - 1)}{\gamma(\gamma + 1)\dots(\gamma + n - 1)} \frac{x^n}{n!} + \dots$$

con $\gamma \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x) \quad \gamma \neq 2, 3, 4, \dots$$

- ¿Cuál es la solución de la ecuación *Hipergeométrica* para $\gamma = \text{entero}$?
- Verifique las siguientes identidades:

- $F(1, \beta, \beta; x) = \frac{1}{1-x}$
- $F(\alpha, \beta, \beta; x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}$
- $xF(1, 1, 2; -x) = \ln(1 - x)$

$$4) F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right) = \sqrt{1-x^2}$$

6. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$(x - \mathcal{A})(x - \mathcal{B})y'' + \frac{b}{a}(x - \mathcal{C})y' + \frac{c}{a}y = 0.$$

utilizando el siguiente cambio de variables $x = (\mathcal{B} - \mathcal{A})u + \mathcal{C}$, e identificando los parámetros correspondientes en la ecuación de *Gauss*

- a) Encuentre la solución general en término de las Funciones *Hipergeométricas*
- b) Resuelva en términos de funciones Hipergeométricas las siguientes ecuaciones diferenciales:
 - 1) $x(1-x)y'' + (\frac{3}{2} - 2x)y' - \frac{1}{4}y = 0.$
 - 2) $x(1-x)y'' + (2 - 4x)y' - 2y = 0.$
 - 3) $(x-2)(1-x)y'' + \frac{7}{2}(1+x)y' - \frac{3}{2}y = 0.$
 - 4) $(x-2)(1-x)y'' + 4xy' + 2y = 0.$

7. Espacios Vectoriales Lineales

1. Sea \mathcal{P}_n el conjunto de todos los polinomios de grado n , en x , con coeficientes reales:

$$|\mathbf{p}_n\rangle \Rightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

- a) Demostrar que \mathcal{P}_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un escalar (número real).
- b) Si los coeficientes a_i son enteros, ¿ \mathcal{P}_n será un espacio vectorial ?
¿ Porqué ?
- c) ¿ Cuál de los siguientes subconjuntos de \mathcal{P}_n es un subespacio vectorial ?
 - 1) El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n - 1$.
 - 2) El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
 - 3) Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).
 - 4) Todos los polinomios que tienen a $x - 1$ como un factor.
- d) ¿ Cuál de los siguientes polinomios pertenece al subespacio de \mathcal{P} generado por: $|\mathbf{x1}\rangle = x^3 + 2x + 1$; $|\mathbf{x2}\rangle = x^2 - 2$; $|\mathbf{x3}\rangle = x^3 + x$;
 - 1) $x^2 - 2x + 1$;
 - 2) $x^4 + 1$;
 - 3) $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 1$;
 - 4) $x - 5$;
- e) ¿ Cuál de los siguientes conjunto de vectores en \mathcal{P}_4 son linealmente independientes ?
 - 1) $|\mathbf{x1}\rangle = 1$; $|\mathbf{x2}\rangle = x - 1$; $|\mathbf{x3}\rangle = x^2$; $|\mathbf{x4}\rangle = x^2 + 2x + 1$;

- 2) $|\mathbf{x}1\rangle = 2x$; $|\mathbf{x}2\rangle = x^2 + 1$; $|\mathbf{x}3\rangle = x + 1$; $|\mathbf{x}4\rangle = x^2 + 1$;
 3) $|\mathbf{x}1\rangle = x(x - 1)$; $|\mathbf{x}2\rangle = x$; $|\mathbf{x}3\rangle = x^3$; $|\mathbf{x}4\rangle = 2x^3 - x^2$;
 4) $|\mathbf{x}1\rangle = 1$; $|\mathbf{x}2\rangle = x$; $|\mathbf{x}3\rangle = x^2 + x^3$; $|\mathbf{x}4\rangle = x^2 + 2x + 1$;

f) Probar que los polinomios

$$|\mathbf{x}1\rangle = 1; \quad |\mathbf{x}2\rangle = x; \quad |\mathbf{x}3\rangle = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}; \quad |\mathbf{x}4\rangle = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x;$$

Forman una base en \mathcal{P}_4 . Expresar $|\mathbf{p}\rangle = x^2$; $|\mathbf{q}\rangle = x^3$ en función de esa base.

g) Sean $|\mathbf{p}_n\rangle = p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, $|\mathbf{q}_n\rangle = q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \in \mathcal{P}_n$. Considérese la siguiente definición:

$$\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle \Rightarrow a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i$$

- 1) Muestre que ésta es una buena definición de producto interno.
 2) Con esta definición de producto interior ¿ se puede considerar \mathcal{P}_n un subespacio de $\mathcal{C}_{[a,b]}$? ¿ Por qué ?

h) Considerando estas definiciones de producto interior en \mathcal{P}_n

- 1) $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$
 2) $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

Encontrar la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores en \mathcal{P}_3

- 1) $|\mathbf{x}1\rangle = 1$; $|\mathbf{x}2\rangle = x$;
 2) $|\mathbf{x}1\rangle = 2x$; $|\mathbf{x}2\rangle = x^2$;
 3) $|\mathbf{x}1\rangle = x(x - 1)$; $|\mathbf{x}2\rangle = x$;

i) Muestre que las siguientes operaciones, son transformaciones lineales $\mathcal{P}_n \mapsto \mathcal{P}_n$ y, en cada caso, indicar el dominio y el rango de la transformación, encontrar el espacio nulo y (cuando sea posibles) su inversa.

- 1) $\mathbf{A}|\mathbf{p}\rangle = (D^2 - 2D)p(x)$; con $D = \frac{d}{dx}$.
 2) $\mathbf{A}|\mathbf{p}\rangle = xp(x)$.
 3) $\mathbf{A}|\mathbf{p}\rangle = p(x) - p(0)$.
 4) $\mathbf{A}|\mathbf{p}\rangle = p(x)q(x)$; con $q(x)$ un polinomio cualquiera en \mathcal{P}_n

j) Encontrar la proyección perpendicular de los siguientes vectores en $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ (espacio de funciones continuas en el intervalo $[-1,1]$) al subespacio generado por los polinomios $1, x, x^2 - 1$. Calcular la distancia de cada una de estas funciones al subespacio mencionado.

- 1) $f(x) = x^n$; n entero
 2) $f(x) = \text{sen } x$;
 3) $f(x) = 3x^2$;

2. Sea una transformación lineal $\mathbf{A} : \mathcal{V}_1 \mapsto \mathcal{V}_2$ y sean

$$\mathcal{B}_1 = \{|\mathbf{b}_1\rangle, |\mathbf{b}_2\rangle, |\mathbf{b}_3\rangle, \dots, |\mathbf{b}_n\rangle\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \{|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, |\beta_3\rangle, \dots, |\beta_m\rangle\}$$

los conjuntos de vectores ortogonales base de \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 , respectivamente. Los vectores $|\mathbf{b}_i\rangle$ base de \mathcal{V}_1 transforman como

$$\mathbf{A}|\mathbf{b}_i\rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}|\beta_j\rangle \quad \text{donde } \alpha_{ij} = \langle\beta_j|\mathbf{A}|\mathbf{b}_i\rangle$$

Se denomina representación matricial α_{ij} del operador lineal \mathbf{A} :

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} \langle\beta_1|\mathbf{A}|\mathbf{b}_1\rangle & \langle\beta_2|\mathbf{A}|\mathbf{b}_1\rangle & \langle\beta_3|\mathbf{A}|\mathbf{b}_1\rangle & \cdots & \langle\beta_m|\mathbf{A}|\mathbf{b}_1\rangle \\ \langle\beta_1|\mathbf{A}|\mathbf{b}_2\rangle & \langle\beta_2|\mathbf{A}|\mathbf{b}_2\rangle & \langle\beta_3|\mathbf{A}|\mathbf{b}_2\rangle & \cdots & \langle\beta_m|\mathbf{A}|\mathbf{b}_2\rangle \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \langle\beta_1|\mathbf{A}|\mathbf{b}_n\rangle & \langle\beta_2|\mathbf{A}|\mathbf{b}_n\rangle & \langle\beta_3|\mathbf{A}|\mathbf{b}_n\rangle & \cdots & \langle\beta_m|\mathbf{A}|\mathbf{b}_n\rangle \end{pmatrix}$$

- a) Sea $D : \mathcal{P}_n \mapsto \mathcal{P}_n$ la diferenciación, $D = \frac{d}{dx}$, y $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ la base canónica asociada. Expresar la representación matricial de operador D en esa base.
- b) Expresar la representación matricial de operador $\mathbf{A} : \mathcal{P}_3 \mapsto \mathcal{P}_4$; $\mathbf{A}|\mathbf{p}\rangle = (x^2 - 4)p'(x)$ en las siguientes bases:
- 1) $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$;
 - 2) $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$;
 - 3) $\mathcal{B}_1 = \{1, x - 1, (x - 1)^2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$;

3. Los polinomios de *Legendre* pueden ser generados por la fórmula de Rodríguez,

$$|\mathbf{P}_n\rangle = P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- a) Muestre que los cinco primeros polinomios de *Legendre* forman una base de \mathcal{P}_5 con un producto interno definido por

$$\langle\mathbf{P}_n|\mathbf{P}_m\rangle = \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx.$$

- b) Expresar cada uno de los siguientes polinomios como una combinación lineal de los polinomios de *Legendre*, base de \mathcal{P}_5 .
- 1) $3x^4 - 2x^2 + 3x + 1$;
 - 2) $\frac{5}{3}x^3 + 2x^2 + x + 1$
 - 3) $4x^2 + 4x + 1$

4. En las siguientes situaciones, encontrar la mejor aproximación para las funciones indicadas (en el sentido del método de mínimos cuadrados) que mejor se ajusta al conjunto de puntos respectivo:

- a) La recta $y = cx$
A los puntos experimentales:
- 1) $(5, 9), (10, 21), (15, 19)$;
 - 2) $(-4, -11), (1, 3), (5, 16), (10, 29)$;

3) $(-6, 10), (2, -2), (8, -11), (10, -16)$;

4) $(-5, 19), (10, 31), (15, 31), (20, 40)$;

b) La función $y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

A los puntos experimentales:

1) $x_{11} = 0, \quad x_{12} = 0, \quad x_{13} = 0; \quad y_1 = 1;$
 $x_{21} = 1, \quad x_{22} = 1, \quad x_{23} = -1; \quad y_2 = 2;$
 $x_{31} = 1, \quad x_{32} = -1, \quad x_{33} = 1; \quad y_3 = -1;$
 $x_{41} = 0, \quad x_{42} = 1, \quad x_{43} = 1; \quad y_4 = -2;$

c) La ecuación cuártica $y = ax^4 + bx^2 + cx$

A los puntos experimentales: $(-2, 2), (-1, 1), (1, 2), (2, 1)$;

8. Funciones Especiales

1. Muestre que

a)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = (-1)^n \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

b)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx = \left(\frac{1}{4}\right)!$$

c) Si definimos el doble factorial como restando dos

$$2n(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2 \equiv (2n)!!$$
$$(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1 \equiv (2n+1)!!$$

Entonces muestre que:

$$(2n)!! = 2^n n!$$
$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

2. Una distribución de Maxwell que representa la fracción del número de partículas con una velocidad entre v y $v + dv$ se representa matemáticamente como

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) v^2 dv$$

con N el número total de partículas, m su masa, T la temperatura y k la constante de Boltzmann. El promedio o valor esperado de $\langle v^n \rangle$ se define como

$$\langle v^n \rangle = \frac{1}{N} \int v^n dN$$

Muestre que

$$\langle v^n \rangle = \frac{\left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \left(\frac{n+1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}\right)!}$$

3. Si $P_n(x)$ son los polinomios de Legendre, demostrar las siguientes identidades

a)

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

b)

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

c)

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$$

d)

$$\int_{-1}^1 xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{2n}{4n^2-1} \quad n \geq 1$$

e)

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P'_{n+1}(x)dx = 2 \quad n \geq 0$$

f)

$$\int_{-1}^1 xP_n(x)P'_n(x)dx = \frac{2n}{2n+1} \quad n \geq 0$$

4. Si $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite, demostrar las siguientes identidades

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} & n = 2k \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & n = 2k+1 \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)dx = \begin{cases} 0 & n = 2k \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{\sqrt{2\pi}(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!} & n = 2k+1 \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2} H_n(x)dx = 0 \quad m = \text{entero} \quad \wedge \quad 0 \leq m \leq n-1$$

d) las probabilidades de transición para el oscilador armónico en Mecánica Cuántica es

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x) H_m(x)dx = 2^{n-1}n!\sqrt{\pi}\delta_{m,n-1} + 2^n(n+1)!\sqrt{\pi}\delta_{m,n+1}$$

Ayuda, considere las funciones generatrices con variables (x, s) y (x, t)

e) De igual modo

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_n(x)dx = \sqrt{\pi}2^{n-1}n! \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

f) y

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^{n-1} (2n+1) n! \sqrt{\pi} \delta_{m,n} +$$

$$2^n (n+2)! \sqrt{\pi} \delta_{m,n+2} +$$

$$2^{n-2} n! \sqrt{\pi} \delta_{m,n-2}$$

g) Finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-x^2} H_n(x) H_{n+p}(x) dx = \begin{cases} 0 & p > r \\ 2^n (n+r)! \sqrt{\pi} & p = r \end{cases}$$

5. Por sustitución directa muestre que, si

$$\psi_n(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}}$$

entonces las expresiones funcionales para los operadores de aniquilación y creación son

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) = \sqrt{n} \psi_{n-1}(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(x)$$

6. Desarrollar las funciones dadas en término de los polinomios de Legendre, Hermite y Laguerre, calcular hasta el tercer término de las serie en cuestión

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^5 - x^3 + 2$$

$$f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x$$

7. Los Polinomios de Chebyshev (o Tchebishef) $T_m(x)$ se definen como

$$T_m(x) = \cos(n \arccos x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Muestre, con la metodología desarrollada en clase que estos polinomios ortogonales tienen las siguientes propiedades:

a) La función $u(x) = T_m(x)$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$(1-x^2) u''(x) - x u' + n^2 u = 0$$

b) Los polinomios $T_m(x)$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ con un peso definido como

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c) La función Generatriz viene dada por

$$\mathcal{T}(x, t) = \frac{1 - t^2}{1 - 2xt + t^2} = T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) t^n$$

8. Los polinomios de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, se definen como

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right]$$

con

$$\begin{cases} \alpha > -1 \\ \beta > -1 \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Entonces muestre que

a) La función $u(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$(1-x^2) u''(x) - [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] u' + n(n + \beta + \alpha + 1) u = 0$$

b) los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ con una función peso

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

c) La función Generatriz viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x, t) &= 2^{\alpha+\beta} \frac{\left(1 - t + \sqrt{1 - 2tx + t^2}\right)^{-\alpha} \left(1 + t - \sqrt{1 - 2tx + t^2}\right)^{-\beta}}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n \end{aligned}$$