Integración en Variable Compleja

1. Integrales complejas

Como siempre, luego de definir la derivada, construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann. Esto es

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \text{ si } n \to \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z)$$

Es decir, que si el $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, entonces corresponde con la definición de la integral.

1.1. Algunas propiedades

Es claro que esta integral es, necesariamente, una integral de línea, ya que z tiene "dos dimensiones"

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) &= \int_{z_1}^{z_2} (\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)\left(u(x,y) + iv(x,y)\right) \\ &= \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \left(u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y\right) + i\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \left(v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y\right) \end{aligned} \tag{1}$$

con lo cual transformamos una integral compleja en una suma de integrales reales, pero necesitamos definir el contorno a través del cual vamos de $z_1 = x_1 + iy_1 \to z_2 = x_2 + iy_2$

La integración compleja tendrá las propiedades acostumbradas

- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ \ (f(z) + g(z)) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z g(z)$
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ Kf(z) = K\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z)$ con K una constante real o compleja
- $\int_a^b \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_b^a \mathrm{d}z\ f(z)$
- $\int_a^b \mathrm{d}z\ f(z) = \int_a^m \mathrm{d}z\ f(z) + \int_m^b \mathrm{d}z\ f(z)$
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ |f(z)| \leq ML$ donde $M = \max|f(z)|$ y L la longitud de $\mathcal{C}$

Esta última propiedad es importante porque permite establecer cotas a las integrales complejas sin tener que evaluarlas. De la definición de integral es casi inmediata la demotración

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\Delta z_j = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) \quad \Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\Delta z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\zeta_j)|\ |\Delta z_j| \leq M\sum_{j=1}^{n} |\Delta z_j| \leq ML$$

Donde hemos utilizado que $|f(\zeta_j)| \leq M$ y que la suma de los intervalos $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$ es la longitud L del recorrido $\mathcal{C}$. Es claro que tomando límites a ambos miembros obtendremos $\left|\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z)\right| \leq \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ |f(z)| \leq ML$.

1.2. Un par de ejemplos

Por ejemplo, evaluemos la integral compleja $f(z) = z^{-1}$ a lo largo de diferentes contornos, tal y como se ilustran en la figura 1

- un circuito cerrado a lo largo de una circunferencia de radio R

$$\oint \mathrm{d}z\ z^{-1} \equiv \oint \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi i$$

- siguiendo una semicircunferencia desde $(R, 0) \to (-R, 0)$. Esto es

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \mathrm{d}z\ z^{-1} = \int_{(R,0)}^{(R,\pi)} \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \pi i$$

- siguiendo dos líneas rectas entre los puntos $(R, 0) \to (0, R) \to (-R, 0)$. En este caso, procedemos utilizando la expresión cartesiana para los números complejos. Para ello, vamos a parametrizar $z = z(t)$ para $(R, 0) \to (0, R)$ y $z = z(s)$ cuando $(0, R) \to (-R, 0)$. Veamos

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_3=(-R,0)} \mathrm{d}z\ z^{-1} = \int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(0,R)} \mathrm{d}z\ z^{-1} + \int_{z_2=(0,R)}^{z_3=(0,-R)} \mathrm{d}z\ z^{-1}$$

para cada una de las integrales se cumple, respectivamente, que

$$z = (1-t)R + itR \quad \text{con } 0 \le t \le 1 \qquad \wedge \qquad z = -sR + i(1-s)R \quad \text{con } 0 \le s \le 1$$

con lo cual

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \frac{-1+i}{(1-t)+it}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{-1-i}{-s+i(1-s)}\mathrm{d}s$$

procedemos entonces con la primera de las integrales

$$\int_0^1 \frac{-1+i}{(1-t)+it}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-1+i}{(1-t)+it}\frac{(1-t)-it}{(1-t)-it}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2t-1}{1-2t+2t^2}\mathrm{d}t + i\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2}$$

es decir

$$\int_0^1 \frac{-1+i}{(1-t)+it}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1-2t+2t^2)\Big|_0^1 + i\arctan(2t-1)\Big|_0^1 = 0 + \frac{i\pi}{2} = \frac{i\pi}{2}$$

la segunda integral también tendrá el mismo resultado, con lo cual:

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \pi i\,,\ \text{¡ el mismo resultado que a través del arco de circunferencia !}$$

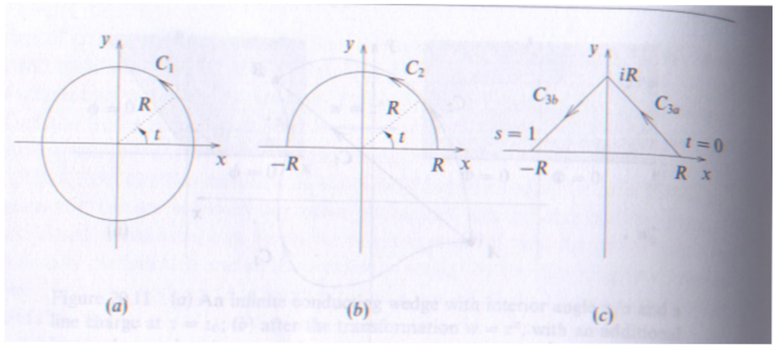

Figura 1: Integrales complejas y circuitos

Es interesante notar que si regresamos al punto $(R, 0)$ a través del contorno: $(-R, 0) \to (0, -R) \to (R, 0)$ la integral cerrada se anula, no así cuando nos regresamos a través el arco complementario de circunferencia. En pocas palabras, como se esperaba, el valor de las integrales de camino, para algunas funciones, dependeran del camino seleccionado. Más adelante veremos a cuáles funciones corresponderá un mismo valor de la integral cerrada, independientemente del circuito que uno elija. Queda como ejercicio al lector repetir los mismos pasos anteriores para el caso de $f(z) = (z^*)^{-1}$.

Otro ejemplo ilustrativo lo constituye

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{(z - z_0)^{n+1}}\,,$$

esto es:

$$\int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{R^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} = \frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\; e^{-in\theta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} n = 0: & \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2i\pi \\ & \\ n \neq 0: & \frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\; (\cos n\theta - i\mathrm{sen}\; n\theta) = 0 \end{array} \right.$$

donde hemos utilizado la forma polar $z - z_0 \equiv Re^{i\theta}$ e integrado a lo largo de una circunferencia de radio R centrada en $z = z_0$.

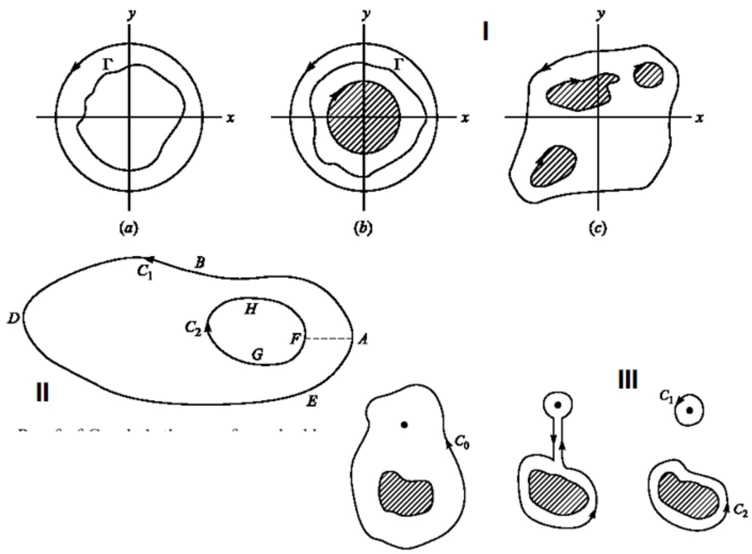

Figura 2: Regiones en el plano complejo

2. Teorema Integral de Cauchy

2.1. El Teorema y las Regiones

El teorema integral de Cauchy es uno de los dos teoremas básicos en la teoría de funciones de variable compleja. Este teorema considera que si $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es contínua en esta región[1], entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula. Esto es

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$$

Antes que nada, y como parte de ese adiestramiento en lenguaje, precisaremos qué queremos decir (qué quieren decir los matemáticos) con regiones *simplemente conexa* y *múltiplemente conexa*

Una región *simplemente conexa* es aquella que no tiene "huecos", o dicho de una manera más precisa y elegante, en la cual una curva Γ puede ser reducida (encogida) a un punto sin salir de la región $\mathcal{R}$. En la figura 2 cuadrante Ia se muestra una región simplemente conexa y en los cuadrantes Ib y Ic regiones *multiplemente conexas.* Estas dos últimas figuras clarifican este concepto. Es decir, una *región múltiplemente conexa* es aquella que no es *simplemente conexa* y con eso queremos decir que "tiene huecos", o lo que es lo mismo existen curvas que no se pueden reducir a puntos en la región.

[1]Esta última condición no es necesaria, pero la demostración del Teorema se torna mucho más sofisticada, y referimos al lector a los libros especializados, vale decir a las referencias: Churchill R. V. y a Knopp K.

Tal y como hemos comentado la demostración rigurosa del Teorema de Cauchy está fuera de los alcances de estas notas, pero algo se puede hacer si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) que vimos cuando estudiamos análisis vectorial. Con ello recordamos la ecuación (1), entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} (u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y) + i\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} (v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y)$$

El Teorema de Stokes nos dice que

$$\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) = \oint_{\mathcal{C}} (p\mathrm{d}y - q\mathrm{d}x)$$

con lo cual, si una vez más suponemos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$, entonces tendremos que

$$\oint_{\mathcal{C}} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\oint_{\mathcal{C}} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-u)}{\partial y}\right) + i\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left(\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y}\right) = 0$$

y acto seguido, como $f(z)$ es analítica, invocamos las condiciones de Cauchy Riemann y es inmediato ver que se anula la integral de circulación.

2.2. Algunas observaciones y el Teorema de Morera

De la anterior "demostración" del Teorema de Cauchy Riemann emergen algunas observaciones:

- La primera es la insistencia de que la condición que la derivada $f'(z)$ existe y es contínua en esta región no es necesaria.
- La segunda es que el Teorema de Cauchy Riemann, es válido también para regiones múltiplementes conexas. Consieremos una región como la descrita en la figura 2 cuadrante II, es claro que podemos circular la integral en los siguientes contornos

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv \int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$$

y como $\int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z)$, entonces:

$$\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$$

con lo cual se nota que para regiones múltiplemente conexas, a pesar que las circulaciones son opuestas, el "observador" que circula por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ siempre tiene la región $\mathcal{R}$ a su izquierda.

- Siguiendo con la reflexión anterior, podemos invertir el sentido de la circulación en el contorno $\mathcal{C}_2$ con lo cual

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z)$$

  Es decir, que si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado.

- Más aún este resultado puede extenderse a regiones con n huecos de tal forma que, tal y como ilustra en en la figura 2 cuadrante III

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\mathcal{C}_j} \mathrm{d}z\ f(z)$$

Con lo cual estamos afirmando que, dada una región que contiene un número finito (¿ numerable ?) n de singularidades, la integral a lo largo del contorno que encierra la región $\mathcal{R}$ es equivalente a la suma de las integrales que encierran cada una de las n singularidades.

Enunciaremos sin demostración el Teorema de Morera[2], también conocido como el teorema inverso de Cauchy.

Teorema de Morera: Si una función $f(z)$ es continua en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$

Ejemplo: Considere la función definida en una región $\mathcal{R}$

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_0 \text{ fuera de la región } \mathcal{R} \\ z_0 \text{ dentro de la región } \mathcal{R} \end{array} \right.$$

- Si z_0 está **fuera** de la región, entonces $f(z)$ esa analítica en $\mathcal{R}$, con lo cual el Teorema de Cauchy implica que

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$$

- Si z_0 está **dentro** de la región, entonces $f(z)$ no es analítica en $\mathcal{R}$ por cuanto existe una singularidad $z = z_0$. Si consideramos $\mathcal{C}$ el contorno que bordea a $\mathcal{R}$, como una circunsferencia centrada en $z = z_0$ y Γ otra circunsferencia que aisla a z_0 con un radio $|z - z_0| = \epsilon$ (esta situación se ilustra en la figura 3 cuadrante I). Entonces, si hacemos $z - z_0 = \tilde{z} = \epsilon e^{i\theta}$ el Teorema de Cauchy implica

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{i\theta} \mathrm{d}\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2i\pi$$

3. Fórmula integral de Cauchy

El ejemplo de la sección anterior nos lleva a una de las expresiones más útiles e importantes del análisis complejo: *La Fórmula Integral de Cauchy* la cual dice que si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = f(z_0)\,.$$

[2] Pueden consultar la demostración en el Arfken,Weber: Mathematical Methods for Physicists

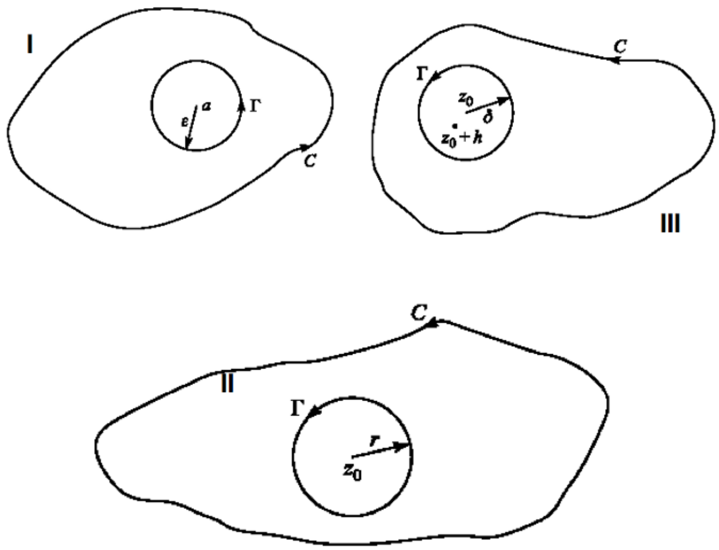

Figura 3: Circulaciones y Polos

Para probar esta afirmación supongamos, una vez más un circuito en encierra al polo $z = z_0$ (ver figura 3, cuadrante II). Con lo cual, como $f(z)$ es analítica en esa región, el Teorema de Cauchy nos garantiza

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-z_0} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-z_0} \quad \text{si } z - z_0 = re^{i\theta}\,,$$

esto implica que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\,,$$

si hacemos $r \to 0$ tendremos que

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-z_0} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-z_0} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{r\to 0} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = f(z_0)$$

Observaciones Surgen también observaciones al respecto

- Obvio que es válido para regiones múltiplemente conexas y es fácil demostrarlo. Se lo dejamos al lector como ejercicio.

- Si reacomodamos la expresión para la forma integral podemos hacer en esa fórmula es válida para todo z

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$$

- Más aún veremos que es fácil generalizar esta fórmula para derivadas de funciones, vale decir

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Veamos con el caso más sencillo y demostremos que para $n = 1$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^2} \Rightarrow f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{h} \left[\frac{1}{z-z_0-h} - \frac{1}{z-z_0} \right] \mathrm{d}z$$

tal y como se muestra en la figura 3, cuadrante III tenemos que

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0-h)(z-z_0)} \right] = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^2}$$

Pero mucho más interesante hubiera sido "derivar respecto a una constante". Este truco implica que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \quad \Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right] \mathrm{d}\zeta = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \tag{2}$$

Esta fórmula es muy util para calcular integrales. Considere, por ejemplo la siguiente integral

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2\zeta}\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta+1)^4} \equiv \frac{2i\pi}{3!} f^{(3)}(-1) \quad \text{con } f(z) = e^{2z} \qquad \Rightarrow I = \frac{8i\pi}{3} e^{-2}$$

donde hemos supuesto que el contorno $\mathcal{C}$ encerraba el punto $z = -1$, porque de otro modo la función $\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$ sería analítica y la integral se anularía por el Teorema de Cauchy.

Ejemplos: 1.- Evaluar

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz\,, \text{ para los entornos: } C\colon |z| = 3 \text{ y } C\colon |z| = 1\,.$$

El entorno $|z| = 3$ contiene en su interior al punto $z_0 = 2$, esto implica que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz = e^2.$$

Para el entorno $|z| = 1$, vemos que el punto $z_0 = 2$ no está contenido en ese entorno, esto significa que el integrando es una función analítica en toda la región. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz = 0.$$

2.- Evaluar

$$I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz\,, \text{ para los entornos: } C_1\colon |z-1| = 2\,,\ C_2\colon |z| = 3 \text{ y } C_3\colon |z+i| = 2\,.$$

La integral puede ser escrita de la siguiente manera:

$$I = \int_C \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} dz\,.$$

Para el contorno $|z-1|=2$, tenemos que éste contiene en su interior al punto $z_0 = 2i$. Si escribimos la integral como

$$I = \int_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz\,,$$

la función $1/(z+2i)$ es analítica dentro de C_1 y entonces por el teorema de Cauchy

$$I = \int_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Consideremos ahora el contorno $|z|=3$. Este contorno contiene en su interior a los puntos $2i$ y $-2i$. Podemos trazar dos contornos adicionales, de radio ϵ alrededor de cada punto, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{z^2+4} dz &= \int_{C_{(2i)}} \frac{1}{z^2+4} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{1}{z^2+4} dz \\
&= \int_{C_{(2i)}} \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{\frac{1}{z-2i}}{z+2i} dz \\
&= 2\pi i \left[\frac{1}{z+2i}\right]_{z=2i} + 2\pi i \left[\frac{1}{z-2i}\right]_{z=-2i} \\
&= 2\pi i \left[\frac{1}{4i}\right] + 2\pi i \left[-\frac{1}{4i}\right] = 0\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, para el contorno $|z+i|=2$ se tiene que éste contiene al punto $z_0 = -2i$. Repitiendo lo que hicimos en el primer caso tenemos:

$$I = \int_C \frac{\frac{1}{z-2i}}{z+2i} dz$$

la función $1/(z-2i)$ es analítica dentro de C_3 y entonces por el teorema de Cauchy

$$I = \int_C \frac{\frac{1}{z-2i}}{z+2i} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{4i}\right) = -\frac{\pi}{2}\,.$$