

Series de Fourier, continuación

1. Condiciones de Dirichlet

Las condiciones que una determinada función $f(x)$ debe cumplir para poder ser representada como una serie de Fourier, se conocen con el nombre de condiciones de Dirichlet¹ las cuales pueden ser esquematizadas en los siguientes puntos. Para que una función $f(x)$ sea susceptible de ser expandida en series de Fourier debe ser:

- periódica
- univaluada y continua a trozos (continua menos, en un número finito de puntos) con un número finito de máximos y mínimos
- la integral $\int_{-T/2}^{T/2} dx |f(x)|$ debe ser convergente. Donde $[-T/2, T/2]$ quiere indicar el intervalo de definición de una función con período T .

Podemos formalizar un poco más las condiciones de Dirichlet en el llamado Teorema de Fourier.

Teorema de Fourier Sea $f(x)$ una función en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ y definida para el resto de la recta real tal que cumpla con $f(x + 2\pi) = f(x)$. Es decir $f(x)$ es 2π -periódica. Supongamos además que existe

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x), \quad \text{con lo cual} \quad \tilde{C}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x) \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y si $|f(x)|$ está acotada para un intervalo $[a, b]$ con $-\pi < a \leq x \leq b < \pi$, entonces

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikx} \quad \text{es convergente al valor } F(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} f(x - \epsilon) \right)$$

y si $f(x)$ es continua en $x = x_0$ entonces $F(x_0) \rightarrow f(x_0)$.

En este punto se pueden puntualizar varias cosas:

1. El valor $F(x) = \frac{1}{2} (\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} f(x - \epsilon))$ al cual converge la expansión de Fourier, cobra particular importancia cuando el punto $x = x_0$ es una discontinuidad. Tal y como veremos más adelante (sección 3.1) y expresa este teorema, las series de Fourier son particularmente apropiadas para expandir funciones discontinuas (en un número finito de puntos en el intervalo), sin embargo, por ser una base de funciones continuas no puede reproducir la discontinuidad como tal. La expansión de Fourier alrededor de un punto de discontinuidad $x \rightarrow x_{\pm 0}$ tenderá al valor $F(x) \rightarrow F(x_{\pm 0}) \equiv F_m$ donde $F_m = \frac{F(x_{+0}) + F(x_{-0})}{2}$. Es decir, tenderá al valor medio de los valores de la discontinuidad por la izquierda $F(x_{-0})$ y por la derecha $F(x_{+0})$.

¹**Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** 1805 - 1859 Matemático Alemán con importantes contribuciones en Teorías de números Algebraica, Series y aproximaciones de funciones y ecuaciones diferenciales parciales

2. Si los coeficientes de Fourier tienen variaciones acotadas en el intervalo y $|\tilde{C}_k| \rightarrow 0$ con $k \rightarrow \infty$. Entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{C}_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^2 + b_n^2| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2$$

que no es otra cosa que la expresión de la completitud de esta base de funciones.

2. Algunos ejemplos de expansiones en series de Fourier

Para ilustrar esta relación entre la función $f(x)$ y su expansión en serie de Fourier $F(x)$ analicemos algunos ejemplos típicos

2.1. Ondas Cuadradas

Para empezar, el caso de una función muy conocida en el ámbito de los circuitos eléctrico. Una onda cuadrada

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\frac{1}{2}T \leq t < 0 \\ +1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T, \end{cases}$$

En este caso se puede integrar entre $[0, T/2]$ y luego multiplicar todo por 2.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt = 1, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{\text{sen}(n\pi)}{n\pi} = 0, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}, \end{aligned}$$

Entonces solo sobreviven los b_{2n+1} ya que coeficientes pares se anulan: $b_{2n} = 0$.

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\text{sen}\omega t + \frac{\text{sen}3\omega t}{3} + \frac{\text{sen}5\omega t}{5} + \frac{\text{sen}7\omega t}{7} + \dots \right)$$

donde hemos denotado $\omega = 2\pi/T$. Al definir la función ω podemos interpretar los coeficientes de Fourier a_n, b_n como las contribuciones de cada uno de los armónicos $a_n, b_n \rightarrow \omega_n = \frac{2n\pi}{T}$. A partir de estas contribuciones se construye el espectro de potencia, el cual está relacionado con la energía que aporta cada uno de estos armónicos. Por ello construimos un índice $E_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y graficamos E_n vs n tal y como se puede comprobar en la figura 1, cuadrantes IV y VII. Se encuentra que se puede asociar un espectro de potencia a cada señal y con lo cual realizar una especie de identificación.

En este punto podemos hacernos un par de preguntas

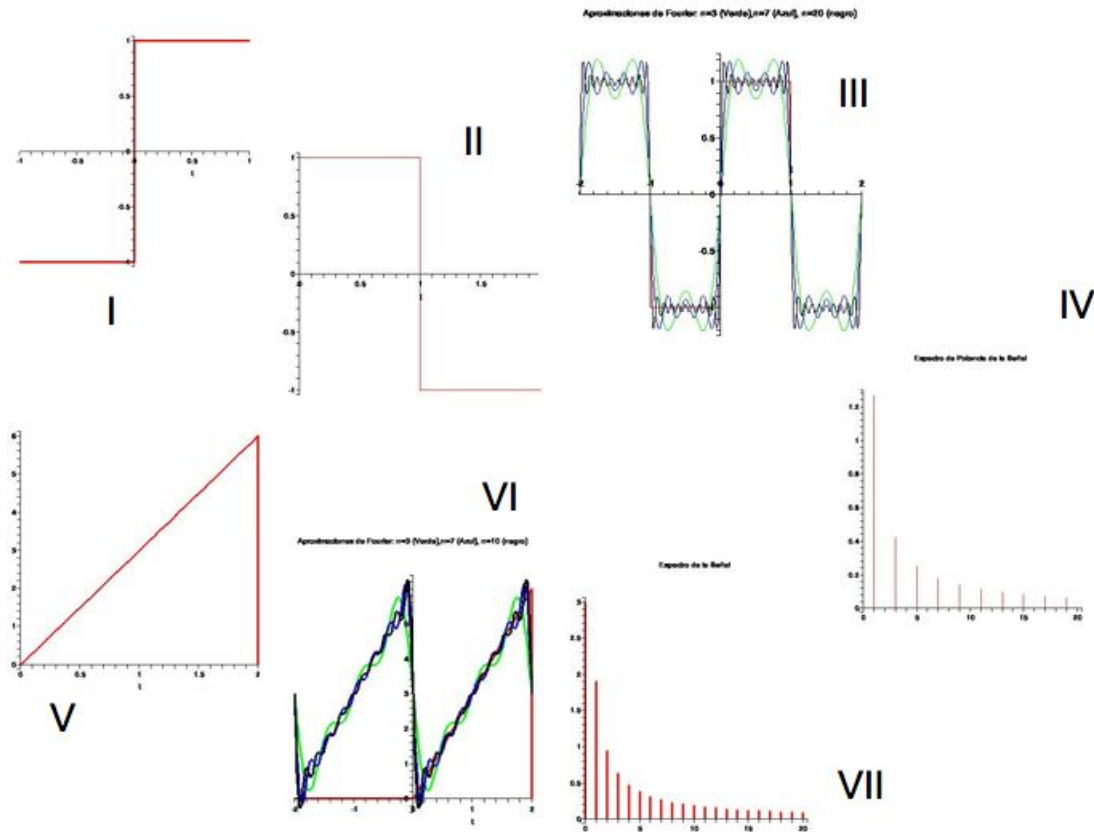


Figura 1: Un par de funciones, definidas con un período T , a ser expresadas en como expansiones en Series de Fourier. En los cuadrantes I y II, encontramos una onda cuadrada. La primera (cuadrante I) definida en un intervalo $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ y en el cuadrante II la misma función definida en un intervalo $(0, T)$. El cuadrante III ilustra las aproximaciones de la serie de Fourier para $n = 3, 7, 20$, mientras que el espectro de potencia se presenta en el cuadrante IV. La onda “diente de sierra”, definida en un intervalo $(0, T)$, se presenta en el cuadrante V. Sus aproximaciones en series de Fourier para $n = 3, 7, 10$ se pueden observar en el cuadrante VI, mientras que el espectro de potencia en el cuadrante VII.

- ¿ qué hubiera pasado si en vez de considerar el intervalo $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ hubiéramos considerado $(0, T)$?
- ¿ tendríamos el mismo desarrollo en serie de Fourier ?
- ¿ el mismo espectro ?

Justifique sus respuestas.

2.2. Variedades de dientes de sierra

Otra función muy común es la denominada dientes de sierra

$$f(t) = at \quad \text{si } 0 \leq t \leq T \quad \text{con } a \text{ constante}$$

los coeficientes son:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T at dt = aT, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T at \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{aT}{\pi^2 n^2} [n\pi \text{sen}(2n\pi) - \text{sen}^2(n\pi)] = 0, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T at \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = -\frac{aT}{n\pi}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$f(t) = at = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{aT}{2} - \frac{aT}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{n}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T$$

En el caso particular de hacer $a = 3$ y $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$, entonces:

$$f(t) = 3t = 3 - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi t)}{n} = 3 - \frac{6\text{sen}(\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{2\text{sen}(3\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{6\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} + \dots$$

La figura 1 (cuadrantes V y VI) muestra la construcción de esta función y su representación en Series de Fourier.

A partir de esta función podemos hacer unas variaciones. Por ejemplo considérese la función

$$f(t) = at \quad \text{si } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad \text{con } a \text{ constante} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at dt & = 0 \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt & = 0 \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt & = -\frac{aT(-1)^n}{n\pi}. \end{cases}$$

Claramente es una función impar $f(-x) = -f(x)$ y así lo refleja su expansión en series de Fourier. Si hacemos $a = 3$ y $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$ tendremos que la expresión para de la serie es

$$f(t) = 3t = \frac{6\text{sen}(\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(2\pi t)}{\pi} + \frac{2\text{sen}(3\pi t)}{\pi} - \frac{3\text{sen}(4\pi t)}{2\pi} + \frac{6\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} + \dots \quad \text{con } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

la cual, si bien es parecida no es igual a la anterior, debido que estamos expandiendo otra función.

Otra variación posible de la función “diente de sierra” puede ser la versión completamente par del “diente”, $f(-x) = f(x)$. Esta es

$$f(t) = \begin{cases} -at & \text{si } \frac{-T}{2} \leq t \leq 0 \\ at & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

El cálculo de los coeficientes resulta en:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-at) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} at dt = \frac{aT}{2}, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-at) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} at \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{aT}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1], \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-at) \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} at \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = 0. \end{aligned}$$

En este caso son los coeficiente b_n los que se anulan. Adicionalmente, nótese que para n par, los coeficientes a_n también se anulan, Otra vez, si hacemos $a = 3$ y $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$ tendremos la serie:

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{12 \cos(\pi t)}{\pi^2} - \frac{4 \cos(3\pi t)}{3\pi^2} - \frac{12 \cos(5\pi t)}{25\pi^2} + \dots \quad \text{con } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

2.3. Función cuadrática

Otro caso, complementario al anterior por sus propiedades de simetría, es la expansión en series de Fourier de la función $f(x) = x^2$ para $-\pi < x < \pi$. Entonces los coeficientes se la expansión serán

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx & = \frac{2\pi^2}{3} \\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx & = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{cases}$$

ya que los coeficientes correspondientes a los términos impares b_n se anulan. Con lo cual

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$

Nótese que como un resultado particular, al evaluar en $x = \pi$, se tiene la función zeta de Riemann $\zeta(2)$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \zeta(2) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pero este caso se presta también para considerar funciones no periódicas. Supongamos que queremos desarrollar la expansión de Fourier para $f(t) = t^2$ pero en este caso con $0 < t < 2$. Si este fuera el caso, empezamos por suponer que la función tienen un período, digamos $T = 4$. Esto es $-2 \leq t \leq 2$. Con lo cual

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 t^2 dt = \frac{4}{4} \int_0^2 t^2 dt = \frac{8}{3} \\ a_n &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 t^2 \cos\left(\frac{2\pi nt}{4}\right) dt = \frac{4}{4} \int_0^2 t^2 \cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right) dt = \frac{16}{\pi^2 n^2} \cos n\pi = \frac{16}{\pi^2 n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

Con lo cual tendremos que

$$t^2 = \frac{4}{3} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \quad \text{para } 0 < t \leq 2$$

3. Consideraciones de Simetría en series de Fourier

Es de hacer notar que estas propiedades de simetría respecto al período de la función ($f(x) = f(-x)$ simetría y $f(x) = -f(-x)$ antisimetría) para un período $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$ pueden y deben ser explotadas para simplificar los cálculos. Esto se puede resumir en

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_n = 0 \end{cases} \quad \text{y alternativamente} \quad f(x) = -f(-x) \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases}$$

Pero más interesante aún es cuando estas propiedades de simetría se presentan en un cuarto del período. Vale decir, que $f(x)$ será par o impar respecto a $T/4$ i.e. $f\left(\frac{T}{4} + x\right) = \pm f\left(\frac{T}{4} - x\right) \Rightarrow f(-s) = \pm f(s)$ donde $s = \frac{T}{4} - x$. Entonces

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{T} + \frac{\pi n}{2}\right)$$

Donde los límites de integración no se han visto alterados porque la función es periódica. Es inmediato comprobar que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{T} + \frac{\pi n}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

es decir

$$b_n = \frac{2}{T} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \cos\left(\frac{2\pi ns}{T}\right) \right)$$

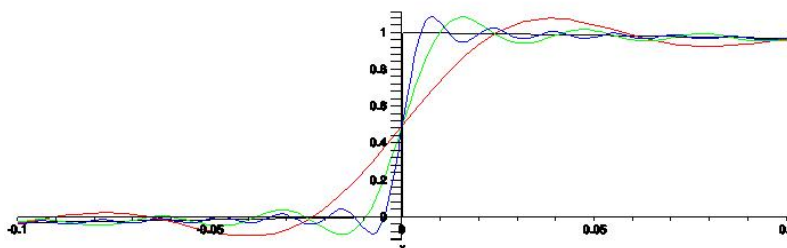


Figura 2: Aproximación por series de Fourier para la función escalón $\{f(x) = 0 \text{ para } -\infty < x < 0 \text{ y } f(x) = 1 \text{ para } x \geq 0\}$ Las curvas corresponden a sumas parciales de Fourier: $F_{40}(x), F_{100}(x), F_{200}(x)$,

por lo que si $n = 2k \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \sin(\pi k) = 0$ y si $n = 2k - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0$. La misma consideración se puede hacer para los coeficientes a_n (queda como ejercicio para el lector) y se puede concluir que

- Si $f(x)$ par en $T/4$ entonces $a_{2n-1} = b_{2n} = 0$
- Si $f(x)$ impar en $T/4$ entonces $a_{2n} = b_{2n-1} = 0$

3.1. Tratamiento de discontinuidades

Tal y como hemos mencionado, a diferencia de las series de potencias, las series de Fourier manejan razonablemente bien las discontinuidades, pero por ser una base de funciones continuas, no puede reproducirlas. Tal y como comentamos en el Teorema de Fourier y muestra la figura 2 el valor de las sumas parciales de Fourier en un punto de discontinuidad $x = x_{\pm 0}$ será el promedio de los valores $F(x_{-0})$ (por la izquierda) y $F(x_{+0})$ (por la derecha) en la discontinuidad. Esto es la expansión de Fourier alrededor de un punto de discontinuidad $x \rightarrow x_{\pm 0}$ tenderá al valor $F(x) \rightarrow F(x_{\pm 0}) \equiv F_m$ donde $F_m = \frac{F(x_{+0}) + F(x_{-0})}{2}$.

4. El Fenómeno de Gibbs

Pero también se muestra en esa figura 2 que, tanto por la izquierda como por la derecha la discontinuidad de la función escalón, las sumas parciales de Fourier oscilan y no convergen a los valores $x_{\pm 0}$. El comportamiento oscilante de las sumas parciales de Fourier alrededor de las discontinuidades, que no desaparecen ni en el límite se denominan *fenómeno de Gibbs* en honor a su descubridor Josiah Willard Gibbs²

²Josiah Willard Gibbs 1839 - 1903 Algunos lo consideran el primer Físico Norteamericano, de hecho fue el primero en recibir un título de doctorado por una universidad norteamericana (Yale University). Hizo importantes aportes en electromagnetismo y sobre todo en termodinámica y física estadística, sentando las bases matemáticas

Para entender qué pasa en la discontinuidad consideremos una variación de la onda cuadrada considerada anteriormente (2). Entonces sus sumas parciales serán

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \Rightarrow F_{2n}^c(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)x)$$

porque los coeficientes pares (a_n) se anulan. Para estudiar el fenómeno de Gibbs reescribimos la suma parcial anterior de una manera ingeniosa

$$F_{2n}^c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^t ds \cos(2k-1)s \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^t ds \left(\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)s \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^t ds \left(\frac{\text{sen}(2ns)}{\text{sen}(s)} \right)$$

donde, utilizando la fórmula de Moivre y convirtiendo esa serie de cosenos en una de exponenciales la cual, a su vez es una progresión geométrica (y le queda la comprobación al lector), hemos sustituido

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)s = \frac{\text{sen}(2ns)}{\text{sen}(s)}$$

Es inmediato convencerse que las sumas parciales $F_{2n}^c(x)$ siempre tendrán máximos y mínimos

$$\frac{dF_{2n}^c(x)}{dx} = \frac{\text{sen}(2nx)}{\text{sen}(x)} = 0 \quad \Rightarrow \text{para } x = \frac{m\pi}{2n} \quad \text{con } m = 1, 2, 3, \dots$$

Las Series de Fourier tienden a sobre-estimar el valor de los puntos de discontinuidad en $\pm 18\%$ esto es un valor de $\approx 1,1789797$. La inclusión de más términos en las sumas parciales no mejoran la situación. El fenómeno de Gibbs no se restringe a Series de Fourier sino que también se presenta en las demás series de funciones (ver detalles en la referencia [?]).

El fenómeno de Gibbs fue observado ¡ experimentalmente ! por primera vez por Albert Michelson³ Para finales de 1800 Michelson había creado un dispositivo mecánico para medir las componentes de Fourier de señales eléctricas. Al incorporarle una onda cuadrada observó que una oscilación inesperada en los puntos de discontinuidad. Creyó que esa oscilación se debía a defectos del dispositivo. Luego de probar múltiples tipos de señales periódicas y observar un comportamiento similar, decidió comentárselo a su amigo Willard Gibbs, de la Universidad Yale. Al poco tiempo Gibbs volvió una explicación que dejó intacta la fama de Michelson como instrumentista. El fenómeno es una consecuencia de la teoría de series de Fourier y no del equipo diseñado por Michelson⁴.

para estas disciplinas. En matemáticas es conocido su estudio de las oscilaciones de las expansiones de las series de Fourier en los puntos de discontinuidad. Más detalles <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk>

³ **Albert Abraham Michelson** Strelno, Prussia, 1852 - Pasadena EEUU. 1931. Premio Nobel en Física (1907) uno de los físicos experimentales más habilidosos de todos los tiempos. La precisión y lo ingenioso de los instrumentos creados por él son famosos. Con importantes contribuciones en medidas de fenómenos en óptica. Una de sus contribuciones más conocidas son los experimentos para mostrar la inexistencia del Ether como medio de transmisión para el fenómeno electromagnético. Más detalles <http://nobelprize.org/physics/laureates/1907/michelson-bio.html>

⁴ Más detalles http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon

4.1. Corrección al fenómeno de Gibbs: Factor σ de Lanczos

Una de las estrategia para corregir las oscilaciones del fenómeno de Gibbs se le debe a Lanczos⁵ Considerando el mismo caso de la función onda cuadrada, se puede intentar sustituir la función oscilante $F_n^c(x)$ por su promedio $\bar{F}_n^c(x)$ alrededor del punto x . Vale decir

$$F_{2n}^c(x) \rightarrow \bar{F}_{2n}^c(x) = \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds F_{2n}^c(s) = \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)s) \right]$$

desarmando tendremos que

$$\begin{aligned} \bar{F}_{2n}^c(x) &= \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)s) \right] \\ &= \frac{n}{\pi} \left[\frac{\pi}{2n} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)s) \right]_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} \\ \bar{F}_{2n}^c(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \underbrace{\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right)}{\frac{\pi}{2n}(2k-1)} \right]}_{\sigma} \text{sen}((2k-1)x) \end{aligned}$$

Con lo cual hemos identificado el factor σ de Lanczos. Siguiendo este mismo proceso se puede generalizar para cualquier función de tal modo que una serie de Fourier genérica podrá ser corregida con un factor σ para lograr

$$\bar{F}_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right] (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx))$$

5. Tranformadas de Fourier

La transformada de Fourier representa (como combinación lineal de funciones sinusoidales) a funciones definidas en toda la recta real y/o sin una periodicidad definida. Puede ser considerada como la generalización de la representación en serie de Fourier, y es mayormente utilizada para expresar funciones que varían en el tiempo con el único requisito que tengan norma acotada, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|$ finita

Anteriormente hemos visto, que podemos expresar una función en término se series de Fourier complejas

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k |\tilde{\phi}_k\rangle \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikx} \quad \leftrightarrow \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\omega_n t}$$

⁵**Cornelius Lanczos** 1893 - 1974 Hungría. Matemático húngaro con contribuciones importante en Relatividad y Física Teórica. En matemáticas es conocido inventar la transformada rápida de Fourier. Más detalles en <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lanczos.html>

donde hemos definido $\omega = \frac{2n\pi}{T}$. Ahora bien, podemos hacer $T \rightarrow \infty$ con lo cual $[-T/2, T/2] \rightarrow [-\infty, \infty]$ pero además

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{n} = \Delta\omega \rightarrow d\omega \text{ y además } \frac{\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)}{T} \rightarrow 0 \text{ ya que } \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \text{ existe y es acotada.}$$

Si recordamos la expresión que toman los coeficientes de la expansión

$$\tilde{C}_n = \frac{\langle \tilde{\phi}_n | \mathbf{f} \rangle}{\langle \tilde{\phi}_k | \tilde{\phi}_n \rangle} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-i2n\pi x} f(x) \Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-inx} f(x) \right) e^{i\omega_n t}$$

con lo cual hacer $T \rightarrow \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} f(x)}_{F(\omega)}$$

De este modo, la transformada de Fourier de una función y su inversa, pueden escribirse como

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) \Leftrightarrow f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} F(\omega)$$

5.1. Propiedades

Las transformada de Fourier cumplen con las siguiente propiedades, las cuales de derivan de la definición arriba expuesta

1. Las transformada de la derivada $\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathcal{F}[f^n(t)] = i^n \omega^n F(\omega)$. Esta propiedad es más o menos inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) = i\omega F(\omega)$$

2. La transformada de la integral

$$\mathcal{F} \left[\int^t ds f(s) \right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c \delta(\omega)$$

donde la función (distribución) $\delta(\omega)$ se denomina delta de Dirac y el término $2\pi c \delta(\omega)$ representa la transformada de la constante de integración

3. Escalamiento $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{\omega}{a}\right)$
4. Traslación $\mathcal{F}[f(t+a)] = e^{ia\omega} F(\omega)$
5. Multiplicación por un exponencial $\mathcal{F}[e^{at} f(t)] = f(\omega + ia)$

5.2. Funciones pares e impares

Al igual que en las expansiones de Fourier la paridad de la función $f(t)$ es importante. Esto se nota rápidamente a partir de la definición. Supongamos $f(t) = -f(-t)$, entonces

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) f(t) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \operatorname{sen} \omega t f(t)$$

con lo cual podremos definir las transformadas de Fourier seno y coseno para funciones impares y pares respectivamente. Esto es para funciones impares $f(t) = -f(-t)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt \cos \omega t f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \cos \omega t F(\omega)$$

y para funciones pares $f(t) = f(-t)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt \operatorname{sen} \omega t f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \operatorname{sen} \omega t F(\omega)$$

5.3. Bases discreta y continuas: La base de Ondas Planas

Haremos una digresión para fijar conceptos y extender algunos de los razonamientos que hemos desarrollado hasta aquí. Tal y como hemos visto repetidas veces, la representación de un vector $|\mathbf{F}\rangle$ en un espacio vectorial abstracto \mathbf{V} puede darse en término de una base ortonormal de vectores (discreta y finita $B_{DF} = \{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$ o discreta e infinita $B_{DI} = \{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle, \dots\}$) de la forma:

$$|\mathbf{F}\rangle = \begin{cases} \sum_{i=0}^n c_i |\mathbf{u}_i\rangle = \sum_{i=0}^n \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{F} \rangle |\mathbf{u}_i\rangle & \Leftrightarrow B_{DF} = \{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle\} \\ \sum_{i=0}^{\infty} c_i |\mathbf{v}_i\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{F} \rangle |\mathbf{u}_i\rangle & \Leftrightarrow B_{DI} = \{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle, \dots\} \end{cases}$$

donde en ambos casos:

$$c_i = \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{F} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta_{ij}$$

la intención ahora será utilizar la transformada de Fourier para construir la generalización de bases discretas a continua $|\mathbf{w}_\alpha\rangle$ de tal forma que transformamos el índice de la sumatoria en la variable de una integral

$$|\Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) |\mathbf{w}_\alpha\rangle$$

donde

$$c(\beta) = \langle \mathbf{w}_\beta | \Psi \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \langle \mathbf{w}_\beta | \mathbf{w}_\alpha \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \delta(\alpha - \beta)$$

con en la cual $\delta(\alpha - \beta)$ es una Delta de Dirac. Así, los dos conceptos expresados hasta ahora tienen una expresión:

Propiedad \ Base	Discreta	Continua
Ortogonalidad	$\langle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$	$\langle \mathbf{w}_\beta \mathbf{w}_\alpha \rangle = \delta(\alpha - \beta)$
Cierre	$\mathbf{1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{v}_j\rangle \langle \mathbf{v}_j $	$\mathbf{1} = \int d\alpha \mathbf{w}_\alpha\rangle \langle \mathbf{w}_\alpha $
Expansión	$ \mathbf{F}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{u}_i\rangle$	$ \Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) \mathbf{w}_\alpha\rangle$
Componentes	$c_i = \langle \mathbf{u}_i \mathbf{F}\rangle$	$c(\beta) = \langle \mathbf{w}_\beta \Psi\rangle$
Producto Interno	$\langle \mathbf{G} \mathbf{F}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} g_i^* f_i$	$\langle \mathbf{G} \mathbf{F}\rangle = \int d\alpha g^*(\alpha) f(\alpha)$
Norma	$\langle \mathbf{F} \mathbf{F}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} f_i ^2$	$\langle \mathbf{F} \mathbf{F}\rangle = \int d\alpha f(\alpha) ^2$

Ilustraremos esta generalización con la construcción de la base de ondas planas. Hemos visto que la transformada compleja de Fourier compleja para una función, se puede escribir como

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i st} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i st} F(s)$$

las cuales reescribiremos en términos más familiares a la comunidad de físicos como

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x)$$

Hemos tenido cuidado de incluir los factores de normalización adecuados para el caso de las descripciones en mecánica cuántica. Estas fórmulas pueden ser reinterpretadas en función de los conceptos anteriormente expuestos y podemos definir una base continua de la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar} \right)}_{v_p(x)} \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i px/\hbar} \right)}_{v_p^*(x)} \psi(x)$$

por lo cual

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p(x) \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_p^*(x) \psi(x)$$

Diremos que la función $\psi(x)$ está expresada en la base de ondas planas $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar}$

Nótese

- El índice p de $v_p(x)$ varía de forma continua entre $-\infty$ e ∞ .
- Que $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i px/\hbar} \notin \mathcal{L}^2$ es decir no pertenece al espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable ya que su norma diverge

$$\langle \mathbf{v}_p | \mathbf{v}_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |v_p(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\pi\hbar} \rightarrow \infty$$

- Que las proyecciones de $\psi(x)$ sobre la base de ondas planas es $\bar{\psi}(p) = \langle \mathbf{v}_p | \psi \rangle$

- La relación de cierre para esta base se expresa como

$$1 = \int d\alpha |\mathbf{v}_\alpha\rangle \langle \mathbf{v}_\alpha| \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p^*(x') v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i p(x'-x)/\hbar} = \delta(x' - x)$$

mientras que de la definición de producto interno, uno obtiene

$$\langle \mathbf{v}_{p'} | \mathbf{v}_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_{p'}^*(x) v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i x(p'-p)/\hbar} = \delta(p' - p)$$

5.4. Un para de ejemplos

Un ejemplo inmediato lo tenemos al considerar la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt 1 e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} \right|_{-1}^1 = \frac{2\text{sen } \omega}{\sqrt{2\pi}\omega}$$

el otro ejemplo de uso lo podremos construir a si consideramos la ecuación diferencial inhomogénea y busquemos su solución

$$\frac{d\phi(x)}{dx^2} - K^2\phi(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \left[\frac{d\phi(x)}{dx^2} - K^2\phi(x) \right] e^{-i\omega t} = F(\omega)$$

donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función $f(x)$. Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier obtenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \left[\frac{d\phi(x)}{dx^2} \right] e^{-i\omega t} - K^2\tilde{\phi}(\omega) = F(\omega) \quad \Rightarrow \quad -k^2\tilde{\phi}(\omega) - K^2\tilde{\phi}(\omega) = F(\omega) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\phi}(\omega) = -\frac{F(\omega)}{k^2 + K^2}$$

donde hemos representado $\tilde{\phi}(\omega)$ como la transformada de Fourier de la solución $\phi(x)$. Con lo cual

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \tilde{\phi}(\omega) e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \frac{F(\omega)}{k^2 + K^2} e^{-i\omega t}$$

Como solución formal de la ecuación diferencial resulta sencilla y el método también es inmediato. El punto crucial es la solución de la integral que resulta de la transformación inversa. Normalmente este tipo de integrales no son tratables de manera analítica. Pero siempre queda el recurso numérico.

5.5. Transformadas Discretas de Fourier

Aquí haremos algo más contemporáneo que será estudiar la versión discreta de esta transformación. En general las integrales, en su mayoría, no se pueden resolver analíticamente por lo que tenemos que proceder a resolverlas de forma numérica. La mayor parte de los métodos numéricos involucra convertir integrales en sumatorias. Es decir en series de funciones.

En ?? hemos visto como las funciones trigonométricas (y las exponenciales de argumento imaginario) son ortogonales bajo integrales evaluadas en un determinado intervalo. En otras palabras

con la definición de producto interno en un espacio de funciones. Ahora bien, esas mismas funciones (*Fourier Generalidades, cosenos y funciones exponenciales* de argumento imaginario) serán también ortogonales al ser evaluadas en puntos muy particulares.

Consideremos los siguientes $2N$ puntos $t_k = \frac{kT}{2N}$ y probaremos que las funciones $e^{2\pi i p t_k/T}$ y $e^{2\pi i q t_k/T}$ serán ortogonales $\propto \delta_{qp}$ en un conjunto esos puntos t_k . Esto es

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left[e^{\frac{2\pi i p t_k}{T}} \right]^* e^{\frac{2\pi i q t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{\frac{2\pi i s t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{\frac{2\pi i s k}{2N}} = \begin{cases} \frac{1-r^{2N}}{1-r} = 0 & r \neq 1 \\ 2N & r = 1 \end{cases}$$

donde hemos sustituido $s = q - p$, y evaluado en los puntos $t_k = \frac{kT}{2N}$ con $k = 1, 2, 3, \dots, 2N - 1$. Nótese que la última de las series es una serie finita y geométrica con razón $r = e^{(\pi i s)/N}$, que comienza con 1 y por lo tanto suma (dependiendo del valor de r) lo que aparece en la llave. Es inmediato convencerse que, para todo N se cumple que $r^{2N} = e^{2\pi i s} = 1$ (con s entero) con lo cual se cumple la relación de ortogonalidad que buscamos

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left[e^{\frac{2\pi i p t_k}{T}} \right]^* e^{\frac{2\pi i q t_k}{T}} = 2N \delta_{qp} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots, 2N - 1 \quad (1)$$

Si hacemos un ligero cambio de notación y llamamos $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$ tendremos algunos cambios, en apariencia, cosméticos

$$e^{\pm \frac{2\pi i m t_k}{T}} \rightarrow e^{\pm \omega_m t_k} \Rightarrow F(\omega_m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{\pm \omega_m t_k} \Leftrightarrow f(t_k) = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} F(\omega_m) e^{\pm \omega_m t_k} \quad (2)$$

La función $F(\omega_m)$ representa la transformada discreta de Fourier de la $f(t_k)$. Para despejar la función $f(t_k)$ hemos utilizado la relación de ortogonalidad 1

Consideremos el siguiente $f(t_k) = \cos t_k$ evaluado en un período $T = 2\pi$ y dividido, digamos en $N = 2$ intervalos. Los puntos en los cuales evaluaremos nuestra serie serán $2N = 4$, vale decir

$$t_k = \frac{kT}{2N} \equiv \frac{k\pi}{2} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_m = \frac{2\pi m}{T} \equiv m \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{i\omega_m t_k}}{2N} \equiv \frac{e^{imk\pi/2}}{2N}$$

nótese que la función $f(t_k)$ puede ser escrita como un vector $f(t_k) = (1, 0, -1, 0)$, con lo cual para encontrar la expresión de su transformada discreta de Fourier, $F(\omega_m)$, podemos expresar la suma como una matriz de transformación con índices m, k . Esto es

$$\frac{e^{imk\pi/2}}{2N} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$F(\omega_m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{\pm \omega_m t_k} \Rightarrow \begin{pmatrix} F(\omega_0) \\ F(\omega_1) \\ F(\omega_2) \\ F(\omega_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Respecto a la ecuación 2 se deben puntualizar varios elementos

- la frecuencia angular $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$ corresponde a lo que en Física se denomina el espacio recíproco (al temporal), espacio de frecuencias u ω -espacio. Por ello la función $F(\omega_m)$ está expresada en este espacio de frecuencias, mientras que la función $f(t_k)$ en el de tiempos.
- La elección de uno de los signos $+$ y $-$ en la expresión $e^{\pm \omega_m t_k}$ es arbitraria.

Con lo cual si “reconstruimos” la función original a partir de la transformada discreta nos sorprende el resultado, por cuanto no coincide

$$f(t_k) = \frac{1}{2} e^{-it_k} + \frac{1}{2} e^{-3it_k} \Rightarrow \Re[f(t_k)] = \frac{1}{2} \cos t_k + \frac{1}{2} \cos 3t_k$$

Ahora bien, para los puntos $t_k = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \text{ y } \frac{3\pi}{2}$ si se cumple que los valores $\cos t_k = \frac{1}{2} \cos t_k + \frac{1}{2} \cos 3t_k$. En los pocos puntos seleccionados $\cos t_k$ y $\cos 3t_k$ se asemejan. En la medida que seleccionemos más puntos en esa medida se dejan de parecer y la reconstrucción de la función será más fidedigna.