

Ecuaciones diferenciales no lineales

1. Ecuaciones diferenciales no lineales y el factor integrador

Del mismo modo, y con la misma idea, podemos incorporar el factor integrador $\mu(x, y)$ para extender la idea a ecuaciones que no sean, necesariamente lineales. Así para una ecuación diferencial que pueda ser escrita como

$$d[f(x, y)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x, y)Q(x, y)dy + \mu(x, y)P(x, y)dx = 0$$

es decir

$$d[f(x, y)] = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy = \mu(x, y)Q(x, y)dy + \mu(x, y)P(x, y)dx = 0$$

Entonces tendremos que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta es:

$$\left. \begin{array}{l} \mu(x, y)Q(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \mu(x, y)P(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, y)Q(x, y)] \equiv \frac{\partial}{\partial y} [\mu(x, y)P(x, y)]$$

y, obviamente, esta condición de integrabilidad dependerá del $\mu(x, y)$ que propongamos.

- Si $\mu(x, y) = \mu(x)$ entonces la condición es

$$\frac{d\mu(x)}{dx}Q(x, y) + \mu(x)\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \equiv \mu(x)\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{Q(x, y)}\left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\right)$$

con lo cual, si se cumple que

$$\frac{1}{Q(x, y)}\left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\right) = f(x) = \frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int dx f(x)}$$

podremos determinar el factor integrador.

Una vez identificado procedemos a integrar, formalmente $f(x, y)$

$$f(x, y) = \mu(x) \int_{y_0}^y du Q(x, u) + S(x) \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \mu(x)P(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x) \int_{y_0}^y du Q(x, u) + S(x) \right)$$

y finalmente, una vez más

$$\mu(x)P(x, y) = \int_{y_0}^y du \frac{\partial \mu(x)Q(x, u)}{\partial x} + \frac{dS(x)}{dx} \Rightarrow \mu(x)P(x, y) = \int_{y_0}^y du \frac{\partial \mu(x, u)P(x, u)}{\partial u} + \frac{dS(x)}{dx}$$

con lo cual

$$S(x) = \int_{x_0}^x du \mu(u, y_0)P(u, y_0) \Rightarrow f(x, y) = \mu(x) \int_{y_0}^y du Q(x, u) + \int_{x_0}^x du \mu(u, y_0)P(u, y_0) + C$$

Ejemplo

$$y' = -\frac{e^x - \operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}.$$

Esta ecuación no es exacta, ya que:

$$[e^x - \operatorname{sen}(y)] dx + \cos(y) dy = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(x, y) = e^x - \operatorname{sen}(y) \\ Q(x, y) = \cos(y) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \neq \frac{\partial P}{\partial y} = -\cos(y).$$

Podemos ver que el arreglo:

$$f(x) = \frac{1}{Q(x, y)} \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{-\cos(y) - 0}{\cos(y)} = -1,$$

entonces, el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int dx f(x)} = e^{-\int dx} = e^{-x}.$$

Por lo tanto, la ecuación

$$e^{-x} [e^x - \operatorname{sen}(y)] dx + e^{-x} \cos(y) dy = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(x, y) = 1 - e^{-x} \operatorname{sen}(y) \\ Q(x, y) = e^{-x} \cos(y) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-x} \cos(y).$$

es exacta. Queda como ejercicio resolver esta ecuación diferencial.

- Si $\mu(x, y) = \mu(y)$ entonces la condición queda como

$$\mu(y) \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \equiv \frac{d\mu(y)}{dy} P(x, y) + \mu(y) \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{\mu(y)} \frac{d\mu(y)}{dy} = \frac{1}{P(x, y)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right),$$

con lo cual si se cumple que

$$\frac{1}{P(x, y)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) = f(y) = \frac{1}{\mu(y)} \frac{d\mu(y)}{dy} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int dy f(y)}$$

y podremos determinar el factor integrador.

Ejemplo

$$y' = -\frac{xy}{1+x^2}.$$

Esta ecuación no es exacta, ya que:

$$xy dx + (1+x^2) dy = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(x, y) = xy \\ Q(x, y) = 1+x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial P}{\partial y} = x.$$

Podemos ver que el arreglo:

$$f(y) = \frac{1}{P(x, y)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{2x - x}{xy} = \frac{1}{y},$$

entonces, el factor integrante es

$$\mu(y) = e^{\int dy \frac{1}{y}} = e^{\ln(y)} = y.$$

Por lo tanto, la ecuación

$$xy^2 dx + (y + yx^2) dy = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(x, y) = xy^2 \\ Q(x, y) = y + yx^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy.$$

es exacta. Queda como ejercicio resolver esta ecuación diferencial.

Ejercicios

1. Demuestre que si $\mu = \mu(z)$ donde $z = xy$, entonces el factor integrante viene dado por

$$\mu(z) = e^{\int dz f(z)},$$

donde:

$$f(z) = \frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{yQ(x, y) - xP(x, y)}$$

Con este resultado resuelva la ecuación:

$$y' = -\frac{y^3 + xy^2 + y}{x^3 + x^2y + x}.$$

2. Demuestre que si $\mu = \mu(z)$ donde $z = x/y$, entonces el factor integrante viene dado por

$$\mu(z) = e^{\int dz f(z)},$$

donde:

$$f(z) = \frac{y^2 \left[\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right]}{yQ(x, y) + xP(x, y)}$$

Resuelva la ecuación:

$$y' = \frac{3y}{x}.$$

3. Demuestre que si $\mu = \mu(z)$ donde $z = y/x$, entonces el factor integrante viene dado por

$$\mu(z) = e^{\int dz f(z)},$$

donde:

$$f(z) = \frac{x^2 \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right]}{yQ(x, y) + xP(x, y)}$$

Resuelva la ecuación:

$$y' = \frac{y}{3x}.$$

2. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli, formulada por James Bernoulli¹ y resuelta por su hermano Johann Bernoulli, se caracterizan por tener la forma:

$$\frac{dy(x)}{dx} + y(x)f(x) = y(x)^n g(x). \quad (1)$$

Es fácil darse cuenta de que la ecuación de Bernoulli se reduce a una ecuación con variables separadas cuando $n = 0$ y cuando $n = 1$ se trata de una ecuación de la forma:

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(x) [g(x) - f(x)].$$

la cual también es de variables separables. Entonces, es la presencia del término y^n lo que hace que la ecuación no sea lineal.

Leibniz, en 1696, indicó que el cambio de variable $z = y^{1-n}$ convierte la ecuación (1) en una ecuación lineal.

Consideremos entonces $n \neq 1$, si multiplicamos ambos lados de (1) por $(1-n)y^{-n}$ resulta:

$$\begin{aligned} (1-n)y^{-n} \left[\frac{dy}{dx} + yf(x) \right] &= (1-n)y^{-n}y^n g(x) \\ (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} + (1-n)f(x)y^{1-n} &= (1-n)g(x) \\ \frac{d}{dx} [y^{1-n}] + (1-n)f(x)y^{1-n} &= (1-n)g(x), \end{aligned}$$

si se hace el cambio de variable $z = y^{1-n}$ se tiene

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x). \quad (2)$$

La ecuación (2) es una ecuación diferencial lineal, la cual ya sabemos resolver.

¹James Bernoulli (1654-1705), fue un matemático y científico suizo, formaba parte de la gran familia Bernoulli. En 1690 se convirtió en la primera persona en desarrollar la técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables.

Ejemplo Sea la ecuación:

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}, \quad \text{con } y \neq 0.$$

esta ecuación es de la forma (1) con $n = -3$. Si multiplicamos por $4y^3$ se tiene:

$$\begin{aligned} (4y^3) y' + (4y^3) xy &= (4y^3) \frac{x}{y^3} \\ (4y^3) y' + 4xy^4 &= 4x \\ \frac{d}{dx} [y^4] + 4xy^4 &= 4x \end{aligned}$$

con el cambio de variable $z = y^4$, resulta

$$\frac{dz}{dx} + 4xz = 4x,$$

la cual es una ecuación diferencial lineal con factor integrador

$$\mu(x) = e^{\int dx f(x)} = e^{\int 4x dx} = e^{2x^2},$$

Por lo tanto, la solución vendrá dada por

$$y(x) = \frac{1}{e^{2x^2}} \int e^{2x^2} (4x) dx + \frac{C}{e^{2x^2}} = \frac{1}{e^{2x^2}} [e^{2x^2}] + \frac{C}{e^{2x^2}} = 1 + Ce^{-2x^2}.$$

Ejercicio Resuelva la ecuación

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

3. Ecuación de Riccati

La ecuación de Riccati² es conocida como una ecuación diferencial no lineal que tiene la siguiente forma:

$$\frac{dy(x)}{dx} = A(x) + B(x)y(x) + C(x)y(x)^2, \quad C(x) \neq 0. \quad (3)$$

Esta ecuación fue estudiada por muchos matemáticos, entre ellos los propios integrantes de la familia Bernoulli. Daniel Bernoulli, hijo de John y sobrino de James Bernoulli, publicó su solución en 1724, luego de mantenerla oculta por mucho tiempo en modo de anagrama.

Podemos seguir las recomendaciones de Euler³ quien propuso que una sustitución del tipo:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)},$$

²El conde Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) fue un matemático veneciano, que estudió detalladamente la hidrodinámica sobre la base de la mecánica newtoniana

³Leonhard Paul Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. Fue un reputado matemático y físico, y es considerado uno de los más grandes matemáticos de la historia.

donde $y_1(x)$ es una solución particular de (3), convierte la ecuación de Riccati en una ecuación lineal para $z(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(x)}{dx} - \frac{1}{z(x)^2} \frac{dz(x)}{dx} &= A(x) + B(x) \left[y_1(x) + \frac{1}{z(x)} \right] + C(x) \left[y_1(x) + \frac{1}{z(x)} \right]^2 \\ z(x)^2 \frac{dy_1(x)}{dx} - \frac{dz(x)}{dx} &= [A(x) + B(x)y_1(x) + C(x)y_1(x)^2] z(x)^2 + [2C(x)y_1(x) + B(x)] z(x) + C(x) \\ - \frac{dz(x)}{dx} &= \underbrace{\left[A(x) + B(x)y_1(x) + C(x)y_1(x)^2 - \frac{dy_1(x)}{dx} \right]}_{=0} z(x)^2 + [2C(x)y_1(x) + B(x)] z(x) + C(x) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{dz(x)}{dx} = -[2C(x)y_1(x) + B(x)] z(x) - C(x). \quad (4)$$

También podemos hacer la siguiente sustitución

$$y(x) = y_1(x) + u(x)$$

donde $y_1(x)$ es una solución particular de (3). Esto es:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{du(x)}{dx} &= A(x) + B(x)[y_1(x) + u(x)] + C(x)[y_1(x)^2 + 2y_1(x)u(x) + u(x)^2] \\ \frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{du(x)}{dx} &= A(x) + B(x)y_1(x) + C(x)y_1(x)^2 + [B(x) + 2C(x)y_1(x)]u(x) + C(x)u(x)^2 \\ \frac{du(x)}{dx} &= [B(x) + 2C(x)y_1(x)]u(x) + C(x)u(x)^2, \end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{du(x)}{dx} - [B(x) + 2C(x)y_1(x)]u(x) = C(x)u(x)^2, \quad (5)$$

que no es más que la ecuación de Bernoulli (1) con $f(x) = -[B(x) + 2C(x)y_1(x)]$, $g(x) = C(x)$ y $n = 2$.

Ejemplo Resolver la siguiente ecuación de Riccati

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2},$$

conociendo la solución particular $y_1 = 1/x$.

En lugar de hacer todo el desarrollo anterior, podemos reconocer de manera fácil que:

$$A(x) = -\frac{2}{x^2}, \quad B(x) = 0, \quad C(x) = 1.$$

Tenemos entonces dos posibilidades: la primera es utilizar la ecuación lineal (4)

$$\frac{dz(x)}{dx} = -\left[\frac{2}{x}\right]z(x) - 1 \quad \Rightarrow \quad z(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{c}{x^2}.$$

por lo tanto, al volver a la variable $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{1}{3}x + \frac{c}{x^2}} = -\frac{2x^3 + 3c}{x(x^3 - 3c)}.$$

La segunda, es resolver la ecuación de Bernoulli (5) con $n = 2$

$$\frac{du(x)}{dx} - \left[\frac{2}{x}\right]u(x) = u(x)^2 \Rightarrow u(x) = -\frac{3x^2}{x^3 - 3c},$$

y en función de $y(x)$

$$y(x) = \frac{1}{x} - \frac{3x^2}{x^3 - 3c} = -\frac{2x^3 + 3c}{x(x^3 - 3c)}.$$

Ejercicios Resuelva la siguiente ecuación de Riccati

$$y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2, \quad y_1(x) = -x^2.$$

4. Un tipo muy especial de ecuación diferencial no lineal

Vamos a estudiar la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{y(Ax^p y^q + Bx^r y^s)}{x(Cx^p y^q + Dx^r y^s)},$$

donde A, B, C, D son constantes.

La ecuación diferencial puede ser escrita como:

$$y(Ax^p y^q + Bx^r y^s) dx + x(Cx^p y^q + Dx^r y^s) dy = 0.$$

Y se puede demostrar que el factor integrante será de la forma

$$\mu(x, y) = x^a y^b,$$

donde a y b son constantes a determinar. Veamos un ejemplo.

Ejemplo

$$y(2x^2 y^3 + 3) dx + x(x^2 y^3 - 1) dy = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(x, y) = y(2x^2 y^3 + 3) \\ Q(x, y) = x(x^2 y^3 - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 y^3 - 1 \neq \frac{\partial P}{\partial y} = 8x^2 y^3 + 3$$

La ecuación no es exacta.

Si $\mu(x, y) = x^a y^b$ es un factor integrante, entonces:

$$\begin{aligned} (x^a y^b) (2x^2 y^4 + 3y) dx + (x^a y^b) (x^3 y^3 - x) dy &= 0 \\ (2x^{2+a} y^{4+b} + 3x^a y^{1+b}) dx + (x^{3+a} y^{3+b} - x^{1+a} y^b) dy &= 0 \end{aligned}$$

y será exacta si $\partial_y P = \partial_x Q$, esto es

$$\partial_y P = 2x^{2+a}(4+b)y^{3+b} + 3x^a(1+b)y^b = (3+a)x^{2+a}y^{3+b} - (1+a)x^a y^b = \partial_x Q,$$

si multiplicamos por $1/(x^a y^b)$ la ecuación anterior queda como:

$$2(4+b)x^2 y^3 + 3(1+b) = (3+a)x^2 y^3 - (1+a),$$

igualando coeficientes resulta

$$\begin{cases} 8 + 2b = 3 + a \\ 3 + 3b = -1 - a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{7}{5}, \quad b = -\frac{9}{5}.$$

Por lo tanto el factor integrador es $\mu(x, y) = x^{7/5} y^{-9/5}$. Queda como ejercicio verificar que con este factor integrador la ecuación original es exacta.

5. Otros métodos

Muchas veces, la solución de una ecuación diferencial se puede obtener utilizando más de un método. Si fallan los métodos vistos anteriormente entonces podemos utilizar un poco de ingenio matemático. Veamos los siguientes ejemplos

1. Resolvamos la ecuación

$$y' = \frac{y - y^2 - x^2}{x},$$

la ecuación no es del tipo con coeficientes homogéneos

$$(y - y^2 - x^2) dx - x dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) = y - y^2 - x^2 \\ Q(x, y) = -x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \neq 1 - 2y = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

pero podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} y dx - x dy - (y^2 + x^2) dx &= 0 \\ \frac{y dx - x dy}{x^2} &= \left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right) dx, \quad x \neq 0 \\ -d\left(\frac{y}{x}\right) &= \left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 \right) dx \\ -\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} &= dx \end{aligned}$$

integrando:

$$-\int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = \int dx \Rightarrow -\arctg\left(\frac{y}{x}\right) = x + C \Rightarrow y(x) = -x \tan(x + c), \quad x \neq 0$$

2. Resolver

$$y' = -2x + 2(x^2 + y - 1)^{\frac{2}{3}},$$

Podemos hacer la siguiente sustitución:

$$z = x^2 + y - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2x$$

Por lo tanto

$$\frac{dz}{dx} - 2x = -2x + 2z^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2z^{\frac{2}{3}}$$

Nos queda entonces una ecuación separable

$$\frac{dz}{z^{\frac{2}{3}}} = 2dx \Rightarrow \int z^{-\frac{2}{3}} dz = \int 2dx \Rightarrow 3z^{\frac{1}{3}} = 2x + C, \quad z \neq 0$$

regresando a la variable original

$$3(x^2 + y - 1)^{\frac{1}{3}} = 2x + C \Rightarrow 27(x^2 + y - 1) = (2x + C)^3, \quad x^2 + y - 1 \neq 0$$

para finalizar, despejamos lo que será nuestra solución

$$y(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{27}(2x + C)^3.$$

Es bueno acotar y queda como ejercicio, demostrar que $y(x) = 1 - x^2$ también es una solución.

3. Resolver

$$2 \cos(y)y' + \sin(y) = x^2 \csc(y), \quad y \neq 0.$$

Podemos verificar que los métodos anteriores no funcionan, pero si multiplicamos por $\sin(y)$:

$$\begin{aligned} 2 \cos(y)\sin(y)y' + \sin^2(y) &= x^2 \csc(y)\sin(y) \\ \frac{d}{dx} [\sin^2(y)] + \sin^2(y) &= x^2 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación lineal para $\sin^2(y) = z$

$$\frac{dz}{dx} + z = x^2$$

donde el fácil ver que el factor integrador es $\mu(x) = e^x$. Por lo tanto

$$z = \frac{1}{e^x} \int x^2 e^x dx + \frac{C}{e^x} = \frac{1}{e^x} (2 - 2x + x^2) e^x + \frac{C}{e^x} = 2 - 2x + x^2 + C e^{-x}$$

La solución es entonces:

$$y(x) = \arcsen \left[\pm \sqrt{2 - 2x + x^2 + C e^{-x}} \right], \quad y \neq 0.$$