

# Métodos Matemáticos de la Física 2

## Transformaciones Integrales

L. A. Núñez\*

*Centro de Astrofísica Teórica,  
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela*

y

*Centro Nacional de Cálculo Científico  
Universidad de Los Andes (CECALCULA),  
Corporación Parque Tecnológico de Mérida,  
Mérida 5101, Venezuela*

Mérida, Abril 2003 Versión  $\alpha$

## Índice

1. Cálculo Operacional	1
2. Definiciones para Comenzar	2
3. Transformada de Laplace	4
4. Ejemplos Sencillos	5
5. Integral de Convolución	7

## 1. Cálculo Operacional

Toda ecuación diferencial puede ser descrita de la siguiente forma

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}x}F(x) = f(x) \implies \mathbf{D}F(x) = f(x) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{D}(\bullet)$  es un operador diferencial lineal

$$\mathbf{D}(Ax^n + Bx^m) = \mathbf{A}\mathbf{D}(x^n) + \mathbf{B}\mathbf{D}(x^m) = nAx^{n-1} + mBx^{m-1} \quad (2)$$

---

\* e-mail: nunez@ula.ve

y en muchos aspectos ese operador diferencial  $\mathbf{D}(\bullet)$  puede ser tratado como un número más. A saber, para una ecuación diferencial genérica con coeficientes constantes se tiene

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 \quad \implies (\mathbf{D}^2 - 3\mathbf{D} + 2)y = x^2 \quad \implies (\mathbf{D} - 1)(\mathbf{D} - 2)y = x^2 \quad (3)$$

más aún

$$y = \frac{x^2}{(\mathbf{D} - 1)(\mathbf{D} - 2)} \quad \implies y = \frac{x^2}{(\mathbf{D} - 2)} - \frac{x^2}{(\mathbf{D} - 1)} \quad (4)$$

por lo cual expandiendo

$$\frac{1}{\mathbf{D} - 1} = \frac{-1}{1 - \mathbf{D}} = -1 - \mathbf{D} - \mathbf{D}^2 - \mathbf{D}^3 - \mathbf{D}^4 - \dots \quad (5)$$

$$\frac{1}{\mathbf{D} - 2} = \frac{-1}{2} \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{D}}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{\mathbf{D}}{4} - \frac{\mathbf{D}^2}{8} - \frac{\mathbf{D}^3}{16} - \dots \quad (6)$$

de donde

$$y = \left( -\frac{1}{2} - \frac{\mathbf{D}}{4} - \frac{\mathbf{D}^2}{8} - \frac{\mathbf{D}^3}{16} - \dots \right) x^2 - (-1 - \mathbf{D} - \mathbf{D}^2 - \mathbf{D}^3 - \mathbf{D}^4 - \dots) x^2 \quad (7)$$

por lo tanto tendremos la solución particular de la ecuación  $y'' - 3y' + 2y = x^2$

$$y = \left( -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) - (-x^2 - 2x - 2) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \quad (8)$$

Las operaciones que se usaron arriba están relacionadas muy estrechamente con las propiedades de la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathbf{D}t \quad (9)$$

## 2. Definiciones para Comenzar

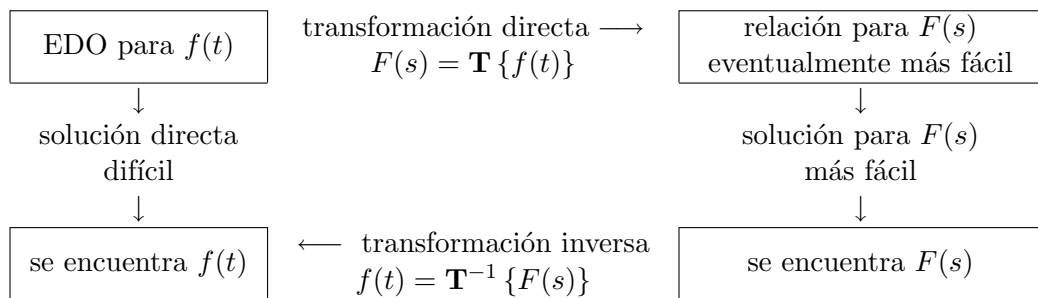
En general vamos a definir una transformación integral,  $F(s)$ , de una función,  $f(t)$  como

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f(t) dt = \mathbf{T}\{f(t)\} \quad (10)$$

donde  $\mathcal{K}(s, t)$  es una función conocida de  $s$  y  $t$ , denominada el *núcleo* de la transformación. Si  $a$  y  $b$  son finitos la transformación se dirá finita, de lo contrario infinita. Dependiendo de la selección del núcleo y los límites tendremos distintas transformaciones integrales. En Física las más comunes son:

<b>Nombre</b>	$F(s) = \mathbf{T} \{f(t)\}$	$f(t) = \mathbf{T}^{-1} \{F(s)\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds$
Fourier de senos y cosenos	$F(s) = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(st)}{\cos(st)} f(t) dt$	$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(ts)}{\cos(ts)} F(s) ds$
Fourier compleja	$F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{i st} f(t) dt$	$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i st} F(s) ds$
Hankel	$F(s) = \int_0^\infty t J_n(st) f(t) dt$	$f(t) = \int_0^\infty s J_n(ts) F(s) ds$
Mellin	$F(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t} F(s) ds$

La idea detrás de la utilidad de las transformaciones integrales puede resumirse en el siguiente esquema



### 3. Transformada de Laplace

En nuestro caso ilustraremos el uso de transformaciones integrales con la transformada de Laplace, que denotaremos de manera simbólica como  $F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$ . La siguiente tabla resume las transformaciones de algunas funciones.

$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$		$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$
1	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$e^{a t}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s - a}, \quad s > a$
$\sin(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$t^n \quad n > 0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$t^p \quad p > -1$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
$\sinh at$	$\longleftrightarrow$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \ a\ $
$\cosh at$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \ a\ $
$e^{a t} \begin{Bmatrix} \sin(bt) \\ \cos(bt) \end{Bmatrix}$	$\longleftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \frac{a}{(s-a)^2 + b^2} \\ \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \end{Bmatrix} \quad s > \ a\ $
$t^n e^{a t} \quad n \in \mathbb{N}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$

$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$		$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$
$u_c(t) \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$	$c > 0 \longleftrightarrow$	$\frac{e^{-c t}}{s} \quad s > 0$
$u_c(t) f(t - c)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-c t} F(s)$
$e^{c t} f(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s - c)$
$f(c t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
$\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$	$\longleftrightarrow$	$F(s) G(s)$
$\delta(t - c)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-c s}$
$f^{(n)}(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n f(t)$	$\longleftrightarrow$	$F^{(n)}(s)$

#### 4. Ejemplos Sencillos

Como un ejemplo de lo anterior, encontraremos la solución a las siguientes ecuaciones diferenciales

1. Ecuación diferencial inhomogénea, continua, con valores iniciales

$$y'' + y = \sin 2t \quad \text{con} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\mathbf{L}\{y'' + y\} = \mathbf{L}\{\sin 2t\} \quad \Rightarrow \quad s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4} \quad (12)$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4} = \frac{\frac{5}{3}}{s^2 + 1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + 4} \quad (13)$$

mediante la transformada inversa en cada término

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{3}}{s^2+1}\right\} &= \frac{5}{3} \sin t \\ \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}\right\} &= \frac{1}{3} \sin 2t \end{aligned} \right\} \Rightarrow y(t) = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \quad (14)$$

2. Ecuación diferencial, con valores iniciales, inhomogénea a una función escalón:

$$y'' + 4y = h(t) = \begin{cases} 1 & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0 & 0 \leq t \leq \pi \quad t \geq 2\pi \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$y'' + y = h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t) \quad \Rightarrow \mathbf{L}\{y'' + 4y\} = \mathbf{L}\{u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)\} \quad (16)$$

$$\Rightarrow (s^2 + 4)Y(s) - sy(0) - y'(0) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s} \quad (17)$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 4)} \quad (18)$$

mediante la transformada inversa

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} = \cos 2t \quad (19)$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)}\right\} = u_\pi(t)g(t - \pi) \quad \text{con } g(\tau) = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 4)}\right\} \quad (20)$$

por lo tanto

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)}\right\} = u_\pi(t)\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right)\right\} = u_\pi(t)\left[\frac{1}{4}(1 - \cos 2(t - \pi))\right] \quad (21)$$

del mismo modo

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 4)}\right\} = u_{2\pi}(t)\left[\frac{1}{4}(1 - \cos 2(t - 2\pi))\right] \quad (22)$$

recordemos que hemos definido la función escalón como

$$u_c(t) \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases} \quad c > 0 \quad (23)$$

y finalmente la solución será

$$y(t) = \cos 2t + u_\pi(t)\left[\frac{1}{4}(1 - \cos 2(t - \pi))\right] - u_{2\pi}(t)\left[\frac{1}{4}(1 - \cos 2(t - 2\pi))\right] \quad (24)$$

### 3. Ecuación diferencial, con valores iniciales, inhomogénea a una función impulso (delta de Dirac)

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad \text{con } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

donde la función (distribución) delta de Dirac viene definida por

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad \text{con } t \neq t_0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta(\tau - \tau_0) = 1 \quad (26)$$

con la útil propiedad de

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta(\tau - \tau_0) f(\tau) = f(\tau_0) \quad (27)$$

En una de las tablas anteriores hemos mostrado la transformada de Laplace de la función (distribución) Delta de Dirac:  $\mathbf{L}\{\delta(t-c)\} = e^{-c s}$  por lo tanto

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}\{y'' + 2y' + 2y\} = \mathbf{L}\{\delta(t - \pi)\} \quad (28)$$

$$(s^2 + 2s + 2) Y(s) = e^{-\pi s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{(s^2 + 2s + 2)} = e^{-\pi s} \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \quad (29)$$

por lo tanto

$$y(t) = \mathbf{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s} \frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right\} = u_\pi(t) \left[ e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi) \right] \quad (30)$$

o también

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < \pi \\ e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi) & t \geq \pi \end{cases} \quad (31)$$

## 5. Integral de Convolución

Algunas veces es posible identificar la transformada de Laplace  $H(s)$  como el producto de dos transformadas de Laplace,  $F(s)$  y  $G(s)$  las cuales son las transformadas de funciones conocidas  $f(t)$  y  $g(t)$ . **Pero eso es algunas veces: en general la transformada del producto de funciones no es el producto de transformadas.** Esas veces están contenidas en el llamado Teorema de Convolución, según el cual se establece una especie de “producto generalizado” de funciones  $f$  y  $g$ .

Sean

$$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\} \quad \text{y} \quad G(s) = \mathbf{L}\{g(t)\} \quad \text{que existen en el intervalo } s > a > 0$$

Entonces

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathbf{L}\{h(t)\} \quad \text{para } s > a$$

donde

$$h(t) = \mathbf{L}^{-1}(F(s)G(s)) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = (f * g)(t)$$

y  $h(t)$  se indentifica como la convolución de  $f$  y  $g$ . Las integrales arriba expuestas se conocen con integrales de convolución y hemos denotado  $h(t) = (f * g)(t)$  para insistir que se trata de un “producto generalizado” de funciones  $f$  y  $g$ . que comparte, con el producto ordinario de funciones, las siguientes propiedades

$$f * g = g * f \quad (\text{conmutatividad})$$

$$f * [g + k] = f * g + f * k \quad (\text{distributividad})$$

$$f * [g * k] = [f * g] * k \quad (\text{asociatividad})$$

$$f * 0 = 0 * f = 0$$

sin embargo  $f * 1 \neq f$  tal y como se puede apreciar de

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t-\tau) 1 d\tau = \int_0^t f(t-\tau) d\tau \neq f(t)$$

en el caso particular de que  $f(t) = \cos(t)$  tendremos

$$(\cos * 1)(t) = \int_0^t \cos(t - \tau) 1 \, d\tau = \sin(t - \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \sin(0) - \sin(t) = -\sin(t)$$

y por la misma razón, no hay garantía que  $(f * f)(t) > 0 \quad \forall f \neq 0$

El ejemplo más emblemático de la aplicación del Teorema de Convención es el estudio del oscilador amortiguado y forzado, el cual viene descrito por la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad \text{con } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \begin{cases} x_0 = x(0) \\ \dot{x}_0 = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} \end{cases} \quad (32)$$

la transformada de Laplace nos lleva a

$$s^2 X(s) - sx_0 - \dot{x}_0 + 2\lambda X(s) - 2\lambda x_0 + \omega_0^2 X(s) = F(s) \quad (33)$$

resolviendo

$$X(s) = \frac{2\lambda x_0 + \dot{x}_0 + sx_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} + \frac{F(s)}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \quad (34)$$

el primer sumando queda como

$$X_1(s) = \frac{2\lambda x_0 + \dot{x}_0 + sx_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} = \frac{x_0 (s + \lambda)}{(s + \lambda)^2 + (\omega_0^2 - \lambda^2)} + \frac{\dot{x}_0 + x_0 \lambda}{(s + \lambda)^2 + (\omega_0^2 - \lambda^2)} \quad (35)$$

y por lo tanto devolviendo el cambio

$$x_1(t) = x_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega t \quad \text{con } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (36)$$

$$X_2(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \quad (37)$$

y por el teorema de convención

$$x_2(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \sin \omega (t - \tau) f(t) \, d\tau \quad (38)$$

y por lo tanto la solución general será

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega t + \int_0^t \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \sin \omega (t - \tau) f(t) \, d\tau \quad (39)$$