Ecuación Diferenciales Homogéneas de Primer Orden

1. Funciones Homogéneas de grado n

Definicion: Diremos que una función

$$f(x,y) \text{ es homogénea de grado } n \text{ si } f(tx,ty) = t^n f(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{si } w = \dfrac{y}{x} \Rightarrow f(x,y) = x^n g(w) \\ \\ \text{si } w = \dfrac{x}{y} \Rightarrow f(x,y) = y^n h(w) \end{cases}$$

donde n es una constante y $t > 0$.

Las funciones homogéneas indican un comportamiento particular cuando cambiamos la escala de sus variables. Se utilizan con bastante frecuencia en hidrodinámica y termodinámica.

Ejemplo: La siguiente función:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

es una función homogénea de grado 2, ya que:

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 \ln\left(\frac{ty}{tx}\right) \Rightarrow f(tx,ty) = t^2\left[x^2 + y^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] = t^2 f(x,y)\,.$$

Ejercicios: Muestre que

$$f(x,y) = \sqrt{y}\text{sen}\left(\frac{x}{y}\right) \text{ es homogénea de grado } \frac{1}{2}; \quad f(x,y) = e^{y/x} + \tan\left(\frac{x}{y}\right) \text{ es homogénea de grado } 0$$

2. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Definición Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0\,, \tag{1}$$

será una ecuación diferencial con coeficientes homogéneos si:

$$Q(x,y) \text{ y } P(x,y) \text{ son homogéneas de grado } n$$

Teorema Si los coeficientes $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ de una ecuación diferencial son homogéneos de orden n, entonces la siguiente sustitución: $y = ux$, convertirá la ecuación diferencial en una ecuación diferencial donde las variables son separables.

Demostración Como $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones homogéneas de orden n (hipótesis) entonces:

$$P(x,y) = x^n f(u) \quad \text{y} \quad Q(x,y) = x^n g(u)\,,$$

sustituyendo en la ecuación diferencial (1):

$$\begin{aligned}
x^n f(u)\mathrm{d}x + x^n g(u)(u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u) &= 0 \\
[f(u) + ug(u)]\,\mathrm{d}x + xg(u)\mathrm{d}u &= 0 \\
[f(u) + ug(u)]\,\frac{\mathrm{d}x}{x} + g(u)\mathrm{d}u &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{g(u)\mathrm{d}u}{f(u) + ug(u)} &= 0\,,
\end{aligned}$$

donde $x \neq 0$ y $f(u) + ug(u) \neq 0$.

Ejercicios: Demuestre que la sustitución $x = uy$ también convierte la ecuación diferencial en una de variables separables.

Nótese que exigir que $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ sean funciones homogéneas de grado n, equivale a imponer que

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \equiv F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{donde } F\left(\frac{y}{x}\right) \text{ es Homogéna de grado } 0\,,$$

con lo cual estamos diciendo que si los coeficientes $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ son funciones homogéneas de grado n, la ecuación diferencial es invariante de escala.

Ejemplos: 1.- Como un primer ejemplo consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$$

Esto es

$$\left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} P(tx,ty) \to \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} + ty & \Rightarrow & t\left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right) \\ & & \\ Q(tx,ty) \Rightarrow tx & \Rightarrow & tx \end{array}\right.$$

los coeficientes son funciones homgéneas de grado 1 y por lo tanto al hacer $y = ux$ tendremos

$$x\left(\sqrt{1 - u^2} + u\right)\mathrm{d}x - x(u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u) = 0 \quad \Rightarrow \pm\sqrt{1 - u^2}\mathrm{d}x - x\mathrm{d}u = 0 \quad \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \pm \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}}\,.$$

Notemos que: $u \neq \pm 1$ y $x \neq 0$.

Integramos y, finalmente, llegamos a

$$\ln(x) = \operatorname{arcsen} u + C \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right) + C \quad \text{para } \left\|\frac{y}{x}\right\| < 1 \text{ con } x > 0$$

$$-\ln(-x) = \operatorname{arcsen} u + C \quad \Rightarrow \quad -\ln(-x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right) + C \quad \text{para } \left\|\frac{y}{x}\right\| < 1 \text{ con } x < 0\,.$$

En este caso tenemos que $u = \left\|\frac{y}{x}\right\| = 1 \Rightarrow y = \pm x$ también es solución.

2.- Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$y' = -\frac{2x - y + 1}{x + y}$$

la cual corresponde al caso en los cuales los coeficientes de la ecuación $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ son funciones inhomogéneas. Tal y como hemos visto un cambio de variable lo convierte en homogéneo. Hay que tener cuidado con el signo + de: $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

$$(2x - y + 1)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} u = 2x - y + 1 & \Rightarrow & \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x - \mathrm{d}y \\ & & \\ v = -(x + y) & \Rightarrow & \mathrm{d}v = -\mathrm{d}x - \mathrm{d}y \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\mathrm{d}u - \mathrm{d}v) \\ \\ \mathrm{d}y = -\frac{1}{3}(\mathrm{d}u + 2\mathrm{d}v) \end{array}$$

así nuestra ecuación diferencial tendrá la forma de una ecuación homogénea

$$(u + v)\mathrm{d}u - (u - 2v)\mathrm{d}v = 0\,,$$

y ahora haciendo el cambio de variables $u = tv$ con lo cual $\mathrm{d}u = t\mathrm{d}v + v\mathrm{d}t$

$$(tv + v)(t\mathrm{d}v + v\mathrm{d}t) - (tv - 2v)\mathrm{d}v = 0 \quad \Rightarrow (t^2 + 2)\mathrm{d}v + v(t + 1)\mathrm{d}t = 0 \quad \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}v}{v} + \int \frac{t + 1}{t^2 + 2}\,\mathrm{d}t = 0$$

e integrando tendremos que

$$\ln|v| + \frac{1}{2}\ln|t^2 + 2| + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = C \quad \Rightarrow \ln|v^2(t^2 + 2)| + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = \tilde{C} \quad \text{para } v \neq 0\,.$$

y ahora

$$t = \frac{u}{v} = \frac{2x - y + 1}{-(x + y)} \quad \Rightarrow \ln\left|(x + y)^2 + 2(2x - y + 1)^2\right| + \sqrt{2}\arctan\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2x - y + 1}{-(x + y)}\right| = C \quad \text{para } x + y \neq 0\,.$$

La Figura 1 ilustra esta familia de soluciones.

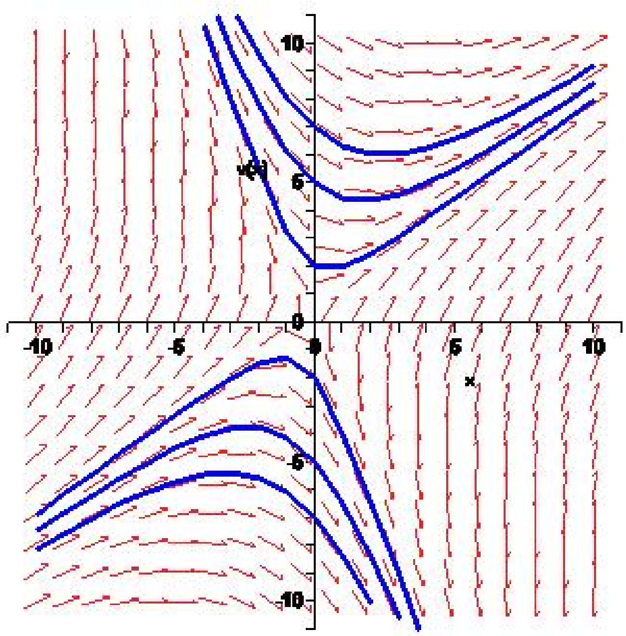

Figura 1: Solución gráfica para la ecuación $y' = -\dfrac{2x - y + 1}{x + y}$. Las curvas azules indican soluciones particulares $y(0) = 7; y(0) = 5; y(0) = 2; y(0) = -7; y(0) = -5; y(0) = -2$.

2.1. Ecuaciones Isóbaras

Las ecuaciones isóbaras generalizan a las ecuaciones homogéneas por cuanto los coeficientes de la ecuación $Q(x, y)$ y $P(x, y)$ no son funciones homogéneas del mismo grado y se busca una transformación que convierta la ecuación en homogénea. Dicho de otra manera, si la dimensionalidad en potencias de y es la misma que la dimensionalidad en potencias de x Diremos que una ecuación diferencial es isóbara si cumple con

$$Q(x, y)\mathrm{d}y + P(x, y)\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} Q(tx, t^m y) & \rightarrow & t^n P(x, y) \\ \\ P(tx, t^m y) & \rightarrow & t^{n-m+1} Q(x, y) \end{array} \right.$$

y el cambio de variable que se impone es $y = vx^m$. Con lo cual habrá que estudiar si es posible "balancear" el orden de las dimensionalidades de variables y funciones.

Ejemplo Tratemos con un ejemplo para ilustrar las ecuaciones isóbaras. Consideremos la ecuación

$$y' = -\frac{1}{2xy}\left(y^2 + \frac{2}{x}\right) \quad \Rightarrow \left(y^2 + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x \to x & \leftrightarrow & \mathrm{d}x = \mathrm{d}x \\ y \to z^m & \leftrightarrow & \mathrm{d}y = mz^{m-1}\mathrm{d}z \end{array} \right.$$

En la contabilidad de los exponentes de x aporta un peso de 1 mientras que y aporta un peso de m. La intención es balancear los términos para que la ecuación sea homogénea de grado n. Esto es

$$\left(y^2 + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \left(z^{2m} + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x + 2xz^m mz^{m-1}\mathrm{d}z = 0 \quad \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = vx^m \Rightarrow y = \frac{v}{\sqrt{x}}$$

El exponente del primer término es $2m$, del segundo -1 del tercero $2m$. Al balancear todos los exponentes tendremos $2m = -1$ con lo cual $m = -\frac{1}{2}$

$$\left(y^2 + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x + 2xy\ \mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \left(\frac{v^2}{x} + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x + 2x\frac{v}{\sqrt{x}}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{v}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right) = 0 \quad \Rightarrow v\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$$

entonces al integrar y devolver el cambio $v = y\sqrt{x}$ tendremos

$$\int \mathrm{d}v\ v + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 \quad \Rightarrow \frac{v^2}{2} + \ln x = c \quad \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 x + \ln x = c\,.$$

3. Ecuaciones Diferenciales Exactas

El segundo grupo de estrategias apunta a escribir una ecuación diferencial como una derivada total de un conjunto de funciones. Uno se ayuda en una posible función que pueda acomodar los términos de la ecuación. Esa función se denomina factor integrador y tiene la forma, para una ecuación diferencial lineal:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + f(x)y(x) = g(x)\,,$$

multiplicamos a ambos lados por $\mu(x)$:

$$\mu(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \mu(x)f(x)y(x) = \mu(x)g(x)\,,$$

Por otro lado, tenemos y queremos que

$$\frac{\mathrm{d}[\mu(x)y(x)]}{\mathrm{d}x} \equiv \mu(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}y(x) = \mu(x)g(x)\,,$$

Para que esas dos ecuaciones sean equivalentes los coeficientes de $y(x)$ tienen que ser iguales. Es decir

$$\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x} = \mu(x)f(x) \quad \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mu(x)} = \int \mathrm{d}x\ f(x) \quad \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \mathrm{d}x\ f(x)}$$

Con lo cual hemos demostrada que para una ecuación lineal de primer orden, siempre es posible encontrar un factor integrador $\mu(x)$ tal que la ecuación diferencial pueda ser expresada como una derivada total del factor integrador y la función incognita.

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + f(x)y(x) = g(x) \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}[\mu(x)y(x)]}{\mathrm{d}x} = \mu(x)g(x) \quad \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mathrm{d}x\,\mu(x)g(x) + C\right)$$

donde $\mu(x) = e^{\int \mathrm{d}x\ f(x)}$.

Definición Una ecuación diferencial de la forma

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0\,,$$

se llama una ecuación diferencial exacta si esta es el diferencial total de alguna función $f(x,y)$, es decir, si:

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \text{y} \quad Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,.$$

Teorema Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0\,,$$

sea exacta es que:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)\,,$$

donde las funciones: $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial_y P(x,y)$, $\partial_x Q(x,y)$ deben existir y ser contínuas.

Demostración Vamos a probar que si: $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$, entonces: $\partial_y P(x,y) = \partial_x Q(x,y)$.

Como la ecuación es exacta, por la definición anterior se tiene que:

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \wedge \quad Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,,$$

y como suponemos que $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial_y P(x,y)$, $\partial_x Q(x,y)$ existen y son contínuas:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \quad \exists\,,$$

y como:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,,$$

por lo tanto tenemos que una condición necesaria es:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)\,.$$

Por otro lado, probemos que si: $\partial_y P(x,y) = \partial_x Q(x,y)$ entonces: $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$ es exacta.

Así, para una ecuación diferencial que pueda ser escrita como

$$\mathrm{d}\left[f(x,y)\right] = 0 \quad \overset{?}{\Leftrightarrow} \quad Q(x,y)\mathrm{d}y + P(x,y)\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{d}\left[f(x,y)\right] = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y = 0$$

donde $f(x,y)$ será la función a determinar.

Entonces tendremos que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta es

$$\left.\begin{array}{l} Q(x,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\[2ex] P(x,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \quad \Rightarrow \mathrm{d}\left[f(x,y)\right] = 0$$

Si esto se cumple entonces, podremos encontrar la función $f(x,y)$ integrando respecto a cualquiera de las variables (ahora consideradas independientes ambas).

$$P(x,y) \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Leftrightarrow f(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, P(u,y) + S(y) \Rightarrow Q(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, P(u,y) + \frac{\mathrm{d}S(y)}{\mathrm{d}y}$$

entonces

$$Q(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, \frac{\partial P(u,y)}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}S(y)}{\mathrm{d}y} \equiv \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}v\, \frac{\partial Q(v,y)}{\partial v} + \frac{\mathrm{d}S(y)}{\mathrm{d}y} = Q(v,y)\big|_{v=x_0}^{v=x} + \frac{\mathrm{d}S(y)}{\mathrm{d}y}$$

con lo cual nos queda finalmente otra ecuación diferencial para encontrar $S(y)$ y con ella $f(x,y)$. Esto es

$$\frac{\mathrm{d}S(y)}{\mathrm{d}y} = Q(x_0,y) \quad \Rightarrow S(y) = \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}w\, Q(x_0,w) \quad \Rightarrow f(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, P(u,y) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}w\, Q(x_0,w) = C$$

Hay que hacer notar que los segmentos de línea que unen el punto (x_0,y_0) con los puntos genéricos $(x,y_0) \wedge (x_0,y)$ pertenecen al entorno de (x_0,y_0). Este tipo de entornos también se denomina *multiplemente conexo*.

Notemos que además de demostrar el teorema también encontramos una familia 1-parámetrica de soluciones:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, P(u,y) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}w\, Q(x_0,w) = C\,.$$

Ejemplos: 1.- Consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$y' = \frac{\cos y}{x\mathrm{sen}y - y^2}\,.$$

Entonces:

$$y'\left(x\mathrm{sen}y - y^2\right) = \cos y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y\,\mathrm{d}x - \left(x\mathrm{sen}y - y^2\right)\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} P(x,y) & = & \cos y \\[2ex] Q(x,y) & = & -\left(x\mathrm{sen}y - y^2\right) \end{array}\right.$$

y verificamos que esta ecuación diferencial es exacta, ya que

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\,\mathrm{sen}\,y \quad \Rightarrow f(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, P(u,y) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}w\, Q(x,w) = C$$

con lo cual, si particularizamos el punto $(x_0, y_0) \equiv (0,0)$ tendremos que

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u \, \cos y + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}w \, w^2 = C \quad \Rightarrow x \cos y + \frac{y^3}{3} = C$$

2.- Sea la siguiente ecuación

$$y' = -\frac{x^3 + y^2 x}{x^2 y + y^3} \, .$$

Por lo tanto:

$$\left(x^3 + y^2 x\right) \mathrm{d}x + \left(x^2 y + y^3\right) \mathrm{d}y \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} P(x,y) & = & \left(x^3 + y^2 x\right) \\ & & \\ Q(x,y) & = & \left(x^2 y + y^3\right) \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2yx$$

la ecuación diferencial es exacta, y otra vez:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & \displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u \, \left(u^3 + y^2 u\right) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}w \, \left(x^2 w + w^3\right) = C \, , \\ & = & x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = C \, , \\ & = & \left(x^2 + y^2\right)^2 = C \, . \end{array}$$

Ejercicio: Resuelva la ecuación diferencial siguiente:

$$y' = -\frac{x^3 + xy^2 \mathrm{sen}(2x) + y^2 \mathrm{sen}^2(x)}{2xy \mathrm{sen}^2(x)} \, .$$

4. Ecuaciones diferenciales lineales de orden 1

Una ecuación diferencial lineal de orden 1

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + f(x) y(x) = g(x) \, ,$$

no es exacta, ya que:

$$\left[f(x)y(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} P(x,y) & = & f(x)y(x) - g(x) \\ & & \\ Q(x,y) & = & 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y} \, .$$

pero como ya vimos, si $\mu(x)$ es un factor integrador, entonces:

$$\mu(x) \left[f(x)y(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x + \mu(x) \mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} P(x,y) & = & \mu(x) \left[f(x)y(x) - g(x)\right] \\ & & \\ Q(x,y) & = & \mu(x) \end{array} \right.$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\partial_x \mu(x) &= \partial_y\{\mu(x)\left[f(x)y(x)-g(x)\right]\} \\
\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x} &= \mu(x)f(x) \\
\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mu(x)} &= f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mu(x)} = \int f(x)\mathrm{d}x \\
\ln|\mu(x)| &= \int f(x)\mathrm{d}x \\
\mu(x) &= e^{\int f(x)\mathrm{d}x} .
\end{aligned}$$

Esto significa que para las ecuaciones lineales de orden 1 se tiene

$$e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\left[f(x)y(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x + e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} P(x,y) &=& e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\left[f(x)y(x)-g(x)\right] \\ \\ Q(x,y) &=& e^{\int f(x)\mathrm{d}x} \end{array} \right.$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &\Rightarrow \quad \partial_y\left[e^{\int f(x)\mathrm{d}x}f(x)y(x) - e^{\int f(x)\mathrm{d}x}g(x)\right] = f(x)e^{\int f(x)\mathrm{d}x} \\
\frac{\partial Q}{\partial x} &\Rightarrow \quad \partial_x\left[e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\right] = f(x)e^{\int f(x)\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación original multiplicada por el factor integrador que la convierte en exacta, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
e^{\int f(x)\mathrm{d}x}f(x)y(x)\mathrm{d}x - e^{\int f(x)\mathrm{d}x}g(x)\mathrm{d}x + e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y &= 0 \\
e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y + e^{\int f(x)\mathrm{d}x}f(x)y(x)\mathrm{d}x &= e^{\int f(x)\mathrm{d}x}g(x)\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}\left[y(x)e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\right] &= e^{\int f(x)\mathrm{d}x}g(x)\mathrm{d}x \\
y(x)e^{\int f(x)\mathrm{d}x} &= \int e^{\int f(x)\mathrm{d}x}g(x)\mathrm{d}x + C .
\end{aligned}$$

Llegamos entonces a la fórmula que nos dará la solución general para cualquier ecuación diferencial lineal de orden 1.

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int f(x)\mathrm{d}x}}\int e^{\int f(x)\mathrm{d}x}g(x)\mathrm{d}x + \frac{C}{e^{\int f(x)\mathrm{d}x}} . \tag{2}$$

En realidad, lo anterior se puede formalizar con el siguiente teorema para el problema de valores iniciales. Consultar la bibliografía recomendada para estudiar su demostración

Teorema Sean las funciones f y $\partial_y f$ funciones contínuas en algún intervalo $a < x < b$ y $c < y < d$ que contienen al punto (x_0, y_0). Entonces, en algún intervalo $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ contenido en $a < x < b$, existe una única solución $y = y(x)$ del problema de valores iniciales:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(x,y) , \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0 .$$

Ejemplo

$$y' - 2xy = e^{x^2},$$

aquí: $f(x) = -2x$ y $g(x) = e^{x^2}$. Por lo tanto, el factor integrador es:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\mathrm{d}x} = e^{\int -2x\mathrm{d}x} = e^{-x^2}.$$

La solución viene a ser:

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x^2}} \int e^{-x^2} e^{x^2} \mathrm{d}x + \frac{C}{e^{-x^2}} \; = \; e^{x^2} \left(x + C\right) .$$

Ejercicio Resuelva la ecuación

$$xy' + 3y = \frac{\mathrm{sen} x}{x^2}, \quad \text{con } x \neq 0\,, \text{ y } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,.$$