Integración por el método de los residuos

1. Introducción

Las expansiones de funciones en series de potencias dejan "residuos" al detener la expansión a para una determinada potencia. Esto se puede apreciar claramente en la expresión de Taylor para funciones analíticas. Ahora, las expansiones de Laurent nos muestran otro "residuo". Explotaremos las series de Laurent para funciones con polos y construiremos un método para evaluar integrales de funciones en esos puntos. Primero estudiaremos los residuos en general y luego los utilizaremos para evaluar integrales.

2. Los residuos de Laurent

Hemos dicho que si $f(z)$ tiene un polo de orden p en $z = z_0 \in \mathcal{R}$, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\, f(z) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

más aún, tendremos que los coeficientes de la expansión pueden ser calculados a partir de

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad \text{si } n = -1 \quad \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 2i\pi a_{-1} \equiv 2i\pi \mathrm{Res}\, f(z) \tag{1}$$

Es decir, la integración a lo largo de un contorno $\mathcal{C}$ que aisle al polo $z = z_0$ es proporcional al residuo correspondiente a la expansión de Laurent alrededor de ese polo. Nos queda entonces calcular el residuo para así no calcular la integral.

Esta situación se ilustra con el siguiente ejemplo. Supongamos

$$f(z) = \frac{\mathrm{sen}\, z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} + \cdots,$$

por lo tanto:

$$a_{-1} = -\frac{1}{3!} \quad \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 2i\pi a_{-1} = -\frac{i\pi}{3}$$

En general, si $f(z)$ tiene un polo de orden p en $z = z_0 \in \mathcal{R}$, entonces

$$(z-z_0)^p f(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z-z_0) + \cdots + a_0(z-z_0)^p + \cdots \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}}[(z-z_0)^p f(z)] = (p-1)!a_{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

con lo cual concluimos que

$$a_{-1} \equiv \mathrm{Res}\, f(z) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(p-1)!} \frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}} [(z-z_0)^p f(z)] \right) \tag{2}$$

Si, por ejemplo consideramos

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} \equiv \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_0 = i \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-i)^2 f(z)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right] \\ \\ z_0 = -i \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z+i)^2 f(z)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\right] \end{array} \right.$$

con lo cual

$$\mathrm{Res}\, \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\bigg|_i = \lim_{z\to i} \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right] = \lim_{z\to i} \frac{(z+i)^2 i e^{iz} - e^{iz}2(z+i)}{(z+i)^2} = \frac{-4ie^{-1} - -4ie^{-1}}{16} = -\frac{i}{2e}$$

del mismo modo se procede para el caso $z = -i$

Un caso particular y muy útil lo constituyen las funciones racionales del tipo $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ y $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$. Esto es $q(z_0) = 0$ entonces

$$\mathrm{Res}\, f(z)|_{z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)p(z)}{q(z)} = p(z_0) \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \tag{3}$$

porque hemos utilizado el Teorema de L'Hopital. Este caso lo podemos ejemplificar si consideramos una función

$$f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z} \equiv \frac{4-3z}{z(z-1)} \quad \text{con polos en} \left\{ \begin{array}{lll} z = 0 & \Rightarrow \mathrm{Res}\, f(z)|_{z=0} = \frac{4-3z}{2z-1}\Big|_{z=0} = -4 \\ \\ z = 1 & \Rightarrow \mathrm{Res}\, f(z)|_{z=1} = \frac{4-3z}{2z-1}\Big|_{z=1} = 1 \end{array} \right. \tag{4}$$

3. Teorema del Residuo

3.1. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$

Hemos visto como calcular las integrales de funciones, en regiones múltiplemente conexas, con polos simples a partir de residuos. Ahora generalizaremos ese esquema para una región, también múltiplemente conexa, pero con un número finito de polos. Tal y como se muestra en la figura 1 en el cuadrante II, realizamos una circulación ingeniosa, de tal modo que aislamos los distintos polos. Ahora bien, como la función es analítica en la región bordeada por todos esos contornos, entonces

$$\left[\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) + \cdots \oint_{\mathcal{C}_m} \mathrm{d}z\ f(z)\right] = 0$$

y al cambiar el sentido de circulación comprobamos lo que ya sabíamos

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) + \cdots \oint_{\mathcal{C}_m} \mathrm{d}z\ f(z) \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$$

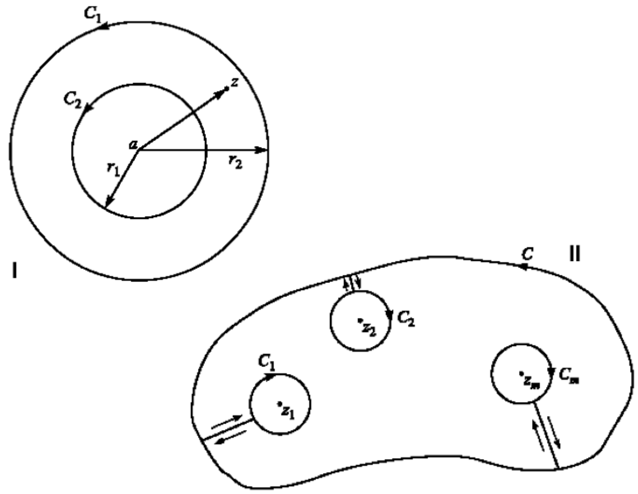

Figura 1: Expansión de Laurent

donde hemos utilizado lo que hicimos para la ecuación (1)

Con ello podemos enunciar el Teorema del Residuo que ya hemos demostrado

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ excepto en un número, m, finito de polos $z_{0_1}, z_{0_2}, z_{0_3}, \cdots z_{0_m}$ entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$$

Una vez más ejemplificamos. Sea la función $f(z) = \dfrac{4-3z}{z^2-z}$, una función con polos simples en $z=0$ y $z=1$ correspondientes a residuos 4 y 1, respectivamente, tal y como se vió en la sección (2). Entonces, utilizamos los resultado expuestos en el ejemplo (4)

$$\oint_C \mathrm{d}z \frac{4-3z}{z^2-z} = 2\pi i(-4+1) = -6\pi i$$

siempre y cuando el circuito C encierre los dos polos, $z=0$ y $z=1$, para los cuales hemos calculado los residuos.

Ejercicios

1. Determinar los polos y los residuos correspondientes para cada una de las funciones propuestas

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}; \quad f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2; \quad f(z) = \frac{\mathrm{sen}\ z}{z^2}; \quad f(z) = \cot z$$

2. Evaluar

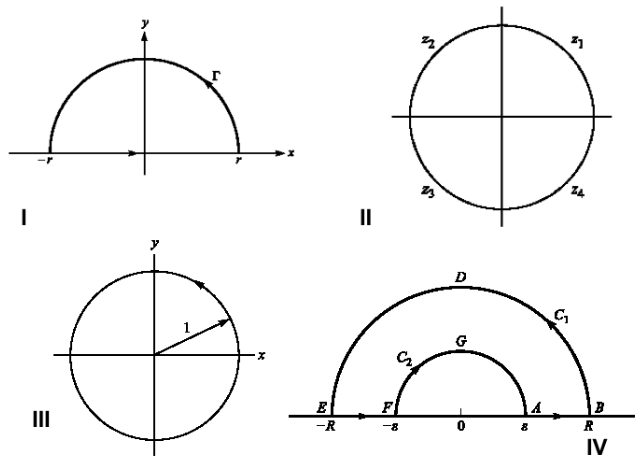

Figura 2: Circuitos y evaluación de integrales reales, impropias

a)
$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z\ e^z}{\cosh z} \quad \text{a lo largo de una circunsferencia } |z| = 5$$

b)
$$\oint_C \frac{(2z^2+5)\mathrm{d}z}{(z+2)^3(z^2+4)z^2} \quad \text{a lo largo de una circunsferencia } |z-2i| = 6 \text{ y}$$

un cuadrado de vértices $z = 1 + i$; $z = 2 + i$; $z = 2 + 2i$ y $z = 1 + 2i$.

3.2. Evaluación de integrales, reales, impropias

El teorema del residuo (3) es una herramienta poderosa para evaluar algunos tipos de integrales definidas en variable real. La intención es "extender" el dominio de las funciones de la recta real al Plano Complejo. Una de las restricciones es que los contornos deben ser cerrados antes de que sean evaluados los residuos. El punto es que muchas integrales reales tienen contornos abiertos y la posibilidad de evaluar estas integrales a través del Teorema del Residuo descansa en la forma como se cierran los contornos. En estos casos se debe estimar las contribuciones de esos contornos adicionales que pemiten cerrar los contornos abiertos. A continuación expondremos algunas técnicas para cerrar algunos tipos de contornos abiertos.

3.3. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$

Este tipo de integrales implica, si ambos límites existen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x) = \lim_{r\to-\infty} \int_r^0 \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{r\to\infty} \int_0^r \mathrm{d}x\ f(x) \leftrightarrow \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^r \mathrm{d}x\ f(x)$$

Necesitaremos que el integrando sea una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $q(x) \neq 0 \;\; \forall \; x$. Adicionalmente requeriremos que cuando menos $q(x) \sim x^2 p(x)$. Supuesto todo esto, convertimos nuestra función racional en una función de variable compleja $f(x) \to f(z)$ y consideramos la integral de circulación, $\oint_C \mathrm{d}z\ f(z)$, sobre un contorno C descrito por el eje real y una semicircunsfrencia Γ en el plano complejo con $y \geq 0$, tal y como se muestra en el cuadrante I la figura 2. La intención es hacer $r \to \infty$ y con ello evaluar la integral $\int_0^\infty \mathrm{d}x\ f(x)$. Es fácil convencerse que

$$\oint_C \mathrm{d}z\ f(z) = \int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x\ f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$$

es decir,

$$\int_{-r}^{r} \mathrm{d}x\ f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}} - \int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z)$$

Esta estrategia es válida porque hemos supuesto que $f(x)$ es racional y que $q(x) \neq 0 \;\; \forall \; x$, entonces si existen polos para $f(z)$ estarán en el plano complejo (no sobre el eje real). Todos esos polos serán encenrados por el contorno C que hemos seleccionado. Más aún, comprobaremos que $\int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z) \to 0 \quad$ cuando$z \to \infty$. Esto es sencillo si notamos que

$$q(x) \sim x^2 p(x) \quad \Rightarrow |f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \quad \Rightarrow \left| \int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z) \right| < \frac{k}{r^2}\pi r = \frac{k\pi}{r} \qquad \text{para } |z| = r \geq 0$$

con lo cual llegamos a que para este tipo de integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}} \quad \text{para } f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{con } q(x) \neq 0 \;\; \forall \; x \wedge p(x) \sim x^2 q(x) \tag{5}$$

Ejemplo Considere evaluar la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 1^4} \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 1^4} = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$$

donde hemos utilizado la expresión (5). La extensión analítica

$$f(x) \to f(z) = \frac{1}{z^4 + 1} \quad \text{tendró cuatro polos simples: } z = e^{\pm \frac{i\pi}{4}};\ z = e^{\pm \frac{3i\pi}{4}};$$

correspondientes a las cuatro raíces de $z^4 = -1$. Acto seguido calculamos los residuos invocando la relación (3) que hemos construido para funciones racionales. Esto es

$$\mathrm{Res}\ \frac{p(z)}{q(z)}\bigg|_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = e^{\frac{i\pi}{4}} \Rightarrow \mathrm{Res}\ \ f(z)\big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \left.\dfrac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \dfrac{e^{\frac{-3i\pi}{4}}}{4} = \dfrac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{4} \\ \\ z = e^{\frac{3i\pi}{4}} \Rightarrow \mathrm{Res}\ \ f(z)\big|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \left.\dfrac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \dfrac{e^{\frac{-9i\pi}{4}}}{4} = \dfrac{e^{\frac{-i\pi}{4}}}{4} \end{array} \right.$$

Hemos considerado únicamente los polos para el semiplano complejo $y > 0$ ya que seguimos considerando el circuito descrito en el cuadrante I de la figura 2. Quedan dos polos ubicados en el semiplano complejo $y < 0$, tal y como se muestra en el cuadrante II de la misma figura 2. Consecuentemente, tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{2\pi i}{4}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{-i\pi}{4}}\right) = \pi \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \quad \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

Ejemplo Para evaluar la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} \qquad \Rightarrow f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

donde hemos realizado la extensión analítica $f(x) \to f(z)$ y ubicado sus polos de $z = i$ y $z = i - 1$ en el semiplano complejo $y > 0$ y los encerrados por el circuito descrito en el cuadrante I de la figura 2. El primero de estos polos es de segundo orden, mientras que el segundo corresponde a un polo simple. Consecuentemente, los residuos se calculan invocando la relación general (2) arriba expuesta. Con lo cual para

$$z = i \quad \Rightarrow \lim_{z\to i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-i)^2\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right]\right) = \frac{-12+9i}{100}$$

y para

$$z = i-1 \quad \Rightarrow \lim_{z\to i-1}(z-i+1)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-i-1)(z+i-1)} = \frac{3-4i}{25}$$

Finalmente, podemos evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = 2i\pi\sum_{j=1}^{2}\mathrm{Res}\, f(z)_{z=z_{0j}} = 2\pi i\left(\frac{-12+9i}{100} + \frac{3-4i}{25}\right) = \frac{7\pi}{50}$$

Ejercicios Evaluar las siguientes integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}; \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2}$$

3.4. Integrales de funciones racionales de $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$

Ahora mostraremos la estrategia para integrales de funciones racionales de funciones trigonométricas, $\mathcal{G}(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$. La idea es transformar estas integrales en otras de funciones de varible compleja a través de los cambios de variables que conectan las funciones trigonométricas y los números complejos. Esto es transformar integrales de la forma

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathcal{G}(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta) \quad \to \quad \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{zi} f(z)$$

mediante cambios de variables estándares

$$z = re^{i\theta} \quad \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{zi}; \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right); \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \tag{6}$$

Ejemplo En las tablas de integrales encontrábamos[1] que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{con } |a| > |b|$$

veamos como se llega a ese resultado.

Haciendo $z = re^{i\theta}$ y asumiendo las consecuencias, tal y como se presenta en (6) arriba, tendremos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\mathrm{sen}\,\theta} = \oint_C \frac{\frac{\mathrm{d}z}{zi}}{a + \frac{b}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \oint_C \frac{2\mathrm{d}z}{bz^2 + 2aiz - b} \quad \text{con } C \text{ una circunferencia } |z| = 1$$

los polos de

$$f(z) = \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} \qquad \Rightarrow z_{\pm 0} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i$$

son los valores de z que anulan el denominador de $f(z)$. Seguidamente verificamos la ubicación de los polos simples y comprobamos que como $|a| > |b|$ entonces

$$|z_{+0}| = \left| \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i \right| < 1 \qquad \text{y} \qquad |z_{-0}| = \left| \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i \right| > 1$$

y por lo tanto, sólo el primero de los polos está encerrado por el circuito C con $|z| = 1$ tal y como muestra en el cuadrante III de la figura 2.

Una vez más calculamos el residuo para z_{+0} a partir de (2). Entonces tendremos que

$$\text{Res } f(z)|_{z=z_{+0}} = \lim_{z \to z_{+0}} (z - z_{+0}) \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} = \lim_{z \to z_{+0}} \frac{2}{2bz + 2ai} = \frac{1}{bz_{+0} + ai} \equiv \frac{-i}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

finalmente

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\mathrm{sen}\,\theta} = \oint_C \frac{2\mathrm{d}z}{bz^2 + 2aiz - b} = 2i\pi \text{Res } f(z)_{z=z_{+0}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,.$$

Ejercicios Compruebe las siguientes evaluaciones

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\cos\theta + c\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \quad \text{con } a^2 > b^2 + c^2; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta\,\mathrm{d}\theta}{5 - 4\cos 2\theta} = \frac{3\pi}{8}\,.$$

[1] *Encontrábamos* porque hoy en día estas integrales las calculamos con manipuladores simbólicos del tipo `Maple`, `Reduce`, `Matemathica` o `Mupad`