Series de Laurent

1. Otra vez Taylor y ahora Laurent

Anteriormente consideramos series complejas de potencias. En esta sección revisaremos, desde la perspectiva de haber expresado la derivada n-ésima de una función analítica, el equivalente a las series de Taylor para funciones complejas de variable complejas.

1.1. Series de Taylor para funciones analíticas

Si $f(z)$ es analítica en un círculo de radio R, encerrado por un contorno $\mathcal{C}$ y centrado en un punto $z = z_0$, entonces $f(z)$ puede ser expandida en series de potencias (enteras positivas) para todo $|z - z_0| < R$ de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \equiv f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+R_n\,,$$

con el resto $R_n(z)$ definido como

$$R_n(z) = \frac{(z-z_0)^n}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z)}\,.$$

Para probar esta afirmación partimos de la fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left[\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\right]\,, \qquad (1)$$

de donde

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z} \equiv \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left[1+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{\zeta-z}{\zeta-z_0}\right)}\right]$$

este último corchete proviene de una forma ingeniosa de utilizar una serie geométrica de razón $r = \dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}$. Para entenderlo, recordemos que para una serie geométrica, se cumple que

$$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}-\frac{r^{n+1}}{1-r} \quad \Rightarrow \frac{1}{1-r} = 1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n+\frac{r^{n+1}}{1-r}\,. \quad (2)$$

Entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z} \equiv \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^j+\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{\zeta-z}{\zeta-z_0}\right)}\right] \qquad (3)$$

con lo cual

$$f(z)=\sum_{j=0}^{n}(z-z_0)^j\left(\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}\right)+R_n(z)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j+R_n(z) \qquad (4)$$

donde

$$R_n(z)=\frac{(z-z_0)^n}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z)} \qquad (5)$$

Obvio que la serie (4) converge si $R_n(z)\to 0$ cuando $n\to\infty$ y de eso es fácil convencerse al acotar la ecuación (5). Esto es, considerando ζ sobre el contorno $\mathcal{C}$ y z en el interior de $\mathcal{R}$, entonces

$$\begin{aligned}|R_n(z)|=\left|\frac{(z-z_0)^n}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z)}\right| &< \frac{|z-z_0|^n}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}}\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta\right| \\ &< \frac{|z-z_0|^n}{2\pi}M\frac{1}{R^n}2\pi R\,,\end{aligned}$$

donde, una vez más, hemos utilizado la forma polar $\tilde{\zeta}=\zeta-z_0=Re^{i\theta}$ y hemos acotado $\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|<M$, con lo cual es inmediato constatar que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-z_0}{R}\right|^n=0 \quad\Rightarrow R_n(z)\to 0$, con lo cual la serie converge.

Ejemplos Expanda

- $f(z)=\frac{1}{1-z}$, alrededor de $z=z_0$

$$f(z)=\frac{1}{1-z_0}+\frac{1}{(1-z_0)^2}(z-z_0)+\frac{1}{(1-z_0)^3}(z-z_0)^2+\frac{1}{(1-z_0)^4}(z-z_0)^3+\cdots+\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$$

- $f(z)=\ln(1+z)$, alrededor de $z=0$ (Serie de Maclaurin)

$$f(z)=\ln(1+z)=\left.\ln(1+z)\right|_{z=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left.\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1-z)^{n+1}}\right|_{z=0}z^n\equiv f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2}z^2+\frac{f'''(0)}{3!}z^3+\cdots=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots$$

- $f(z)=\ln\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$, alrededor de $z=0$ (Serie de Maclaurin)

$$\ln\left[\frac{1+z}{1-z}\right]\equiv\ln[1+z]-\ln[1-z]=\left[z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\cdots\right]-\left[-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\cdots\right]=2\left[z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\cdots\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

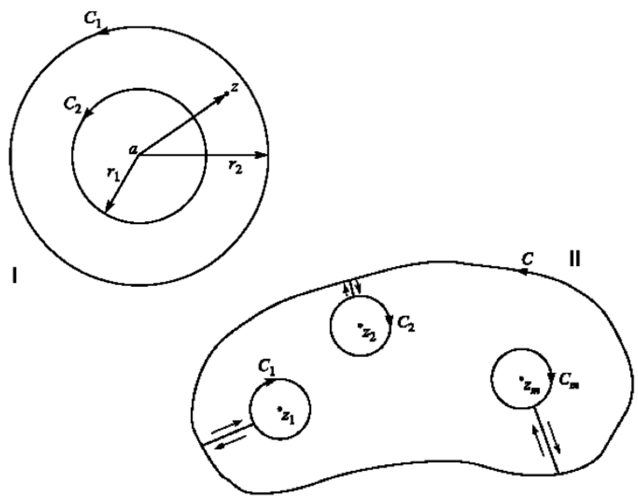

Figura 1: Expansión de Laurent

2. Series de Laurent

Hemos dicho que si una función $f(z)$ es analítica en una región (digamos que circular) $\mathcal{R}$, entonces puede ser expandida por series de Taylor. Sin embargo, si $f(z)$ tiene un polo de orden p, digamos, en $z = z_0$, dentro de la región $\mathcal{R}$, no será analítica en ese punto, mientras que la función: $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$ si lo será en todos los puntos de esa región. Entonces $f(z)$ podrá ser expandida como series de potencias (de Laurent) de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_k (z - z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{-n}}{(z - z_0)^n}\,, \text{ con } u_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,, \quad (6)$$

para: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ y $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Equivalentemente

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \quad (7)$$

La suma de todos los términos que tengan potencias negativas, vale decir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{-n}}{(z-z_0)^n}$, se denomina *parte principal* de $f(z)$.

Para demostrar (6) o (7), recordamos que, tal y como muestra la figura 1 cuadrante I, si $f(z)$ es analítica en la regiún anular, entonces el Teorema de Cauchy, nos garantiza que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0}$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que ambas circulaciones tienen el mismo sentido.

Del mismo modo como procedimos en la ecuación (1) reescribimos el segundo par de integrales como

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left[\frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}}\right] + \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{z - z_0}\left[\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta-z_0}{z - z_0}}\right]$$

y ahora invocando, una vez más la progresión geométrica (2) podemos construir expresiones de integrales equivalentes a la ecuación (3). Vale decir

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^j + \frac{\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n}{\left(\dfrac{\zeta-z}{\zeta-z_0}\right)}\right] + \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{z - z_0}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^j + \frac{\left(\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n}{\left(\dfrac{\zeta-z}{z-z_0}\right)}\right]$$

y equivalentemente

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{n-1}(z-z_0)^j \underbrace{\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}}_{u_j} + R_{n1}(z) + \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} \underbrace{\oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\zeta\ f(\zeta)(\zeta-z_0)^j}_{u_{-j}} + R_{n2}(z) \tag{8}$$

Con lo cual queda demostrado la forma funcional de los coeficientes de la expansión de Laurent. La demostración de la convergencia, esto es $n \to \infty \Rightarrow R_{n1}(z) \to R_{n2}(z) \to 0$ sigue el mismo esquema que utilizamos para demostrar la convergencia de la ecuación (6) y se lo dejamos como ejercicio al lector.

Otra manera de representar las series de Laurent es por medio de las fórmulas:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^k}\,, \quad R_1 < |z-z_0| < R_2\,. \tag{9}$$

donde:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,, \tag{10}$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-k+1}}dz\,, \quad k = 1,2,\ldots\,. \tag{11}$$

En este caso, se supone que la función es analítica en el dominio anular: $R_1 < |z-z_0| < R_2$ y C es un contorno cerrado simple en torno a z_0 y contenido en la región anular.

En el caso de b_k podemos ver que el integrando se puede escribir también como $f(z)(z-z_0)^{k-1}$. Si f es analítica en $|z-z_0| < R_2$, entonces el integrando es una función analítica en dicho disco y por lo tanto $b_k = 0$. Es decir, la serie (9) se reduce a una serie de Taylor donde los coeficientes son:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz = \frac{f^{(k)}(z_0)}{n!}\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,.$$

2.1. Algunos Ejemplos

En muchos casos las expansiones en series de Laurent no se generan a partir de las ecuaciones (6) o (9) sino a partir de manipulaciones algebráicas y expansiones en Taylor moduladas por otros factores.

Ejemplo 1: El primero lo haremos directamente, vale decir, que como lo vamos a hacer no lo haremos otra vez. Queremos hacer una representación en serie de Laurent de la función:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}\,.$$

Utilizando las fórmulas de (8), construimos la relación

$$u_j = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{j+1}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^{j+2}(\zeta-1)} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^{j+2}}\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^{j+2-n}}$$

convirtiendo a la forma polar tendremos que

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{ri\theta e^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{r^{j+2-n}e^{i(j+2-n)\theta}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{j+2-n,1} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} u_n = -1 & \text{para } n \geq -1 \\ \\ u_n = 0 & \text{para } n < -1 \end{array} \right.$$

es decir

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \cdots$$

Consideremos los siguientes ejemplos de desarrollos en Series de Laurent:

Ejemplo 2:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)}\,.$$

La función puede escribirse en la forma:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z-2}\right]\,, \quad 0 < |z| < 2\,.$$

Por otro lado, sabemos que:

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\,, \quad |z| < 2\,,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z(z-2)} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z - \frac{1}{16}z^2 - \frac{1}{32}z^3 - \frac{1}{64}z^4 - \frac{1}{128}z^5 - \cdots\,, \quad 0 < |z| < 2\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 3:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

Esta función tienes polos de orden 1 en $z = 1$ y $z = 3$. Además, expresando $f(z)$ como una suma de fracciones parciales, tendremos:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3}\right], \quad 1 < |z| < 3\,,$$

- Para $1 < |z| < 3$.
  Tenemos los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\,, \quad |z| > 1\,, \\ -\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-z/3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\,, \quad |z| < 3\,, \end{aligned}$$

  La serie es:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} &= -\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right] \\ &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{18}\,z - \frac{1}{54}\,z^2 - \frac{1}{162}\,z^3 - \frac{1}{2}\,z^{-1} - \frac{1}{2}\,z^{-2} - \frac{1}{2}\,z^{-3} - \frac{1}{2}\,z^{-4} - \cdots\,. \end{aligned}$$

- Para $|z| > 3$.
  En este caso no podemos utilizar el segundo desarrollo anterior, ya que éste es válido sólo para $|z| < 3$. Por lo tanto:

$$-\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-3/z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}\,, \quad |z| > 3\,,$$

  podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} &= -\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}\right] = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-3^n}{z^{n+1}} \\ &= z^{-2} + 4\,z^{-3} + 13\,z^{-4} + 40\,z^{-5} + \cdots\,. \end{aligned}$$

- para $|z| < 1$.
  Escribimos

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} - \frac{1}{6}\frac{1}{1-z/3}\,,$$

como $|z| < 1$ y $|z/3| < 1$ en este dominio, entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\left[1-\frac{1}{3^{n+1}}\right] \\ &= \frac{1}{3}+\frac{4}{9}\,z+\frac{13}{27}\,z^2+\frac{40}{81}\,z^3+\frac{121}{243}\,z^4+\cdots\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 4:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}\,.$$

Sabemos que:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\,, \quad |z| < \infty\,,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^2 e^{2(z-1)}}{(z-1)^3} = e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-1)^n}{n!(z-1)^3} = e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(z-1)^{n-3} \\ &= e^2\left[\frac{2}{3}+(z-1)^{-3}+2\,(z-1)^{-2}+2\,(z-1)^{-1}+\frac{2}{3}\,z+\frac{4}{15}\,(z-1)^2+\cdots\right]\,, \end{aligned}$$

la cual es válida para: $0 < |z-1| < \infty$.

Ejemplo 5:

$$f(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}.$$

Esta función se puede escribir como:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}.$$

Sabemos que:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad |z| < \infty\,,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} &= \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{z^3(2n+1)!} = \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{120}\,z^2 + \frac{1}{5040}\,z^4 - \frac{1}{362880}\,z^6 + \frac{1}{39916800}\,z^8 - \cdots\,, \end{aligned}$$

válida para: $0 < |z| < \infty$.